creative commons
COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

공학박사 학위논문

금융 시계열의
멀티프랙탈 특성 실증 분석과
멀티프랙탈 Value-at-Risk 모형

2015 년 2 월

서울대학교 대학원

산업공학과

이 호 진

금융 시계열의
멀티프랙탈 특성 실증 분석과
멀티프랙탈 Value-at-Risk 모형

지도 교수 장 우 진

이 논문을 공학박사 학위논문으로 제출함
2015 년 1 월

서울대학교 대학원
산업공학과
이 호 진

이호진의 공학박사 학위논문을 인준함
2015 년 1 월

위 원 장 조 성 준 (인)

부위원장 장 우 진 (인)

위 원 이 경 식 (인)

위 원 이 재 욱 (인)

위 원 손 범 진 (인)

초 록

금융 시계열의 멀티프랙탈 특성 실증 분석과 멀티프랙탈 Value-at-Risk 모형

서울대학교 대학원
산업공학과
이호진

금융 시계열에는 전통적인 모형으로 설명하기 어려운 다양한 통계적 현상들이 존재한다. 수익률 확률분포에는 두꺼운 꼬리형태와 비대칭성이 관찰된다. 변동성의 이분산성 (heteroskedasticity)과 군집 (clustering) 현상, 장기기억 (long memory) 현상 등도 실제 금융 시계열에서 나타난다. 본 연구의 대상인 멀티프랙탈 (multifractal) 특성도 이러한 특성들 중 하나이다.

최근에 금융 시장과 자산 구조가 점차 복잡해짐에 따라 이와 같은 실제 시장과 이론적 모형의 괴리를 바로잡으려는 노력이 지속되고 있다. 실제 시장에서 프랙탈 구조를 파악함으로써 시계열의 복잡성을 분석하는 연구들도 이와 같은 맥락이다. 본 연구에서는 실제 금융 시장에서 나타나는 멀티프랙탈 특성을 파악하고, 이를 적용하여 보다 현실적으로 금융 위험을 측정하는 모형을 제시했다.

1990년부터 2012년까지의 한국과 미국의 주식 시장(KOSPI와 S&P500)과 원달러 환율 시장에서 멀티프랙탈 특성을 분석했다. 실제 금융 자료에서 멀티프랙탈 특성은 일정한 값을 유지하지 않고, 시간에 따라 존재와 부재를 반복하며 변동하는 모습을 보였다.

멀티프랙탈 시계열과 단일프랙탈 시계열에서는 서로 다른 통계적 특성이 나타나기 때문에 실제 자료에서 멀티프랙탈 특성이 존재하는 구간을 구분할 필요가 있다. 본 연구에서는 이를 위한 멀티프랙탈 검정 방법과 구간 판별 모형을 제시했다. 이를 실증 자료에 적용한 결과, KOSPI와 S&P500 시장에서는 6개의 멀티프랙탈 구간이, 외환 시장에서는 4개의 구간이 각각 판별되었다. 멀티프랙탈 구간들은 공통적으로 확률분포의 높은 첨도와 두꺼운 꼬리형태를 보였다.

이어서 본 연구에서는 시계열의 멀티프랙탈 특성과 확률분포의 꼬리형태, 변동성의 자기상관성 사이의 상관관계를 분석했다. 그 결과 금융 시장에서 관찰되는 멀티프랙탈 특성은 확률분포의 꼬리형태 요소와 변동성의 비선형 자기상관성 요소에 영향을 받음을 입증했다. 이 중에서도 한국 시장에서는 전자가 주도적인 영향력을 보였다. 반면, 변동성의 선형 자기상관성은 멀티프랙탈 특성과 무관했다.

마지막으로 본 연구에서는 멀티프랙탈 특성을 반영하여 VaR (value-at-risk)를 측정하는 모형을 제시했다. 멀티프랙탈 특성을 반영하여 VaR를 측정하는 기존의 연구들은 대부분 시뮬레이션 방법에 치중한 반면, 본 연구는 시뮬레이션 에러가 없는 모수적 (parametric) 방법을 제시한 점에서 의미가 있다. 시뮬레이션 분석과 실증 분석 결과, 본 연구의 멀티프랙탈 VaR 모형은 기존의 벤치마크 모형들보다 안정적이고 정확한 추정 결과를 도출했다. 그리고 신뢰 수준이 낮을수록 우수한 예측 성과를 기록했다. 이는 멀티프랙탈 VaR 모형이 극단적인 위험을 예측하는 경우에 높은 성능을 지님을 의미한다.

주요어 : 멀티프랙탈, 스케일 분석, 구간 판별, 금융 위험, MMAR 모형, value-at-risk

학 번 : 2009-21144

목 차

제 1 장 서 론 1

제 2 장 이론적 배경 6
제 1 절 시계열의 프랙탈 특성과 스케일 특성 8
제 2 절 스케일 분석법 12
제 3 절 멀티프랙탈 모형 17
제 4 절 관련 연구 현황 25

제 3 장 멀티프랙탈 특성의 존재와 검증 27
제 1 절 실증 자료 27
제 2 절 한국 시장의 멀티프랙탈 특성 분석 34
제 3 절 멀티프랙탈 검정 모형 38
제 4 절 멀티프랙탈 구간 판별 모형 43
제 5 절 금융 시장의 멀티프랙탈 구간 분석 47
제 6 절 결과 요약 및 한계점 59

제 4 장 멀티프랙탈 특성의 요소 분석 61
제 1 절 유한 샘플크기 효과 64
제 2 절 확률분포의 꼬리형태 요소 66
제 3 절 변동성의 자기상관성 요소 72
제 4 절 결과 요약 및 한계점 78

제 5 장 멀티프랙탈 VaR 모형 80
제 1 절 방법론 81
제 2 절 시뮬레이션 분석 86
제 3 절 실증 분석 89
제 4 절 결과 요약 및 한계점 100

제 6 장 결 론 102

참고문헌 108

표 목차

[표 1] 각 시계열 모형의 통계적 특성 비교 18
[표 2] 실증자료 기초통계량 28
[표 3] 모수 추정 결과 및 K-S 검정 결과 31
[표 4] MMAR 시계열의 통계적 특성 41
[표 5] MAMR 시뮬레이션 샘플의 멀티프랙탈 검정 결과 42
[표 6] MRDM 검증 시뮬레이션 결과 46
[표 7] KOSPI 시장의 멀티프랙탈 구간별 통계량 50
[표 8] S&P500 시장의 멀티프랙탈 구간별 통계량 51
[표 9] FX 시장의 멀티프랙탈 구간별 통계량 52
[표 10] 대리자료 테스트 결과의 오류 비율 55
[표 11] 멀티프랙탈 특성의 요소 분석 연구 현황 63
[표 12] 시뮬레이션: 단일프랙탈 샘플에서의 멀티프랙탈 척도 추정 결과 65
[표 13] 시뮬레이션: t분포 샘플에서의 멀티프랙탈 척도 추정 결과 67
[표 14] 시뮬레이션: ARCH, GARCH 샘플에서의 멀티프랙탈 척도 추정 결과 73
[표 15] 시뮬레이션에서의 VaR 예측 결과 88
[표 16] KOSPI 자료에서의 VaR 예측 결과 93
[표 17] S&P500 자료에서의 VaR 예측 결과 96
[표 18] FX 자료에서의 VaR 예측 결과 99

그림 목차

[그림 1] 코흐 (Koch) 곡선 6
[그림 2] 이항 멀티프랙탈 측도 예시 20
[그림 3] 실증자료 시계열 추이 29
[그림 4] 실제 로그수익률과 추정 히스토그램 32
[그림 5] 로그수익률과 변동성의 자기상관성 33
[그림 6] 멀티프랙탈 특성 분석 35
[그림 7] 시간에 따른 멀티프랙탈 척도 분석 36
[그림 8] 단위구간 $[\mathbf{t}, \mathbf{t}+\Delta]$을 포함하는 부분 구간의 수 43
[그림 9] MRDM 검증을 위한 시뮬레이션 샘플 구성 44
[그림 10] MRDM 검증 시뮬레이션 예시 44
[그림 11] 각 단위 구간의 멀티프랙탈 판별 비율 45
[그림 12] 각 금융 시장의 멀티프랙탈 구간 판별 결과 48
[그림 13] IAAFT 대리자료 테스트 결과 56
[그림 14] Normal 대리자료 테스트 결과 57
[그림 15] t 대리자료 테스트 결과 58
[그림 16] 꼬리형태와 멀티프랙탈 특성 67
[그림 17] 실증자료에서 $\Delta\mathbf{H}(\mathbf{1},\mathbf{2})$와 $\Delta\mathbf{H}_{\mathbf{pdf}}(\mathbf{1},\mathbf{2})$추정 결과 69
[그림 18] ACF와 $\Delta\mathbf{H}_{\mathbf{pdf}} - \Delta\mathbf{H}$ 71
[그림 19] ARCH 샘플에서 꼬리형태와 멀티프랙탈 특성 73
[그림 20] 실증자료에서 $\Delta\mathbf{H}(\mathbf{1},\mathbf{2})$와 $\Delta\mathbf{H}_{\mathbf{ac}}(\mathbf{1},\mathbf{2})$추정 결과 75
[그림 21] 실증자료에서 $\Delta\mathbf{H}(\mathbf{1},\mathbf{2})$와 $\Delta\mathbf{H}_{\boldsymbol{lac}}(\mathbf{1},\mathbf{2})$추정 결과 77
[그림 22] $\boldsymbol{\theta}_{\mathbf{10}}(\mathbf{t})$의 히스토그램 82
[그림 23] $\Delta\mathbf{H}$와 $\boldsymbol{m}_{\mathbf{0}}$ 추정 결과 90
[그림 24] KOSPI 자료에서의 5일 1% VaR 추이 92
[그림 25] S&P500 자료에서의 5일 1% VaR 추이 95
[그림 26] FX 자료에서의 5일 1% VaR 추이 98

제 1 장 서 론

실제 금융 시장에서는 전통적인 시계열 모형으로는 설명하기 어려운 다양한 통계적 현상들이 존재한다. 자산 수익률의 확률 분포에는 상대적으로 두꺼운 꼬리형태와 비대칭성이 나타난다[1]. 이에 따라 자산 가격의 흐름에서 점프 현상이 빈번하게 발생하고, 자산 수익률 하락과 변동성 증가 사이의 상관관계를 의미하는 레버리지 (leverage) 현상도 관찰된다[2]. 자산 가격의 변동성은 일정한 값을 유지하지 않고, 시간에 따라 변하는 이분산성 (heteroskedasticity)을 보인다. 변동성의 움직임에는 평균 회귀 (mean reversion) 현상[3]이 나타나고, 군집 (clustering) 현상[4]과 장기 기억 (long memory) 현상[5] 도 관찰된다. 본 연구의 대상인 멀티프랙탈 (multifractal) 특성도 금융 시장에서 나타나는 이러한 통계적 특성들 중 하나이다.

다양한 분석에서 이론적 모형들은 이와 같은 실제 금융 시장의 특성들을 설명하지 못함에 따라 오류를 발생시켰다. 이러한 오류는 금융 자산의 구조가 점차 복잡해지면서 증가해왔다. 그리고 최근 2008 세계 금융 위기를 거치면서 금융 위험을 측정하는 문제가

---

[1] McNeil and Frey (2000), Cont (2001), Dacorogna, et al. (2001), Gençay, et al. (2001), Barndorff-Nielsen and Shephard (2006), Jondeau, et al. (2007), Segnon and Lux (2013)

[2] Figlewski and Wang (2000), Bouchaud, et al. (2001)

[3] Merville and Pieptea (1989), Dueker (1997), Fouque, et al. (2000)

[4] Andersen and Bollerslev (1997), Lux and Marchesi (2000), Cont (2007), Jondeau, et al. (2007), Segnon and Lux (2013)

[5] Baillie (1996), Bollerslev and Ole Mikkelsen (1996), Breidt, et al. (1998), Cont (2001), Giardina, et al. (2001), HARVEYŁ (2002)

특히 부각되었다. 이에 따라 금융 시장의 통계적 특성들을 모형과 분석에 반영하기 위한 연구들이 꾸준히 이어지고 있다.

본 논문의 목적은 실제 금융 시장에서 나타나는 멀티프랙탈 특성을 파악하고, 이를 반영하는 보다 현실적인 금융 위험 측정 모형을 설계하는 것이다.

금융 위험은 잠재적 금융 손실의 불확실성으로 정의할 수 있고, 포괄적으로 시장 위험 (market risk)과 신용 위험 (credit risk), 운영 위험 (operational risk)을 포함한다[6]. 이들 중 시장 위험은 금융 자산의 가격 변동으로 인해 발생하는 잠재적 손실을 의미한다. 때문에 시장 위험을 측정하는 이론적 모형과 실제 금융 시계열 사이의 괴리는 측정 결과에 오류를 발생시킨다.

멀티프랙탈 특성이란 시계열에 여러 값의 프랙탈 차원이 동시에 존재하는 현상이다. 하나의 프랙탈 차원에서 정의되는 단일프랙탈 (monofractal) 시계열에 비해 멀티프랙탈 시계열은 상대적으로 복잡한 구조를 지닌다. 그리고 멀티프랙탈 시계열은 확률분포의 두꺼운 꼬리형태와 변동성의 군집 현상, 장기기억 현상이 나타나는 실제 금융 시계열과 유사한 모습을 보인다[7]. 금융 시계열의 멀티프랙탈 특성은 Mandelbrot, et al. (1997)이 멀티프랙탈 시계열 모형을 제시한 이후에 경제물리학 (econophysics) 분야에서 꾸준히 연구되고 있다. 본 연구에서는 현실 금융 시장의 특성을 반영하기 위해 멀티프랙탈 시계열을 가정하고 분석을 진행했다.

본 연구는 실증 분석을 위해서 1990 년부터 2012 년까지의 한국 주가지수 (KOSPI)와 미국 S&P500 주가지수, 원달러 환율 (FX)의 일별 자료를 사용했다. 본 연구의 내용은 다음과 같다.

---

[6] McNeil, et al. (2010)

[7] Mandelbrot, et al. (1997), Riedi (2001), Di Matteo (2007), Segnon and Lux (2013)

우선 각 실증 자료에서 멀티프랙탈 특성을 비롯한 다양한 통계적 특성들을 분석했다. 실제 수익률의 확률분포는 두꺼운 꼬리형태와 비대칭성을 보였다. 변동성의 군집 현상과 장기기억 현상도 관찰되었다. 멀티프랙탈 특성은 항상 일정한 크기를 유지하지 않고, 시간에 따라 존재와 부재를 반복하며 변동하는 모습을 보였다.

단일프랙탈과 멀티프랙탈 확률과정은 서로 다른 통계적 특성을 지니기 때문에, 시계열에서 멀티프랙탈 특성이 존재하는 구간을 구분할 필요가 있었다. 본 연구에서는 이를 위한 멀티프랙탈 검정 방법과 구간 판별 모형을 제시했다. 그리고 실제 금융 시계열에서 멀티프랙탈 구간을 판별했다. 분석 결과, 멀티프랙탈 구간의 수익률 분포에서 상대적으로 높은 첨도와 두꺼운 꼬리형태가 관찰되었다.

시계열의 멀티프랙탈 특성은 확률분포의 꼬리형태, 변동성의 자기상관성과 높은 상관성이 있다[8]. 본 연구에서는 시뮬레이션 샘플과 실증 자료의 대리자료 샘플을 이용해 각 요소들을 검증했다. 시뮬레이션 분석 결과, 꼬리형태 특성은 멀티프랙탈 특성과 선형적인 상관 관계를 보였다. 그리고 시계열의 변동성에 자기상관성이 존재하는 경우에는 상관성의 크기가 감소했다. 실증 분석 결과, KOSPI 와 원달러 환율 자료에서 나타나는 멀티프랙탈 특성은 꼬리형태 요소가 절대적으로 큰 비중을 차지하는 반면, S&P500 자료에서는 자기상관성 요소의 비중도 크게 나타났다. 그리고 멀티프랙탈 특성의 자기상관성 요소는 대부분 비선형 자기상관성에 의한 영향이었으며, 선형 자기상관성은 멀티프랙탈 특성과 무관했다. 그리고 MFDFA[9] (multifractal detrended fluctuation

[8] Kantelhardt, et al. (2002)

[9] Kantelhardt, et al. (2002)

analysis) 추정방법보다 GHE[10] (generalized Hurst exponent) 방법에서 유한 샘플크기 효과[11]가 작게 발생함을 보였다.

앞서 언급했듯이 멀티프랙탈 시계열은 실제 금융 시계열과 유사한 모습을 보이고, 다른 시계열 모형들과 비교해 높은 설명력을 보인다. 때문에 금융 위험을 측정하는 과정에서도 멀티프랙탈 특성을 고려할 필요가 있다. 본 연구에서는 멀티프랙탈 특성을 반영하여 VaR (value-at-risk)를 측정하는 새로운 모형을 제시한다. 본 연구의 모형은 Mandelbrot, et al. (1997)의 이항 MMAR 모형을 적용하여 모수적으로 VaR 을 예측한다. 본 연구의 모형을 기존의 벤치마크 모형들과 비교한 실증 분석 결과, 낮은 유의수준과 긴 예측기간에서 상대적으로 높은 정확성을 보였다.

VaR 모형은 측정 방법에 따라 모수적, 역사적, 시뮬레이션 방법으로 구분된다. 멀티프랙탈을 고려한 VaR 모형에 대한 기존의 연구들은 대부분 시뮬레이션 방법에 국한되어 왔다. 반면, 본 연구는 모수적 방법을 제시한 점에서 의미가 있다. 모수적 방법과 시뮬레이션 방법은 모두 특정한 확률 모형을 가정해야 하는 점에서 동일하지만, 모수적 방법은 시뮬레이션 오차를 고려할 필요가 없다는 강점이 있다.

본 논문은 총 6 개의 장으로 구성된다.

2 장에서는 프랙탈 차원, 멀티프랙탈 스펙트럼, 자기유사성과 스케일 함수의 개념과 이들의 관계에 대해 설명한다. 그리고 시계열의 멀티프랙탈 특성을 분석하는 비모수적 모형들(스케일 분석

10 Di Matteo, et al. (2003)

11 대상 샘플의 크기가 작을수록 멀티프랙탈 특성이 과대 측정되는 경향으로 Drożdż, et al. (2009)와 Zhou (2012)에서 언급

방법)과 모수적 모형들(멀티프랙탈 시계열 모형)을 소개한다. 마지막으로 관련 연구들을 주제별로 정리한다.

3 장에서는 한국 금융 시장에서 나타나는 멀티프랙탈 특성을 관찰한다. 이어서 시계열에서 멀티프랙탈 특성의 존재를 검정하는 방법과 멀티프랙탈 구간을 판별하는 모형을 제시한다. 그리고 실증 분석을 통해 실제 금융 시장에서 멀티프랙탈 구간을 구분하고, 멀티프랙탈 구간에서 나타나는 통계적 특성들을 분석한다.

4 장에서는 멀티프랙탈 특성과 다른 통계적 요소들 사이의 관계를 분석한다. 정규 확률분포를 따르는 시뮬레이션 샘플과 꼬리형태가 두꺼운 확률분포를 따르는 샘플에서 각각 멀티프랙탈 특성을 분석한다. 또한 시계열의 자기상관성이 존재하는 샘플과 존재하지 않는 샘플을 구분하여 분석한다. 그리고 실증 자료에서 확률분포 특성과 자기상관성을 각각 제거한 대리자료를 이용해 각각의 요소들을 분석한다.

5 장에서는 멀티프랙탈 특성을 고려하여 금융 위험을 측정하는 멀티프랙탈 VaR (value-at-risk) 모형을 제시한다. 본 연구에서 가정한 이항 MMAR (multifractal model of asset returns)[12] 시계열과 시간 변환 함수를 소개하고, 모수 추정 방법을 설명한다. 그리고 이를 이용해 멀티프랙탈 VaR 를 측정하는 방법을 제시한다. 시뮬레이션 분석과 실증 분석을 통해 멀티프랙탈 VaR 와 기존의 벤치마크 모형들의 성능을 비교한다.

마지막으로 6 장은 연구의 주요 결과들과 향후 연구 방향에 대해 다룬다.

[12] Mandelbrot, et al. (1997)

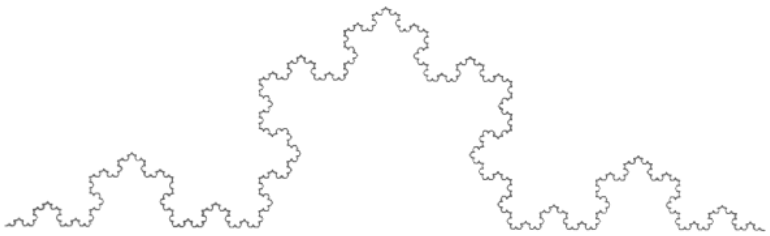
제 2 장 이론적 배경

프랙탈 이론은 Mandelbrot (1977)에서 프랙탈 구조에서 프랙탈 차원을 정의함으로써 등장했다. 프랙탈 구조는 기본 구조가 자기유사성 (self-similarity)을 가지면서 무한히 자기복제 (self-recursive)하는 구조를 의미한다. 이때 구조의 자기유사성은 외형적 특성 뿐만 아니라 통계적 특성에도 적용된다. 따라서 프랙탈 구조는 전체와 부분의 구조가 유사하거나 일치한다.

프랙탈 구조는 무한한 자기복제로 인해 유한한 범위에서 길이 혹은 면적이 무한하다. 때문에 유클리드 차원에서는 구조의 특성을 분석하는데 어려움이 따른다. 프랙탈 이론에서는 프랙탈 차원을 통해 유클리드 차원으로는 설명하지 못하는 구조의 복잡성을 수치화한다. 프랙탈 차원, D은 유한한 범위를 n배 했을 때, 척도 (길이, 면적 등)의 증가율, r에 의해 식 (2.1)과 같이 결정된다.

$$D = \log_n r \qquad (2.1)$$

다각형의 프랙탈 차원은 유클리드 차원과 같다. 반면 [그림 1]의 코흐 곡선의 프랙탈 차원은 정의에 의해서 $\log_3 4$ 이다. 프랙탈 차원의 정수 부분은 유클리드 차원과 같고, 소수 부분이 클수록 구조가 복잡하다는 성질을 갖는다.



[그림 1] 코흐 (Koch) 곡선

만약 프랙탈 차원을 측정할 때, 위치나 범위의 크기에 상관없이 항상 일정한 차원을 유지하는 구조를 단일프랙탈 (monofractal)이라 한다. [그림 1]의 코흐 곡선은 구조의 모든 부분에서 모든 양수 n 에 대해 항상 같은 프랙탈 차원값을 갖는다. 따라서 코흐 곡선은 단일프랙탈 구조이다. 반면, 측정 조건에 따라서 프랙탈 차원이 달라지는 구조를 다중프랙탈 혹은 멀티프랙탈 (multifractal)이라고 한다.

현실의 다양한 구조와 현상들에서 멀티프랙탈이 발견되고, 본 연구의 대상인 금융 시계열에서도 멀티프랙탈 특성이 관찰된다[13]. 반면, 금융 시계열 분야에서 전통적으로 가정해온 가우시안 (Gaussian) 모형들은 단일프랙탈 특성을 보인다. 금융 분야에서 멀티프랙탈 특성을 고려하는 연구들은 Mandelbrot, et al. (1997)에서 멀티프랙탈 시계열 모형을 제시한 이후에 활발히 이루어져왔다.

2 장에서는 금융 시계열 분야에서 이루어진 멀티프랙탈 연구들을 설명하겠다. 2.1 절에서는 시계열에서 나타나는 프랙탈과 스케일 특성의 기본 개념들을 설명한다. 2.2 절에서는 스케일링 분석법들을 소개하고, 각 방법들의 장단점을 비교한다. 2.3 절에서는 대표적인 멀티프랙탈 시계열 모형들을 소개한다. 2.4 절에서는 시계열에서 멀티프랙탈 특성의 존재성과 멀티프랙탈이 발생하는 원인, 그리고 멀티프랙탈의 거시경제적 의미 등에 대한 기존의 연구들을 소개하겠다.

[13] Muzy, et al. (2000), Schmitt, et al. (2000), Bacry, et al. (2001a), Calvet and Fisher (2002), Górski, et al. (2002), Xu and Gençay (2003), Borland, et al. (2005), Oświęcimka, et al. (2005), Di Matteo (2007), Jiang and Zhou (2008a), Jiang and Zhou (2008b), Drożdż, et al. (2009), Kumar and Deo (2009), Zhou (2009), Zunino, et al. (2009), Caraiani (2012), Morales, et al. (2012), Oh, et al. (2012), Lee and Chang (2015)

제 1 절 시계열의 프랙탈 특성과 스케일 특성

2.1.1. 자기유사성과 장기기억

자기유사 과정 (self-similar process)는 시간 척도를 달리해도 동일한 통계적 특성을 지니는 랜덤 차분이 나타나는 확률과정 (stochastic process)이다. 양수 λ 와 H 가 주어졌을 때, 확률과정, $\{X(t)\}$ 가 자기유사 과정이면, $\{X(t)\}$ 와 $\{\lambda^H X(t)\}$ 의 확률 분포는 동일하다[14].

$$\{X(\lambda t)\} = \{\lambda^H X(t)\} \qquad (2.2)$$

스케일 지수 혹은 허스트 (Hurst) 지수, H 는 확률과정의 LRD 특성을 반영한다. 자기유사 과정의 차분, $\Delta X(t,\tau) = X(t+\tau) - X(t)$ 이 정상성 (stationary)을 만족한다면, H 는 0 과 1 사이에 존재한다. 만약 H가 0.5 보다 크면, $\Delta X(t,\tau)$ 에 양의 자기상관성과 LRD 특성이 존재함을 의미한다. H 가 0.5 보다 작다면 $\Delta X(t,\tau)$ 는 음의 자기상관성을 보이고, H가 0.5 라면 자기상관성이 존재하지 않는다[15]. 브라운 운동 (Brownian motion, BM)은 H가 0.5 인 대표적인 자기유사 과정이고, fBM (fractional Brownian motion)은 H가 0.5 이외의 0 과 1 사이의 값을 가지는 자기유사 과정이다.

Di Matteo (2007)에 따르면 허스트 지수가 의미하는 LRD 는 시계열의 대역적 (global) 특성이다. 반면, 식 (2.1)의 프랙탈 차원은 시계열의 국소적 (local) 특성이기 때문에 일반적으로는 허스트 지수와 독립이다. 하지만 자기유사 과정에서는 국소적 특성이 무한한 자기복제를 통해서 그대로 대역적 특성에 반영된다. 때문에 자기유사 과정의 프랙탈 차원(D)과 허스트 지수(H) 사이에는 식

[14] Embrechts and Maejima (2002), Di Matteo (2007)

[15] Embrechts and Maejima (2002)

(2.3)과 같은 관계가 성립한다[16]. 따라서 허스트 지수가 클수록 자기유사 과정은 강한 자기상관성과 더 부드러운 추세를 보인다.

$$D = 2 - H \qquad (2.3)$$

자기유사 과정은 측정 조건에 상관없이 유일한 허스트 지수와 프랙탈 차원을 갖는다. 그러므로 자기유사 과정은 단일프랙탈이다.

2.1.2. 멀티프랙탈 스펙트럼

국소 스케일 지수 혹은 홀더 지수 (Hölder), $\alpha(t)$는 특정 시간, t 근처에서 식 (2.4)와 같이 정의된다.

$$\alpha(t) = \sup\{\beta \geq 0 : |X(t+\tau) - X(t)| = O(|\tau|^{\beta}) \ as \ \tau \to 0\} \qquad (2.4)$$

단일프랙탈 확률과정에서 $\alpha(t)$는 t에 상관없이 항상 허스트 지수, H와 같은 값을 갖는다. $\alpha(t)$가 t에 따라 여러 값을 갖는다면, 확률과정의 프랙탈 차원이 지역적으로 달라짐을 의미하므로 멀티프랙탈이라 할 수 있다. 만약 특정 시계열에서 측정한 $\{\alpha(t)\}$로 히스토그램을 그린다면, 단일프랙탈 시계열의 경우 한 점에서 그려지겠지만, 멀티프랙탈 시계열에서는 볼록한 형태를 보이게 된다. 이런 홀더 지수들의 확률분포 형태를 멀티프랙탈 스펙트럼, $f(\alpha)$이라 한다.

Riedi (1999)와 Calvet and Fisher (2008)에서는 시계열 자료에서 $\alpha(t)$와 $f(\alpha)$를 추정하는 방법을 설명했다. 구간 $[0,1]$을 b^k 개의 부분 구간으로 나누었을 때, $\alpha_k(t_i)$를 식 (2.5)와 같이 정의한다. τ는 b^{-k}이고, t_i는 $i\tau$이다.

$$\alpha_k(t_i) = \log|X(t_i + \tau) - X(t_i)| / \log\tau \qquad (2.5)$$

[16] Stanley (1987), Barabási (1995), Mandelbrot (1997)

임의의 값, Δ에 대해 $\{\alpha_k(t_i)\}$ 중에서 range $[\alpha, \alpha+\Delta)$에 속하는 지수의 개수를 $N_k(\alpha)$라 할 때, 멀티프랙탈 스펙트럼은 식 (2.6)과 같다.

$$f(\alpha) = \lim_{k\to\infty} \log N_k(\alpha) / \log b^k \qquad (2.6)$$

많은 연구들이 시계열의 멀티프랙탈 스펙트럼이나 멀티프랙탈 척도, $\Delta\alpha = \alpha_{max} - \alpha_{min}$을 관찰하여 멀티프랙탈 특성을 분석하였다. 하지만 Harte (2001)는 실제 계산에서 식 (2.4)와 (2.5)가 불안정한 추정 결과를 도출하는 문제를 지적했다. 때문에 보다 안정적인 분석 방법으로 스케일 분석법이 같이 사용되고 있다.

2.1.3. 스케일 특성

시계열의 식 (2.7)과 같은 모멘트 특성을 스케일 특성이라고 한다.

$$\mathbb{E}[|X(t)|^q] \sim t^{\zeta(q)} \qquad (2.7)$$

$\zeta(q)$는 스케일 함수이다. 단일프랙탈 시계열의 스케일 함수는 선형으로 나타난다. BM 의 경우 $\zeta(q) = q/2$이고, 일반적인 자기유사 확률과정의 $\zeta(q)$는 Hq이다[17]. 반면 멀티프랙탈 시계열의 스케일 함수는 비선형 (볼록형)으로 나타난다.

일반 허스트 지수 (generalized Hurst exponent, GHE)를 식 (2.8)과 같이 정의한다. 단일프랙탈 시계열에서 $H(q)$는 항상 상수 H 값을 갖는 반면, 멀티프랙탈 시계열에서는 q에 대한 감소 함수가 된다. 따라서 스케일 함수의 비선형성이나 $\Delta H(q, q') = H(q) - H(q')$으로

[17] 식 (2.2)에의해 $\{X(t)\}$와 $\{t^H X(1)\}$는 동일한 확률분포를 갖는다. 이에 따라 $\mathbb{E}[|X(t)|^q] = \mathbb{E}\left[\left|t^H X(1)\right|^q\right] = t^{Hq}\mathbb{E}[|X(1)|^q]$가 되므로 식 (2.7)에서 $\zeta(q) = Hq$를 만족한다.

정의한 멀티프랙탈 척도를 통해 시계열의 멀티프랙탈 특성을 분석할 수 있다.

$$H(q) = \zeta(q)/q \qquad (2.8)$$

Calvet and Fisher (2008)에서는 멀티프랙탈 스펙트럼이 식 (2.9)와 같은 스케일 함수의 르장드르 (Legendre) 변환임을 설명했다[18]. 즉, 스케일 분석을 통해서도 멀티프랙탈 스펙트럼을 분석하는 것이 가능하고, 두 분석법은 멀티프랙탈 특성의 유무에 대해 항상 같은 결과를 도출해야 한다.

$$f(\alpha) = \inf_q[\alpha q - \zeta(q) + 1] \qquad (2.9)$$

[18] 식 (2.9)의 증명은 부록 1 에서 다룬다. 식 (2.9)는 보수성 (conservative)과 표준성 (canonical)을 만족하는 멀티프랙탈 측도 (measure)에서 성립한다. 멀티프랙탈 측도의 자세한 설명은 2.3 절에서 다루겠다.

제 2 절 스케일 분석법

앞서 설명했듯이 스케일 분석은 식 (2.5)에서 홀더 지수를 추정하는 방법보다 안정적인 결과를 제공한다. 또한 스케일 함수의 추정은 확률과정의 분포에 대한 가정이 없이도 가능하다. 이번 절에서는 스케일 지수를 추정하는 대표적인 비모수 방법들을 소개한다.

2.2.1. MFDFA 방법

Kantelhardt, et al. (2002)는 기존의 DFA (detrended fluctuation analysis) 방법을 발전시켜 정상 차분을 갖는 비정상 시계열에서 국소 스케일 지수, H(q) 를 추정하는 새로운 멀티프랙탈 DFA 방법을 제안했다. X가 자산 가격의 로그 값일 때, 추정 과정은 아래의 단계를 따른다.

1) 길이가 N인 차분 시계열, $\Delta X(i) = X(i) - X(i-1)$에서 식 (2.10)과 같은 시계열, $Y(i)$을 구한다. $\overline{\Delta X}$는 차분의 산술 평균이다.

$$Y(i) = \sum_{k=1}^{i} [\Delta X(k) - \overline{\Delta X}] \qquad (2.10)$$

2) $Y(i)$의 전체 구간을 서로 겹치지 않는 길이 s의 부분 구간으로 분할한다. 전체 구간의 앞에서부터 분할하여 $N_s = \lfloor N/s \rfloor$ 개의 부분 시계열을 얻는다. 이어서 뒤에서부터 분할하여 총 $2N_s$ 개의 부분 시계열을 얻는다.

3) 각 부분 시계열, ν 마다 최소자승법 (least square fit)을 통해 $Y(i)$의 m차 추세, $y_\nu(i)$를 구하고, 식 (2.11)의 평균제곱오차 (mean squared error, MSE)를 계산한다.

$$F^2(\mathrm{s},\nu) = \begin{cases} \frac{1}{\mathrm{s}}\sum_{i=1}^{\mathrm{s}}\{\mathrm{Y}[(\nu-1)\mathrm{s}+i] - y_\nu(i)\}^2, & (\nu \le \mathrm{N_s}) \\ \frac{1}{\mathrm{s}}\sum_{i=1}^{\mathrm{s}}\{\mathrm{Y}[\mathrm{N}-(\nu-\mathrm{N_s})\mathrm{s}+i] - y_\nu(i)\}^2, & (\nu > \mathrm{N_s}) \end{cases} \quad (2.11)$$

4) MSE 의 q차 파동 (fluctuation) 함수의 평균을 구한다.

$$F_{\mathrm{q}}(\mathrm{s}) = \left[\frac{1}{2\mathrm{N_s}}\sum_{\nu=1}^{2\mathrm{N_s}}\{F^2(\mathrm{s},\nu)\}^{\mathrm{q}/2}\right]^{1/\mathrm{q}} \sim \mathrm{s}^{\mathrm{H(q)}} \quad (2.12)$$

5) 식 (2.12)에서 로그를 취하고 선형 회귀분석을 통해 H(q) 를 추정한다.

MFDFA 의 장점은 과정 3)에서 비정상 시계열의 m 차 추세를 제거할 수 있다는 점이다. 또한 MFDFA 방법은 0 보다 작은 범위의 q 에서도 H(q) 를 추정할 수 있다. 이는 상대적으로 작은 시계열의 움직임도 설명이 가능함을 의미한다.

Ihlen (2012)에서는 s의 최소값을 10 ~ 20 사이로, 최대값은 N/10을 넘지 않도록 추천했다. 본 연구에서는 이에 따라서 s 를 $\{12,17,22,\cdots 102\}$로, $m = 2$로 설정하여 분석하였다.

2.2.2. GHE 방법

Di Matteo, et al. (2003)는 H(q)를 추정하는 또 다른 방법으로 GHE (generalized Hurst exponent) 방법을 제안했다. 추정 과정은 아래의 단계를 따른다.

1) 길이가 N인 로그 자산 가격 {X(t)}를 구한다.

2) $< g(\mathrm{t}) > = \frac{1}{\mathrm{N}}\sum_{k=1}^{\mathrm{N}} g(\mathrm{k})$일 때, 식 (2.13)의 통계량을 구한다.

$$K_q(\tau) = < |X(t+\tau) - X(t)|^q > / < |X(t)|^q > \sim \tau^{qH(q)} \qquad (2.13)$$

3) $K_q(\tau)$ 를 $\tau = \{1,2,\dots,\tau_{max}\}$ 마다 구하고, 선형 회귀분석을 통해 허스트 지수를 추정한다.

4) 과정 1) ~ 3)을 τ_{max} 를 다르게 설정하면서 반복하고, H(q) 들의 평균을 허스트 지수의 추정값으로 사용한다.

Morales, et al. (2012)에서는 기존의 방법을 수정한 wGHE (weighted GHE) 방법을 제시했다. wGHE 방법은 시간에 따라 추정 구간을 이동하며 국소 허스트 지수를 추정할 때, 최근 시계열의 정보가 상대적으로 큰 영향력을 갖는다는 장점이 있다.

GHE 방법은 MFDFA 와 달리 정상 시계열을 가정한다. Di Matteo, et al. (2005)는 위의 단계에 앞서 시계열에 조정이 필요하다고 설명하면서, 연구 대상 시계열에서 선형 추세를 제거했다. 그리고 간단한 조정에도 정상성을 만족시킬 수 없다면, 다른 추정 방법을 선택하는 것이 바람직함을 언급했다. 본 연구에서는 Di Matteo, et al. (2005)의 방법에 따라, 시계열의 선형 추세를 먼저 제거하고, 허스트 지수를 추정했다. GHE 를 처음 제안한 Di Matteo, et al. (2003) 이후의 대부분의 연구들에서는 τ_{max} 를 5 ~ 19 로 설정하였고, 본 연구에서는 $\tau_{max} \in \{5,6,\cdots 20\}$을 사용했다.

L'vov, et al. (1998)와 Zhou, et al. (2006)에서는 q 값이 클 수록, 시계열 차분의 q차 모멘트가 발산할 수 있다는 문제점을 지적했다. 때문에 Barunik, et al. (2012)와 Morales, et al. (2012)에서는 H(q)를 추정할 때, q 를 3 보다 작은 범위에서 설정하도록 추천했고, 본 연구의 분석에서도 같은 범위를 적용하였다.

2.2.3. 추정 방법들의 성능 비교

MFDFA 와 GHE 를 포함한 허스트 지수 추정 방법들의 성능을 비교한 연구들을 소개하고자 한다. Weron (2002)은 R/S (rescaled range) 방법[19]과 MFDFA (q = 1)을 비교하였고, MFDFA 이 상대적으로 우수한 추정결과를 제시함을 보였다. Mielniczuk and Wojdyłło (2007)에서도 R/S 와 MFDFA 를 fBM 시뮬레이션을 통해 비교하였다. 샘플 길이와 fBM 의 허스트 지수를 변화시키면서 두 방법을 비교한 결과, R/S 방법의 RMSE (root mean squared error)가 상대적으로 작게 측정되어, Weron (2002)와는 상반된 결과를 보였다. Grech and Mazur (2005)와 Xu, et al. (2005)는 DMA (detrending moving average) 방법[20] 과 MFDFA 의 성능을 비교하였고, MFDFA 가 상대적으로 우수함을 보였다.

기존의 연구들이 대부분 가우시안 모형 (BM 혹은 fBM)을 이용한 시뮬레이션을 사용한 반면, Barunik and Kristoufek (2010)는 실제 금융 시계열처럼 두꺼운 꼬리를 갖는 확률 분포 모형을 사용했다는 점에서 의미가 있다. 이 연구에서는 안정 분포 (stable distribution)를 통해 발생시킨 시뮬레이션 샘플에서 샘플의 길이를 변화시키면서 MFDFA, GHE, R/S, DMA 방법들의 성능을 비교하였다. 그 결과 GHE 방법이 가장 우수한 결과를 제공하였다. MFDFA 와 DMA 방법은 확률분포의 꼬리가 두꺼워짐에 따라 허스트 지수를 과소 추정하는 경향이 있었고, 샘플의 길이를 감소시킴에 따라 추정 결과가 불안정해지는 경향을 보였다.

결론적으로 MFDFA 는 비정상 시계열에서 q 가 0 보다 작은 경우에도 H(q) 를 추정할 수 있는 등의 유연한 적용이 장점이다. 반면, 샘플 시계열의 확률분포가 두꺼운 꼬리를 갖거나, 샘플의

[19] Hurst (1951)에서 처음 소개되었다.

[20] Alessio, et al. (2002)에서 처음 소개되었다.

길이가 작은 경우에는 GHE 가 상대적으로 안정적인 추정 결과를 제시한다. 따라서 금융 시계열에서 시간에 의존하는 멀티프랙탈 특성을 분석하는 본 연구의 목적상 GHE 방법을 위주로 분석을 진행하였다.

제 3 절 멀티프랙탈 모형

앞서 언급했듯이 전통적인 시계열 모형들은 실제 금융시장에서 관찰되는 성질들을 설명하는데 한계가 있다. 브라우니안 운동의 가정처럼 시장 수익률은 독립적이고 동일한 분포를 따르지 않는다. 또한 정규 분포보다 높은 첨도와 두꺼운 꼬리를 갖는 확률분포를 보인다. fBM 은 자산 수익률의 장기기억 현상을 설명할 수 있지만, 변동성의 군집화 (clustering) 현상이나 확률분포 특성을 반영하지는 못한다. Levy 모형은 안정 확률분포를 통해 금융 시장의 확률분포를 유사하게 표현할 수 있지만, 2 차 이상의 모멘트가 존재하지 않는 문제가 있다.

Mandelbrot, et al. (1997)는 기존의 시계열 모형들과 비교하여 멀티프랙탈 모형이 상대적으로 다양한 시계열 특성을 반영할 수 있음을 [표 1]을 통해 설명했다. 그리고 Lux (2003), Calvet and Fisher (2004), Bacry, et al. (2008), Wei and Wang (2008), Segnon and Lux (2013)의 연구들에서는 금융 시장을 설명함에 있어서 멀티프랙탈 모형들이 기존의 모형들보다 상대적으로 뛰어남을 보였다.

이번 절에서는 대표적인 멀티프랙탈 시계열 모형들을 소개한다. 그리고 멀티프랙탈 측도 (multifractal measure)와 시간변환 프로세스 (time deformation process)을 같이 설명하고자 한다.

[표 1] 각 시계열 모형의 통계적 특성 비교 (Mandelbrot, et al. 1997)

	Volatility clustering implies predictable price	Volatility clustering consistent with martingale price
No long memory & Scale-inconsistent	ARMA	GARCH
Long memory & Scale-inconsistent	ARFIMA	FIGARCH
Long memory & Scale-consistent	fBM	MMAR

(a)

	$\mathrm{Cov}(\lvert X(t+s+\Delta)-X(t+s)\rvert, \lvert X(t+\Delta)-X(t)\rvert)$	$\mathrm{Cov}(X(t+s+\Delta)-X(t+s), X(t+\Delta)-X(t))$
ARMA	weak	weak
GARCH	weak	zero
ARFIMA	strong	strong
FIGARCH	strong	zero
fBM	strong	strong
MMAR	strong	zero or strong

(b)

2.3.1. MMAR 모형

Mandelbrot, et al. (1997)는 최초로 멀티프랙탈 특성을 반영할 수 있는 시계열 모형인 MMAR (multifractal model of asset returns)을 제시했다. 시점 t에서 금융 자산의 로그 가격, $X(t)$는 MMAR 에서 식 (2.14)와 같다. $B_H(t)$는 fBM 이고, $\theta(t)$는 시간 변환 프로세스 혹은 거래 시간 (trading time)이다.

$$X(t) \equiv B_H[\theta(t)] \qquad (2.14)$$

즉 MMAR 프로세스는 단일프랙탈 과정, $B_H(t)$ 에서 시간 프로세스의 변환을 통해 멀티프랙탈 특성을 발생시킨다. $\theta(t)$ 는 $B_H(t)$와 독립이고, 멀티프랙탈 측도의 누적 함수로 표현된다.

범위 $[0,1]$ 에서 정의되는 멀티프랙탈 측도, μ_k 는 k 단계의 multiplicative cascade 를 통해 구성된다. Cascade 의 첫 단계에서 전체 구간, $[0,1]$ 은 b 개의 동일한 길이의 부분 구간으로 나뉜다. 그리고 각 부분 구간의 측도, $\mu_1[\frac{i}{b},\frac{i+1}{b}]$ $(i \in \{0,1,\cdots b-1\})$는 확률 분포, **M**을 따르는 확률 변수, M_i 를 μ_0 에 곱해줌으로써 결정된다. 일반적으로 μ_0 는 1 로 설정한다. 이 과정을 k 단계까지 반복하여 구성한 멀티프랙탈 측도와 시간 변환 프로세스는 식 (2.15), (2.16)과 같다.

$$\mu_k(t) = \mu_k[t, t+\Delta t] = M_{\eta_1} M_{\eta_1\eta_2} \cdots M_{\eta_1\cdots\eta_k} \qquad (2.15)$$

$$\theta_k(t) = \mu_k[0, t] = \sum_{i=1}^{k} \eta_i \mu_i \left(\sum_{j=1}^{(i-1)} \eta_j b^{-j}\right) \qquad (2.16)$$

$\Delta t = b^{-k}$, $t = \sum_{i=1}^{k} \eta_i b^{-i} \in [0,1]$ 이고, $\eta_i \in \{0,1,\cdots b-1\}$ 이다. k 가 무한대로 발산하면 $\theta_k(t)$ 는 $\theta(t)$ 에 수렴한다. $\theta(t)$ 는 식 (2.17)과 같은 스케일 특성을 지닌다. 이 때 M 이 표준 조건 (canonical condition), $\mathbb{E}[M] = b^{-1}$ 또는 $\mathbb{E}[\sum M] = 1$ 을 만족한다면 스케일 함수는 식 (2.18)과 같아진다 (Calvet and Fisher, 2008).

$$\mathbb{E}[\theta(t)^q] \sim t^{\zeta_\theta(q)} \qquad (2.17)$$

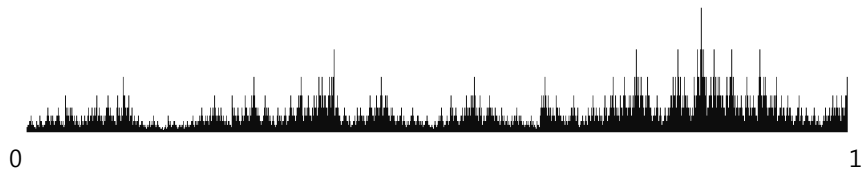
$$\zeta_\theta(q) = -\log_b \mathbb{E}[M^q] \qquad (2.18)$$

멀티프랙탈 측도의 예시로 이항 측도 (binomial measure)를 들어보겠다. 이항 측도에서 표준 조건을 만족하는 확률 변수, M 은 동일한 확률로 m_0 와 $(1-m_0)$ 중 하나의 값을 갖는다. m_0 는 0.5 보다 작은 양수이다. Cascade 의 i 단계에서 구간, $[t, t+2^{-(i-1)}]$은 2 개의 부분 구간, $[t, t+2^{-i}]$ 와 $[t+2^{-i}, t+2^{-(i-1)}]$ 으로 나뉜다. 그리고 $\mu_{i-1}[t, t+2^{-(i-1)}]$ 에 M 과 $(1-M)$ 이 차례로 곱해져서

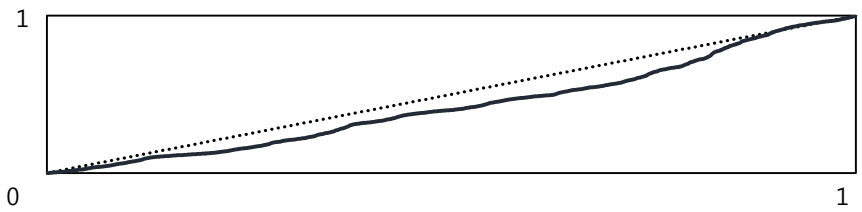
멀티프랙탈 측도가 결정된다. 아래 [그림 2]는 $m_0 = 0.4$ 일 경우의 μ_k와 θ_k의 예시이다.

(a) μ_2

(b) μ_4



(c) μ_{10}



(d) θ_{10}

[그림 2] 이항 멀티프랙탈 측도 예시 ($m_0 = 0.4$)

M의 q 차 모멘트는 $\mathbb{E}[M^q] = \{m_0^q + (1-m_0)^q\}/2$이므로 식 (2.18)에 따라 스케일 함수는 식 (2.19)와 같아진다.

$$\begin{aligned}\zeta_\theta(q) &= -\log_b \mathbb{E}[M^q] \\ &= 1 - \log_2\{m_0{}^q + (1-m_0)^q\} \qquad (2.19)\end{aligned}$$

Calvet and Fisher (2008)에서는 확률 변수, M 이 표준 조건을 만족하고 로그 정규분포, 포아송 분포, 감마 분포를 각각 따를 때, $\theta(t)$의 스케일 함수와 멀티프랙탈 스펙트럼의 해를 제시했다[21].

위의 조건들을 만족하는 로그 자산가격, $X(t)$는 식 (2.20)과 같은 스케일 특성을 갖는다. 이 때, 스케일 함수, $\zeta_X(q) = \zeta_\theta(Hq)$이다.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[|X(t)|^q] &= \mathbb{E}[\theta(t)^{Hq}]\,\mathbb{E}[|B_H(1)|^q] \\ &\sim t^{\zeta_X(q)} \qquad (2.20)\end{aligned}$$

2.3.2. MRW 모형

Bacry, et al. (2001b)에서는 새로운 멀티프랙탈 모형, MRW (multifractal random walk)을 제시했다. $X(t)$를 로그 자산가격이라 할 때, MRW 프로세스는 아래와 같다.

$$X_l(t) = \sum_{i=1}^{t/l} \varepsilon_l(i) e^{\omega_l(i)} \qquad (2.21)$$

$$\Delta X_l(t) = \varepsilon_l(t/l) e^{\omega_l(t/l)} \qquad (2.22)$$

l은 시계열의 단위 구간이고, 확률 변수, ε_l는 평균 0, 분산 $\sigma^2 l$을 만족하는 백색 잡음 (white noise)이다. 또 다른 확률 변수, ω_l는

[21] Calvet and Fisher (2008)를 비롯한 다수의 연구들에서는 스케일 함수를 $\tau(q)$로 표기한다. 이는 본 논문을 비롯한 또 다른 다수의 연구들에서 표기하는 $\zeta(q)$와 다음과 같은 차이가 있다: $\tau(q) = \zeta(q) - 1$

ε_l 과는 독립이고, 식 (2.23)과 같은 자기공분산 (auto-covariance) 함수를 갖는다.

$$\mathrm{Cov}\big(\omega_l(a), \omega_l(b)\big) = \lambda^2 \log[\frac{\mathrm{T}/l}{|a-b|+1}, 1]^+ \qquad (2.23)$$

$[u, v]^+$ 는 u 와 v 중 큰 값을 취한다. λ^2 는 간헐성 (intermittency) 계수로 확률 과정의 멀티프랙탈 특성의 크기를 조정한다. 식 (2.23)에 따라 ω_l 의 분산은 $\lambda^2 \log(\mathrm{T}/l)$ 이 되고, ω_l 의 평균은 간편함을 위해 $-\sigma_{\omega_l}^2$ 로 설정한다. 이렇게 설정한 MRW 모형에서 차분, $\Delta \mathrm{X}_l$의 평균은 0 이 되고, 분산은 식 (2.24)와 같다.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[\Delta {X_l}^2\big] &= \mathbb{E}\big[\varepsilon_l^2\big]\mathbb{E}[e^{2\omega_l}] - \{\mathbb{E}[\varepsilon_l]\}^2\{\mathbb{E}[e^{\omega_l}]\}^2 \\ &= \sigma^2 l\, e^{-2\sigma_{\omega_l}^2 + 2\sigma_{\omega_l}^2} \\ &= \sigma^2 l \qquad (2.24)\end{aligned}$$

Bacry, et al. (2001b)에서는 ε_l (t)가 독립적인 가우시안 잡음 (Gaussian noise)일 때, X_l(t) 가 식 (2.25)의 스케일 특성과 식 (2.26)의 스케일 함수를 지님을 유도했다. 그리고 Bacry, et al. (2008)에서는 MRW 의 멀티프랙탈 스펙트럼이 식 (2.27)과 같음을 보였다.

$$\mathrm{E}[|\mathrm{X}_l(\mathrm{t})|^{\mathrm{q}} \sim K_{\mathrm{q}} \mathrm{t}^{\zeta(\mathrm{q})} \qquad (2.25)$$

$$\zeta(\mathrm{q}) = (1/2 + \lambda^2)\mathrm{q} - (\lambda^2/2)\mathrm{q}^2 \qquad (2.26)$$

$$\begin{aligned}\alpha(\mathrm{q}) &= 1 + 2\lambda^2 - 4\lambda^2 \mathrm{q} \\ f(\mathrm{q}) &= 1 - 2\lambda^2 \mathrm{q}^2 \qquad (2.27)\end{aligned}$$

2.3.3. MSM 모형

Calvet and Fisher (2001)와 Calvet and Fisher (2004)에서는 MSM (Markov switching multifractal) 모형을 제시했다. 로그 자산가격, X(t)는 식 (2.28)과 같다.

$$\mathrm{X(t)} = \bar{\mathrm{g}}\mathrm{t} + \int_0^{\mathrm{t}} \sigma(M_s) dZ(s) \qquad (2.28)$$

$$\sigma(M_s) = \lim_{\mathrm{k}\to\infty} \sigma_k(M_{\mathrm{t}}) = \lim_{\mathrm{k}\to\infty} \bar{\sigma}(\prod_{i=1}^{k} M_{i,\mathrm{t}})^{1/2} \qquad (2.29)$$

$\bar{\mathrm{g}}$ 는 확률과정의 추세를 의미하는 상수이고, Z 는 표준 가우시안 확률변수이다. $\bar{\sigma}$는 0 보다 큰 상수이고, $M_{i,\mathrm{t}}$는 γ_i의 확률로 확률분포, **M** 를 따르는 새로운 값으로 대체되거나 $(1-\gamma_i)$ 의 확률로 기존의 값을 유지한다. 확률분포, **M**은 0 보다 큰 범위에서 정의되어야 하고, 평균이 1 을 만족해야 한다. 대체 확률, γ_i 는 식 (2.30)과 같이 정의된다.

$$\gamma_i = \gamma_1 b^{i-1} \qquad (2.30)$$

γ_1 은 범위 $(0,1)$ 에 존재하는 상수이고, b 는 1 보다 큰 상수이다. 따라서 MSM 프로세스는 확률분포, **M** 과 모수 $(\bar{\mathrm{g}}, \bar{\sigma}, \gamma_1, b)$ 에의해 정해진다.

2.3.4. 시간변환 프로세스

Bacry, et al. (2008)는 MRW 프로세스를 따르는 확률과정, $\mathrm{X}_l(\mathrm{t})$를 식 (2.14)의 형태로 표현할 수 있음을 보였다. 이 경우, 식 (2.14)의 H는 가우시안 잡음 $\varepsilon_l(\mathrm{t})$의 허스트 지수와 같고, 시간변환 프로세스, θ(t)는 식 (2.31)과 같다.

$$\theta(\mathrm{t}) = \lim_{l\to 0} \int_0^{\mathrm{t}} e^{2\omega_l(u)} du \qquad (2.31)$$

Calvet and Fisher (2008)는 MSM 모형 역시 식 (2.14)의 형태로 표현할 수 있고, 이 경우의 시간변환 프로세스는 식 (2.32)와 같음을 보였다.

$$\theta(t) = \lim_{k\to\infty} \int_0^t \sigma_k^2(M_s)ds \qquad (2.32)$$

식 (2.14)는 단일프랙탈 과정이 시간 변환을 통해 멀티프랙탈 과정으로 변환됨을 의미한다. 이는 반대로 모든 멀티프랙탈 시계열을 각각의 특정 시간변환 프로세스를 통해 단일프랙탈 시계열로 변환할 수 있음을 뜻한다. MMAR 뿐만 아니라 MRW 와 MSM 모형 역시 식 (2.14)의 형태로 표현할 수 있다는 것은 멀티프랙탈 모형들이 이와 같은 아이디어를 공유하고 있음을 의미한다.

Eisler and Kertész (2004)와 Oświęcimka, et al. (2005)의 연구들에 의하면 시간변환 프로세스, θ(t) 는 말 그대로 '거래 시간 (trading time)'을 의미하지는 않는다. 이들은 실제 거래시간에 따라 자산 가격을 재배열 했을 때에도 멀티프랙탈 특성이 존재함을 보였다. 따라서 θ(t) 는 멀티프랙탈 과정과 단일프랙탈 과정을 연결해주는 가상의 시간변환 프로세스로 받아들여야 한다. 만약 특정 멀티프랙탈 과정의 시간변환 프로세스를 안다면, 금융 분야의 (멀티프랙탈 특성을 적용하는) 여러 계산들이 단순해질 것이다. 하지만 특정 멀티프랙탈 과정에서 시간변환 프로세스의 존재성이나 추정에 대한 연구는 아직 미흡한 실정이다.

제 4 절 관련 연구 현황

지금까지는 멀티프랙탈 이론의 기본 개념들과 스케일 분석 모형, 멀티프랙탈 시계열 모형에 대해 다뤘다. 4 절에서는 이들을 이용해 이루어져온 다양한 관련 연구들을 주제별로 정리하고자 한다.

몇몇 연구들에서는 스케일 특성 혹은 멀티프랙탈 특성이 시간에 따라 변동하는 모습을 관찰했다. Bartolozzi, et al. (2007)는 다양한 선물시장의 1 분 단위 자료에서 허스트 지수를 DFA 방법을 이용해 시간 구간을 이동하면서 추정했다. Kumar and Deo (2009)에서는 인도 주식시장 (BSE, NSE)과 S&P500 자료에서 MFDFA 방법을 이용해 멀티프랙탈 척도, $\Delta\alpha$를 추정한 결과, 추정 시기에 따라 다른 값을 도출했다. Morales, et al. (2012)에서는 미국 기업의 주가자료에서 wGHE 방법을 이용해 추정한 허스트 지수가 시간에 따라 변동함을 보였고, Morales, et al. (2013)에서는 같은 방식으로 추정한 ΔH에서 비정상성을 관찰했다. 이들에 따르면 실제 금융시장에서 멀티프랙탈 특성은 시간에 따라 부재와 존재를 반복하는 비정상성을 지닌다고 할 수 있다.

Wendt and Abry (2007)와 Wendt, et al. (2007)에서는 실증 분석에서 멀티프랙탈 특성의 존재성을 검증할 통계적 방법이 부족하다는 문제를 언급했다. 그리고 부트스트랩 (bootstrap) 방법을 이용한 새로운 통계적 검정법을 제시했다. Jiang and Zhou (2008a)에서는 대리자료 방법 (surrogate method)을 이용한 검정법을 제안했다.

Kantelhardt, et al. (2002)는 시계열의 멀티프랙탈 특성에 영향을 미치는 두 가지 요인을 제시했다. 첫째는 시계열의 확률분포 특성, 특히 두꺼운 꼬리 특성이고, 둘째는 변동성의 장기기억 현상이다. 이후 다양한 실증 연구들에서 각 요인을 지지하거나 반박하는

결과들을 제시했다. 각 연구들은 본 연구의 4 장, [표 9]에서 정리한다.

Zunino, et al. (2008), Zunino, et al. (2009), Oh, et al. (2012), Sensoy (2013a), Sensoy (2013b)의 연구들은 여러 금융시장들의 멀티프랙탈 특성을 비교하였고 멀티프랙탈 특성과 시장의 효율성의 상관관계에 대한 증거를 제시했다. 또한 Grech and Mazur (2004)와 Grech and Pamuła (2008), Caraiani (2012)의 연구들에서는 금융 위기 전후의 멀티프랙탈 척도를 비교함으로써, 멀티프랙탈 특성을 통해 금융 위기를 예측할 수 있다고 주장했다.

멀티프랙탈 특성을 적용하여 금융 위험을 측정하는 연구들은 대부분 VaR (value-at-risk)를 예측하여 멀티프랙탈 모형의 성능을 검증하는 연구들이었다. 이들은 VaR 모형 중에서도 특히 시뮬레이션 방법에 집중하였다[22]. Liu and Lux (2005)는 MSM 모형을 확장한 2 변량 멀티프랙탈 모형을 제시하고, 시뮬레이션 방법을 통해 미국 채권시장과 달러-호주달러 환율 시장에서 VaR 을 예측했다. Calvet, et al. (2006)는 이항 MSM 모형과 이를 적용한 시뮬레이션 VaR 예측 모형을 제안했다. Bacry, et al. (2008)과 Batten, et al. (2014)은 환율시장에서 각각 MRW 와 MMAR 모형을 이용한 시뮬레이션 VaR 을 예측했다. Bogachev and Bunde (2009)에서는 멀티프랙탈 특성을 고려한 새로운 역사적 VaR 추정법을 제안했다.

[22] VaR 모형은 크게 모수적 (parametric) 방법, 시뮬레이션 방법, 역사적 (historical) 방법으로 나뉜다. 이들에 대해서는 5 장에서 자세히 다루겠다.

제 3 장 멀티프랙탈 특성의 존재와 검증

3 장에서는 한국 금융시장에서 멀티프랙탈 특성을 분석한다. 그리고 시계열에서 멀티프랙탈 특성을 통계적으로 검정하는 모형과 멀티프랙탈 구간을 판별하는 모형을 제시한다. 시뮬레이션 분석을 통해 모형의 성능을 검증하고, 실증 자료에 적용하여 멀티프랙탈 구간을 판별한다. 마지막으로 6 절에서는 모형의 한계점과 발전 방향을 제시한다.

제 1 절 실증 자료

본 연구에서 사용할 자료는 한국과 미국의 주가지수 (KOSPI, S&P500)와 원달러 환율 (FX)의 일별 시계열 자료이다. 자료는 모두 1990 년부터 2012 년까지의 거래일 기준 자료이다. KOSPI 는 한국거래소[23]에서, S&P500 은 CSI[24] (commodity systems inc.)에서, FX 는 한국은행 경제통계 시스템[25]에서 제공하는 자료를 각각 사용했다.

[표 2]는 각 자료의 기초 통계를, [그림 3]은 가격과 변동성 추이를 보여준다. ΔX 는 로그수익률이고, $|\Delta X|$ 는 로그수익률의 절대값이다. $\mathbb{E}[\,]$ 는 자료의 평균이고, Std, Skew, Kurt 는 각각 표준편차와 외도, 첨도를 의미한다.

[23] http://www.krx.co.kr

[24] http://www.csidata.com

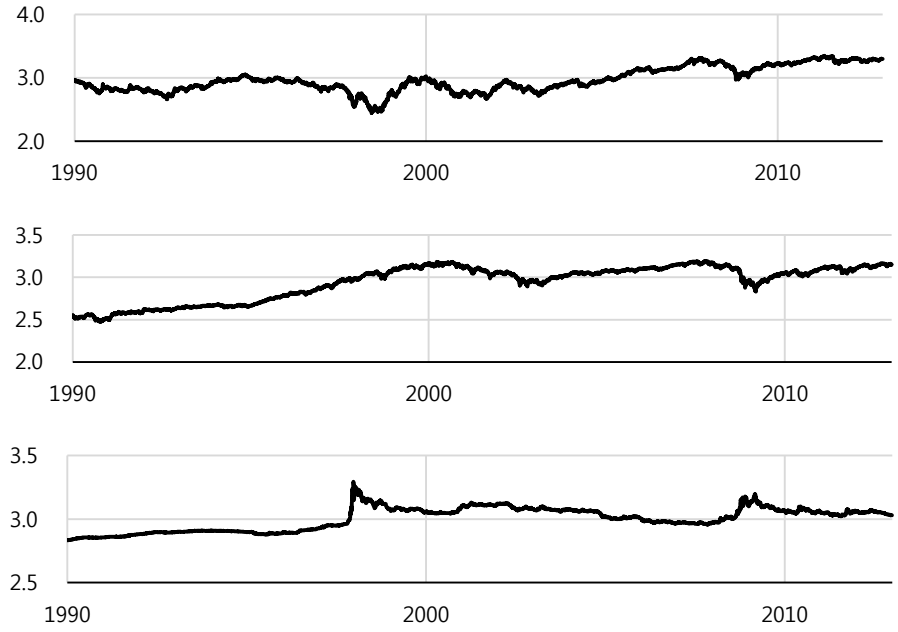
[25] https://ecos.bok.or.kr

KOSPI 자료에서 수익률의 표준편차가 상대적으로 크게 나타났다. 수익률의 외도는 S&P500 이 가장 컸고, 수익률의 첨도와 점프 현상의 빈도는 FX 자료에서 크게 관찰된다. 그리고 자료 모두에서 변동성의 군집현상이 존재함을 확인할 수 있다. KOSPI 시계열은 1998, 2000, 2003, 2008 년에서 큰 변동이 있었고, FX 시계열은 1998 년과 2008 년에 큰 변동을 보였다. 이는 아시아 외환위기와 IT 붕괴, 신용카드 사태, 금융위기 시기에 한국 금융시장이 영향을 받았음을 의미한다.

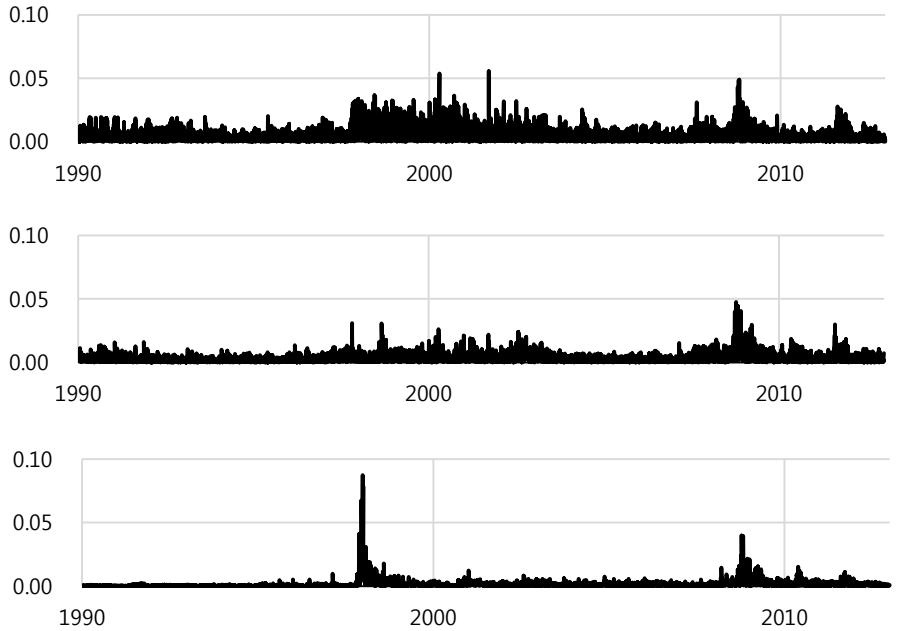
[표 2] 실증자료 기초통계량

	자료수[26]	$\mathbb{E}[\Delta X]$	$\mathbb{E}[\lvert\Delta X\rvert]$	$\mathrm{Std}_{\Delta X}$	$\mathrm{Skew}_{\Delta X}$	$\mathrm{Kurt}_{\Delta X}$
KOSPI	6105	0.000	0.012	0.017	-0.200	7.047
S&P500	5797	0.000	0.003	0.005	-0.228	8.475
FX	5708	0.000	0.003	0.008	-0.061	163.576

[26] KOSPI 의 자료수가 S&P500 과 FX 자료보다 많은 이유는 1998 년까지 한국 주식시장이 주 6 일동안 개장되었기 때문이다.



(a) 로그가격 (X) 추이 (위: KOSPI, 중간: S&P500, 아래: FX)



(b) 변동성 (|ΔX|) 추이 (위: KOSPI, 중간: S&P500, 아래: FX)

[그림 3] 실증자료 시계열 추이

로그수익률의 확률분포가 지니는 성질을 분석하기 위해 각 자료로부터 정규분포와 t 분포의 모수들을 각각 추정하였다. 정규분포는 위치 (location)와 척도 (scale)를 의미하는 두 개의 모수, (μ, σ) 를 갖는다. t 분포는 확률분포의 형태를 결정하는 모수, 자유도를 추가로 총 3 개의 모수, $(\mathrm{df}, \mu', \sigma')$ 를 갖는다. t 분포는 자유도가 작을수록 꼬리형태가 두꺼워지고, 무한대에 가까워지면서 정규분포와 유사한 형태를 갖는다. [표 3]는 최소자승법을 통한 모수 추정 결과와 함께 K-S (Kolmogorov-Smirnov) 검정[27] 결과를 보여준다. 그리고 [그림 4]는 실제 로그 수익률과 각 추정 확률분포의 히스토그램을 비교한 결과다.

K-S 검정 결과, 각 자료에서 추정한 정규 분포는 실제 수익률 분포와 차이를 보였다. 반면, 추정 t 분포는 실제 수익률 분포와 유사한 모습을 보였다. KOSPI 자료에서는 추정 t 분포와 실제 분포가 동일했고, S&P 500 과 FX 자료의 경우, 각각 유의수준 5%와 1%에서 귀무가설을 기각하지 못했다. 분포의 꼬리형태는 KOSPI ($\mathrm{df} = 3.14$) 와 S&P500 ($\mathrm{df} = 2.86$) 보다 FX 자료 ($\mathrm{df} = 1.40$) 에서 상대적으로 두꺼웠다. [그림 4]에서 각 자료의 수익률 분포는 모두 정규분포보다 첨도가 높고, 꼬리가 두꺼운 형태를 보임을 확인할 수 있다.

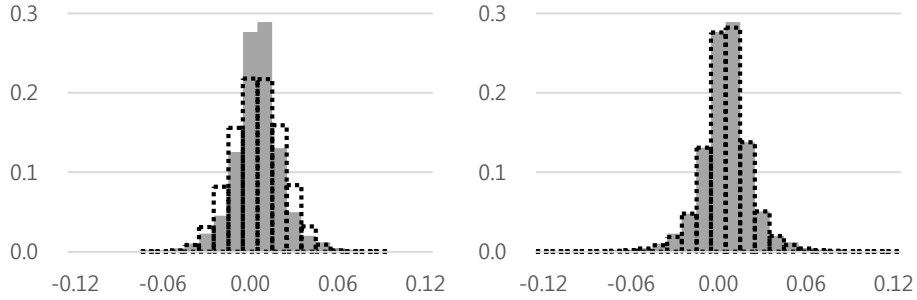
자기상관 특성을 분석하기 위해 각 자료에서 수익률과 변동성의 자기상관 계수를 구하였고, 결과는 [그림 5]와 같다. 모든 자료에서 수익률의 자기상관성은 lag 가 길어지면서 0 에 수렴했다. 반면, 변동성의 자기상관성은 lag 가 길어져도 유의미한 수준을 유지하는 장기기억 현상을 보였다.

---

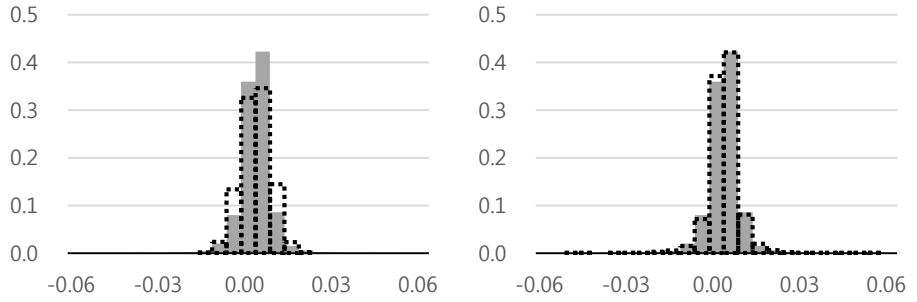
[27] ΔX를 실제 자료(로그 수익률), $\Delta X_{\mathbf{P}}$를 특정 분포, $\mathbf{P}$ 로부터 발생시킨 샘플 자료라고 할 때, K-S 검정의 귀무가설은 $\{\Delta X\}$와 $\{\Delta X_{\mathbf{P}}\}$의 확률분포의 동일성이다.

[표 3] 모수 추정 결과와 K-S 검정 결과

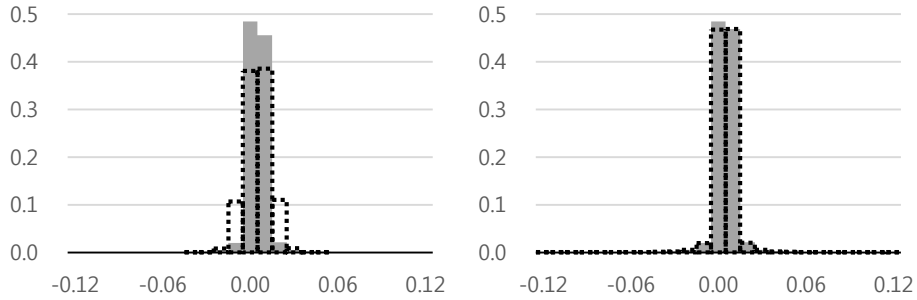
	추정모수	K-S 통계량 (유의확률)
KOSPI		
정규 분포	(μ, σ) (0.000, 0.017)	0.067 (0.000)
t 분포	$(\mathrm{df}, \mu', \sigma')$ (3.140, 0.000, 0.011)	0.009 (0.773)
S&P500		
정규 분포	(μ, σ) (0.000, 0.005)	0.089 (0.000)
t 분포	$(\mathrm{df}, \mu', \sigma')$ (2.856, 0.000, 0.003)	0.024 (0.070)
FX		
정규 분포	(μ, σ) (0.000, 0.008)	0.217 (0.000)
t 분포	$(\mathrm{df}, \mu', \sigma')$ (1.400. 0.000. 0.002)	0.021 (0.012)



(a) KOSPI (좌: 정규분포, 우: t 분포)

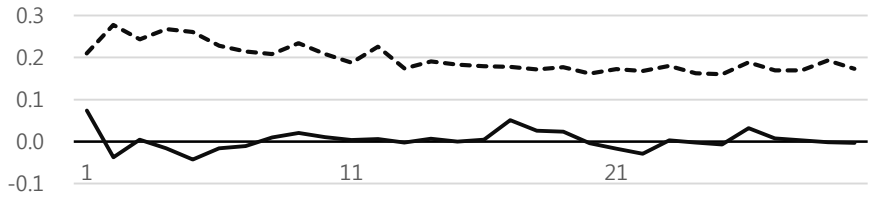


(b) S&P500 (좌: 정규분포, 우: t 분포)

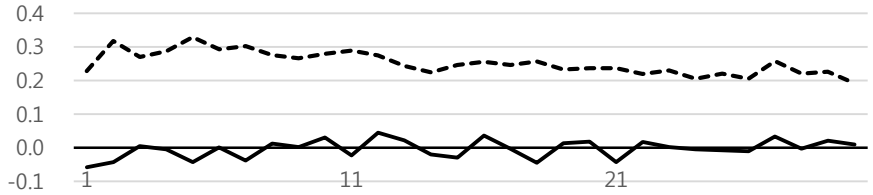


(c) FX (좌: 정규분포, 우: t 분포)

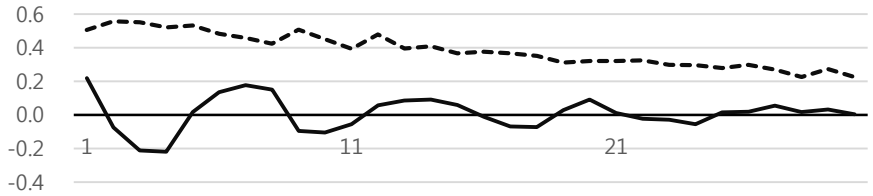
[그림 4] 실제 로그수익률 (음영)과 추정 (점선) 히스토그램



(a) KOSPI



(b) S&P500



(c) FX

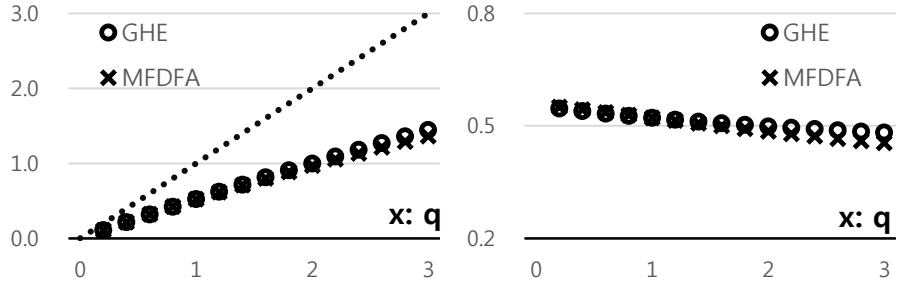
[그림 5] 로그수익률(실선)과 변동성(점선)의 자기상관성

(x 축: lag)

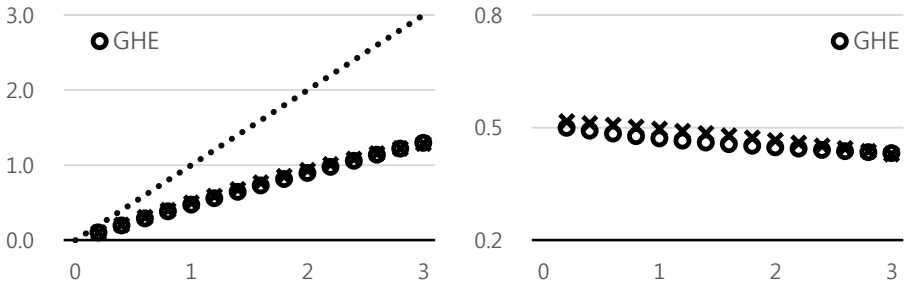
제 2 절 금융 시장의 멀티프랙탈 특성 분석

KOSPI 와 S&P500, 원달러 환율 (FX) 자료의 전체 구간을 대상으로 식 (2.7)과 식 (2.8)에서 정의한 스케일 함수, $\zeta(q)$ 와 허스트 지수, $H(q)$ 를 q 에따라 측정했다. 2.2 절에서 언급한 설정을 적용하여 GHE 와 MFDFA 방법을 모두 사용하였고, 결과는 [그림 6]과 같다. 점선은 브라운 운동의 스케일 함수이다. 시계열 모두에서 q 에 대한 스케일 함수의 비선형성과 허스트 지수의 감소하는 모습이 나타났다. 이는 금융 시계열에 멀티프랙탈 특성이 존재한다는 증거로 볼 수 있다. 주식 시장보다 FX 자료에서 스케일 함수의 비선형성이 상대적으로 심했다. FX 자료의 멀티프랙탈 척도, $\Delta H(1,2)$ 도 GHE 방법에서는 0.09, MFDFA 방법에서는 0.16 으로 추정되어 KOSPI 자료 (0.02, 0.04)와 S&P500 자료 (0.02, 0.03)의 추정 값보다 상대적으로 컸다. 이러한 결과는 3.1 절에서 FX 자료가 보인 상대적으로 두꺼운 확률분포의 꼬리형태, 변동성의 장기기억 현상과 관련 있다.

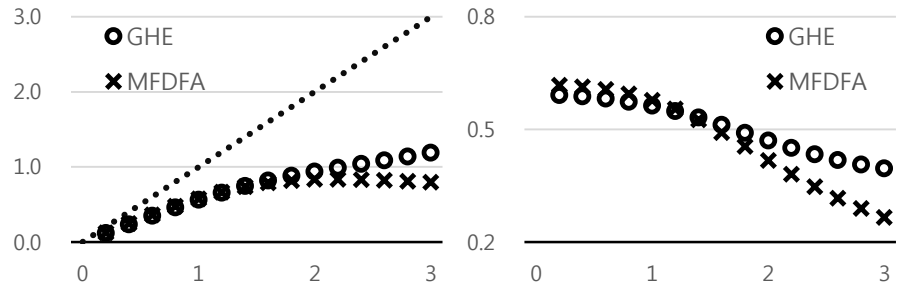
다음은 각 시계열에서 240 일의 부분 구간을 20 일씩 전진시키면서 GHE 와 MFDFA 방법으로 $\Delta H(1,2)$ 를 추정했고, 결과는 [그림 7]과 같다. 모든 자료에서 ΔH 가 시간에 따라 변동하는 모습이 보였다. 이러한 결과는 금융 시계열에서 멀티프랙탈 특성의 크기가 항상 일정한 상수가 아닌, 시간에 의존하는 함수 형태임을 의미한다. MFDFA 방법으로 추정한 결과가 GHE 결과에 비해 상대적으로 크고 심한 변동을 보였다. 특히 외환 위기 (1997 ~ 1998)와 금융 위기 (2008 ~ 2009) 시기에는 높은 ΔH가 공통적으로 관찰되었다.



(a) KOSPI

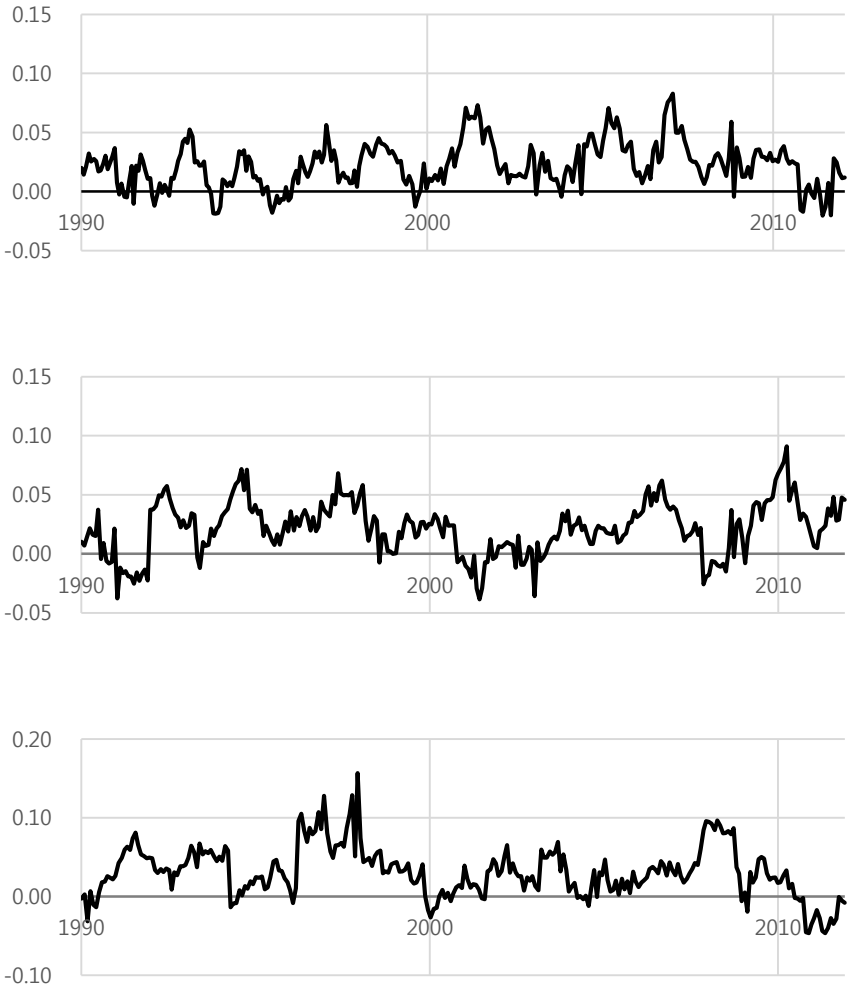


(b) S&P500

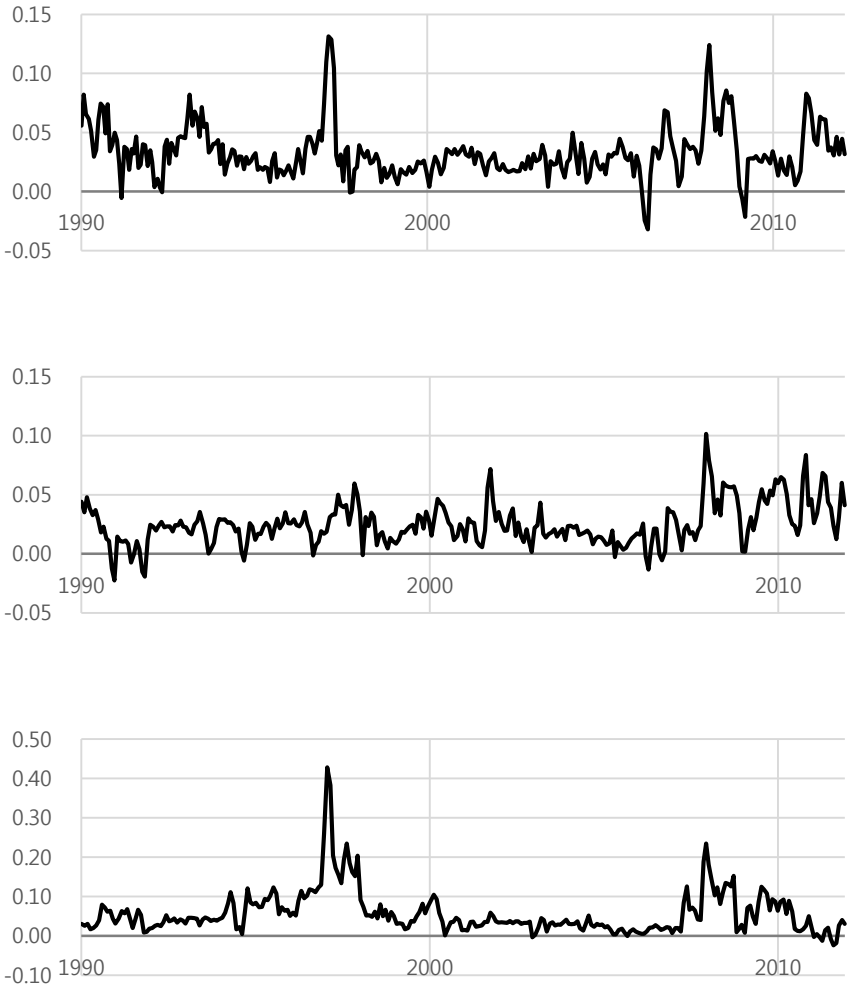


(c) FX

[그림 6] 멀티프랙탈 특성 분석 (좌: ζ(q), 우: H(q))



(a) GHE 추정 방법 (상: KOSPI, 중: S&P500 하: FX)



(b) MFDFA 추정 방법 (상: KOSPI, 중: S&P500 하: FX)

[그림 7] 시간에 따른 멀티프랙탈 척도, ΔH(1,2) 분석

제 3 절 멀티프랙탈 검정 모형[28]

3.2 절에서 보았듯이 실제 금융시장에서 멀티프랙탈 특성은 일관성 있는 모습을 보이지 않고, 존재와 부재를 반복한다. 멀티프랙탈 특성이 존재하는 시기와 그렇지 않은 시기는 시계열의 성질이 확연히 다르기 때문에 통계적 분석에 있어서 각각에 적합한 모형을 적용함이 옳다. 이를 위해서는 우선 특정 시기의 시계열에서 멀티프랙탈 특성의 유무를 판단 가능해야 한다.

멀티프랙탈 구간을 정밀하게 판별하기 위해서는 가능한 짧은 시간구간을 전진시키면서 멀티프랙탈 특성을 검정해야 한다. 하지만 시간구간이 지나치게 짧으면 분석 결과의 신뢰성에 문제가 발생한다. 이와 같은 분석 방법에 적용하기에 Wendt and Abry (2007)와 Wendt, et al. (2007)의 부트스트랩 검정 방법은 지나치게 긴 구간 ($2^{12} \sim 2^{15}$)의 자료를 필요로 한다. 그리고 부트스트랩으로 새롭게 발생시킨 샘플들이 원자료의 통계적 특성들 (확률분포 특성, 변동성의 장기기억과 자기상관성 등)을 온전히 유지하는지에 대한 검증이 먼저 필요하다. Jiang and Zhou (2008a)의 검정 방법은 멀티프랙탈 척도를 확률분포에 의한 부분과 자기상관성에 의한 부분으로 분리하고, 후자의 존재만을 판단하는 방법이다.

3.3 절에서는 상대적으로 짧은 구간에서 멀티프랙탈 특성의 존재를 검증할 수 있는 방법을 제시한다.

[28] Lee and Chang (2015) 참고

3.3.1. 검정 방법

본 연구에서 제시하는 멀티프랙탈 검정의 귀무가설은 식 (3.1)과 같다. 시계열에 멀티프랙탈 특성이 존재한다면, 귀무가설은 기각될 것이다.

$$H_0: H(1) = H(2) \qquad (3.1)$$

검정 방법은 2.2 절에서 설명한 GHE 의 추정 과정을 이용한다. 식 (2.13)을 로그 변환 후, 선형 회귀분석을 통해 H(q) 를 추정할 수 있다. 회귀분석에서 τ 는 $\{1,2,\dots,\tau_{max}\}$ 를 사용하고, τ_{max} 를 $\{5,6,\dots,20\}$ 중의 하나로 설정할 때마다 $H_{\tau_{max}}(q)$ 를 추정하여 총 16 개의 값을 얻는다. 이와 같이 추정한 $\{H_{\tau_{max}}(1)\}$과 $\{H_{\tau_{max}}(2)\}$을 대상으로 Wilcoxon 순위 합 검정 (Wilcoxon rank-sum test)을 실행하여 위의 귀무가설을 검정한다.

Wilcoxon 순위 합 검정은 두 집단의 중간값을 비교하는 비모수 검정 방법이다. 본 검정에서 비교 집단의 크기가 충분하지 않고 $\{H_{\tau_{max}}(q)\}$의 분포가 정규성을 지니는지 알 수 없기 때문에, 비모수 검정을 적용했다. 순위 합 검정에서는 자료의 값을 각 값의 크기 순위로 대체한다. 검정 통계량, W 는 $\{H_{\tau_{max}}(1)\}$ 에 요소들의 순위 합으로 평균이 $n_1(n_1+n_2+1)/2$, 분산이 $n_1n_2(n_1+n_2+1)/12$ 인 정규분포를 따른다. n_1 과 n_2 는 각 집단에 속해있는 요소들의 수로 본 연구에서는 16 이다.

2.2 절에서 언급했듯이 H(q)를 추정할 때, q 의 값이 지나치게 크면 추정 결과가 발산하는 문제가 있다. 따라서 본 연구의 검정에서는 q 를 1 과 2 로 선정했다. H(1) 은 시계열 변동성 또는 수익률의 절대값의 스케일 특성을 대표하고, H(2)는 시계열의 파워 스펙트럼 (power spectrum)을 대표하므로 두 값의 비교는 의미가 있다[29]. 다른

[29] Di Matteo (2007) 참고

추정방법 대신 GHE 방법을 선정한 이유는 2.2 절에서 언급했듯이 금융 자료와 같이 두꺼운 꼬리 형태의 확률분포를 따르는 자료에서 GHE 방법이 상대적으로 안정적인 추정결과를 보이기 때문이다.

3.3.2. 시뮬레이션

멀티프랙탈 검정 방법의 성능을 검증하기 위해 MMAR 모형을 이용한 시뮬레이션을 실행했다. 2.2 절에서 설명한 MMAR 모형에서 $b = 2$로, $\mathbf{M}$은 식 (3.2)와 같은 로그 정규 확률분포로 설정했다.

$$-\log_b M \sim \mathrm{N}(\lambda_{mmar}, \sigma^2) \qquad (3.2)$$

λ_{mmar}는 1 보다 큰 상수로 시계열의 멀티프랙탈 특성을 조절한다. 확률변수, M이 $\mathbb{E}[M] = b^{-1}$와 같은 표준 조건을 만족하기 위해서는 σ^2 가 $2(\lambda_{mmar} - 1)/\ln b$ 과 같아야 한다. 이와 같은 설정에서 식 (2.20)의 스케일 함수는 식 (3.3)과 같다[30].

$$\zeta_X(q) = \lambda_{mmar} Hq - (\lambda_{mmar} - 1)(Hq)^2 \qquad (3.3)$$

[표 4]는 길이가 1000 인 fBM 과 MMAR 샘플을 발생시키고, 통계적 특성을 비교한 결과이다. $H \in \{0.5, 0.7\}$, $\lambda_{mmar} \in \{1.1, 1.2, 1.3\}$인 총 6 종류의 MMAR 샘플을 1000 회씩 발생시켰다. 시계열 X의 차분을 ΔX, 차분을 정규화한 값을 ΔX_n으로 표기했다. 각 값은 샘플 1000 개에서 구한 통계량의 평균이고, *p-value* 는 각 MMAR 샘플과 fBM 샘플의 평균 통계량이 같다는 귀무가설에 대한 t 검정의 유의확률이다. 멀티프랙탈 척도, $\Delta H(1,2)$는 GHE 방법으로 추정했다.

[30] Calvet and Fisher (2008)

MMAR 샘플의 외도는 fBM 샘플과 차이가 없었다. 반면, 확률분포의 첨도와 꼬리 형태[31]는 통계적으로 차이가 있었고, H와 λ_{mmar}에 따라 증가하는 경향을 보였다. ΔH(1,2)도 MMAR 샘플과 fBM 샘플에서 통계적 차이를 보였고 λ_{mmar}에 따라 증가했지만, H에 따라서는 감소했다.

[표 4] MMAR 시계열의 통계적 특성

		fBm(H)	MMAR(H, 1.1)	*pv*	MMAR(H, 1.2)	*pv*	MMAR(H, 1.3)	*pv*
H = 0.5								
ΔX	Skew	0.01	0.01	*0.86*	0.00	*0.84*	-0.02	*0.60*
	Kurt	3.00	7.42	*0.00*	11.38	*0.00*	15.36	*0.00*
ΔX_n	MEF_u	0.38	0.76	*0.00*	0.94	*0.00*	1.07	*0.00*
	MEF_l	0.38	0.76	*0.00*	0.94	*0.00*	1.07	*0.00*
	$k^h{}_u$	0.17	0.29	*0.00*	0.34	*0.00*	0.37	*0.00*
	$k^h{}_l$	0.16	0.29	*0.00*	0.34	*0.00*	0.37	*0.00*
X	ΔH(1,2)	0.00	0.07	*0.00*	0.10	*0.00*	0.12	*0.00*
H = 0.7								
ΔX	Skew	0.00	0.00	*0.99*	-0.06	*0.37*	-0.06	*0.57*
	Kurt	2.99	9.86	*0.00*	17.48	*0.00*	28.51	*0.00*
ΔX_n	MEF_u	0.37	0.88	*0.00*	1.12	*0.00*	1.33	*0.00*
	MEF_l	0.37	0.89	*0.00*	1.14	*0.00*	1.34	*0.00*
	$k^h{}_u$	0.16	0.32	*0.00*	0.38	*0.00*	0.43	*0.00*
	$k^h{}_l$	0.16	0.33	*0.00*	0.39	*0.00*	0.43	*0.00*
X	ΔH(1,2)	0.00	0.06	*0.00*	0.08	*0.00*	0.09	*0.00*

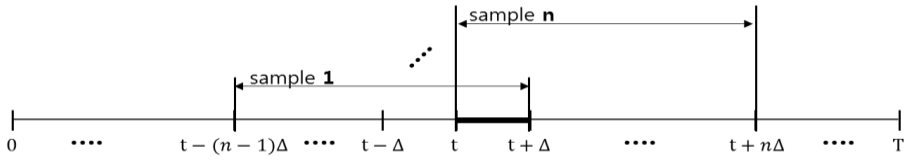
[31] MEF (mean excess function)와 k^h (Hill estimator)는 모두 확률분포의 꼬리를 의미하는 통계량이다. $MEF = E[\Delta X_n(t) - 2 \,|\Delta X_n(t) > 2]$이고, $k^h(q) = E[\ln \Delta X_n(t) - \ln 2 \,|\Delta X_n(t) > 2]$이다. '$u$'는 확률분포의 오른쪽, '$l$'는 왼쪽 꼬리에 대한 값이다.

[표 5]는 각 종류의 MMAR 시계열을 샘플의 길이를 변화시키면서 1000 회씩 발생시키고, 유의수준 10%와 5%에서 멀티프랙탈 검정을 실행한 결과이다. prob_α는 총 1000 개의 샘플 중 유의수준 α에서 식 (3.1)의 귀무가설을 기각시킨 샘플의 비율이다. 모든 경우에서 90% 이상의 정확성을 보였고, 샘플 길이(T)와 λ_{mmar} 에 따라 정확성이 증가했다. 또 장기기억 특성이 없는 샘플 $(\text{H} = 0.5)$에서 상대적으로 높은 정확성을 보였다.

[표 5] MMAR 시뮬레이션 샘플의 멀티프랙탈 검정 결과

T	ΔH(1,2)	$\text{prob}_{0.1}$	$\text{prob}_{0.05}$
MMAR(0.5, 1.1)			
250	0.07	0.95	0.94
500	0.07	1.00	0.99
1000	0.07	1.00	1.00
MMAR(0.5, 1.2)			
250	0.10	0.97	0.96
500	0.10	1.00	1.00
1000	0.10	1.00	1.00
MMAR(0.5, 1.3)			
250	0.12	0.99	0.99
500	0.12	1.00	1.00
1000	0.12	1.00	1.00
MMAR(0.7, 1.1)			
250	0.06	0.93	0.90
500	0.06	0.97	0.97
1000	0.06	0.99	0.99
MMAR(0.7, 1.2)			
250	0.08	0.92	0.91
500	0.08	0.99	0.98
1000	0.08	0.99	0.99
MMAR(0.7, 1.3)			
250	0.10	0.96	0.94
500	0.10	0.98	0.98
1000	0.10	0.98	0.98

제 4 절 멀티프랙탈 구간 판별 모형[32]



[그림 8] 단위 구간 $[t, t+\Delta]$을 포함하는 부분 구간의 수

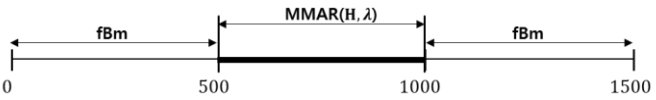
시계열의 전체 구간에서 nΔ 길이의 부분 구간을 Δ 길이의 단위 구간만큼 전진하면서 3.3 절의 멀티프랙탈 검정을 실행한다고 하자. 특정 단위구간 $[t, t+\Delta]$ 을 포함하는 부분 구간은 [그림 8]처럼 총 n개가 존재한다. 만약 구간 $[t, t+\Delta]$가 멀티프랙탈 구간에 속한다면, 이를 포함하는 부분 구간들 중 다수에서 멀티프랙탈 검정의 귀무가설을 기각시킬 것이다. 본 연구에서는 특정 단위구간에서 멀티프랙탈 특성의 유무를 판단하기 위해 식 (3.4)와 같은 비율 지수를 계산했다. $1_{M(i)}$은 i 번째 부분 구간, $[t-(n-i)\Delta, t+i\Delta]$에서 멀티프랙탈 특성이 검출되면 (멀티프랙탈 검정의 귀무가설을 기각하면) 1 의 값을 갖고, 그렇지 않으면 0 이 된다. 본 연구에서는 I(t)가 임의의 임계값 (threshold value), I_M 보다 클 때, 구간 $[t, t+\Delta]$을 멀티프랙탈 구간으로 판단하였다.

$$I(t) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1_{M(i)} \qquad (3.4)$$

멀티프랙탈 구간 판별 모형 (multifractal regime detecting model, MRDM)의 성능을 검증하기 위해 [그림 9]와 같은 시뮬레이션 샘플을 설계했다. 전체 길이가 1500 인 샘플, {X(t)}을 가운데 구간,

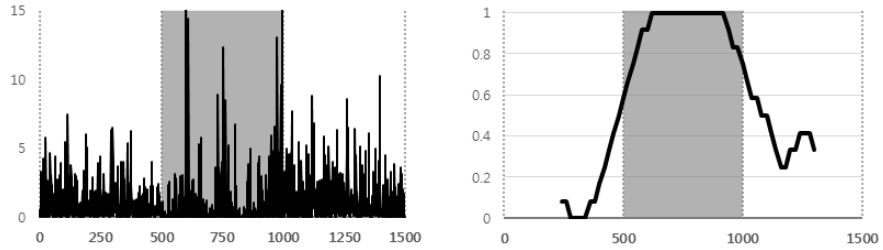
[32] Lee and Chang (2015) 참고

$\{X(t), t = 501, \ldots, 1000\}$만 멀티프랙탈 프로세스 (MMAR)를 따르도록 하고, 나머지 구간은 단일프랙탈 프로세스 (fBM)로 구성하였다. 발생 시킨 샘플에서 단위 구간 길이는 $\Delta = 20$, 부분 구간 길이는 $n\Delta = 240$으로 설정한 MRDM 을 적용했다. 각 단위 구간, $[t, t + \Delta]$를 포함하는 총 12 개의 부분 구간의 멀티프랙탈 검정 결과에 따라 식 (3.4)를 계산했다. .



[그림 9] MRDM 검증을 위한 시뮬레이션 샘플 구성

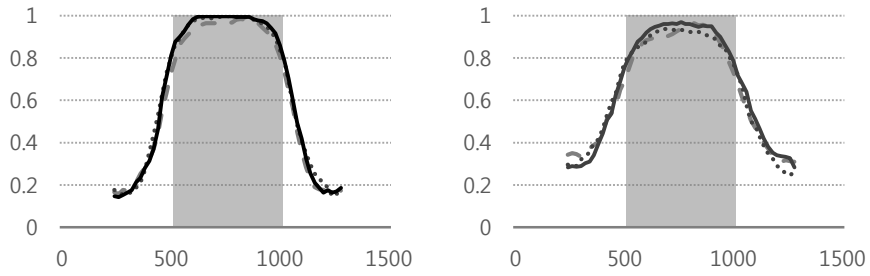
[그림 10]의 좌측은 [그림 9]에따라 발생시킨 샘플 예시의 변동성 (차분의 절대값)이고, 우측은 MRDM 을 통해 계산한 I(t)이다. 음영 부분이 실제 멀티프랙탈 구간이다. 예시의 멀티프랙탈 구간에서 I(t)가 상대적으로 높게 계산됨을 볼 수 있다.



[그림 10] MRDM 검증 시뮬레이션 예시 (좌: X(t), 우: I(t))

시뮬레이션 샘플을 총 1000 회 발생시켜 위의 분석을 반복했다. [표 6]은 임계값, I_M 을 변화시켜가며 실행한 시뮬레이션의 1 종 오류 (type 1 error)와 2 종 오류 (type 2 error) 비율을 보여준다. 1 종 오류는 실제 멀티프랙탈 구간, $\{X(t), t = 501, \dots, 1000\}$을 단일프랙탈 구간으로 잘못 판별한 오류이고, 2 종 오류는 단일프랙탈 구간에서 잘못 판별한 오류를 의미한다. I_M 이 클수록 멀티프랙탈 구간으로 판단하는 기준이 높아지므로 1 종 오류 비율은 증가하고 2 종 오류 비율은 감소하는 경향이 있다. 그리고 전반적으로 차분의 자기상관성이 없는 경우 $(H = 0.5)$ 에 모형이 상대적으로 높은 정확성을 보였다.

[표 6]의 1 종, 2 종 오류 비율은 다소 높게 측정되었는데, 이는 [그림 9]의 샘플 특성상 멀티프랙탈 구간과 단일프랙탈 구간의 경계 부근에서 오류가 많이 발생하기 때문이다. [그림 11]은 $I_M = 0.7$ 로 설정하고 MRDM 을 실행할 때, 샘플의 각 단위 구간, $\{[t, t + \Delta]: t = 220 + 20k,\ k = 0,1, \dots, 52\}$ 이 멀티프랙탈 구간으로 판별된 비율을 보여준다. 긴 점선과 짧은 점선, 실선은 각각 MMAR 모형의 λ_{mmar}가 1.1, 1.2, 1.3 인 경우의 결과이다. 경계 부근을 제외하면 1 종 오류와 2 종 오류가 확연히 감소함을 확인할 수 있다.



[그림 11] 각 단위 구간의 멀티프랙탈 판별 비율

(좌: $H = 0.5$, 우: $H = 0.7$)

[표 6] MRDM 검증 시뮬레이션 결과

λ \ I_M	0.6	0.7	0.8	0.9
Type 1 error				
1.1	0.040	0.066	0.105	0.164
1.2	0.024	0.039	0.075	0.125
1.3	0.015	0.032	0.059	0.107
Type 2 error				
1.1	0.432	0.325	0.217	0.125
1.2	0.472	0.354	0.243	0.144
1.3	0.461	0.344	0.231	0.132

(a) $H = 0.5$

λ \ I_M	0.6	0.7	0.8	0.9
Type 1 error				
1.1	0.069	0.112	0.176	0.258
1.2	0.070	0.110	0.171	0.259
1.3	0.052	0.082	0.135	0.205
Type 2 error				
1.1	0.560	0.437	0.311	0.189
1.2	0.557	0.435	0.298	0.183
1.3	0.567	0.443	0.317	0.204

(b) $H = 0.7$

제 5 절 금융 시장의 멀티프랙탈 구간 분석

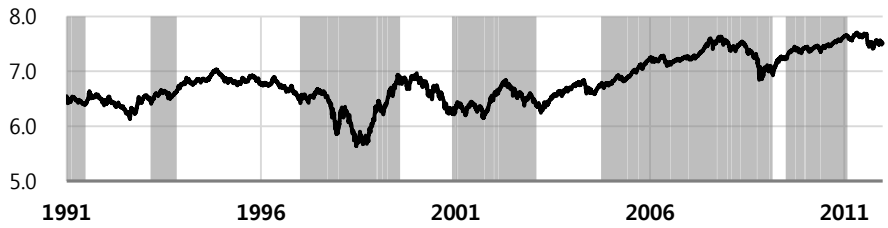
3 절과 4 절에서 제시한 멀티프랙탈 구간 판별 모형을 KOSPI 와 S&P500, FX 자료에 적용하였다. 부분 구간의 길이는 1 년, 단위 구간의 길이는 1 달로 설정했다. 멀티프랙탈 검정의 유의 수준은 5%를, 구간 판별 모형의 임계값 (I_M)은 0.7 을 적용했다. 그리고 각 자료에서 1990 년부터 2012 년까지의 기간 (총 276 개월)에서 멀티프랙탈 구간을 판별했다.

3.5.1. 멀티프랙탈 구간 분석 결과

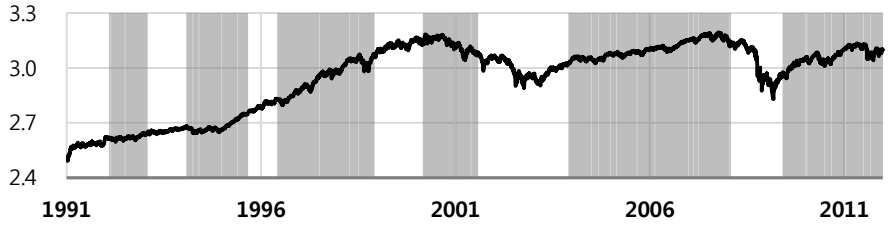
[그림 12]는 각 자료에서 MRDM 을 실행한 결과이다. 음영 부분이 멀티프랙탈 구간으로 판별된 구간이고, 실선은 로그가격 추세이다. KOSPI 와 S&P500 에서는 각각 6 개의 멀티프랙탈 구간 (총 143 개월과 159 개월)이 판별되었고, FX 에서는 4 개의 멀티프랙탈 구간 (총 192 개월)이 판별되었다. 3.1 절과 3.2 절에서 관찰했듯이 상대적으로 변동이 심하고, 멀티프랙탈 특성이 강한 FX 자료에서 판별한 멀티프랙탈 구간의 총 길이가 KOSPI 와 S&P500 자료의 결과보다 길었다.

[표 7]은 KOSPI, [표 8]은 S&P500, [표 9]는 FX 자료에서 판별한 각 구간의 통계량을 계산한 결과이다. KOSPI 시장의 멀티프랙탈 구간의 로그수익률 표준편차와 외도, 허스트 지수는 '비 멀티프랙탈 구간' (멀티프랙탈 특성이 검출되지 않은 구간)과 차이가 없었다. 반면 수익률 분포의 첨도와 꼬리 형태 (MEF), 멀티프랙탈 척도 (ΔH)는 확연한 차이를 보였다. 멀티프랙탈 구간들의 첨도는 한 구간(1997.01 ~ 1999.07)을 제외하고 비 멀티프랙탈 구간들의 첨도 중 최대값 (4.31)보다 컸다. MEF 역시 한 구간(1997.01 ~ 1999.07)을

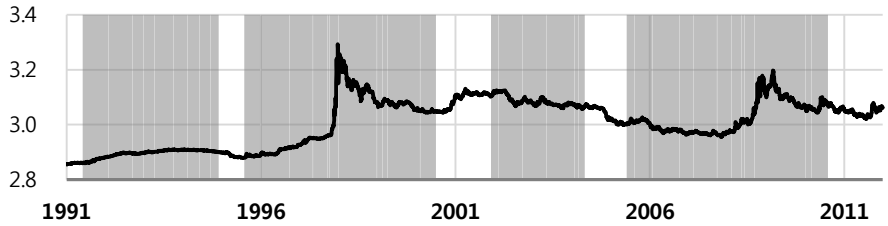
제외하고 상대적으로 큰 값을 보였는데, 특히 확률분포의 왼쪽 꼬리에 대한 MEF 가 큰 값을 보였다.



(a) KOSPI



(b) S&P500



(b) FX

[그림 12] 각 금융 시장의 멀티프랙탈 구간 판별 결과

S&P500 자료의 멀티프랙탈 구간들은 KOSPI 와 마찬가지로 확률분포의 왼쪽 꼬리형태가 상대적으로 두껍게 나타났다. 하지만 첨도는 큰 차이를 보이지 않았다. FX 자료의 결과도 KOSPI 자료와 유사한 경향을 보였다. 다만 FX 시장의 멀티프랙탈 구간에서는

확률분포의 꼬리 형태가 왼쪽과 오른쪽에 상관없이 모두 큰 값을 보였다.

멀티프랙탈 구간 판별이 제대로 이루어졌는지 확인하기 위해 각 구간마다 멀티프랙탈 척도를 계산하고 3.3 절의 멀티프랙탈 검정을 실행했다. 멀티프랙탈 구간은 q 가 1 과 2 인 경우를 이용하여 판별하였으므로, 보수적인 검정을 위해 각 구간의 검정은 q 가 2 와 3 인 경우까지 추가로 진행했다. 괄호 안에는 각 멀티프랙탈 검정의 유의 확률을 표기했다. 검정 결과, 모든 멀티프랙탈 구간들에서 $\Delta H(1,2)$ 와 $\Delta H(2,3)$ 에 대한 귀무가설, $\Delta H = 0$ 이 기각되었다. 반면, 비 멀티프랙탈 구간들 중 유의 수준 5%에서 두 귀무가설을 모두 기각시킨 구간은 없었다.

KOSPI 와 FX 자료의 결과에서 외환위기(1998)와 신용카드 대란(2003), 세계 금융위기(2008) 시기는 공통적으로 멀티프랙탈 구간으로 판별되었지만, IT 붕괴위기 (2000) 시기는 멀티프랙탈 구간으로 판별되지 않았다. 그리고 S&P500 자료에서는 세계 금융위기(2008) 시기가 멀티프랙탈 구간에 포함되지 않았다. 때문에 시계열의 멀티프랙탈 특성이 금융 위기를 선행한다는 주장[33]은 본 연구의 결과로는 입증하기 어렵다. 반면, 멀티프랙탈 구간에서 수익률 확률분포의 꼬리형태가 상대적으로 두꺼움은 확인할 수 있었다.

[33] Grech and Mazur (2004), Grech and Pamuła (2008), Caraiani (2012)

[표 7] KOSPI 시장의 멀티프랙탈 구간별 통계량

멀티프랙탈 구간						
기간	1991.01 - 1991.06	1993.03. - 1993.10.	1997.01. - 1999.07.	2000.12. - 2003.01.	2004.10. - 2009.02.	2009.07. - 2011.01.
표준편차	0.01	0.01	0.03	0.02	0.02	0.01
외도	0.48	0.10	0.04	-0.44	-0.58	-0.71
첨도	6.48	5.00	3.91	5.86	10.30	4.83
MEF($upper, lower$)	(0.85, 0.88)	(0.92, 1.20)	(0.42, 0.48)	(0.37, 0.85)	(0.97, 1.10)	(0.36, 0.77)
H(2)	0.38	0.54	0.51	0.49	0.49	0.50
ΔH(1,2) (p-value)	0.07 (0.00)	0.05 (0.00)	0.03 (0.00)	0.04 (0.00)	0.03 (0.00)	0.04 (0.00)
ΔH(2,3) (p-value)	0.04 (0.00)	0.05 (0.00)	0.01 (0.00)	0.04 (0.00)	0.02 (0.00)	0.03 (0.00)
비 멀티프랙탈 구간						
기간	1991.07. - 1993.02.	1993.11. - 1996.12.	1999.08. - 2000.11.	2003.02. - 2004.09.	2009.03. - 2009.06.	2011.02. - 2011.12.
표준편차	0.01	0.01	0.03	0.02	0.02	0.02
외도	0.37	0.23	-0.28	-0.30	-0.16	-0.34
첨도	3.26	3.56	4.11	4.19	3.32	4.31
MEF($upper, lower$)	0.44, 0.36	0.52, 0.33	0.27, 0.72	0.71, 0.63	0.39, 0.26	0.40, 0.59
H(2)	0.54	0.55	0.46	0.48	0.69	0.46
ΔH(1,2) (p-value)	0.00 (0.75)	0.00 (0.07)	0.01 (0.25)	0.02 (0.03)	-0.01 (0.98)	0.00 (0.81)
ΔH(2,3) (p-value)	-0.01 (0.00)	0.01 (0.00)	0.01 (0.02)	0.01 (0.15)	0.00 (0.98)	-0.01 (0.00)

[표 8] S&P500 시장의 멀티프랙탈 구간별 통계량

멀티프랙탈 구간						
기간	1992.02. - 1993.01	1994.02 - 1995.08	1996.06. - 1998.11.	2000.03. - 2001.07.	2003.12. - 2008.01.	2009.06. - 2011.12.
표준편차	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01
외도	-0.02	-0.25	-0.67	0.17	-0.36	-0.46
첨도	3.32	4.59	9.55	4.44	4.75	5.84
MEF($upper, lower$)	0.34, 0.40	0.48, 0.71	1.01, 1.00	0.62, 0.83	0.48, 0.77	0.64, 0.68
H(2)	0.43	0.50	0.47	0.45	0.44	0.45
ΔH(1,2) (p-value)	0.04 (0.00)	0.04 (0.00)	0.04 (0.00)	0.02 (0.00)	0.02 (0.00)	0.04 (0.00)
ΔH(2,3) (p-value)	0.02 (0.00)	0.03 (0.00)	0.05 (0.00)	0.02 (0.00)	0.01 (0.00)	0.02 (0.00)
비 멀티프랙탈 구간						
기간	1991.01. - 1992.01.	1993.02. -1994.01.	1995.09. - 1996.05.	1998.12. - 2000.02.	2001.08. - 2003.11.	2008.02. - 2009.05.
표준편차	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.01
외도	0.22	-0.18	-0.84	-0.14	0.20	-0.03
첨도	5.00	5.40	5.50	3.12	4.16	5.84
MEF($upper, lower$)	0.72, 0.73	0.54, 0.75	0.36, 0.75	0.26, 0.51	0.71, 0.50	0.90, 0.70
H(2)	0.64	0.38	0.49	0.43	0.48	0.41
ΔH(1,2) (p-value)	-0.01 (0.58)	0.03 (0.15)	0.01 (0.64)	0.01 (0.99)	-0.01 (0.01)	-0.01 (0.64)
ΔH(2,3) (p-value)	0.00 (0.98)	0.03 (0.13)	0.02 (0.01)	0.01 (0.04)	-0.01 (0.21)	0.00 (0.99)

[표 9] FX 시장의 멀티프랙탈 구간별 통계량

멀티프랙탈 구간				
기간	1991.06 - 1994.11	1995.08. - 2000.06.	2001.12. - 2004.04.	2005.06. - 2010.07.
표준편차	0.00	0.01	0.00	0.00
외도	0.14	0.07	0.49	-0.77
첨도	5.44	78.60	5.22	28.24
MEF($upper, lower$)	0.70, 0.62	2.67, 2.49	0.73, 0.63	1.51, 1.71
H(2)	0.53	0.43	0.57	0.52
ΔH(1,2) (p-value)	0.04 (0.00)	0.12 (0.00)	0.03 (0.00)	0.06 (0.00)
ΔH(2,3) (p-value)	0.03 (0.00)	0.05 (0.00)	0.03 (0.00)	0.07 (0.00)

비 멀티프랙탈 구간					
기간	1991.01. - 1991.05.	1994.12. - 1995.07.	2000.07. - 2001.11.	2004.05. - 2005.05.	2010.08. - 2011.12.
표준편차	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
외도	-0.24	0.20	-0.27	-0.39	0.30
첨도	2.84	4.90	6.97	5.34	2.77
MEF($upper, lower$)	0.84, 0.22	0.66, 0.58	0.58, 0.89	0.56, 0.89	0.40, 0.22
H(2)	0.53	0.55	0.53	0.59	0.49
ΔH(1,2) (p-value)	0.00 (0.15)	-0.01 (0.00)	0.00 (0.72)	-0.01 (0.34)	0.00 (0.22)
ΔH(2,3) (p-value)	0.00 (0.24)	-0.01 (0.06)	0.00 (0.30)	0.00 (0.58)	0.00 (0.84)

3.5.2. 대리자료 테스트

앞서 제시한 멀티프랙탈 구간 판별 모형의 안정성을 검증하기 위해 대리자료 테스트 (surrogate test)를 실행했다. 대리자료 테스트는 원 시계열의 통계적 특성들을 그대로 유지하는 샘플 혹은 임의로 선별한 특성을 갖는 샘플을 발생시켜서 모형을 적용하는 방식으로 이루어진다. 만약 대리자료에서의 결과가 원자료에서의 결과와 유사하다면, 모형의 안정성이 높다고 판단할 수 있다.

본 단원의 대리자료 테스트는 다음과 같이 구성했다. 먼저 원 자료와 같은 길이의 대리자료 시계열 300 개를 발생시키고, 각각의 시계열에서 원 자료와 같은 방식으로 멀티프랙탈 구간을 판별한다. 원 자료에서 멀티프랙탈 구간으로 판별된 구간이 대리자료에서 비 멀티프랙탈 구간으로 판별된 것을 1 종 오류, 반대로 원 자료의 비 멀티프랙탈 구간이 대리자료에서 멀티프랙탈 구간으로 판별되면 2 종 오류로 분류하였다.

본 단원에서는 3 가지 종류의 대리자료 샘플을 발생시켰다. 이는 원 자료에서 멀티프랙탈 특성에 영향을 미치는 통계적 특성을 선별적으로 유지하기 위함이다.

첫 번째 샘플은 퓨리에 위상 무작위화 (Fourier phase randomization) 방법을 이용하여 발생시켰다. IAAFT (improved amplitude adjusted Fourier transformation) 방법은 원 자료의 차분, $\{\Delta X(t)\}$ 의 순서를 뒤섞어서 대리자료 샘플을 구성한다. 이 때, 원 자료의 비선형 자기상관성은 제거되고 선형 자기상관성과 확률분포의 꼬리형태 특성은 유지하게 된다[34]. 본 연구에서는 원자료에서 판별한 각 구간의 특성을 유지하기 위해 각 구간마다 IAAFT 샘플을 발생시키고 이들을 연결하여 샘플을 구성했다.

[34] Theiler, et al. (1992)

두 번째는 시계열의 차분이 정규 분포를 따르면서 기존의 자기상관성은 유지하는 샘플을 발생시켰다. 이를 위해 우선 원 자료에서 차분, $\{\Delta X(t)\}$의 순위 계열, $\{O_{\Delta X}(t)\}$를 구한다. 원 자료와 같은 길이의 추정 정규 분포를 따르는 $\{\Delta Y(t)\}$를 발생시키고, 이를 크기 순위가 $\{O_{\Delta X}(t)\}$가 되도록 재정렬한다. 이렇게 발생시킨 샘플은 원 자료의 자기상관 특성은 유지하지만, 확률분포의 형태 특성들은 제거된다.

세 번째 샘플은 정규 분포 대신 t 분포를 적용하여 두 번째 샘플과 같은 방법으로 발생시켰다. 이에 따라 세 번째 샘플은 원 자료의 자기상관성과 확률분포의 꼬리형태 특성을 모두 유지하게 된다. 각 자료의 정규 분포와 t 분포 모수는 3.1 절에서 추정한 값들을 적용했다.

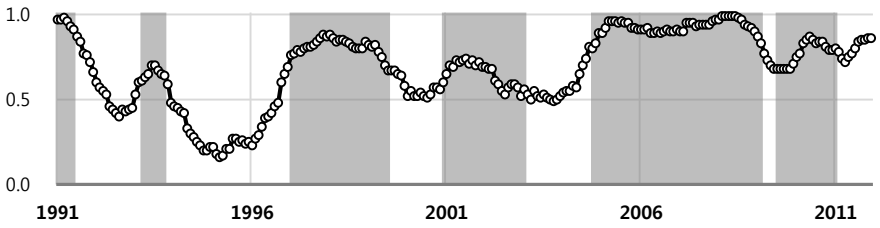
[표 10]은 대리자료 테스트의 1 종 오류와 2 종 오류 비율을 보여준다. [그림 13], [그림 14], [그림 15]은 300 개의 대리자료 시계열에서 각 단위 구간마다 멀티프랙탈 구간으로 판별된 비율의 추이를 보여준다. 첫 번째로 IAAFT 대리자료의 경우, KOSPI 자료와 S&P500, FX 자료에서 1 종 오류 비율이 각각 0.18, 0.24, 0.08 수준을 보였다. 하지만 2 종 오류 비율은 각각 0.52, 0.58, 0.83 으로 다소 높았다. [그림 13]의 (a)를 보면 음영 부분 (KOSPI 자료에서 판별된 멀티프랙탈 구간)에서는 IAAFT 샘플이 멀티프랙탈로 판별되는 비율이 다소 높아지는 모습이 관찰된다. 반면 S&P500 과 FX 자료를 이용한 결과, (b)와 (c)에서는 특별한 경향이 없이 높은 비율을 유지한다.

두 번째로 정규 분포를 이용한 대리자료의 경우, 매우 높은 1 종 오류 비율을 보인다. [그림 14]를 보아도 대리자료에서 판별되는 멀티프랙탈 구간들과 음영 부분과의 상관성이 낮았다.

세 번째로 t 분포를 이용한 대리자료의 경우 각 자료 모두 상대적으로 낮은 수준의 1 종 오류 비율 (0.07, 0.17, 0.08)과 2 종 오류 비율 (0.28, 0.25, 0.38)을 보였다. [그림 15] 에서도 몇몇 구간들 (KOSPI 에서는 2000 년, S&P500 에서는 1994 년과 2001 년 부근, FX 에서는 1996 년, 2001 년 부근)을 제외하면 대리자료의 결과와 원 자료의 결과가 유사함을 확인할 수 있다. 이러한 결과는 실제 금융 시계열에 존재하는 멀티프랙탈 특성은 시계열의 자기상관 특성 만으로는 설명할 수 없고, 확률 분포의 특성도 함께 고려해야 설명이 가능함을 의미한다.

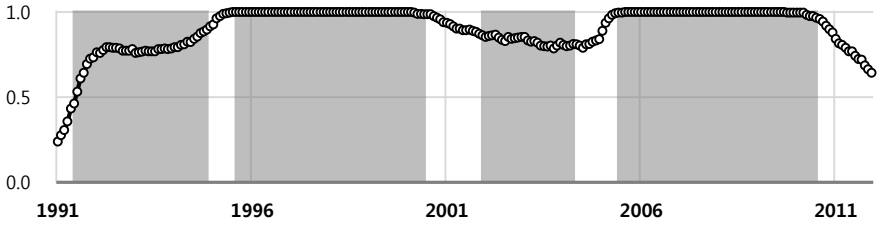
[표 10] 대리자료 테스트 결과의 오류 비율

	KOSPI		S&P500		FX	
Error type	Type 1	Type 2	Type 1	Type 2	Type 1	Type 2
IAAFT surrogate	0.183	0.517	0.240	0.579	0.077	0.833
Normal surrogate	0.764	0.163	0.731	0.567	0.566	0.548
t surrogate	0.070	0.275	0.169	0.253	0.075	0.380



(a) KOSPI

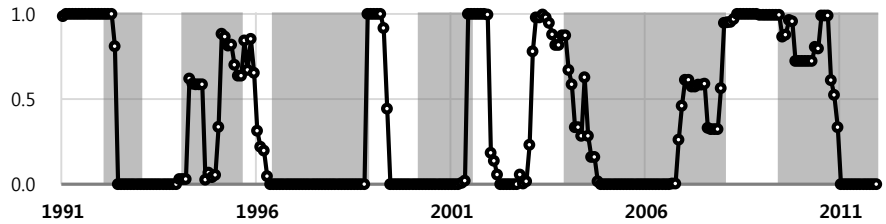
(b) S&P500



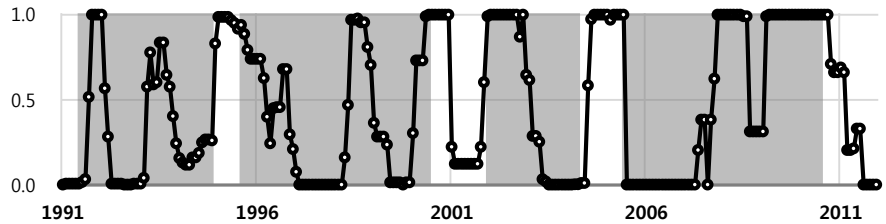
(c) FX

[그림 13] IAAFT 대리자료 테스트 결과

(a) KOSPI

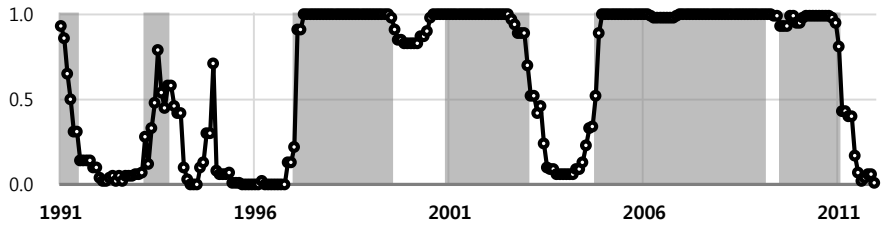


(b) S&P500

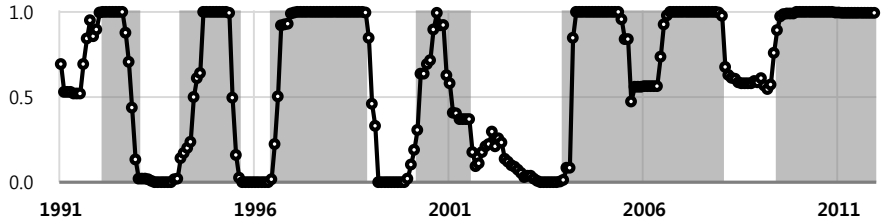


(c) FX

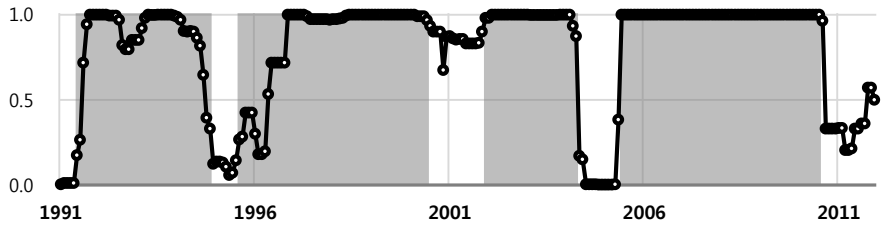
[그림 14] Normal 대리자료 테스트 결과



(a) KOSPI



(b) S&P500



(c) FX

[그림 15] t 대리자료 테스트 결과

제 6 절 결과 요약 및 한계점

3.1 절과 3.2 절에서는 KOSPI 와 S&P500 지수, 원달러 환율 (FX) 시계열의 통계적 특성을 분석했다. 그 결과 모든 자료에서 변동성 군집현상과 장기기억 특성, 확률분포의 두꺼운 꼬리형태, 멀티프랙탈 특성이 관찰되었다. 멀티프랙탈 특성의 경우 시간에 따라 존재와 부재를 반복하는 모습을 보였다. 전체적으로 KOSPI 와 S&P500 보다 FX 시계열에서 상대적으로 높은 변동성 군집현상과 확률분포의 꼬리두께, 멀티프랙탈 척도를 보였다.

3.3 절과 3.4 절에서는 시계열에서 짧은 구간을 전진하며 분석하는 경우에 적용할 수 있는 멀티프랙탈 검정 방법과 멀티프랙탈 구간 판별 방법을 제시했다. 그리고 3.5 절에서는 이들을 이용해 각 실증 자료에서 멀티프랙탈 구간을 판별해냈다. 멀티프랙탈 구간에서는 상대적으로 두꺼운 확률분포의 꼬리형태와 높은 첨도, 멀티프랙탈 척도를 보였다. 이처럼 멀티프랙탈 구간과 비 멀티프랙탈 구간은 통계적 특성에 차이가 존재하므로 두 구간에는 서로 다른 시계열 모형을 적용해주어야 한다.

결과에 대한 사후검정으로 각 구간을 대상으로 $\Delta H(1,2)$ 와 $\Delta H(2,3)$ 에 대한 멀티프랙탈 검정을 실행하였다. 그 결과 모든 멀티프랙탈 구간에서 $\Delta H(1,2)$와 $\Delta H(2,3)$가 통계적으로 0 보다 컸고, 비 멀티프랙탈 구간에서는 두 멀티프랙탈 검정을 동시에 기각한 구간이 없었다. 추가로 대리자료 테스트를 통해 모형의 안정성을 보였다. 원 자료의 통계적 특성 (자기상관 특성과 확률분포 특성)을 유지하도록 t 분포를 이용하여 구성한 대리자료에서 멀티프랙탈 구간을 판별했을 때, 원 자료의 결과와 유사한 판별 결과를 도출했다. 이러한 결과는 KOSPI 와 S&P500 지수, FX 시계열에 존재하는 멀티프랙탈 특성이 변동성의 자기상관 특성과 수익률의 확률분포 특성에 동시에 영향을 받음을 의미한다.

3 장에서 제시한 모형은 시계열의 H(1) 과 H(2) 만을 비교함에도 비교적 짧은 구간에서 멀티프랙탈 특성을 검정할 수 있었다. 실증 연구에 적용할 수 있는 기존 멀티프랙탈 검정법이 부족했던 점에서 본 연구는 의미가 있다. 이어서 제시한 멀티프랙탈 구간을 판별하는 연구 또한 기존의 방법이 없었다는 점에서 의미가 있다. 하지만 멀티프랙탈 구간의 경계 부근에서는 모형의 정확성이 떨어지는 단점이 있다. 또한 긴 멀티프랙탈 구간 사이에 짧은 단일프랙탈 구간이 있는 경우, 혹은 그 반대의 경우에 짧은 구간을 판별해내기가 쉽지 않다는 점도 모형의 단점이다.

제 4 장 멀티프랙탈 특성의 요소 분석

3 장에서는 실제 금융시장에서 멀티프랙탈 특성이 시간에 따라 변동하는 모습을 관찰하고, 멀티프랙탈 구간을 판별했다. 그리고 멀티프랙탈 구간과 단일프랙탈 구간의 통계적 특성이 서로 다름을 보였다. 4 장에서는 멀티프랙탈 특성과 시계열의 다른 통계적 특성들과의 관계에 대한 구체적인 연구를 진행한다.

2.4 절에서 언급했듯이 이 관계를 규명하기 위한 다양한 연구들이 있었고, [표 11]은 각 연구들의 자료와 결과를 표기했다. 'O'는 해당 연구에서 멀티프랙탈 특성의 각 요소 (확률분포의 꼬리형태 특성 혹은 변동성의 자기상관성)를 지지했음을 의미하고, 'X'는 부정했음을 의미한다. '△'는 각 요소가 상대적으로 약한 영향력을 지님을 의미하고, '-'는 언급하지 않았음을 의미한다. 확률분포 특성 요소는 Suárez-García and Gómez-Ullate (2014)를 제외한 대부분의 연구들에서 지지했다. 반면, 자기상관성 요소는 각 연구에서 서로 다른 결과를 제시했다.

다음은 각 연구들에서 주목할만한 결과나 주장들을 정리했다. Kantelhardt, et al. (2002)는 시계열 자료에서 자기상관성을 제거한 샘플을 얻기 위해 시계열 차분의 순서를 무작위로 뒤섞는 방법을 제시했다. Matia, et al. (2003)와 Kwapień, et al. (2005)에서는 개별 주식 자료에서 멀티프랙탈을 측정한 결과, 시계열의 멀티프랙탈 특성과 변동성 자기상관성의 관계가 선형이 아님을 보였다. Drożdż, et al. (2009)와 Zhou (2012)는 MFDFA 방법을 이용하여 멀티프랙탈 특성을 측정할 때, 대상 샘플의 크기가 작을수록 멀티프랙탈 특성이 과대 측정되는 경향을 관찰했다. 이러한 현상으로 인해 단일프랙탈 시계열에서도 멀티프랙탈 특성이 측정되었다. 이러한 오류를 유한

샘플크기 효과 (finite size effect)라고 명명했다. Barunik, et al. (2012)에서는 원 자료의 자기상관성을 제거한 샘플에서 멀티프랙탈 척도를 측정했을 때 본래의 멀티프랙탈 척도보다 값이 증가하는 경우를 관찰했다. 그리고 이를 변동성의 단기 기억 (short memory)으로 인한 효과라고 언급했다. Zhou (2012)의 연구에서는 변동성의 자기상관성이 존재하는 시계열에서만 확률분포 형태의 영향력이 존재한다고 주장했다. 하지만 Barunik, et al. (2012)와 Grahovac and Leonenko (2014)는 자기상관성이 없는 시뮬레이션 샘플 분석에서 멀티프랙탈 특성을 관찰하여 이와 상반된 결과를 제시했다. 마지막으로 Drożdż, et al. (2009), Zhou (2009), Zunino, et al. (2009), Zhou (2012)의 연구들에서는 퓨리에 위상 무작위화 방법을 통해 비선형 자기상관성이 멀티프랙탈 특성에 영향을 미침을 보였다.

4.1 절에서는 유한 샘플크기 효과를 분석한다. 4.2 절에서는 확률분포의 꼬리형태 요소, 4.3 절에서는 변동성의 자기상관성 요소와 멀티프랙탈 특성의 관계를 시뮬레이션을 통해 분석했다. 그리고 실제 금융 시장에서 대리 자료 분석을 이용해 이들을 관찰했다. 4.4 절에서는 분석 결과를 요약하였다.

[표 11] 멀티프랙탈 특성의 요소 분석 연구 현황

연구	확률분포의 꼬리형태	변동성의 자기상관성	자료
Kantelhardt, et al. (2002)	O	O	Simulation
Matia, et al. (2003)	O	△	US stock
	O	O	US commodity
Kwapień, et al. (2005)	O	O	US stock
Lim, et al. (2007)	O	△	US bond
	O	X	Korean bond future
Jiang and Zhou (2008b)	O	X	US & China stock index
Drożdż, et al. (2009)	-	O	Simulation
Kumar and Deo (2009)	O	O	India & US stock index
Zhou (2009)	O	△	US stock index (DJIA)
Zunino, et al. (2009)	O	△	US & Latin American stock index
Barunik, et al. (2012)	O	-	Simulation, US stock, bond index & FX
Oh, et al. (2012)	O	O	Asian FX
Zhou (2012)	O	O	Simulation & US stock index (DJIA)
Grahovac and Leonenko (2014)	O	-	Simulation & US stock index (S&P)
Suárez-García and Gómez-Ullate (2014)	X	O	Spain stock index

제 1 절 유한 샘플크기 효과

유한 샘플크기 효과를 검증하기 위해서 3 가지 종류의 단일프랙탈 시계열을 발생시켰다. 첫 번째 샘플 모형은 브라우니안 모션(BM)이고, 두 번째와 세 번째 샘플 모형은 식 (4.1)과 같은 MA (moving average) 확률과정이다. ε는 표준 가우시안 잡음이다. MA 확률과정은 자기상관성을 지니고, 그 크기는 θ에따라 증가한다. 각 샘플 모형의 θ는 0.2 와 0.4 로 설정했다.

$$\Delta X(t) = \varepsilon(t) + \theta\varepsilon(t-1) \qquad (4.1)$$

각 모형마다 시뮬레이션 샘플을 1000 회씩 발생시켰다. 그리고 샘플마다 MFDFA 와 GHE 추정방법을 이용해 멀티프랙탈 척도, $\Delta H(1,3)$를 계산했다. BM 과 MA 과정 모두 단일프랙탈 과정이므로 멀티프랙탈 척도는 이론적으로 0 이다.

[표 12]는 각 모형과 샘플 크기에 따른 $\Delta H(1,3)$의 평균을 보여준다. 괄호 안의 값은 $\Delta H(1,3)$이 0 과 다르다는 귀무가설에 대한 t 검정의 유의 확률이다. 각 추정 방법에 따라 계산한 멀티프랙탈 척도를 ΔH_{MFDFA}와 ΔH_{GHE}로 표기했다.

MFDFA 방법으로 추정한 결과에서는 모든 경우에 0 보다 큰 ΔH_{MFDFA} 가 계산되었다. 그리고 ΔH_{MFDFA} 는 시계열 차분의 자기상관성에 의해 증가하고, 샘플 크기에 따라서는 감소하는 모습을 보였다. 이러한 결과는 Drożdż, et al. (2009)와 Zhou (2012)의 시뮬레이션 결과와 같다. 이들 연구에서는 샘플의 크기를 10^7까지 늘려가면서 유한 샘플크기 효과가 감소하는 모습을 보였다.

반면, GHE 방법의 결과에서는 유한 샘플크기 효과가 상대적으로 작게 측정되었다. BM 에서는 샘플 크기가 250 인 경우에도 1% 유의 수준에서 귀무가설, $\Delta H_{GHE} = 0$을 기각하지 않았다. MA 샘플에서도 샘플크기가 1000 이상인 경우에 귀무가설을 기각하지 않았다.

[표 12]의 결과를 다음과 같이 정리할 수 있다. 유한 샘플크기 효과는 길이가 짧은 샘플에서 멀티프랙탈 척도가 과대 측정되는 현상을 말하며, 시계열의 자기상관성이 클수록 증가한다. GHE 방법보다 MFDFA 방법에서 크게 나타나며, 샘플의 크기를 충분히 늘리면 감소한다. 따라서 본 연구 3.4 절의 멀티프랙탈 구간판별 분석과 같이 샘플의 길이를 짧게 유지해야 하는 경우에는 MFDFA 보다는 GHE 추정법을 사용하는 것이 바람직하다.

[표 12] 시뮬레이션: 단일프랙탈 샘플에서의 $\Delta H(1,3)$ 추정 결과

샘플 크기	BM	MA(1) ($\theta = 0.2$)	MA(1) ($\theta = 0.4$)
MFDFA method			
250	0.017 (0.000)	0.023 (0.000)	0.029 (0.000)
10^3	0.009 (0.000)	0.015 (0.000)	0.020 (0.000)
10^4	0.006 (0.000)	0.012 (0.000)	0.017 (0.000)
10^5	0.006 (0.000)	0.011 (0.000)	0.016 (0.000)
GHE method			
250	0.004 (0.031)	0.009 (0.000)	0.007 (0.000)
10^3	0.001 (0.044)	0.002 (0.032)	0.002 (0.110)
10^4	0.000 (0.411)	0.000 (0.669)	0.000 (0.983)
10^5	0.000 (0.696)	0.000 (0.501)	0.000 (0.914)

제 2 절 확률분포의 꼬리형태 요소

4.2.1. 시뮬레이션 분석

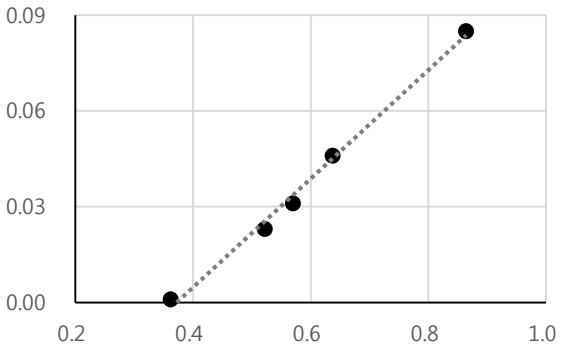
차분의 확률분포가 두꺼운 꼬리형태를 갖도록 t 분포를 이용해 시뮬레이션 샘플을 발생시켰다. 차분이 자유도 (df)가 $\{4, 6, 8, 10\}$인 t 분포와 정규분포(t 분포의 자유도가 ∞ 인 경우)를 따르고, 길이가 1000 인 샘플을 각각 1000 회씩 발생시켰다.

[표 13]은 각 샘플마다 GHE 방법으로 추정한 $\Delta H(1,3)$ 의 평균과 표준편차, $\sigma_{\Delta H(1,3)}$를 보여준다. MEF 는 3.3 절에서 설명한 확률분포의 꼬리두께를 의미하는 지표이다. t 분포의 자유도가 감소할수록 꼬리형태 (MEF)가 두꺼워짐을 확인할 수 있다. 그리고 이와 함께 멀티프랙탈 척도도 증가한다. 이는 확률분포의 꼬리형태가 멀티프랙탈 특성에 영향을 미침을 의미한다.

[그림 16]는 각 샘플에서 측정한 평균 MEF 와 $\Delta H(1,3)$ 의 관계를 보여준다. 추세선의 기울기는 0.17 이다. 이를 보면 멀티프랙탈 특성에 대한 꼬리형태 요인의 영향력이 선형적임을 확인할 수 있다.

[표 13] 시뮬레이션: t 분포 샘플에서의 ΔH(1,3) 추정 결과

df	∞	10	8	6	4
ΔH(1,3)	0.001	0.023	0.031	0.046	0.085
$\sigma_{\Delta H(1,3)}$	0.013	0.016	0.017	0.021	0.033
MEF	0.362	0.522	0.570	0.637	0.864



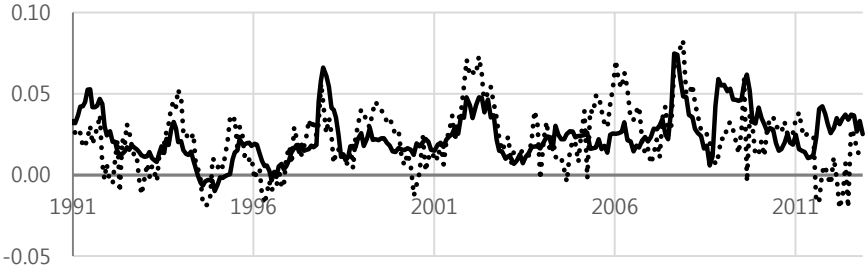
[그림 16] 꼬리형태와 멀티프랙탈 특성 (x: MEF, y: ΔH(1,3))

4.2.2. 실증 분석

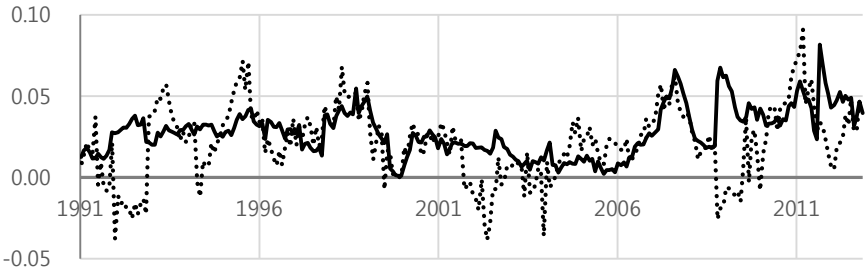
실증자료에서 240 일의 부분구간을 20 일씩 전진하면서 확률분포의 꼬리형태 특성에 따른 멀티프랙탈 특성의 크기를 측정했다. 이를 위해 각 부분 구간마다 시계열 차분, $\{\Delta X(t)\}$의 순서를 무작위로 섞어서 샘플을 재구성했다[35]. 이 과정을 통해 구성한 무작위 샘플은 원 자료의 확률분포 특성은 온전히 유지하지만, 자기상관 특성은 제거된다. 200 개의 무작위 샘플에서 GHE 방법으로 추정한 ΔH의 평균을 ΔH_{pdf}라고 표기했다.

[그림 17]는 KOSPI 와 S&P500, 원달러 환율 (FX) 자료에서 구간별로 추정한 $\Delta H_{pdf}(1,2)$의 추이이다. (a) KOSPI 에서 추정한 ΔH_{pdf}의 평균은 0.024 로 ΔH (0.022)와 비슷한 수준이었다. 또한 두 지표 사이의 상관계수는 0.45 로 금융위기 이후 시기를 제외하고는 유사한 추이를 보였다. 따라서 KOSPI 에서의 멀티프랙탈 특성은 확률분포의 특성으로 대부분 설명 가능하다고 해석할 수 있다. 반면, (b) S&P 에서는 ΔH_{pdf}의 평균이 0.028 로 ΔH의 평균 (0.021)보다 다소 높았고, 상관계수는 0.35 로 KOSPI 에서보다 낮았다. 두 지표의 추이도 대부분의 시기에서 상이한 모습을 보인다. 이는 S&P500 에 존재하는 멀티프랙탈 특성과 확률분포 특성과의 관계가 상대적으로 낮음을 의미한다. 마지막으로 (c) FX 에서는 ΔH_{pdf}의 평균 (0.050)과 ΔH 의 평균 (0.031)이 큰 차이를 보였지만, 상관계수는 0.55 로 높았다. 두 지표의 추이도 외환 위기 시기 (1998 년 부근)를 제외하면 유사한 움직임을 보였다.

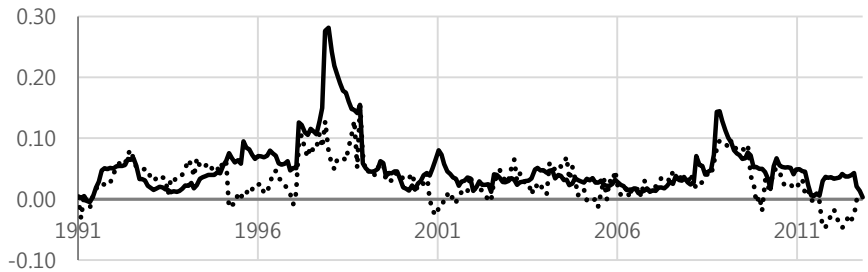
[35] 시계열의 확률분포 형태를 유지하면서 자기상관성을 제거하는 방법으로 Kantelhardt, et al. (2002)에서 제시했다.



(a) KOSPI 시계열의 ΔH (점선)와 ΔH_{pdf} (실선)



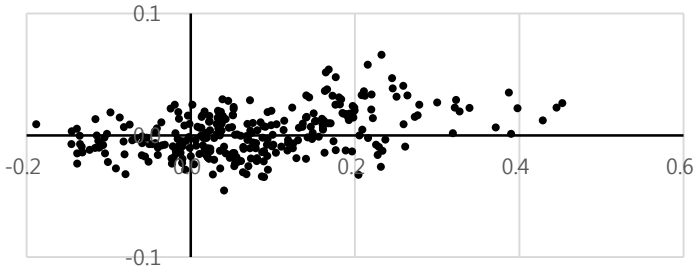
(b) S&P500 시계열의 ΔH (점선)와 ΔH_{pdf} (실선)



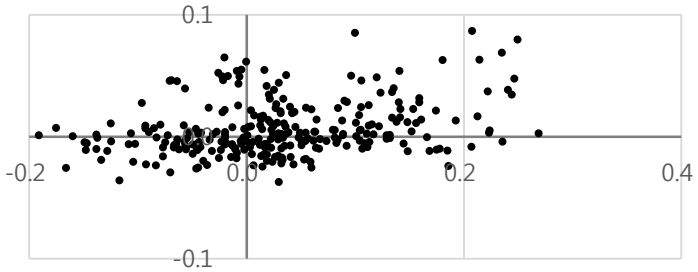
(c) FX 시계열의 ΔH (점선)와 ΔH_{pdf} (실선)

[그림 17] 실증 자료에서 $\Delta H(1,2)$와 $\Delta H_{pdf}(1,2)$ 추정 결과

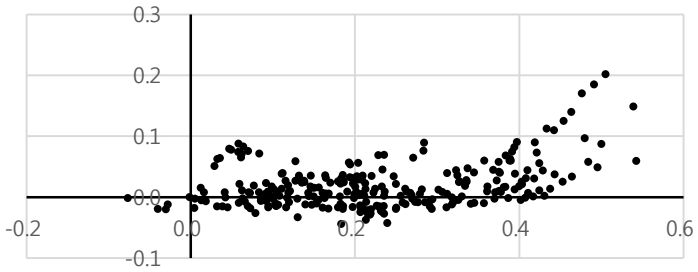
[그림 17]에서는 ΔH_{pdf}가 ΔH보다 큰 구간이 다수 관찰된다. 특히 (a)와 (c)에서는 외환 위기 구간, (a)와 (b)에서는 세계 금융위기 구간 (2008 년 부근)에서 이와 같은 모습을 보였다. Barunik, et al. (2012)에서는 시계열의 자기상관성을 제거했을 때 멀티프랙탈 척도가 증가하는 현상이 변동성의 단기기억에 영향을 받아 발생할 수 있다고 언급했다. 본 연구에서는 단기기억과 멀티프랙탈 특성 사이의 관계를 확인하기 위해 각 부분 구간에서 측정한 변동성의 시차 1 자기상관 계수 (lag 1 auto-correlation function)와 $\Delta H_{pdf} - \Delta H$ 의 관계를 분석했다. [그림 18]에서는 변동성의 단기기억이 증가할 때 $\Delta H_{pdf} - \Delta H$ 값도 증가하는 경향을 보이는데, FX 자료에서 상대적으로 명확한 상관관계가 관찰된다. 이와 같은 결과는 Barunik, et al. (2012)의 주장을 지지한다.



(a) KOSPI 시계열의 ACF (x 축)와 $\Delta H_{pdf} - \Delta H$ (y 축)



(b) S&P500 시계열의 ACF (x 축)와 $\Delta H_{pdf} - \Delta H$ (y 축)



(c) FX 시계열의 ACF (x 축)와 $\Delta H_{pdf} - \Delta H$ (y 축)

[그림 18] ACF 와 $\Delta H_{pdf} - \Delta H$

제 3 절 변동성의 자기상관성 요인

4.3.1. 시뮬레이션 분석

변동성의 자기상관성이 존재하는 시계열 샘플을 ARCH(1)와 GARCH(1,1) 모형을 이용해 발생시켰다. 시계열의 차분, ΔX(t) 와 변동성, $\sigma_{\Delta X}$는 식 (4.2)와 식 (4.3)을 따른다. 식 (4.3)에서 β가 0 인 경우가 ARCH(1) 모형이고, 0 이 아닌 경우가 GARCH(1,1) 모형이다. 상수, c 는 모든 샘플의 전체 변동성을 0.1 로 유지하기 위해 $(1-\alpha-\beta)/10$ 으로 설정했다[36]. 각 샘플의 길이는 1000 이고, 1000 회씩 발생시켰다.

$$\Delta X(t) = \sigma(t)\varepsilon(t) \qquad (4.2)$$

$$\sigma^2(t) = c + \alpha\Delta X^2(t-1) + \beta\sigma^2(t-1) \qquad (4.3)$$

[표 14]는 각 α에 대한 ARCH(1) 시뮬레이션 샘플과 α를 고정하고 β를 변화시킨 GARCH(1,1) 시뮬레이션 샘플에서 ΔH(1,3)과 MEF 를 측정한 결과이다. 멀티프랙탈 척도와 MEF 는 ARCH 계수, α 에 따라서 증가하는 모습을 보였다. 반면, α를 0.1 로 고정했을 때, β에 따라서 MEF 는 소폭 증가했지만, 멀티프랙탈 척도는 오히려 소폭 감소하는 모습이 관찰되었다.

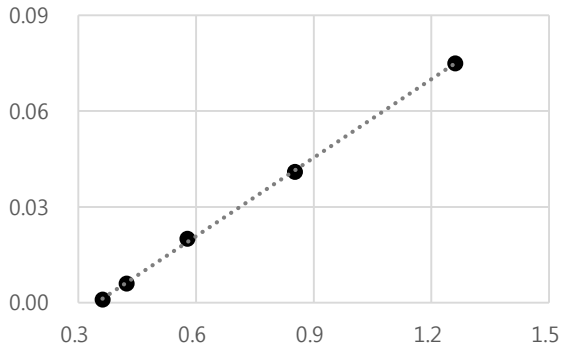
식 (4.3)에서 ARCH 계수는 시계열 변동성의 단기기억을 조절하고, GARCH 계수는 장기기억을 조절한다. 때문에 샘플 확률분포의 꼬리 두께는 ARCH 계수에 상대적으로 영향을 크게 받고, 이는 [표 14]에서도 확인할 수 있다. 따라서 ARCH 모형에서 α 에 따라 멀티프랙탈 척도가 증가하는 경향은 시계열의 자기상관성 요인 외에 꼬리형태 요인에 의한 영향도 작용했다고 볼 수 있다. [그림

[36] 식 (4.3)의 GARCH 모형의 전체 변동성, σ^2은 $c/(1-\alpha-\beta)$이 된다. 따라서 상수 c를 위와 같이 설정하면 σ^2는 항상 0.1 로 유지된다.

19]은 ARCH 샘플에서 측정된 MEF 와 ΔH 의 관계를 보여준다. 추세선의 기울기는 0.08 로 선형적인 관계가 관찰되지만 [그림 16]의 자기상관성이 없는 경우 (0.17)보다는 기울기가 작았다. 이는 ARCH 모형에 존재하는 단기기억 요인이 멀티프랙탈 특성에 음의 영향을 미친다고 해석할 수 있다.

[표 14] 시뮬레이션: ARCH, GARCH 샘플에서의 ΔH(1,3) 추정 결과

ARCH(1)					
α $(\beta = 0)$	0	0.2	0.4	0.6	0.8
ΔH(1,3)	0.001	0.006	0.020	0.041	0.075
$\sigma_{\Delta H(1,3)}$	0.013	0.017	0.025	0.045	0.068
MEF	0.362	0.423	0.578	0.852	1.261
GARCH(1,1)					
β $(\alpha = 0.1)$	0	0.2	0.4	0.6	0.8
ΔH(1,3)	0.004	0.003	0.001	-0.001	-0.005
$\sigma_{\Delta H(1,3)}$	0.014	0.014	0.015	0.016	0.019
MEF	0.390	0.388	0.390	0.396	0.433



[그림 19] ARCH 샘플에서 꼬리형태와 멀티프랙탈 특성

(x: MEF, y: ΔH(1,3))

4.3.2. 실증분석: 자기상관성 요인

[그림 20]은 4.2 절과 같은 방식으로 실증 자료에서 부분 구간을 이동시켜가면서 자기상관성 요인에 의한 멀티프랙탈 특성을 측정한 결과이다. ΔH_{ac}는 3.5 절의 두 번째 대리자료 샘플과 같은 방법으로 구성했다.

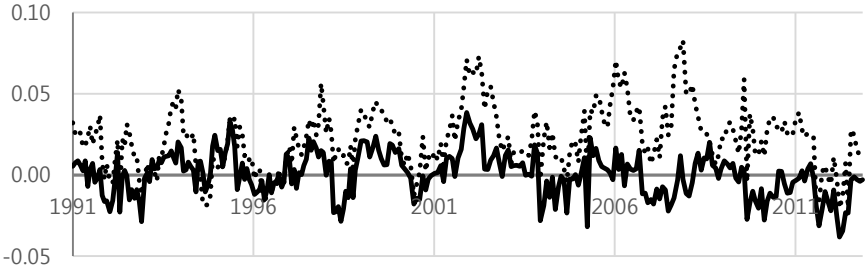
1) 우선 각 부분 구간에서 시계열 차분, $\{\Delta X(t)\}$ 의 크기 순서, $\{O_{\Delta X}(t)\}$를 구한다.

2) 정규 분포를 따르면서 부분 구간과 길이가 같은 샘플, $\{\Delta Y(t)\}$를 발생시킨다.

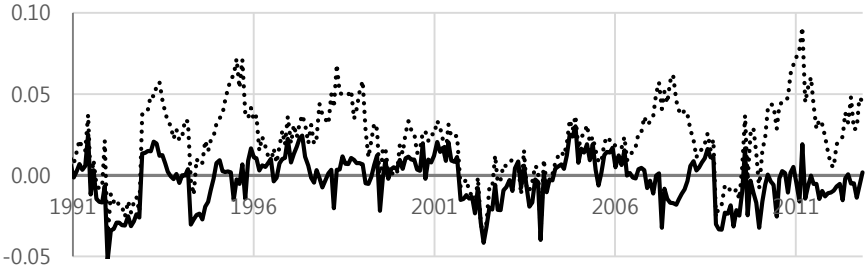
3) $\{\Delta Y(t)\}$를 크기 순위가 $\{O_{\Delta X}(t)\}$가 되도록 재정렬한다.

이와 같이 구성된 샘플은 원 자료의 확률분포의 특성이 제거되고, 자기상관 특성은 유지된다. 이와 같은 샘플을 200 회씩 발생시켰고, 각 샘플에서 GHE 방법을 통해 추정한 멀티프랙탈 척도의 평균을 ΔH_{ac}로 표기했다.

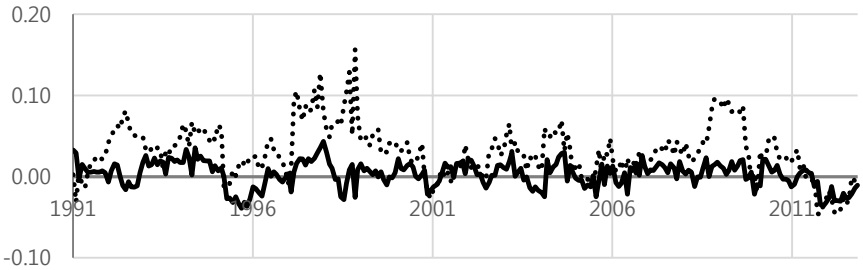
[그림 20]은 각 자료에서 추정한 ΔH_{ac} 의 추이를 보여준다. ΔH_{ac} 크기는 모든 자료에서 [그림 17]의 ΔH_{pdf} 보다 작게 관측되었다. ΔH_{ac}와 ΔH의 상관계수는 KOSPI 에서 0.55, S&P500 에서 0.55, FX 에서 0.57 로 높은 수준을 보였다. 그리고 ΔH_{pdf} 는 대부분 양수로 측정되었지만, ΔH_{ac}는 구간에 따라 양수와 음수가 다르게 나타났다. 이러한 결과는 본 연구의 대상 자료에서 변동성의 자기상관 특성과 멀티프랙탈 특성 사이에 상관성이 존재하지만, 그 크기는 확률분포 특성에 비해 제한적임을 의미한다.



(a) KOSPI 시계열의 ΔH (점선)와 ΔH_{ac} (실선)



(b) S&P500 시계열의 ΔH (점선)와 ΔH_{ac} (실선)



(c) FX 시계열의 ΔH (점선)와 ΔH_{ac} (실선)

[그림 20] 실증 자료에서 $\Delta H(1,2)$와 $\Delta H_{ac}(1,2)$ 추정 결과

4.3.3. 실증분석: 비선형 자기상관성 요인

변동성의 선형 자기상관성 요인과 비선형 자기상관성 요인을 구분하기 위해 또 다른 대리자료 샘플을 발생시켰다.

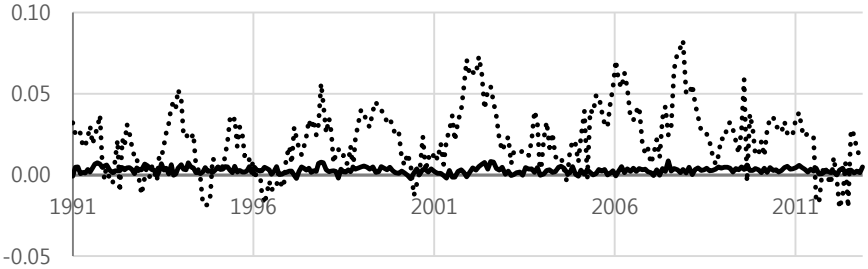
1) 먼저 각 부분 구간 시계열마다 IAAFT 방법을 적용하여 IAAFT 샘플, {ΔA(t)}을 구성했다.

2) 그리고 {ΔA(t)}의 크기 순서, $\{O_{\Delta A}(t)\}$를 구한다.

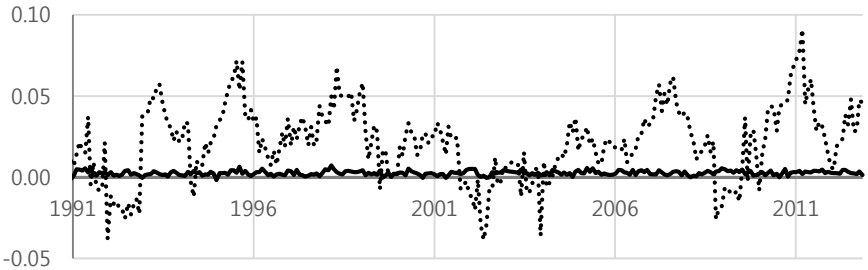
3) 그 후에 4.3.2 의 방법처럼 정규분포를 따르는 {ΔY(t)} 를 발생시키고, 크기 순위가 $\{O_{\Delta A}(t)\}$가 되도록 재정렬한다.

3.5 절에서 설명했듯이 IAAFT 방법은 원 자료의 비선형 자기상관성을 제거한 대리자료 샘플을 생성한다. 따라서 생성된 샘플은 원 자료의 비선형 자기상관성과 꼬리형태 특성이 제거되고, 선형 자기상관성만을 유지한다. 각 부분 구간마다 생성한 200 개의 시뮬레이션 샘플에서 측정한 멀티프랙탈 척도의 평균을 ΔH_{lac} 라고 표기했다. [그림 21]는 각 자료에서 측정한 ΔH_{lac}의 추이를 보여준다.

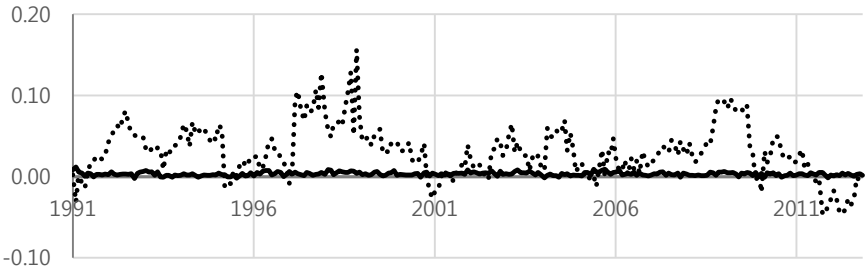
ΔH_{lac}는 모든 자료의 전체 기간에 걸쳐 0 에 가까운 값을 유지했다. 유한 샘플크기 효과를 감안하면 모든 구간의 대리자료 샘플은 단일프랙탈 시계열이라고 볼 수 있다. 이러한 결과는 변동성의 선형 자기상관성만 존재하는 시계열에서는 멀티프랙탈 특성이 없고, 비선형 자기상관성이 존재할 때 멀티프랙탈 특성이 나타남을 의미한다. 이는 앞서 언급한 기존 연구들의 결과와 일치한다.



(a) KOSPI 시계열의 ΔH (점선)와 ΔH_{lac} (실선)



(b) S&P500 시계열의 ΔH (점선)와 ΔH_{lac} (실선)



(c) FX 시계열의 ΔH (점선)와 ΔH_{lac} (실선)

[그림 21] 실증 자료에서 $\Delta H(1,2)$와 $\Delta H_{lac}(1,2)$ 추정 결과

제 4 절 결과 요약 및 한계점

4 장에서는 시뮬레이션 분석과 실증 분석을 통해 멀티프랙탈 특성을 확률분포 요소와 자기상관 요소로 구분하여 분석했다. 분석 결과는 다음과 같이 요약할 수 있다.

1) 유한 샘플크기 효과는 샘플 길이가 작을수록, 시계열 차분의 자기상관성이 존재할 때 더 크게 관측된다. 그리고 이는 MFDFA 방법보다 GHE 방법에서 상대적으로 작게 나타나기 때문에, 샘플 길이를 작게 유지해야 하는 분석에서는 GHE 추정방법을 사용해야 한다.

2) 시계열의 확률분포 꼬리형태가 두꺼워질수록 멀티프랙탈 척도가 증가하고, 둘 사이에는 선형적인 관계가 존재한다.

3) 시계열에 변동성의 단기기억이 존재하면 멀티프랙탈 특성에 음의 영향을 미친다.

4) 멀티프랙탈 특성의 자기상관성 요소는 변동성의 비선형 자기상관성과 관련 있다. 선형 자기상관성은 멀티프랙탈 특성과 무관하다.

5) KOSPI 와 S&P500, FX 시장에서는 확률분포의 꼬리형태 요소가 멀티프랙탈 특성에 주도적인 영향을 미침을 분석했다. 이에 비해 비선형 자기상관성 요소는 크기가 제한적이고 일정한 방향성을 보이지 않았다.

앞서 살펴본 멀티프랙탈 특성의 요소 분석에 관한 대부분의 기존 연구들[37]은 MFDFA 추정 방법을 사용한 반면, 본 연구는 GHE 방법을 중심으로 분석을 진행했다. 그 이유는 GHE 방법이 유한 샘플크기 효과에 영향을 상대적으로 적게 받고, 2.2 절에서 언급했듯이 두꺼운 꼬리형태의 확률모형 샘플에서 비교적 안정적인 결과를 제시하기 때문이다.

본 연구 4.3 절의 시뮬레이션 분석에서 사용한 ARCH, GARCH 모형은 계수를 통해 변동성의 양의 자기상관성을 조절할 수 있다. 선형 자기상관성은 멀티프랙탈 특성에 대한 영향력이 없으므로 시뮬레이션 결과를 통해 ARCH, GARCH 샘플에 비선형 자기상관성이 존재함을 추론할 수 있지만, 그 성질을 파악하지는 못했다. 때문에 본 연구의 실증 분석에서는 ΔH_{ac}가 음수와 양수 모두 관찰되었지만, 비선형 자기상관성의 어떤 성질에 의해 방향성이 정해지는지 파악할 수 없었다. 향후 이에 관한 연구가 시계열의 멀티프랙탈 특성을 이해하는데 도움이 될 것이다.

일부 연구들에서는 본 연구와 같은 방법으로 대리자료 샘플을 구성하여 ΔH_{pdf} $(\Delta\alpha_{pdf})$와 ΔH_{ac} $(\Delta\alpha_{ac})$ 중 하나를 추정하고, 나머지 요인을 $(\Delta H - \Delta H_{pdf})$ 혹은 $(\Delta H - \Delta H_{ac})$로 가정하여 분석한다. 이는 시계열에서 멀티프랙탈 특성을 구성하는 요소가 두 가지뿐이고, 두 요소의 조인트 효과가 없다는 가정을 전제로 한다. 이에 대한 검증도 향후 연구주제가 될 수 있다.

[37] [표 9]의 연구들 중 Barunik, et al. (2012)는 GHE 방법을, Grahovac and Leonenko (2014)는 partition function 방법을 사용하였고, 나머지 연구들은 MFDFA 방법으로 분석을 진행했다.

제 5 장 멀티프랙탈 VaR 모형

VaR (value-at-risk) 모형은 간단하고 직관적으로 금융 자산의 위험을 측정하는 모형이다. $\mathrm{VaR}(\tau,\alpha)$는 현재 시점으로부터 τ 시점 이후에 $(1-\alpha)$ 신뢰수준에서 발생 가능한 자산가치의 최대 손실로 식 (5.1)과 같이 정의된다.

$$\alpha = \mathbb{P}\{X(\tau) < \mathrm{VaR}(\tau,\alpha)\} \qquad (5.1)$$

VaR 모형은 측정 방법에 따라 역사적 방법과 시뮬레이션 방법, (선형) 모수적 방법으로 분류된다. 역사적 방법은 과거의 자산가격 변동이 미래에도 유사하게 반복한다는 가정을 바탕으로 과거 수익률 중 하위 α %에 해당하는 값을 VaR 로 구한다. 역사적 방법은 엄격한 가정을 취하는 대신, 특정한 확률분포를 가정할 필요가 없다. 반면 시뮬레이션 방법과 모수적 방법은 확률 모형에 대한 가정을 필요로 한다. 시뮬레이션 방법은 몬테카를로 시뮬레이션으로 발생시킨 샘플들에서 VaR 을 추정한다. 확률분포만 가정하면 금융자산의 형태에 상관없이 VaR 을 예측할 수 있는 유연한 적용성이 장점이지만, 계산과정이 길고 복잡하며 시뮬레이션 에러를 고려해야 하는 단점이 있다. 모수적 방법은 VaR 의 수학적 해를 계산하는 방법이다. 따라서 금융자산의 형태에 따라 수학적 해를 구하지 못하는 경우에는 VaR 를 추정할 수 없다. 대신 같은 상황에서 항상 같은 값을 추정한다는 (analytically tractable) 장점이 있다[38].

앞서 분석했듯이 멀티프랙탈 확률과정은 단일프랙탈 확률과정과는 다른 통계적 특성들을 보인다. 때문에 자산 가격에서 멀티프랙탈

[38] Alexander (2009)

특성이 관찰된다면, 금융 위험을 측정할 때 이를 고려해주어야 한다. 2.4 절에서 언급했듯이 이와 관련한 대부분의 기존 연구들은 멀티프랙탈 시계열 모형을 이용한 시뮬레이션 VaR 모형에 집중하였다[39]. 반면, 본 연구에서는 멀티프랙탈 특성을 고려한 모수적 VaR 모형을 제안한다.

제 1 절 방법론

본 연구에서는 자산의 로그가격, X(t) 을 이항 멀티프랙탈 척도를 갖는 MMAR 확률과정으로 가정했다. 그리고 멀티프랙탈 모형의 시간변환 아이디어를 적용하여 새로운 모수적 VaR 모형을 구축했다.

5.1.1. 이항 멀티프랙탈 척도와 시간변환 프로세스

2.3 절에서 언급한 이항 멀티프랙탈 척도와 시간변환 프로세스 개념을 더 자세히 설명하겠다. 확률변수 M 은 동일한 확률로 $\{m_0, 1-m_0\}$ 중 한 값을 취하고, m_0는 0.5 보다 작은 양의 상수다. 멀티프랙탈 척도, $\mu_{\mathrm{k}}(\mathrm{t})$를 식 (2.15)와 같이 정의할 때, 식 (2.16)의 시간변환 함수는 다음 식 (5.2)와 같아진다. $\eta_i \in \{0,1\}$이고, $\Delta\mathrm{t} = 2^{-\mathrm{k}}$, $\mathrm{t} = \sum_{i=1}^{\mathrm{k}} \eta_i 2^{-i} = N\Delta\mathrm{t}$이다.

$$\theta_{\mathrm{k}}(\mathrm{t}) = \sum_{i=1}^{\mathrm{k}} \eta_i \mu_i \left(\sum_{j=1}^{(i-1)} \eta_j 2^{-j}\right) = \sum_{n=1}^{N} \mu_k[(n-1)\Delta\mathrm{t}, n\Delta\mathrm{t}] \quad (5.2)$$

식 (5.2)의 두 번째 등호는 보존 조건 (conservative condition), $\sum M = 1$ 에 의해 성립한다. 이에 따라 특정 t 에서 $\theta_{\mathrm{k}}(\mathrm{t})$ 의 경우의

[39] Liu and Lux (2005), Calvet, et al. (2006), Bacry, et al. (2008), Batten, et al. (2014)

수는 2^{k}보다 작다. 예를 들어, $m_0 = 0.4$이고 $\mathrm{k} = 2$, $\mathrm{t} = 3/4$일 때, 동일한 확률로

$$\theta_2(3/4) = \begin{cases} 0.4 + 0.6 * 0.4 \\ 0.4 + 0.6 * 0.6 \\ 0.6 + 0.4 * 0.4 \\ 0.6 + 0.4 * 0.6 \end{cases}$$

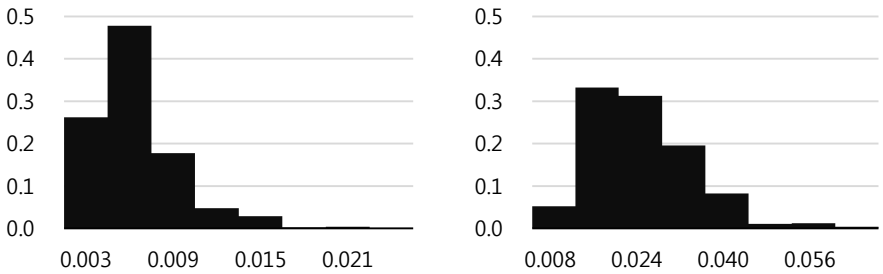
과 같은 4 가지 경우가 가능하고, $\{s \,|\theta_2(\mathrm{t}) = s\} = \{0.64, 0.76, 0.84\}$가 된다.

확률변수, M과 멀티프랙탈 척도, μ_{k}의 q 차 모멘트는 각각 식 (5.3)과 식 (5.4)이다. $\mathbb{E}[\mu_{\mathrm{k}}] = 2^{-\mathrm{k}}$이므로 $\theta_{\mathrm{k}}(\mathrm{t})$의 평균은 식 (5.5)가 된다. 아래 [그림 22]는 $m_0 = 0.4$, $\mathrm{k} = 10$이고 t 가 각각 $5/2^{10}$, $20/2^{10}$일 때의 $\{s \,|\theta_{10}(\mathrm{t}) = s\}$에 대한 히스토그램을 보여준다.

$$\mathbb{E}[M^q] = \left\{m_0^q + (1 - m_0)^q\right\}/2 \qquad (5.3)$$

$$\mathbb{E}[{\mu_{\mathrm{k}}}^q] = \mathbb{E}\left[M_{\eta_1} \cdots M_{\eta_1 \cdots \eta_k}\right] = \{\mathbb{E}[M^q]\}^{\mathrm{k}} \qquad (5.4)$$

$$\mathbb{E}[\theta_{\mathrm{k}}(\mathrm{t})] = \sum_{i=1}^{\mathrm{k}} \eta_i \mathbb{E}[\mu_i] = \mathrm{t} \qquad (5.5)$$



[그림 22] $\theta_{10}(\mathrm{t})$의 히스토그램 (좌: $\mathrm{t} = 5/2^{10}$, 우: $\mathrm{t} = 20/2^{10}$)

5.1.2. 모수 추정

이항 MMAR 모형은 세 가지 모수, $(\mathrm{H}, \sigma^2, m_0)$ 를 갖는다. H 는 $\mathrm{B_H(t)}$의 허스트 지수이고, σ^2는 $\mathrm{B_H(1)}$의 분산, m_0는 이항 계수이다. 우선 H는 Calvet and Fisher (2002)에서 제시한 방법으로 추정할 수 있다. 식 (2.20)에서 X(t) 의 스케일 함수는 $\zeta_{\mathrm{X}}(\mathrm{q}) = \zeta_{\theta}(\mathrm{Hq})$ 를 만족한다. 이 때 q_c를 $1/\mathrm{H}$이라 하면 식 (5.6)이 성립한다.

$$\zeta_{\mathrm{X}}(1/\mathrm{H}) = \zeta_{\theta}(1) = -\log_2 \mathbb{E}[M] = 1 \qquad (5.6)$$

따라서 식 (5.7)의 선형 회귀분석에서 계수 $\zeta_{\mathrm{X}}(\mathrm{q}_c) = 1$을 만족하는 q_c를 추정하고, $\hat{\mathrm{H}} = 1/\mathrm{q}_c$로 추정한다.

$$\log \mathbb{E}[|\mathrm{X(t+\tau) - X(t)}|^{\mathrm{q}}] = \zeta_{\mathrm{X}}(\mathrm{q}) \log \tau + c \qquad (5.7)$$

$\zeta_{\mathrm{X}}(\mathrm{q}) = \zeta_{\theta}(\mathrm{Hq})$ 와 식 (2.19)에 의해 m_0 에 대한 방정식 (5.8)이 성립한다. 스케일 함수, $\zeta_{\mathrm{X}}(\mathrm{q})$는 식 (5.7)의 회귀분석으로부터 구한다.

$$2^{1-\zeta_{\mathrm{X}}(\mathrm{q})} = {m_0}^{\mathrm{Hq}} + (1 - m_0)^{\mathrm{Hq}} \qquad (5.8)$$

q가 q_c보다 작은 범위에서 스케일 함수는 $\hat{\mathrm{H}}\mathrm{q} < \zeta_{\mathrm{X}}(\mathrm{q}) < 1$를 만족할 때 방정식 (5.11)에서 m_0 에 대한 해가 존재한다. q_c 보다 큰 범위에서는 $1 < \zeta_{\mathrm{X}}(\mathrm{q}) < \hat{\mathrm{H}}\mathrm{q}$를 만족해야 한다[40]. 본 연구에서는 q가 각각 $\mathrm{q}_c - 0.5$, $\mathrm{q}_c + 0.5$인 경우에 방정식의 해를 구하고, 그 평균을 $\hat{m}_0$ 으로 추정했다. 만약 해가 존재하지 않는 경우에는 해당 시계열을 단일프랙탈 시계열 $(\hat{m}_0 = 0.5)$로 가정했다.

마지막으로 $\Delta\mathrm{t}$를 단위 시간($2^{-\mathrm{k}}$ 혹은 1 일)이라 하자. ${\sigma_{\mathrm{X}(\Delta\mathrm{t})}}^2$는 $\mathrm{X}(\Delta\mathrm{t})$ 의 분산으로 자료로부터 추정할 수 있다. 그리고 $\mathrm{B_H(t)}$ 와 $\theta(\mathrm{t})$ 가 독립이므로 σ^2 와 ${\sigma_{\mathrm{X}(\Delta\mathrm{t})}}^2$ 사이에 식 (5.9)과 같은 관계가 성립한다.

[40] 부록 2 에서 증명한다.

$$\sigma_{X(\Delta t)}{}^2 = \mathbb{E}[B_H[\theta(\Delta t)]^2] = \mathbb{E}[B_H(1)^2]\mathbb{E}[\theta(\Delta t)^{2H}]$$

$$\sigma_{X(\Delta t)}{}^2 = \mathbb{E}[B_H[\theta(\Delta t)]^2] = \sigma^2\mathbb{E}[\theta(\Delta t)^{2H}] \quad (5.9)$$

이 때, Δt가 단위 시간이므로 식 (5.2)에서 $N = 1$이 되고, 식 (5.3)에 의해 식 (5.10)가 성립한다. 그리고 식 (5.4)에 의해 식 (5.11)가 성립한다.

$$\mathbb{E}[\theta(\Delta t)^{2H}] = \mathbb{E}[\mu_k{}^{2H}] = \{\mathbb{E}[M^{2H}]\}^k \quad (5.10)$$

$$= \{m_0{}^{2H} + (1 - m_0)^{2H}\}^k/2^k \quad (5.11)$$

$\hat{H}$과 $\hat{m}_0$을 먼저 추정하면, 식 (5.8), (5.9), (5.10)으로부터 $\hat{\sigma}^2$을 추정할 수 있다.

5.1.3. 멀티프랙탈 VaR 추정

$P(t)$가 자산가격일 때, $X(t) = \ln P(t) - \ln P(0)$는 0 시점부터 t 시점까지 자산의 로그 수익률이다. $X(t)$가 MMAR 확률과정을 따르면, 시간변환 프로세스에 따라 다음 식 (5.12)가 성립한다. $\mathbf{N}$은 정규 확률분포이고, σ^2는 $B_H(1)$의 분산이다.

$$X(t) = B_H[\theta(t)] \sim \mathbf{N}(0, \sigma^2\theta(t)^{2H}) \quad (5.12)$$

만약 특정 멀티프랙탈 시계열에서 시점 τ에 해당하는 $\theta(\tau)$를 안다면 정규 확률분포를 이용해 $\mathrm{VaR}(\tau, \alpha)$를 추정할 수 있다. 하지만 특정 멀티프랙탈 시계열에서 시간변환 프로세스가 어떤 형태를 갖는지 알 수 없으므로, 본 연구에서는 $\theta(\tau)$를 확률변수로 여기고, 가능한 모든 경우를 고려하여 VaR을 추정한다.

$X(t)$가 멀티프랙탈 시계열이면, 식 (5.1)은 식 (5.13)과 같다.

$$\alpha = \mathbb{P}\{B_H[\theta(\tau)] < \mathrm{VaR}(\tau, \alpha)\} \quad (5.13)$$

이를 $\theta(\tau)$ 가 취할 수 있는 모든 경우에 대한 가중 평균으로 나타내면 식 (5.14)의 첫째 줄과 같다. 그리고 $B_H(t)$ 와 $\theta(t)$ 가 독립이므로 식 (5.14)의 둘째 줄이 성립한다. 이때, 식 (5.12)처럼 $B_H(s)$는 $\mathbf{N}(0, \sigma^2 s^{2H})$를 따르므로 식 (5.14)의 셋째 줄이 성립한다.

$$\begin{aligned}\alpha &= \sum_{\{s|\theta_k(t)=s\}} \mathbb{P}\{B_H(s) < \mathrm{VaR}(\tau,\alpha) |\, \theta(\tau) = s\}\, \mathbb{P}\{\theta(\tau) = s\} \\ &= \sum_{\{s|\theta_k(t)=s\}} \mathbb{P}\{B_H(s) < \mathrm{VaR}(\tau,\alpha)\}\, \mathbb{P}\{\theta(\tau) = s\} \\ &= \sum_{\{s|\theta_k(t)=s\}} \Phi\left(\frac{\mathrm{VaR}(\tau,\alpha)}{\sigma\, s^H}\right)\, \mathbb{P}\{\theta(\tau) = s\}\end{aligned} \tag{5.14}$$

Φ는 표준 정규분포의 누적 분포함수이다. 식 (5.14)는 $\mathrm{VaR}(\tau,\alpha)$ 에 대한 단순 증가 함수이다. 따라서 특정 α에 대한 $\mathrm{VaR}(\tau,\alpha)$는 단순한 수치적 방법을 통해 추정 가능하다. 본 연구에서는 $\mathrm{VaR}(\tau,\alpha)$의 대입 값을 증가 또는 감소시키면서 식 (5.14)을 계산하고, α와의 오차가 10^{-5} 보다 작아졌을 때의 대입 값을 멀티프랙탈 VaR (MFVaR)로 추정했다.

제 2 절 시뮬레이션 분석

5.2 절에서는 앞서 제시한 멀티프랙탈 VaR 모형의 성능 분석을 위해 GARCH(1,1)을 이용한 시뮬레이션 분석을 실행했다. 시뮬레이션 샘플의 차분과 변동성은 각각 식 (5.15)과 식 (5.16)을 따르도록 발생시켰다. 확률변수, ε은 표준 정규분포를 따른다.

$$\Delta X(t) = \sigma(t)\varepsilon(t) \qquad (5.15)$$

$$\sigma^2(t) = 0.01 + 0.2\Delta X^2(t-1) + 0.7\sigma^2(t-1) \qquad (5.16)$$

길이가 1000 인 시뮬레이션 샘플을 발생시키고, 길이가 500 인 부분 구간을 1 씩 전진하면서 모수, (H, σ^2, m_0) 를 추정했다. 이항 멀티프랙탈 모형에서 $k = 10$ 으로 설정했다. 그리고 예측 기간, $\tau \in \{1, 5, 10, 20\}$, 유의 수준, $\alpha \in \{0.01, 0.03, 0.05\}$ 마다 $MFVaR(\tau, \alpha)$ 를 계산했다. 즉, 1 회의 시뮬레이션에서 각 경우마다 480 번의 예측이 이루어졌고, 이를 200 회 반복하였다.

멀티프랙탈 VaR 모형과 비교하기 위해 총 4 가지 방법으로 VaR 를 추정하여 벤치마크를 구성했다. 첫 번째로 Gaussian VaR 는 식 (5.1)에서 $X(t)$ 를 fBM 으로 가정하고 VaR 을 계산한다. 이 경우, VaR 는 식 (5.17)와 같다.

$$VaR_G(\tau, \alpha) = \sigma \tau^H \Phi^{-1}(\alpha) + \mu\tau \qquad (5.17)$$

μ 와 σ 는 각각 차분의 평균과 표준편차로 추정했다. 허스트 지수, H 는 5.1.2 에서와 같은 방법으로 추정했다. 두 번째로 t VaR 는 시계열 차분의 확률분포를 정규분포가 아닌 t 분포로 가정한다.

$$VaR_t(\tau, \alpha) = \sigma \{(df-2)\tau/df\}^H t_{df}^{-1}(\alpha) + \mu\tau \qquad (5.18)$$

t_{df}은 자유도가 df 인 t 분포의 누적확률분포이고, df 는 부분 구간에서 최소자승법을 이용하여 추정했다. 세 번째로는 GARCH 시뮬레이션 방법으로 VaR 를 계산했다. 각 부분 구간마다 추정한 GARCH(1,1)

모형을 이용하여 예측 기간, τ 까지의 시뮬레이션 샘플을 10^5 회 발생시키고, 이 중 하위 α%에 해당하는 값을 $\mathrm{VaR}(\tau,\alpha)$로 추정했다. 마지막으로 역사적 VaR 는 부분 구간의 τ기간 수익률 중 하위 α%에 해당하는 값을 $\mathrm{VaR}(\tau,\alpha)$로 추정했다.

[표 14]는 멀티프랙탈 (MF) 모형과 벤치마크 모형들의 시뮬레이션 결과를 보여준다. $\hat{\alpha}$은 모형의 예측 실패율 (failure rate)로 전체 예측 중 실제 수익률이 VaR 보다 작은 경우의 비율이다. 따라서 모형의 예측이 정확할수록 절대오차 (absolute error, $|\hat{\alpha}-\alpha|$)는 0 에 가까운 값을 갖는다.

시뮬레이션 샘플에서 멀티프랙탈 VaR 모형의 절대오차는 평균적으로 0.40 수준을 기록하였다. 이는 Gaussian VaR (0.69)와 t VaR (0.55)의 절대오차보다는 낮고, 역사적 방법 (0.38)과 비슷한 수준이다. 반면, 시뮬레이션 VaR 모형은 샘플의 모형과 같은 GARCH(1,1)를 가정하여 VaR 를 측정했기 때문에 상대적으로 낮은 오차 (0.26)를 보였다. Gaussian VaR 는 유의 수준, α가 낮아질수록 예측의 정확성이 감소하는 경향을 보였지만, 다른 모형들에서는 이와 같은 경향이 없었다. 그리고 모든 모형에서 예측 기간, τ에 따라 절대오차가 증가하는 경향을 보였다.

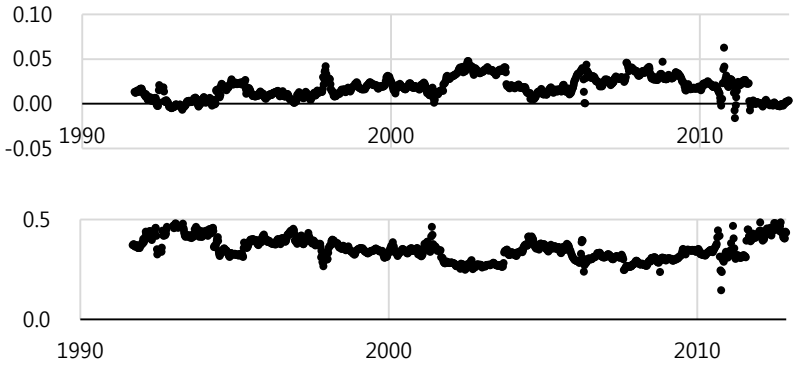
[표 15] 시뮬레이션에서의 VaR 예측 결과, $|\hat{\alpha} - \alpha|$

τ	MF	Gaussian	t	GARCH	Historical
$\boldsymbol{\alpha = 5\%}$					
1	0.05	0.07	0.25	0.16	0.03
5	0.25	0.39	0.51	0.04	0.01
10	0.25	0.73	1.03	0.56	0.40
20	0.91	1.19	1.00	0.67	1.12
$\boldsymbol{\alpha = 3\%}$					
1	0.10	0.13	0.37	0.03	0.08
5	0.34	0.52	0.24	0.26	0.00
10	0.48	0.79	0.57	0.30	0.28
20	0.91	1.31	0.91	0.50	0.96
$\boldsymbol{\alpha = 1\%}$					
1	0.02	0.40	0.05	0.05	0.20
5	0.43	0.86	0.47	0.05	0.10
10	0.38	0.79	0.34	0.16	0.30
20	0.65	1.07	0.83	0.36	1.03

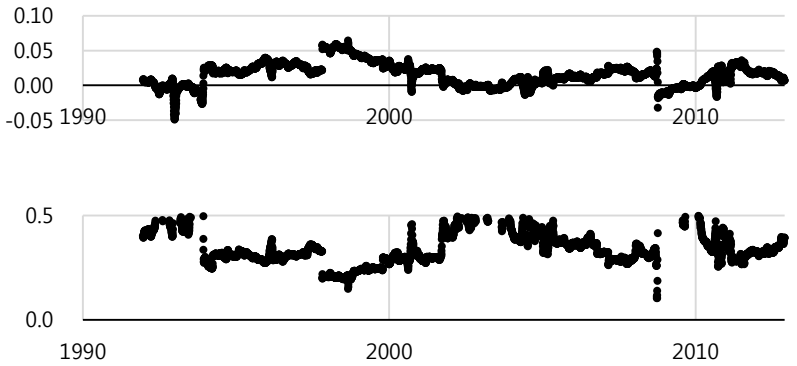
제 3 절 실증 분석

1990 년부터 2012 년까지의 KOSPI 와 S&P500, FX 자료를 대상으로 멀티프랙탈 VaR 을 예측하고 결과를 분석했다. 5.2 절과 마찬가지로 500 일의 부분 구간을 하루씩 전진하면서 예측 기간, $\tau \in \{1, 5, 10, 20\}$ 과 유의 수준, $\alpha \in \{0.01, 0.03, 0.05\}$ 에 따른 멀티프랙탈 VaR 를 추정했다.

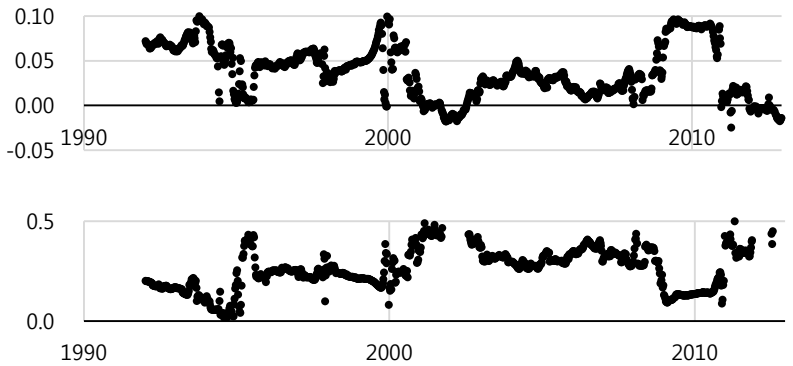
[그림 23]는 각 자료에서 부분 구간을 이동하며 추정한 멀티프랙탈 척도, $\Delta H(q^c - 0.5, q^c + 0.5)$ 와 이항 멀티프랙탈 모형의 모수, m_0 의 추이를 보여준다. q^c 는 5.1.2 에서 설명에서 설명했듯이 식 (5.7)로부터 추정한다. ΔH 는 값이 클수록 시계열의 멀티프랙탈 특성이 강함을 의미하는 반면, 0 과 0.5 사이의 값을 갖는 m_0는 값이 작을수록 멀티프랙탈 특성이 커짐을 의미한다. 대체적으로 ΔH 와 m_0는 반대로 움직이는 경향을 보였다. KOSPI 자료에서 추정한 m_0는 평균적으로 0.35 의 수준이었고, 2000 년대에 상대적으로 강한 멀티프랙탈 특성을 보였다. S&P500 에서는 m_0 의 평균이 0.33 수준이었고, 1990 년대 중후반과 2000 년대 후반에서 멀티프랙탈 특성이 강하게 관찰되었다. FX 자료에서는 m_0 의 평균이 0.26 으로 추정되었다. 그리고 1990 년대와 2010 년 전후 시기에서 상대적으로 강한 멀티프랙탈 특성을 보였다.



(a) KOSPI



(b) S&P500



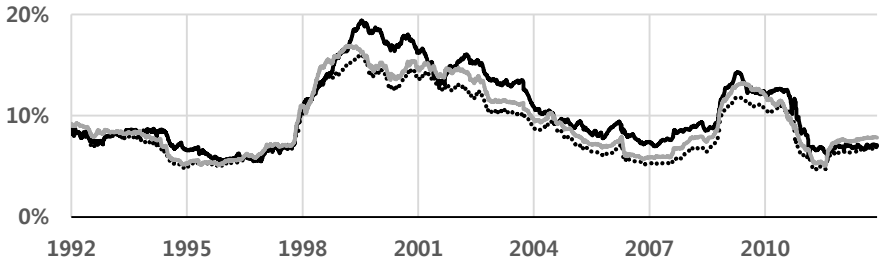
(c) FX

[그림 23] ΔH(위)와 m_0(아래) 추정 결과

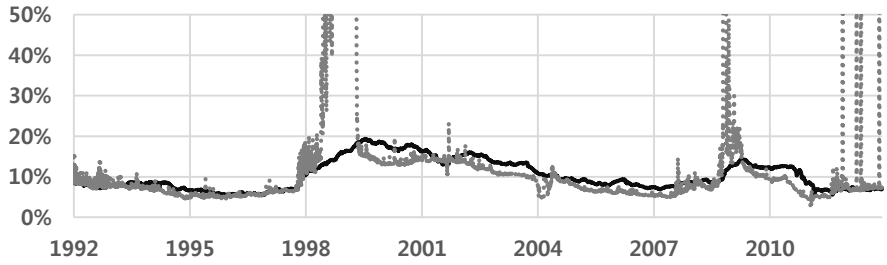
5.3.1. KOSPI 자료 분석 결과

[그림 24]은 KOSPI 자료를 대상으로 α가 1%이고, τ는 5 일인 VaR 를 추정한 결과이다. 검정색 실선은 멀티프랙탈 VaR 이다. (a)는 같은 모수적 모형인 Gaussian 과 t VaR 의 추정 결과이다. 본 연구의 모형은 Gaussian 모형보다 보수적이고, t 모형과 비교해도 일부 구간을 제외하면 보수적으로 VaR 를 예측했다. GARCH 시뮬레이션 모형의 추정 결과 (b)와 비교했을 때, 멀티프랙탈 모형은 대체적으로 비슷하거나 보수적으로 VaR 를 예측했다. GARCH 모형은 일부 구간에서 지나치게 높은 VaR 를 산출하는 문제점을 보였다. 마지막으로 역사적 모형의 결과 (c)와 비교했을 때, 멀티프랙탈 모형의 추정 결과는 상대적으로 유연한 모습을 보였다.

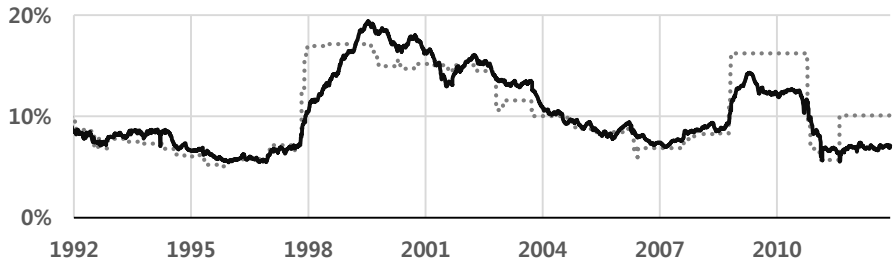
[표 16]는 각 모형들의 절대오차를 계산한 결과이다. 멀티프랙탈 VaR 모형은 평균적으로 0.50 수준의 절대오차를 보였고, 이는 모든 벤치마크 모형들(Gaussian VaR: 0.82, t VaR: 1.10, GARCH VaR: 0.76, 역사적 VaR: 0.70)보다 낮은 값이다. 멀티프랙탈 모형과 t 모형, 역사적 모형은 유의 수준이 낮아지면서 절대오차가 감소하는 경향을 보였지만, Gaussian 모형은 반대의 모습을 보였다. 예측 기간이 길어질수록 벤치마크 모형들은 예측 정확성이 감소했지만, 멀티프랙탈 모형은 영향을 받지 않았다. 그리고 멀티프랙탈 모형은 긴 예측 기간에서 벤치마크 모형들과 비교해 상대적으로 높은 예측 정확성을 보였다.



(a) 멀티프랙탈(검정 실선), Gaussian(검정 점선), t(회색 실선)



(b) 멀티프랙탈, GARCH(회색 점선)



(c) 멀티프랙탈, 역사적(회색 점선)

[그림 24] KOSPI 자료에서의 5 일 1% VaR 추이

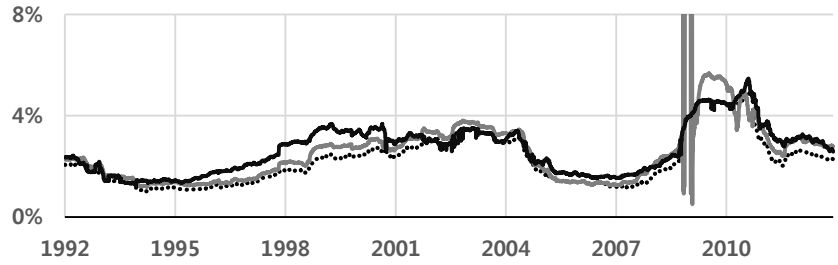
[표 16] KOSPI 자료에서의 VaR 예측 결과, $|\hat{\alpha} - \alpha|$

τ	MF	Gaussian	t	GARCH	Historical
$\boldsymbol{\alpha = 5\%}$					
1	0.87	0.21	1.34	0.20	0.17
5	0.93	0.93	1.95	0.98	0.46
10	0.46	0.69	1.70	0.66	0.98
20	0.64	0.64	1.71	1.36	1.59
$\boldsymbol{\alpha = 3\%}$					
1	0.46	0.71	1.05	0.33	0.17
5	0.53	0.97	1.21	0.81	0.51
10	0.26	0.58	0.96	0.49	0.56
20	0.74	1.06	1.21	1.19	1.62
$\boldsymbol{\alpha = 1\%}$					
1	0.22	0.97	0.56	0.74	0.18
5	0.34	1.02	0.45	0.68	0.11
10	0.25	0.86	0.47	0.72	0.68
20	0.32	1.20	0.63	0.99	1.38

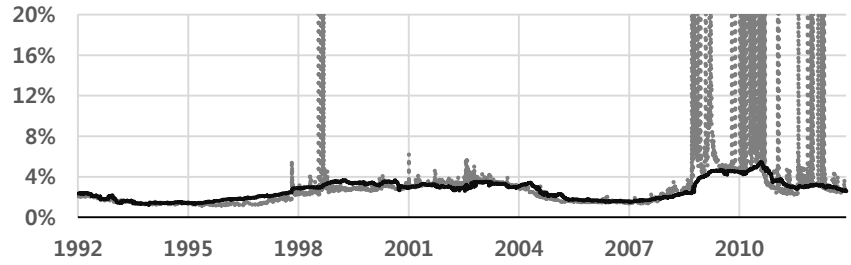
5.3.2. S&P500 자료 분석 결과

[그림 25]은 [그림 24]와 마찬가지로 멀티프랙탈 VaR(5,0.01) 과 벤치마크 VaR(5,0.01) 들의 추이를 비교하여 보여준다. S&P500 자료에서 멀티프랙탈 모형은 Gaussian 모형보다 보수적으로 VaR 를 예측했고, 다른 벤치마크 모형들과는 시기에 따라 다른 모습을 보였다. t 모형과 시뮬레이션 모형은 일부 구간에서 VaR 를 불안정하게 측정하는 문제점을 보였다.

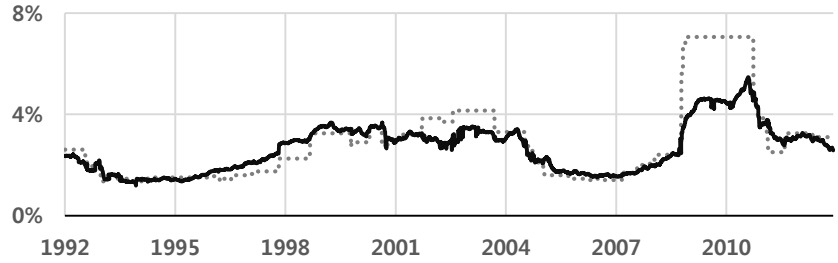
[표 17]은 각 모형들의 절대오차를 계산한 결과이다. 멀티프랙탈 모형은 평균 0.43 수준의 절대오차를 기록했다. 이는 Gaussian 모형 (1.68), t 모형 (1.74), 역사적 모형 (0.87)보다는 낮고, 시뮬레이션 모형 (0.36)보다는 높은 수준이다. 멀티프랙탈 모형과 시뮬레이션 모형의 정확성은 유의 수준과 예측 기간에 영향을 받지 않았다.



(a) 멀티프랙탈(검정 실선), Gaussian(검정 점선), t(회색 실선)



(b) 멀티프랙탈, GARCH(회색 점선)



(c) 멀티프랙탈, 역사적(회색 점선)

[그림 25] S&P500 자료에서의 5 일 1% VaR 추이

[표 17] S&P500 자료에서의 VaR 예측 결과, $|\hat{\alpha} - \alpha|$

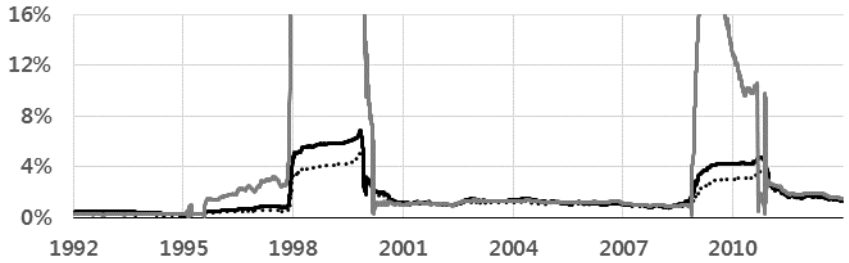
τ	MF	Gaussian	t	GARCH	Historical
$\boldsymbol{\alpha = 5\%}$					
1	0.67	0.55	1.12	0.06	0.26
5	0.61	1.65	2.47	0.09	0.57
10	0.58	1.42	2.18	0.89	0.93
20	0.45	2.52	3.49	0.40	1.58
$\boldsymbol{\alpha = 3\%}$					
1	0.54	1.00	1.00	0.43	0.09
5	0.24	1.68	1.83	0.11	0.51
10	0.02	1.45	1.55	0.46	0.77
20	0.16	2.74	2.84	0.03	1.95
$\boldsymbol{\alpha = 1\%}$					
1	0.42	1.16	0.65	0.84	0.27
5	0.38	1.69	0.97	0.48	0.44
10	0.42	1.69	1.05	0.29	1.01
20	0.61	2.62	1.73	0.31	2.13

5.3.1. FX 자료 분석 결과

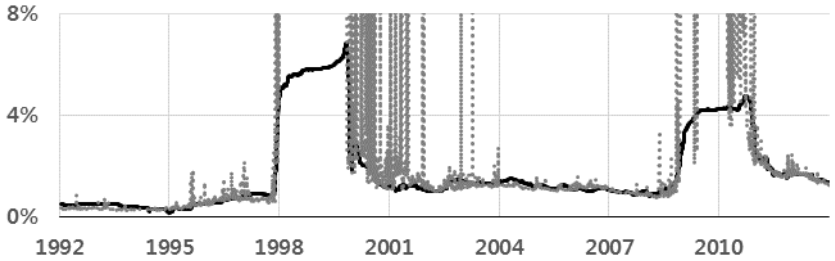
마지막으로 FX 자료에서 VaR 를 측정하였다. 멀티프랙탈 모형은 Gaussian 모형보다는 보수적이지만, t 모형과 GARCH 모형과 비교했을 때는 VaR 를 상대적으로 낮게 측정했다. 그리고 t 모형과 GARCH 모형이 불안정한 VaR 를 도출하는 구간이 KOSPI, S&P500 자료보다 빈번했다.

[표 18]은 절대오차를 비교한 결과다. 멀티프랙탈 VaR 모형의 평균 절대오차는 0.24 로 KOSPI 와 S&P500 자료에서보다 더 높은 예측 정확성을 보였다. 반면 벤치마크 모형들(Gaussian VaR: 0.79, t VaR: 0.59, GARCH VaR: 1.20, 역사적 VaR: 0.99)은 비슷하거나 낮은 예측 정확성을 보였다. 멀티프랙탈 모형의 예측 오차는 유의 수준이 낮을수록 줄었고, 예측 기간에는 큰 영향을 받지 않았다. 벤치마크 모형들과 비교했을 때, 멀티프랙탈 모형은 상대적으로 안정적인 오차를 유지했다. 그리고 예측 기간이 길수록 상대적으로 높은 정확성을 보였다.

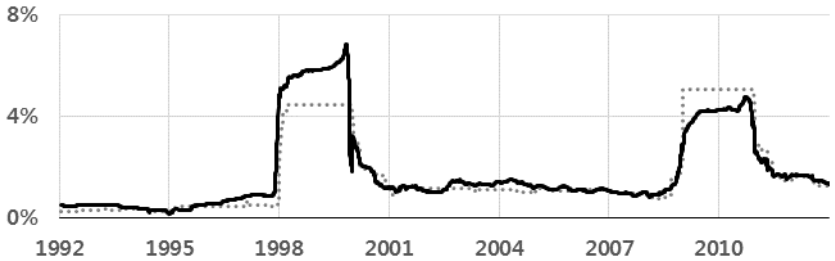
실증 분석에서 멀티프랙탈 VaR 모형은 Gaussian 모형보다 보수적으로 VaR 를 예측했다. t 모형과 GARCH 모형보다 안정적으로 VaR 를 추정했고, 역사적 모형보다는 유연한 모습을 보였다. 예측 정확성 또한 벤치마크 모형들보다 안정적이고 높았다. 특히 주식 시장 자료들보다 변동이 심한 FX 자료에서 오히려 높은 정확성을 보였다.



(a) 멀티프랙탈(검정 실선), Gaussian(검정 점선), t(회색 실선)



(b) 멀티프랙탈, GARCH(회색 점선)



(c) 멀티프랙탈, 역사적(회색 점선)

[그림 26] FX 자료에서의 5 일 1% VaR 추이

[표 18] FX 자료에서의 VaR 예측 결과, $|\hat{\alpha} - \alpha|$

τ	MF	Gaussian	t	GARCH	Historical
$\boldsymbol{\alpha = 5\%}$					
1	0.64	1.10	0.39	2.38	0.49
5	0.26	0.56	0.68	2.34	0.62
10	0.07	0.12	1.02	2.34	1.04
20	0.66	1.04	1.88	1.94	1.50
$\boldsymbol{\alpha = 3\%}$					
1	0.37	0.13	0.02	1.16	0.37
5	0.04	0.02	0.46	1.32	0.75
10	0.04	0.65	0.67	1.28	1.38
20	0.35	1.40	1.65	0.93	1.82
$\boldsymbol{\alpha = 1\%}$					
1	0.24	0.80	0.03	0.09	0.09
5	0.10	0.78	0.12	0.35	0.45
10	0.03	1.39	0.01	0.20	1.10
20	0.11	1.43	0.19	0.02	2.33

제 4 절 결과 요약 및 한계점

5 장에서는 멀티프랙탈 특성을 반영하여 금융위험을 예측하는 새로운 VaR 모형을 제시했다. 동일 주제에 대한 기존의 연구들이 시뮬레이션 방법에 국한되어온 반면, 본 연구의 모형은 모수적 방법을 설계했다는 점에서 새로운 시도로 볼 수 있다.

본 연구의 모형은 멀티프랙탈 시계열 모형의 시간변환 아이디어를 응용하여 설계되었다. Mandelbrot, et al. (1997)에 따르면 멀티프랙탈 확률과정에서 시간, t 를 특정 거래시간, θ(t)로 변환하면 멀티프랙탈 특성이 제거된다. 본 연구에서는 VaR 예측 기간, τ에 대해 θ(τ) 의 가능한 모든 경우를 고려하여 VaR 를 계산했다.

시뮬레이션 분석에서는 GARCH(1,1) 샘플을 발생시키고, 멀티프랙탈 VaR 를 측정하였다. 그리고 4 가지 방법의 벤치마크 (Gaussian, t, 시뮬레이션, 역사적 방법)와 비교하였다. 그 결과 본 연구의 모형은 다른 모수적 방법들보다는 높고, 역사적 방법과는 비슷한 예측 정확성을 보였다. 반면, 시뮬레이션 VaR 모형은 샘플의 모형과 같은 GARCH(1,1)를 가정하여 VaR 를 측정했기 때문에 상대적으로 높은 정확성을 보였다.

KOSPI, S&P500, FX 자료에서 멀티프랙탈 VaR 를 예측하고, 그 결과를 벤치마크 모형들과 비교했다. 5 일 1% VaR 를 측정한 결과를 비교했을 때, 멀티프랙탈 모형은 Gaussian 모형보다는 보수적으로 VaR 를 측정했다. t 모형과 GARCH 시뮬레이션 모형이 일부 구간에서 불안정한 VaR 를 도출한 반면, 멀티프랙탈 모형은 안정적인 측정결과를 보였다. 예측 오차를 비교했을 때, 멀티프랙탈 모형은 벤치마크 모형들보다 안정적이고, 낮은 오차를 보였다. 그리고 유의수준, α 가 낮을수록 멀티프랙탈 모형의 오차는 낮아졌고, 예측기간에는 영향을 받지 않았다. 이는 멀티프랙탈 VaR 모형이 보다

극단적인 위험을 예측할수록 정확성이 높아짐을 의미한다. 마지막으로 다른 모형들과는 다르게 멀티프랙탈 VaR 모형은 주식 시장 자료에서보다 상대적으로 변동이 심한 원달러 환율 (FX) 자료에서 오히려 높은 정확성을 보였다.

본 연구의 멀티프랙탈 VaR 모형은 다음과 같은 방향으로 발전할 여지가 있다. 우선 본 연구에서는 멀티프랙탈 시계열 모형들 중 가장 간단한 이항 MMAR 모형을 가정하였다. 하지만 MMAR 에서 확률변수, M의 확률분포를 변경하거나, MRW, MSM 과 같은 모형을 가정함으로써 모형을 정교하게 향상시킬 수 있다. 다만 본 연구에서는 이산형 (discrete) 시간변환 프로세스를 가정하였지만, 이와 다르게 연속형 프로세스를 가정할 경우, 5.1.3 의 계산과정이 개선되어야 한다.

둘째로 본 연구에서 VaR 를 예측할 때, 식 (5.8)의 일별 수익률 분산, $\sigma_{X(\Delta t)}{}^2$를 자료로부터 단순한 역사적 방법으로 추정했다. 이를 GARCH 모형들과 같은 보다 정교한 변동성 추정 모형으로 대체함으로써 예측 성능을 향상시킬 수 있다.

후속 연구로 멀티프랙탈 VaR 모형을 이용하여 포트폴리오의 위험 측정 모형을 연구할 필요가 있다. Muzy, et al. (2001)와 Pantanella, et al. (2009)의 연구에서는 여러 자산을 포함하는 포트폴리오의 스케일 함수는 단순히 각 자산의 스케일 함수의 가중 합이 아닌 복잡한 형태로 나타남을 보였다. 이를 적용하여 본 연구의 모형을 확장시킬 수 있을 것으로 기대한다.

제 6 장 결 론

최근에 금융 시장과 자산의 구조가 점차 복잡해짐에 따라 실제 시장과 이론적 모형의 괴리를 바로잡으려는 노력이 지속되고 있다. 프랙탈 구조를 파악함으로써 금융 시계열의 복잡성을 분석하는 연구들도 이와 같은 맥락이다. 본 연구에서는 실제 금융 시장에서 나타나는 멀티프랙탈 특성을 분석하고, 이를 적용하여 보다 현실적으로 금융 위험을 측정하는 방법에 대해 연구했다. 그 결과, 멀티프랙탈 VaR (value-at-risk) 모형을 제시했다.

멀티프랙탈 특성을 고려하여 금융 위험을 측정한 대부분의 기존 연구들이 시뮬레이션 방법을 제시한 반면, 본 연구의 멀티프랙탈 VaR 모형은 시뮬레이션 오차가 없는 모수적 (parametric) 방법이라는 점에서 의미가 있다.

실증 자료는 1990 년부터 2012 년까지의 한국 종합주가 지수 (KOSPI)와 미국 S&P500 주가지수, 원달러 환율 (FX)의 일별 자료를 사용했다.

3 장에서는 금융 시장에서 나타나는 멀티프랙탈 특성을 포함한 통계적 특성들을 분석했다. 실제 시장 수익률의 확률분포는 정규분포와 비교해 높은 첨도와 두꺼운 꼬리형태를 보였다. 변동성의 군집현상과 장기기억 현상도 관찰되었다. 그리고 이러한 특성들은 주식 시장보다 외환 시장에서 상대적으로 크게 나타났다. 멀티프랙탈 척도, $\Delta H(1,2)$ 를 GHE (generalized Hurst exponent) 방법으로 추정했을 때, KOSPI 와 S&P500 에서는 모두 0.02 수준, 외환 시장에서는 0.09 수준으로 측정되었다. 시계열의 부분 구간을 이동시키며 측정했을 때, 멀티프랙탈 척도는 일정한 수준을 유지하는 모습이 아닌, 시간에 따라 변동하는 모습을 보였다.

3 장에서 제시한 멀티프랙탈 검정 방법은 GHE (generalized Hurst exponent) 추정 방법의 과정을 응용하여 구성했다. 시계열의 멀티프랙탈 특성의 존재를 판단하기 위해 허스트 지수, H(1) 와 H(2) 의 동일성을 Wilcoxon 순위 합 검정법으로 비교하였다. 본 연구의 검정 모형은 간단한 과정으로 비교적 짧은 시계열에서 멀티프랙탈 특성을 검정할 수 있다.

멀티프랙탈 구간 판별 모형은 전체 시계열에서 부분 구간을 전진하면서 멀티프랙탈 특성의 존재를 판단한다. 이 때, 부분 구간의 길이가 짧아지면 검정 결과의 신뢰성 문제가 발생한다. 본 연구에서는 이 문제를 보완하기 위해 [그림 8]과 같이 특정 단일 구간, $[t, t+\Delta]$ 을 포함하는 n 개의 부분 구간들마다 멀티프랙탈 검정을 시행하도록 모형을 구성했다. 단일 구간, $[t, t+\Delta]$ 에 멀티프랙탈 특성이 존재한다면, 이를 포함하는 부분 구간에서도 멀티프랙탈 특성이 검출될 것이다. 따라서 본 연구의 모형은 부분 구간들 중 멀티프랙탈 검정을 기각하는 비율이 임의의 임계값을 초과하면 단일 구간, $[t, t+\Delta]$을 멀티프랙탈 구간으로 판별했다.

구간 판별 결과의 타당성을 입증하기 위해 두 가지의 사후 검정 방법을 실행했다. 첫 번째는 [표 7]처럼 판별한 각 구간에서 멀티프랙탈 척도, $\Delta H(1,2)$ 와 $\Delta H(2,3)$ 에 대한 멀티프랙탈 검정을 실행했다. 각 멀티프랙탈 구간들에서 멀티프랙탈 특성의 존재가 검증됨으로써 판별 결과의 타당성을 입증했다. 그리고 두 번째로 원 자료의 통계적 특성을 유지하는 대리자료 샘플들을 발생시키고, 같은 방식으로 멀티프랙탈 구간을 판별했다. 대리자료 샘플에서의 구간 판별 결과가 원 자료에서의 결과와 유사함을 보임으로써 모형이 안정적인 결과를 도출함을 입증했다.

본 연구의 모형을 적용하여 금융 시장에서 멀티프랙탈 구간을 판별한 결과, 주식 시장 (KOSPI 와 S&P500)에서는 각각 6 개의 멀티프랙탈 구간이, 외환 시장에서는 4 개의 멀티프랙탈 구간이

판별되었다. 멀티프랙탈 구간들의 확률분포에서는 상대적으로 높은 첨도와 두꺼운 꼬리형태가 나타났다.

실증 연구에 적용할 수 있는 기존 멀티프랙탈 검정법이 부족했던 점[41]에서 본 연구는 의미가 있다. 이어서 제시한 멀티프랙탈 구간을 판별하는 연구 또한 기존의 방법이 없었다는 점에서 의미가 있다. 실제 시계열에서 멀티프랙탈 특성은 시간에 따라 존재와 부재를 반복하는 모습을 보이므로, 본 연구의 모형은 여러 실증 분석에 적용될 수 있다. 반면, 멀티프랙탈 구간의 경계 부근에서 모형의 정확성이 떨어지는 단점과 멀티프랙탈 구간이 짧게 존재하는 경우에 판별이 어렵다는 단점은 후속 연구에서 보완되어야 할 것이다.

4 장에서는 시계열의 멀티프랙탈 특성의 요소들을 분석했다. 우선 샘플의 크기가 작을수록 멀티프랙탈 특성이 과대 측정되는 경향을 일컫는 유한 샘플크기 효과를 분석했다. 그 결과, MFDFA (multifractal detrended fluctuation analysis) 방법보다 GHE 방법을 사용할 때 상대적으로 작게 측정됨을 보였다. 이는 짧은 길이의 샘플을 대상으로 멀티프랙탈 특성을 분석할 때는 MFDFA 보다 GHE 방법이 적합함을 의미한다.

시뮬레이션 분석 결과, 샘플 확률분포의 꼬리형태가 두꺼울수록 멀티프랙탈 척도가 크게 측정되었다. 변동성의 자기상관성이 존재하는 ARCH 샘플에서도 확률분포의 꼬리형태에 따라 멀티프랙탈 척도가 증가했지만, 증가량은 자기상관성이 없는 샘플에 비해 감소했다.

실증 분석 결과, 본 연구의 대상 자료에서 나타나는 멀티프랙탈 특성은 확률분포의 꼬리형태 요소와 변동성의 비선형 자기상관성

[41] Wendt and Abry (2007), Wendt, et al. (2007)

요소가 모두 측정되었다. 이 중에서도 전자가 주도적인 영향력을 보였다. 반면 변동성의 선형 자기상관성은 멀티프랙탈 특성과 무관했다.

본 연구의 5 장에서는 멀티프랙탈 특성을 반영하여 금융 위험을 예측하는 모형을 제시했다. 이항 멀티프랙탈 척도와 MMAR 확률과정을 가정하여 모수적 방법으로 멀티프랙탈 VaR (value-at-risk) 모형을 설계하였다. Mandelbrot, et al. (1997)에 따르면 멀티프랙탈 확률과정에서 시간, t 를 특정한 시간변환 과정, θ(t) 로 변환하면 멀티프랙탈 특성이 제거된다. 본 연구에서는 VaR 예측 기간, τ 에 대한 시간변환 (time deformation) 과정, θ(τ)의 가능한 모든 경우를 고려하여 VaR 를 계산했다.

멀티프랙탈 VaR 를 시뮬레이션 샘플과 실증자료에서 예측하고, 이 결과를 기존의 Gaussian 방법, t 분포 방법, GARCH 시뮬레이션 방법, 역사적 방법과 비교하였다. 멀티프랙탈 VaR 와 GARCH 방법이 높은 예측 성능을 보였다. 하지만 GARCH 방법의 측정 결과가 일부 구간에서 불안정한 모습을 보인 반면, 멀티프랙탈 VaR 모형은 전체적으로 안정적인 예측 결과를 보였다. 그리고 멀티프랙탈 VaR 는 낮은 신뢰 수준에서 상대적으로 우수한 예측 성과를 기록했다. 이는 본 연구의 모형이 극단적인 위험을 측정하는 경우에 상대적으로 높은 성능을 지님을 의미한다.

멀티프랙탈 VaR 모형은 다음과 같은 방향으로 개선이 가능하다. 우선 본 연구의 간단한 가정들을 보다 발전된 모형으로 대체할 수 있다. 역사적 변동성은 GARCH 와 같은 이분산성 시계열 모형으로 추정할 수 있다. 본 연구의 이항 MMAR 확률모형은 MRW (multifractal random walk) 혹은 MSM (Markov switching multifractal) 모형으로 대체할 수 있다. 이를 통해 상대적으로 정교한 VaR 를 추정할 수 있다.

두 번째로 본 연구의 모형을 개선하여 포트폴리오의 VaR 를 추정하는 연구도 이루어져야 한다. 포트폴리오의 스케일 지수나 멀티프랙탈 척도는 포트폴리오에 속한 각 자산의 척도들의 단순한 가중 합으로 나타나지 않고 보다 복잡한 형태를 보인다[42]. 때문에 이에 적합한 VaR 추정 모형을 설계하고 검증할 필요가 있다.

멀티프랙탈 이론에서 시간변환 과정은 단일프랙탈 확률과정과 멀티프랙탈 확률과정을 서로 연결해준다. 따라서 실제 관찰되는 멀티프랙탈 시계열에서 시간변환 과정을 추정 가능하면, 시계열을 브라우니안 운동과 같은 단일프랙탈 과정으로 변환한 후에 분석할 수 있다. 아직 이와 같은 주제에 대한 연구가 부족하므로 추후에 연구할 필요가 있다.

마지막으로 금융 시장에서 금융 자산 가격은 투자자들간의 거래로 결정되고, 투자자들은 자산 가치에 대한 정보나 자산 가격의 움직임에 영향을 받아 의사 결정을 한다. 금융 시계열에 나타나는 통계적 특징이나 현상들은 이러한 외적 요인들에 영향을 받을 수 밖에 없다. 본 연구에서는 멀티프랙탈 특성을 분석함에 있어서 전반적으로 시계열 자체의 움직임만을 고려하였다. 후속 연구에서는 멀티프랙탈 특성과 외적 요인들과의 관계를 파악하고, 이를 분석 모형에 적용하는 작업도 중요하게 이루어져야 한다.

이와 같은 측면에서 이루어진 일부 실증 연구들은 2.4 절에서도 언급했듯이 멀티프랙탈 척도를 금융 시장의 효율성이나 금융 위험의 척도로 보았다. 이들은 선진국과 개발도상국의 금융 시장들에서 측정한 멀티프랙탈 척도를 비교하거나, 금융 위기 전후의 멀티프랙탈 척도를 비교함으로써 이를 입증했다. 반면 이외의 외적 요인들과 멀티프랙탈 특성의 관계에 대한 연구는 많지

[42] Muzy, et al. (2001)와 Pantanella, et al. (2009)의 연구에서 이에 대해 설명했다.

않다. 시장 유동성과의 관계, 투자자들의 투자 행태와의 관계, 개별 기업 주가의 고유 위험과의 관계 등에 대한 다양한 연구의 시도는 금융 시장에서 멀티프랙탈 특성이 갖는 직관적 의미를 이해하는데 도움이 될 것이다.

참고 문헌

Alessio, E, A Carbone, G Castelli, and V Frappietro, (2002). "Second-order moving average and scaling of stochastic time series", *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 27, 197-200.

Alexander, C, (2009). "Market Risk Analysis, Value at Risk Models"(John Wiley & Sons).

Andersen, TG, and T Bollerslev, (1997). "Intraday periodicity and volatility persistence in financial markets", *Journal of empirical finance*, 4, 115-158.

Bacry, E, J Delour, and JF Muzy, (2001a). "Modelling financial time series using multifractal random walks", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 299, 84-92.

Bacry, E, J Delour, and JF Muzy, (2001b). "Multifractal random walk", *Physical Review E*, 64, 026103.

Bacry, E, A Kozhemyak, and JF Muzy, (2008). "Continuous cascade models for asset returns", *Journal of Economic Dynamics and Control*, 32, 156-199.

Baillie, RT, (1996). "Long memory processes and fractional integration in econometrics", *Journal of econometrics*, 73, 5-59.

Barabási, AL, (1995). "Fractal concepts in surface growth"(Cambridge university press).

Barndorff-Nielsen, OE, and N Shephard, (2006). "Econometrics of testing for jumps in financial economics using bipower variation", *Journal of Financial econometrics*, 4, 1-30.

Bartolozzi, M, C Mellen, T Di Matteo, and T Aste, (2007). "Multi-scale correlations in different futures markets", *The European Physical Journal B*, 58, 207-220.

Barunik, J, T Aste, T Di Matteo, and R Liu, (2012). "Understanding the source of multifractality in financial markets", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391, 4234-4251.

Barunik, J, and L Kristoufek, (2010). "On Hurst exponent estimation under heavy-tailed distributions", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 389, 3844-3855.

Batten, JA, H Kinateder, and N Wagner, (2014). "Multifractality and value-at-risk forecasting of exchange rates", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 401, 71-81.

Bogachev, MI, and A Bunde, (2009). "Improved risk estimation in multifractal records: Application to the value at risk in finance", *Physical Review E*, 80, 026131.

Bollerslev, T, and H Ole Mikkelsen, (1996). "Modeling and pricing long memory in stock market volatility", *Journal of econometrics*, 73, 151-184.

Borland, L, JP Bouchaud, JF Muzy, and G Zumbach, (2005). "The Dynamics of Financial Markets -Mandelbrot's multifractal cascades, and beyond", *Wilmott Magazine*.

Bouchaud, JP, A Matacz, and M Potters, (2001). "Leverage effect in financial markets: The retarded volatility model", *Physical Review Letters*, 87, 228701.

Breidt, FJ, N Crato, and P De Lima, (1998). "The detection and estimation of long memory in stochastic volatility", *Journal of econometrics*, 83, 325-348.

Calvet, L, and A Fisher, (2001). "Forecasting multifractal volatility", *Journal of econometrics*, 105, 27-58.

Calvet, L, and A Fisher, (2002). "Multifractality in asset returns: theory and evidence", *Review of Economics and Statistics*, 84, 381-406.

Calvet, L, and A Fisher, (2004). "How to forecast long-run volatility: regime switching and the estimation of multifractal processes", *Journal of Financial econometrics*, 2, 49-83.

Calvet, L, and A Fisher, (2008). "Multifractal volatility: theory, forecasting, and pricing"(Academic Press).

Calvet, L, A Fisher, and S Thompson, (2006). "Volatility comovement: a multifrequency approach", *Journal of econometrics*, 131, 179-215.

Caraiani, P, (2012). "Evidence of multifractality from emerging european stock markets", *PloS one*, 7, e40693.

Cont, R, (2001). "Empirical properties of asset returns: stylized facts and statistical issues".

Cont, R, (2007). "Volatility clustering in financial markets: empirical facts and agent-based models"(Springer).

Dacorogna, MM, UA Müller, OV Pictet, and CG De Vries, (2001). "Extremal forex returns in extremely large data sets", *Extremes*, 4, 105-127.

Di Matteo, T, (2007). "Multi-scaling in finance", *Quantitative Finance*, 7, 21-36.

Di Matteo, T, T Aste, and MM Dacorogna, (2003). "Scaling behaviors in differently developed markets", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 324, 183-188.

Di Matteo, T, T Aste, and MM Dacorogna, (2005). "Long-term memories of developed and emerging markets: Using the scaling analysis to characterize their stage of development", *Journal of Banking & Finance*, 29, 827-851.

Drożdż, S, J Kwapień, P Oświecimka, and Rafal Rak, (2009). "Quantitative features of multifractal subtleties in time series", *EPL (Europhysics Letters)*, 88, 60003.

Dueker, MJ, (1997). "Markov switching in GARCH processes and mean-reverting stock-market volatility", *Journal of Business & Economic Statistics*, 15, 26-34.

Eisler, Z, and J Kertész, (2004). "Multifractal model of asset returns with leverage effect", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 343, 603-622.

Embrechts, P, and M Maejima, (2002). "Selfsimilar Processes."(Princeton University Press, Princeton, NJ).

Figlewski, S, and X Wang, (2000). "Is the" Leverage Effect" a Leverage Effect?".

Fouque, JP, G Papanicolaou, and KR Sircar, (2000). "Mean-reverting stochastic volatility", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3, 101-142.

Górski, AZ, S Drożdż, and J Speth, (2002). "Financial multifractality and its subtleties: an example of DAX", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316, 496-510.

Gençay, R, MM Dacorogna, UA Muller, O Pictet, and R Olsen, (2001). "An introduction to high-frequency finance"(Academic Press).

Giardina, I, JP Bouchaud, and M Mézard, (2001). "Microscopic models for long ranged volatility correlations", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 299, 28-39.

Grahovac, D, and NN Leonenko, (2014). "Detecting multifractal stochastic processes under heavy-tailed effects", *Chaos, Solitons & Fractals*, 65, 78-89.

Grech, D, and Z Mazur, (2004). "Can one make any crash prediction in finance using the local Hurst exponent idea?", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 336, 133-145.

Grech, D, and Z Mazur, (2005). "Statistical properties of old and new techniques in detrended analysis of time series", *ACTA PHYSICA POLONICA SERIES B*, 36, 2403.

Grech, D, and G Pamuła, (2008). "The local Hurst exponent of the financial time series in the vicinity of crashes on the Polish stock exchange market", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387, 4299-4308.

Harte, D, (2001). "Multifractals: theory and applications"(CRC Press).

HARVEYŁ, AC, (2002). "Long memory in stochastic volatility", *Forecasting volatility in the financial markets*, 307.

Hurst, HE, (1951). "{Long-term storage capacity of reservoirs}", *Trans. Amer. Soc. Civil Eng.*, 116, 770-808.

Ihlen, E, (2012). "Introduction to multifractal detrended fluctuation analysis in Matlab", *Frontiers in physiology*, 3.

Jiang, ZQ, and WX Zhou, (2008a). "Multifractal analysis of Chinese stock volatilities based on the partition function approach", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387, 4881-4888.

Jiang, ZQ, and WX Zhou, (2008b). "Multifractality in stock indexes: Fact or Fiction?", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387, 3605-3614.
Jondeau, E, SH Poon, and M Rockinger, (2007). "Financial modeling under non-Gaussian distributions"(Springer).
Kantelhardt, JW, SA Zschiegner, E Koscielny-Bunde, S Havlin, A Bunde, and HE Stanley, (2002). "Multifractal detrended fluctuation analysis of nonstationary time series", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 316, 87-114.
Kumar, S, and N Deo, (2009). "Multifractal properties of the Indian financial market", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 388, 1593-1602.
Kwapień, J, P Oświęcimka, and S Drożdż, (2005). "Components of multifractality in high-frequency stock returns", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 350, 466-474.
L'vov, Victor S, Evgenii Podivilov, Anna Pomyalov, Itamar Procaccia, and Damien Vandembroucq, (1998). "Improved shell model of turbulence", *Physical Review E*, 58, 1811.
Lee, H, and W Chang, (2015). "Multifractal regime detecting method for financial time series", *Chaos, Solitons & Fractals*, 70, 117-129.
Lim, G, SY Kim, H Lee, K Kim, and DI Lee, (2007). "Multifractal detrended fluctuation analysis of derivative and spot markets", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 386, 259-266.
Liu, R, and T Lux, (2005). "Long memory in financial time series: Estimation of the bivariate multi-fractal model and its application for value-at-risk".
Lux, T, (2003). "The multi-fractal model of asset returns: its estimation via GMM and its use for volatility forecasting"(Economics working paper/Christian-Albrechts-Universität Kiel, Department of Economics).
Lux, T, and M Marchesi, (2000). "Volatility clustering in financial markets: A microsimulation of interacting agents", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3, 675-702.
Mandelbrot, B, (1997). "Fractals and scaling in finance: discontinuity, concentration, risk"(New York: Springer).
Mandelbrot, B, A Fisher, and L Calvet, (1997). "A multifractal model of asset returns"(Cowles Foundation for Research in Economics).
Mandelbrot, BB, (1977). "Fractals: form, change and dimension", *San Francisko: WH Freemann and Company*.
Matia, K, Y Ashkenazy, and HE Stanley, (2003). "Multifractal properties of price fluctuations of stocks and commodities", *EPL (Europhysics Letters)*, 61, 422.

McNeil, AJ, and R Frey, (2000). "Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: an extreme value approach", *Journal of empirical finance*, 7, 271-300.
McNeil, AJ, R Frey, and P Embrechts, (2010). "Quantitative risk management: concepts, techniques, and tools"(Princeton university press).
Merville, LJ, and DR Pieptea, (1989). "Stock-price volatility, mean-reverting diffusion, and noise", *Journal of financial Economics*, 24, 193-214.
Mielniczuk, J, and P Wojdyłło, (2007). "Estimation of Hurst exponent revisited", *Computational Statistics & Data Analysis*, 51, 4510-4525.
Morales, R, T Di Matteo, and T Aste, (2013). "Non stationary multifractality in stock returns".
Morales, R, T Di Matteo, R Gramatica, and T Aste, (2012). "Dynamical generalized Hurst exponent as a tool to monitor unstable periods in financial time series", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 391, 3180-3189.
Muzy, JF, J Delour, and E Bacry, (2000). "Modelling fluctuations of financial time series: from cascade process to stochastic volatility model", *The European Physical Journal B-Condensed Matter and Complex Systems*, 17, 537-548.
Muzy, JF, D Sornette, J Delour, and A Arneodo, (2001). "Multifractal returns and hierarchical portfolio theory".
Oh, G, C Eom, S Havlin, W-S Jung, F Wang, HE Stanley, and S Kim, (2012). "A multifractal analysis of Asian foreign exchange markets", *The European Physical Journal B*, 85, 1-6.
Oświęcimka, P, J Kwapień, and S Drożdż, (2005). "Multifractality in the stock market: price increments versus waiting times", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 347, 626-638.
Pantanella, A, A Pianese, NE Mastorakis, A Croitoru, VE Balas, E Son, and V Mladenov, (2009). "Minimum risk portfolios using MMAR"(WSEAS).
Riedi, RH, (1999). "Introduction to multifractals", *Rice Univ., Houston, TX, Tech. Rep*.
Riedi, RH, (2001). "Multifractal processes", *in: Long range dependence : theory and applications, eds. Doukhan, Oppenheim and Taqqu*.
Schmitt, F, D Schertzer, and S Lovejoy, (2000). "Multifractal fluctuations in finance", *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 3, 361-364.
Segnon, M, and T Lux, (2013). "Multifractal models in finance: Their origin, properties, and applications"(Kiel Working Paper).

Sensoy, A, (2013a). "Generalized Hurst exponent approach to efficiency in MENA markets", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 392, 5019-5026.

Sensoy, A, (2013b). "Time-varying long range dependence in market returns of FEAS members", *Chaos, Solitons & Fractals*, 53, 39-45.

Stanley, H E, (1987). "Introduction to phase transitions and critical phenomena", *Introduction to Phase Transitions and Critical Phenomena, by H Eugene Stanley, pp. 336. Foreword by H Eugene Stanley. Oxford University Press, Jul 1987. ISBN-10: 0195053168. ISBN-13: 9780195053166*, 1.

Suárez-García, P, and D Gómez-Ullate, (2014). "Multifractality and long memory of a financial index", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 394, 226-234.

Theiler, J, S Eubank, A Longtin, B Galdrikian, and J Doyne Farmer, (1992). "Testing for nonlinearity in time series: the method of surrogate data", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 58, 77-94.

Wei, Y, and P Wang, (2008). "Forecasting volatility of SSEC in Chinese stock market using multifractal analysis", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387, 1585-1592.

Wendt, H, and P Abry, (2007). "Multifractality tests using bootstrapped wavelet leaders", *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 55, 4811-4820.

Wendt, H, P Abry, and S Jaffard, (2007). "Bootstrap for empirical multifractal analysis", *Signal Processing Magazine, IEEE*, 24, 38-48.

Weron, R, (2002). "Estimating long-range dependence: finite sample properties and confidence intervals", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 312, 285-299.

Xu, L, P Ivanov, K Hu, Z Chen, A Carbone, and HE Stanley, (2005). "Quantifying signals with power-law correlations: A comparative study of detrended fluctuation analysis and detrended moving average techniques", *Physical Review E*, 71, 051101.

Xu, Z, and R Gençay, (2003). "Scaling, self-similarity and multifractality in FX markets", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 323, 578-590.

Zhou, WX, (2009). "The components of empirical multifractality in financial returns", *EPL (Europhysics Letters)*, 88, 28004.

Zhou, WX, (2012). "Finite-size effect and the components of multifractality in financial volatility", *Chaos, Solitons & Fractals*, 45, 147-155.

Zhou, WX, D Sornette, and WK Yuan, (2006). "Inverse statistics and multifractality of exit distances in 3D fully developed turbulence", *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 214, 55-62.

Zunino, L, A Figliola, BM Tabak, DG Pérez, M Garavaglia, and OA Rosso, (2009). "Multifractal structure in Latin-American market indices", *Chaos, Solitons & Fractals*, 41, 2331-2340.

Zunino, L, BM Tabak, A Figliola, DG Pérez, M Garavaglia, and OA Rosso, (2008). "A multifractal approach for stock market inefficiency", *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 387, 6558-6566.

부록 1. 식 (2.9), 르장드르 (Legendre) 변환

식 (2.15)와 같이 정의되는 멀티프랙탈 측도, $\mu_{\mathrm{k}}(\mathrm{t})$의 홀더 (Hölder) 지수와 멀티프랙탈 스펫트럼은 식 (2.5)에따라 아래와 동일하다. 이 때, V_i는 $-\log_b M_{\eta_1} M_{\eta_1\eta_2} \cdots M_{\eta_1 \cdots \eta_i}$로 정의된다.

$$\alpha_{\mathrm{k}}(\mathrm{t}_i) = \log \mu_{\mathrm{k}}(\mathrm{t}_i)/\log \tau \qquad \text{(A.1)}$$

$$\alpha_{\mathrm{k}} = \frac{1}{\mathrm{k}} \sum_{i=1}^{\mathrm{k}} V_i \qquad \text{(A.2)}$$

만약 $\{V_{\mathrm{k}}\}$가 독립적이고 동일한 분포 (iid) 가정을 만족하면, k가 무한대로 발산할 때, V_1보다 큰 모든 상수, α에 대해 다음과 같은 크래머 이론 (Cramer's theorem)[43]이 성립한다.

$$\frac{1}{\mathrm{k}} \log \mathbb{P}\{\frac{1}{\mathrm{k}} \sum_{i=1}^{\mathrm{k}} V_i > \alpha\} \to \inf_q(\log \mathbb{E}[e^{q(\alpha - V_1)}]) \qquad \text{(A.3)}$$

크래머 이론에 위의 홀더 지수를 대입하면 아래와 같다.

$$\frac{1}{\mathrm{k}} \log_b \mathbb{P}\{\alpha_{\mathrm{k}} > \alpha\} \to \inf_Q(\log_b \mathbb{E}[e^{Q(\alpha + \log_b M_{\eta_1})}])$$

$$= \inf_q(\log_b\{e^{\alpha Q}\mathbb{E}\left[e^{Q \log_b M}\right]\}) \qquad \text{(A.4)}$$

이 때, $q = Q/\log b$를 대입하면 아래와 같다.

$$= \inf_q(\log_b\{e^{\alpha q \log b}\mathbb{E}\left[e^{q \log b \log_b M}\right]\})$$

$$= \inf_q(\alpha q + \log_b \mathbb{E}[M^q])$$

$$= \inf_q(\alpha q - \zeta_{\theta}(\mathrm{q})) \qquad \text{(A.5)}$$

---

[43] 이에 대한 증명은 Billingsley, P (1979) "Probability and Measure", *John Wiley and Sons* 를 참조한다.

마지막 등호는 멀티프랙탈 측도가 표준 조건을 만족할 때, 식 (2.18)에 의해 성립한다.

식 (2.6)의 멀티프랙탈 스펙트럼은 아래와 동일하다.

$$f(\alpha) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log_b N_k(\alpha) \qquad \text{(A.6)}$$

$N_k(\alpha)$ 는 α 와 $\alpha + \Delta$ 사이에 존재하는 α_k 의 개수를 의미하므로 다음이 성립한다.

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{P}\{\alpha < \alpha_k \le \alpha + \Delta\} = \lim_{k\to\infty} N_k(\alpha)/b^k \qquad \text{(A.7)}$$

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \log_b \mathbb{P}\{\alpha < \alpha_k \le \alpha + \Delta\} = f(\alpha) - 1 \qquad \text{(A.8)}$$

이에 따라 식 (2.9)의 르장드르 변환이 성립한다.

부록 2. 방정식 (5.8)의 해의 존재 조건

식 (5.8)의 우변을 $g(m_0)$라고 하자. $q_c \equiv 1/H$로 정의되고, $0 < m_0 < 1/2$이므로, $0 < q < q_c$일 경우, 다음 식들이 성립한다.

$$g(0) = 1 \qquad \text{(A.9)}$$

$$g(1/2) = 2^{1-Hq} > 1 \qquad \text{(A.10)}$$

$$\frac{dg(m_0)}{dm_0} = Hq\{{m_0}^{Hq-1} + (1-m_0)^{Hq-1}\} > 0 \qquad \text{(A.11)}$$

즉, $g(m_0)$ 는 범위 $0 < m_0 < 1/2$ 에서 1 부터 2^{1-Hq} 까지 단순 증가하는 함수이다. 따라서 방정식 (5.8)의 해가 존재하려면, 좌변의 상수항, $2^{1-\zeta_X(q)}$는 다음을 만족해야 한다.

$$1 < 2^{1-\zeta_X(q)} < 2^{1-Hq} \qquad \text{(A.12)}$$

$$0 < 1 - \zeta_X(q) < 1 - Hq \quad \text{(A.13)}$$

$$Hq < \zeta_X(q) < 1 \quad \text{(A.14)}$$

따라서 $0 < q < q_c$에서 $\zeta_X(q)$을 추정한 값이 위의 조건을 만족할 때 방정식의 해가 존재한다. 마찬가지로 $q > q_c$ 일 경우에는 $Hq > 1$이므로 다음이 성립한다.

$$g(1/2) = 2^{1-Hq} < 1 \quad \text{(A.15)}$$

$$\frac{dg(m_0)}{dm_0} < 0 \quad \text{(A.16)}$$

즉, $g(m_0)$ 는 범위 $0 < m_0 < 1/2$ 에서 단순 감소하는 함수이고, 방정식 해의 존재 조건은 다음과 같다.

$$2^{1-Hq} < 2^{1-\zeta_X(q)} < 1 \quad \text{(A.17)}$$

$$1 < \zeta_X(q) < Hq \quad \text{(A.18)}$$

Abstract

Empirical Research for Time-varying Multifractality and Multifractal Value-at-Risk Model

Hojin Lee

Financial Risk Engineering Lab.

Department of Industrial Engineering

The Graduate School

Seoul National University

In financial time series, there are various stylized facts that is hard to explain with traditional models. Heavy tail and asymmetry can be observed in probability distribution function of return. Volatility′s heteroskedasticity, clustering and long memory are shown in real financial time series. The major concern of this research, multifractality is one of those characteristics.

As a structure of financial assets becomes increasingly sophisticated, there are many studies to narrow down the gap between theoretical models and practices. The researches that analyze complexity of time-series by understanding multifractal structure are in the same context. This dissertation investigated the multifractal property of real financial time-series and introduced a model to measure financial risk in real market.

This dissertation analyzed the multifractal property in daily KOSPI, S&P500 and foreign exchange rate (USD/KRW) data from 1990 to 2012. In those practical data, features of multifractality were not consistent and were changed over time.

Since there are statistical difference between characteristics of multifractal time-series and characteristics of monofractal time-series, distinguish regime that have multifractal property is necessary in practical data. Therefore, this dissertation suggested a method that detects multifractal regime. By using this method, the results showed that multifractal regimes commonly have a return distribution with heavy tail and high kurtosis.

In addition, this dissertation analyzed relativeness between the multifractal property of time-series and other stylized facts such as tail thickness of probability distribution or autocorrelation property of volatility. This research showed that characteristics of multifractality are

influenced by existence of tail thickness and a nonlinear autocorrelation component of volatility. In Korean stock market, tail thickness is a major component that influence multifractality. Linear autocorrelation component, however, was irrelevant to the multifractal property.

Finally, this research suggested a value-at-risk (VaR) model using multifractal characteristics. Unlike most of multifractal researches that estimates VaR with simulation method, this multifractal VaR is using a parametric method; so it does not need to consider a simulation error. The results of multifractal VaR were more stable and accurate compared to results of benchmark models that used simulation and empirical analysis. In addition, forecasting performance of multifractal model was increased as the significant level of VaR was decreased. These results indicated that multifractal VaR is appropriate for measuring extreme financial risk.

Keywords : multifractality, scaling analysis, regime detecting model, financial risk, MMAR, value-at-risk

Student Number : 2009-21144