



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학박사학위논문

표적 충돌각 및 구동기 동역학을 고려한
BTT 미사일의 유도 조종 시스템 설계

(Design of a Guidance and Control System for BTT Missiles Considering
Impact Angle Constraint and Actuator Dynamics)

2014년 2월

서울대학교 대학원
전기·컴퓨터 공학부
염준형

공학박사학위논문

표적 충돌각 및 구동기 동역학을 고려한
BTT 미사일의 유도 조종 시스템 설계

(Design of a Guidance and Control System for BTT Missiles Considering
Impact Angle Constraint and Actuator Dynamics)

2014년 2월

서울대학교 대학원
전기·컴퓨터 공학부
염준형

표적 충돌각 및 구동기 동역학을 고려한 BTT 미사일의 유도 조종 시스템 설계

(Design of a Guidance and Control System for BTT Missiles Considering
Impact Angle Constraint and Actuator Dynamics)

지도교수 하 인 중

이 논문을 공학박사 학위논문으로 제출함
2013년 11월

서울대학교 대학원
전기·컴퓨터 공학부
염 준 형

염준형의 공학박사 학위논문을 인준함
2013년 12월

위 원 장	서	진	현	(인)
부위원장	하	인	중	(인)
위 원	최	진	영	(인)
위 원	심	형	보	(인)
위 원	정		송	(인)

초 록

본 논문에서는 BTT(bank-to-turn) 미사일의 표적에 대한 타격 성능 및 타격 정밀도 제고를 위해, 탐색기에서 획득한 표적의 3차원 정보를 활용하여 구동기 동역학을 고려한 자동조종제어기 및 등속 운동하는 표적의 표적 충돌각을 고려한 최적 유도 법칙의 개발에 대한 연구를 수행한다.

첫째로, 상대적으로 느린 구동기 동역학이 존재할 경우에도 이를 잘 보상해줄 수 있는 자동조종 제어기를 개발한다. 기존의 유사 특이 섭동 기법을 이용해 개발된 자동조종 제어기는 미사일 시스템의 입출력 동특성이 비행 조건에 관계없이 선형 시스템의 형태로 근사된다는 장점을 가지고 있지만, 구동기 동역학이 상대적으로 느릴 경우 그 안정성을 보장할 수 없다는 문제점을 가지고 있다. 제안된 자동조종 제어기는 이를 보완하여 구동기 동역학의 영향을 보상하면서도 원하는 입출력 동특성을 나타내줄 수 있도록 한다. 또한 BTT 미사일의 비최소위상 특성과 비선형 공역학 모델을 모두 고려하여 설계된 결과로써, 제어 편각, 받음각 등 상태 변수의 미분값을 필요로 하지 않아 잡음에도 강인한 특성을 가지고 있다.

둘째로, BTT 미사일의 표적 충돌각을 고려한 최적 유도 법칙을 제시한다. 기존의 표적 충돌각을 고려한 유도 기법들은 미사일과 표적 사이의 2차원 평면상의 추적 기하학만을 고려하였기 때문에, 롤링을 통해 방향전환을 하는 BTT 미사일에는 적합하지 않다. 또한 자동조종장치 동역학을 무시하거나 1차로 근사하였지만, 이는 일반적인 경우 가능하지 않다. 본 논문에서는 3차원 추적 기하학과 자동조종장치 동역학을 모두 고려하여 등속 운동하는 표적을 원하는 표적 충돌각으로 요격할 수 있도록 하는 최적 종말 유도 법칙을 개발한다. 제안된 유도 법칙은 잔여 비행 시간(time-to-go)의 시변 상태 궤환 형태(state-feedback with time-varying gain)로 나타나기 때문에 수학적으로 복잡성을 가지지만 지시표 형태로 미리 구성하여 실시간 구현이 가능하다.

또한, ILAAT 미사일의 공역학 자료를 반영하여 실제 상황에 가까운 여러 모의 실험을 통해 제안된 자동조종 제어기와 최적 유도 법칙의 성능을 검증하였다.

주요어 : BTT 미사일 시스템, 유사 특이 섭동 기법, 구동기 동역학, 비최소위상 특성, 자동조종 제어기, 표적 충돌각, 최적 유도 법칙

학 번 : 2004-21558

목 차

초 록	i
목 차	ii
표 목 차	iv
그 림 목 차	v
제 1 장 서 론	1
1.1 연구 배경	1
1.2 연구 목표	4
제 2 장 기존 연구 결과	6
2.1 기존 자동조종 제어기 설계 기법	6
2.2 기존 유도 법칙 설계 기법	11
제 3 장 구동기 동역학을 고려한 자동조종 제어기	15
3.1 BTT 미사일의 시스템 모델	15
3.2 자동조종 제어기 설계	23
3.3 성능 분석	39
3.4 모의 실험 결과	54
3.5 소결론	70
제 4 장 표적 충돌각을 고려한 최적 유도 법칙	71
4.1 3차원 추적 기하학	71
4.2 최적 유도 법칙 설계	75
4.3 모의 실험 결과	87
4.4 소결론	113
제 5 장 결 론	114

제 6 장 부 록	116
6.1 기호의 정의	116
6.2 ILAAT 미사일의 제원	126
참 고 문 헌	135
Abstract	141

표 목 차

4.1	$[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [8000, 0, -100](\text{m})$ 정지 표적에 대한 요격 오차 및 표적 충돌각 오차	91
4.2	$[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 100, -200](\text{m})$ 정지 표적에 대한 요격 오차 및 표적 충돌각 오차	91
4.3	$[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [6000, 100, -200](\text{m})$ 에서 등속 운동하는 표적에 대한 요격 오차 및 표적 충돌각 오차	91
4.4	$[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 100, -200](\text{m})$ 정지 표적에 대한 다양한 추적 시나리오	92
6.1	ILAAT 미사일의 제원	127

그림 목 차

1.1 BTT 유도 미사일 시스템의 블록선도	3
3.1 비행중인 미사일에 작용하는 힘	19
3.2 C_l 의 3차원 그래프 ($\delta_p = 0$)	59
3.3 C_m 의 3차원 그래프 ($\delta_q = 0$)	59
3.4 D_4C_y 의 3차원 그래프	60
3.5 D_4C_z 의 3차원 그래프	60
3.6 구동기 동역학과 1차 필터가 존재하지 않을 경우의 응답 특성(i.e., $\lambda_z = \infty$, and $\delta_q^c = \delta_q$)	61
3.7 구동기 동역학이 이상적으로 빠를 경우의 응답 특성(i.e., $\delta_i^c = \delta_i$) . .	62
3.8 상대적으로 빠른 구동기 동역학이 존재할 경우의 응답 특성($\omega_a =$ $120Hz, \alpha_c = 1$)	63
3.9 상대적으로 느린 구동기 동역학이 존재할 경우의 응답 특성, 기존의 자동조종 제어기 ($\omega_a = 60Hz, \alpha_c = 1$)	64
3.10 상대적으로 느린 구동기 동역학이 존재할 경우의 응답 특성, 제안된 자동조종 제어기 ($\omega_a = 60Hz, \alpha_c = 0.35$)	65
3.11 더욱 느린 구동기 동역학이 존재할 경우의 응답 특성, 제안된 자동조 종 제어기 ($\omega_a = 30Hz, \alpha_c = 0.28$)	66
3.12 C_z, C_m 에 $\pm 30\%$ 오차가 존재할 경우의 응답 특성 ($\omega_a = 60Hz, \alpha_c =$ 0.35)	67
3.13 U, V, W, p, q, r 의 측정 잡음 및 2 ms의 시간 지연이 있을 경우의 응답 특성 ($\omega_a = 60Hz, \alpha_c = 0.35$)	68
3.14 $M = 1, 2, 3, 3.5$ 의 마하 수에 따른 응답 특성 ($\omega_a = 60Hz, \alpha_c = 0.35$)	69
4.1 3차원 추적 기하학	72
4.2 표적 충돌각 좌표계	72
4.3 표적 충돌각의 정의	73
4.4 ϕ 와 $\bar{\phi}$ 의 정의	76

4.5	쌍일차 시스템(Bilinear and Cascaded System)의 구성도	78
4.6	잔여 비행 시간의 시변 함수	86
4.7	$[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [8000, 0, -100](\text{m})$, $(\psi^* = 0^\circ, \theta^* = 0^\circ)$ 정지 표 적에 대한 모의 실험 결과	94
4.8	$[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [8000, 0, -100](\text{m})$, $(\psi^* = 0^\circ, \theta^* = -30^\circ)$ 정지 표적에 대한 모의 실험 결과	96
4.9	$[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [8000, 0, -100](\text{m})$, $(\psi^* = 5^\circ, \theta^* = -20^\circ)$ 정지 표적에 대한 모의 실험 결과	98
4.10	$[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 100, -200](\text{m})$, $(\psi^* = -5^\circ, \theta^* = -10^\circ)$ 정지 표적에 대한 모의 실험 결과	100
4.11	$[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 100, -200](\text{m})$, $(\psi^* = -10^\circ, \theta^* = -10^\circ)$ 정지 표적에 대한 모의 실험 결과	102
4.12	$[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 100, -200](\text{m})$, $(\psi^* = -10^\circ, \theta^* = -15^\circ)$ 정지 표적에 대한 모의 실험 결과	104
4.13	$[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [6000, 100, -200](\text{m})$, $[V_{Tx}, V_{Ty}, V_{Tz}] = [0, -10, 0]$ (m/s), $(\psi^* = 0^\circ, \theta^* = -10^\circ)$ 에 대한 모의 실험 결과	106
4.14	$[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [6000, 100, -200](\text{m})$, $[V_{Tx}, V_{Ty}, V_{Tz}] = [5, -10, 0]$ (m/s), $(\psi^* = 5^\circ, \theta^* = -15^\circ)$ 에 대한 모의 실험 결과	108
4.15	$[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [6000, 100, -200](\text{m})$, $[V_{Tx}, V_{Ty}, V_{Tz}] = [10, 5, 0]$ (m/s), $(\psi^* = -10^\circ, \theta^* = -10^\circ)$ 에 대한 모의 실험 결과	110
4.16	다양한 표적 충돌각에 대한 모의 실험 결과	111
4.17	다양한 표적 충돌각에 대한 미사일의 반응각	112
6.1	ILAAT 미사일의 공력 계수	134

제 1 장 서론

1.1 연구 배경

미사일 시스템의 제어 방식은 방향조종 방식에 따라 크게 STT(skid-to-turn) 미사일과 BTT(bank-to-turn) 미사일로 나뉘어진다. STT 미사일은 피치(pitch) 가속도와 요(yaw) 가속도를 동시에 조종함으로써 비행 방향을 조종하고, BTT 미사일은 롤 각과 피치 가속도를 조종함으로써 비행 방향을 조종한다. 따라서 STT 미사일은 요 및 피치 평면에 대하여 대칭인 구조를 가져야 하지만, BTT 미사일은 피치 평면에 대해서만 대칭인 구조를 가지면 된다. 이와 같이 구조적 제약이 덜한 장점으로 인하여 내부 저장 공간이 늘어날 수 있고, 날개 구조를 크게 할 수 있어 같은 크기의 STT 미사일보다 큰 가속도를 발생시킬 수 있다. 그리고 공기 흡입 램제트(air-breathing ramjet) 추진 기관을 탑재할 수 있기 때문에 같은 양의 연료를 사용하는 STT 미사일에 비하여 비행 거리를 증진시킬 수 있다. 그러나 램제트 엔진으로 유입되는 공기의 양이 어느정도 이상 유지되어야 한다는 제약조건으로 인해 옆미끄러짐각(side-slip angle)에 대한 제약이 매우 엄격하다. 또한, BTT 미사일은 요 방향의 추력을 가질 수 없기 때문에 롤링과 피치 가속도로만 비행 방향을 조종해야 한다. 따라서 STT 미사일에 비하여 가속도 응답에 지연이 나타나게 되며, 롤링과 피치 운동 사이에 강한 결합성(coupling)이 발생하게 된다. 빠른 롤 각의 변화에 의해 발생하는 피치 채널과 요 채널의 간섭 효과는 비대칭 구조에 의하여 더욱 심하게 나타나기 때문에 BTT 미사일의 동역학 방정식은 STT 미사일에 비하여 훨씬 복잡하고 일반적인 형태로 주어진다.

BTT 유도 미사일 시스템은 그림 1.1과 같이 탐색기(seeker), 유도 장치(guidance), 자동조종장치(autopilot)의 하부 시스템으로 구성되어 있다. 탐색기는 목표물을 추적하여 미사일과 목표물의 상대 운동에 대한 정보를 획득하는 장치이고, 유도 장치는 목표물 요격을 위한 유도 명령을 생성하는 장치이며, 자동조종장치는 유도 명령에 따라 미사일 동역학을 제어하는 장치이다. BTT 유도 미사일 시스템의 통합 제어 기법에 관한 연구는 다음과 같은 문제점들로 인해 오랫동안 해결하기 쉽지 않은 어려운 문제로 알려져 있다. 첫째, 미사일 시스템의 동역학 방정식은 탐색기의 동역학 방정식, 미사일 동체의 동역학 방정식, 추적 기하학(pursuit kinematics) 등으로 구성되는데 이 각각의 하부 시스템들이 상당한 비선형성을 갖고 있어, 전체 시스템이 고차의 복잡한 비선형성을 띄게 된다. 특히, 공역학(aerodynamics)의 경우 풍동 실험을 통해 지시표(look-up table) 형태로 주어지는 강한 비선형성을 내포하고 있다. 또한, 제어 편각(control fins)으로부터 미사일 가속도까지의 입출력 동특성은 비최소위상(nonminimum phase)의 특성을 갖기 때문에 일반적인 궤환 선형화 기법을 통해 제어하기가 힘든 시스템이다[1, 2, 3].

한편, 군사 기술의 발전에 따라 미사일, 전투기, 전차와 같은 각종 군사 무기의 성능이 고도화되고 있으며, 그와 함께 유도 무기에 대한 회피 및 방어 능력도 빠르게 향상되고 있다. 따라서 유도 무기에 대해서도 이러한 표적에 대한 타격 능력 및 파괴력 증대를 위해 보다 향상된 유도 기법이 요구되고 있다. 고전적으로 이용되던 종말 유도 기법들은 표적을 점질량(point mass)로 가정하여 개발되었다. 하지만, 표적을 점질량 물체로 보고 미사일의 표적 타격 지점 및 자세각을 고려하지 않으면 표적의 타격에 성공했다고 하더라도 표적의 방어 능력이 좋거나 신관이 충돌각도에 민감하면 표적의 파괴에는 실패할 수도 있다. 최근 표적 영상 정보를 이용하여 표적의 6자유도 운동 및 자세를 정밀하게 추정할 수 있는 기술이 개발됨에 따라, 표적을 점질량이 아닌 3차원 물체로 인식할 수 있게 되었다. 이런 경우 유도 미사일

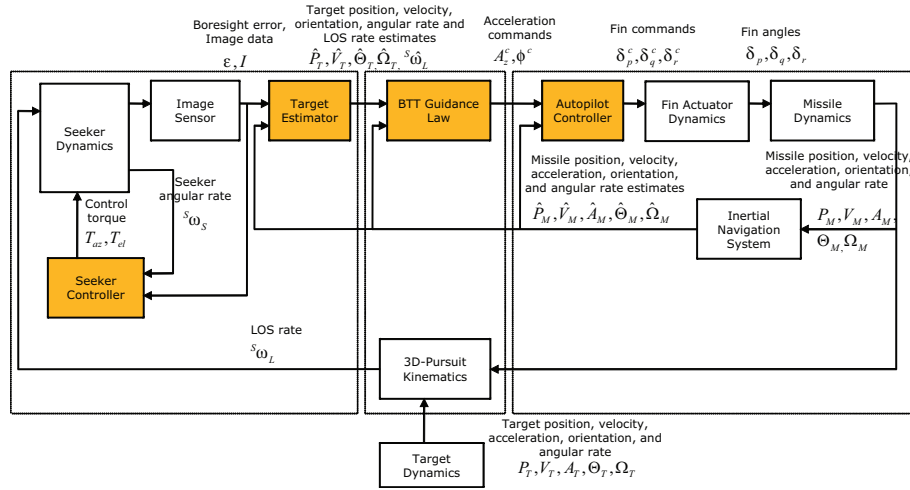


그림 1.1: BTT 유도 미사일 시스템의 블록선도

의 종말 유도 효율을 증가시키기 위해 미사일이 표적을 타격하는 각도인 표적 충돌 각(impact angle)을 제어할 수 있으면 적정 비행경로의 설정에 유리하고 우회공격 등이 가능할 뿐 아니라 미사일 탄두의 효과를 극대화할 수 있으므로 종말 호밍에서 표적 충돌각 제어는 미사일의 효율성을 높이기 위해 필요하다. 따라서, 표적 충돌각을 원하는 각도로 제어하는 것은 표적의 취약점을 공략하기 위해 필수적인 기술이다. 하지만 이러한 문제점들을 해결하기 위한 연구는 아직 활발하게 행해지고 있는 못하다. 기존 연구 결과들은 2차원 평면상에서의 충돌각 제어만을 다루고 있어, 요와 피치 채널의 커플링 문제가 있는 BTT 미사일에 적용하기가 어렵고, 반면에 3차원 공간에서의 롤 명령까지 고려한 표적 충돌각 유도 기법은 아직 전무한 상태이다.

1.2 연구 목표

본 논문은 BTT 미사일의 표적에 대한 타격 성능 및 타격 정밀도 제고를 위해, 탐색기에서 획득한 표적의 3차원 정보를 활용하여 구동기 동역학 및 표적 충돌각을 고려한 종말 유도 기법의 개발을 최종 목표로 한다. 이를 위해 현재까지 개발된 유도 조종 시스템에 대한 문제점 파악 및 성능 개선을 바탕으로 자동조종 제어기 및 종말 호밍 유도 기법을 개발하고 다양한 추적 시나리오 하에서의 모의실험을 통해 성능을 검증함으로써 표적에 대한 정밀요격을 가능하게 하도록 한다.

첫째로, 유사 특이 섭동 기법을 이용하여 구동기 동역학을 고려한 새로운 자동조종 제어기법의 개발을 완료한다. 개발된 자동조종 제어기를 적용하면 BTT 미사일의 롤 채널과 피치 채널 간의 커플링을 해결하여 자동조종장치 동역학이 비행조건에 관계없이 선형 시스템의 형태로 표시 가능하게 된다. 자동조종장치 동역학을 선형 시스템 형태로 표시하게 되면, 유도 법칙 설계시 자동조종장치 동역학을 고려한 유도법칙 설계가 가능하게 되어, 자동조종장치와 유도장치 간의 커플링문제를 해결할 수 있게 된다. 개발된 자동조종 제어기는 구동기 동역학, 비선형 미사일 동역학을 모두 고려하였으며, 어떤 미사일의 종류에도 관계없이 체계적으로(systematic) 적용이 가능하다. 모의 실험을 통하여 그 성능 및 실용성을 확인하고, 수학적 분석과 안정성 증명을 통해 이론적인 성능 분석을 완료한다.

둘째로, 표적 충돌각을 고려한 최적 종말 유도 법칙의 개발을 완료한다. 기존에는 정지 표적만을 고려하여 상태방정식을 세웠기 때문에, 표적이 이동할 경우 충돌각 오차가 발생하게 된다. 이를 등속 운동하는 표적까지 확장하고, 자동조종장치 동역학, 구동기 동역학 및 미사일 동역학의 비선형성을 근사 없이 모두 고려한 모의 실험을 수행하여 개발을 완료하도록 한다. 등속 운동하는 표적에 대해 상태방정식을 세울 경우, 느리게 기동하는 함선, 전차 등에 대해서도 충분한 요격 성능을 보장할 수 있게 된다. 또한, 개발된 최적 유도 법칙의 해는 수학적으로 매우 방대

한 양이지만, 잔여 비행 시간(time-to-go)의 함수를 계수로 갖는 시변 상태 궤환 형태(state-feedback with time-varying gain)로 나타나기 때문에 지시표(look-up table) 형태로 구현이 가능하다.

제 2 장 기존 연구 결과

2.1 기존 자동조종 제어기 설계 기법

자동조종 제어기 설계 기술은 미사일 분야가 시작되었을 때 부터 수십년간 이어져온 연구 주제이다. 최근에는 고기동 STT, BTT 미사일의 자동조종 제어기에 대한 많은 연구 결과들이 발표 되었다. 선형 모델을 사용한 자동조종 제어기 설계 기법은 주로 자코비안(Jacobian) 선형화 기법을 사용하고 있으며, 시스템 모델은 선형화 기준점에 대한 비선형 시스템의 일차 근사로 구해진다. 그러나 이러한 자코비안 선형화는 선형화가 시스템의 일차 근사식에 의해서 이루어지기 때문에 시스템의 고차 성분들이 무시되며, 선형화된 결과식이 선형화 기준점에 대한 함수로 주어지는 문제점으로 인하여 제어기의 성능과 안정성이 국지적으로 제한된다. 따라서, 이와 같은 자코비안 선형화의 문제점을 해결하기 위하여 여러 가지 설계 기법들이 제안되었다. 선형화 기준점을 중심으로 보다 넓은 범위에서 성능과 안정성을 제공하기 위하여 강인 제어 이론을 적용한 LQG/LTR 기법, H_∞ 기법, H_∞/μ -synthesis 기법 등이 제안되었다[4]- [8].

미사일 시스템을 선형화하지 않고 비선형 모델을 사용하기 위해서는 비선형 특성을 다루기 위한 비선형 제어 이론이 필요하다. 대표적인 비선형 제어 이론으로 궤환선형화 기법이 있다[9, 10]. 궤환선형화는 적절한 상태 변수 변환과 궤환 제어를 통하여 시스템을 선형화하는 것으로, 이 방식으로 선형화된 시스템은 선형화 기준점에 영향을 받지 않기 때문에 모든 동작 범위에서 우수한 성능을 제공한다[11]. 궤환선형화에 의한 선형화는 입출력 선형화와 상태 변수 선형화가 있는데, 미사일 시스템의 경우에는 입출력 선형화만이 가능하다. 그러나 입출력 궤환선형화 기법은

미사일 시스템의 받음각과 옆미끄러짐각 만을 제어하는 자세 제어에는 적용될 수 있으나, 가속도 제어에는 직접 적용이 불가능하다. 이는 다음과 같은 두가지 문제점에 기인한다. 첫째, 꼬리날개 조종 미사일(tail-controlled missile)은 비최소위상 시스템으로 주어지며, 비최소위상 시스템에 궤환선형화 기법을 적용하면 내부 동역학이 불안정해진다[12]. 둘째, 미사일 시스템은 공력학적 특성으로 인하여 대단히 불확실한 시스템인데, 궤환선형화 제어기의 구성상 시스템의 상태 변수에 대한 미분이 요구되며, 이는 시스템의 오차를 증폭하여 전체 시스템의 성능과 안정성을 저하시킨다. [13, 14]에서는 적응 제어 이론에 기반하여 비선형 제어기를 설계하여 선형화 과정에서 고려되지 않았던 미사일 시스템의 비선형성을 적절히 보상할 수 있었으나 이와 같은 기법은 머리날개 조종 미사일(canard-controlled missile)에만 한하여 적용되는 것으로서, 일반적인 꼬리날개 조종 미사일의 비최소위상 특성에 대한 적절한 고려가 이루어지지 않는 것이다. 최근에는 LPV(linear parameter varying) 제어 기법을 응용하여 큰 받음각 때문에 생기는 롤, 피치, 요 채널의 상호 결합을 고려한 STT 미사일의 가속도 자동조종 제어기가 제안되었으며[15], 외란과 불확실성의 영향을 고려한 BTT 미사일의 자동조종 제어기 설계 기법도 제안되었다[16, 17]. 하지만, 이는 모두 미사일 동역학의 비선형성을 고려하지 않고 선형화된 모델에 적용하였다는 한계가 있다.

[18, 19]에서는 강인 궤환 선형화 기법을 이용하여 미사일 동역학의 비선형성을 모두 고려한 자동조종 제어기 설계 기법이 제안되었다. 그러나 이 기법들은 미사일 가속도를 직접 제어할 수 없고, 미사일 자세나 받음각 등과 같은 다른 변수들을 제어하여 가속도를 만들어내는 방식을 택하고 있다. 실제로, 입출력 궤환 선형화 기법은 여러 비선형 시스템 분야에서 효과적으로 사용되고 있지만, 미사일 시스템의 가속도 제어에는 직접 적용될 수 없다. 이는 미사일의 제어 편각에서부터 미사일 가속도까지의 동적 입출력 특성이 비최소위상 특성(nonminimum-phase characteristics)을

가지고 있기 때문이다[1, 2, 3]. 최근에는 새로운 θ -D H_∞ 를 이용한 방법도 제안되었으나, 여전히 롤, 피치, 요 채널의 커플링을 무시하고 유도되었다는 단점이 있다[20].

이와 같이 가속도 명령을 추종하는 미사일 시스템의 성능은 비최소위상 특성에 의해 제한적이 될 수 밖에 없으며, 따라서 이러한 비최소위상 특성을 적절히 고려하여 제어기를 설계하는 것이 매우 중요한 문제가 된다. 최근, quasi-LPV 다항 고유구조 지정법(polynomial eigenstructure assignment approach)[21]을 이용하여 효과적으로 비최소위상 특성을 다룰 수 있는 기법이 제안되었으나, 여전히 미사일 시스템의 비선형성을 모두 고려하지 못하고 근사된 시스템만을 다루고 있다는 한계가 있다. 비최소위상 특성을 효과적으로 제어하기 위한 비선형 제어 기법에는 유사특이섭동 기법이 있다. 함수 역변환(functional-inversion) 및 시간 및 크기 변환 기법(time-scaled transforming techniques)을 특이섭동기법(singular-perturbation approach)과 같이 적용하여 비최소위상 시스템인 미사일 시스템을 최소위상 시스템으로 근사화하고, 근사화된 미사일 시스템에 대하여 궤환선형화 기법을 적용하여 선형화한 후, 이 선형 시스템에 대하여 주어진 사양을 만족하도록 자동조종 제어기를 설계할 수 있게 된다[22]. [23]에서는 STT 미사일에 대하여 부분 선형화 및 궤환선형화 기법과 함께 유사특이섭동 기법을 사용하여 마하 수나 공기 밀도와 같은 비행 환경 변수에 무관하게 선형 시스템의 형태로 입출력 동특성이 나타나 안정성을 보장하는 자동조종 제어기를 설계하였으며, 이 결과는 [24]에서 BTT 미사일을 대상으로 확장 응용되었다.

그러나, 이 방법들은 모두 구동기 동역학의 영향이 이상적으로 빠르게 동작한다는 가정을 기반으로 설계되었기 때문에 상대적으로 느린 구동기 동역학이 존재할 경우 [22, 23, 24]의 자동조종 제어기는 성능이 저하 될 수 있다. [25]에서는 상대적으로 느린 2차 선형 시스템 형태의 구동기 동역학을 가질 경우 [24]의 자동조종 제어기를 적용할 경우 전체 시스템이 불안정해질 수 있다는 결과가 제시되었다.

구동기 동역학의 영향을 고려한 자동조종 제어기 설계 기법으로는 RHPC(receding horizon predictive control) 방법을 통해 BTT 미사일의 가속도 제어를 설계한 [26]의 방법이 있다. 그러나, 앞서 도입부에서 설명한 바와 같이 비행 조건에 따라 변화하는 선형화 기준점을 중심으로 근사된 시스템을 다루고 있다. 이와 같이, 구동기 동역학을 고려하며 동시에 BTT 미사일의 비최소위상 특성 및 비선형성을 모두 고려한 자동조종 제어기를 설계하는 것은 손꼽을 정도의 결과만이 제시되고 있을 정도로 매우 높은 수준의 연구 과제이다. [25]은 잘 알려진 백스텝핑(back-stepping) 기법을 적용하여 [24]의 자동조종 제어기가 구동기 동역학에 의해 불안정해지는 문제점을 해결하였다. 그러나 백스텝핑 기법은 제어 편각과 제어 편각 명령의 미분값을 요구하기 때문에 잡음이 많은 상황에서 그 성능이 저하 될 수 있다. 또다른 설계 기법으로는 시간 척도 분리(time-scale separation) 기법[27]이 있다. 이 방법은 미사일 동역학의 각속도에 해당하는 상태 변수와 선속도에 해당하는 상태 변수를 구분하여, 궤환선형화 기법을 사용하여 각속도 상태 변수와 선속도 상태 변수의 대역폭을 조절할 수 있도록 자동조종 제어기를 설계한다. 시간 척도 분리 기법을 사용하면 구동기 동역학의 영향을 고려하면서도 비교적 설계 과정이 간단한 장점이 있다. 그러나, 비최소위상 특성을 갖는 원인인 제어 편각에 작용하는 힘 성분을 무시하고 제어기를 설계하기 때문에 미사일 시스템의 비최소위상 특성으로 인한 성능 저하 현상이 나타난다. 또한, 미사일 시스템의 각 채널간 간섭 효과를 무시하였고, [25]의 방법과 마찬가지로 상태 변수의 미분 정보를 사용함으로써 시스템의 오차를 증폭하여 전체 시스템의 성능과 안정성을 해치기 쉬운 문제점이 있다.

앞서 설명한 사실을 종합하여 보면, BTT 미사일 시스템은 강한 비선형성을 나타내는 비최소위상 시스템이며, 비행 환경 변수와 구동기 동역학의 영향으로 인하여 더욱 제어하기 힘든 시스템이다. 기존의 자동조종 제어기 설계 기법은 이와 같은 문제점을 완벽하게 해결하지 못하고 있으며, 목표물 요격 성능 향상을 위하여 고기

동 고성능 미사일을 설계하기 위해서는 미사일 시스템의 특성을 모두 충분히 고려할 수 있는 새로운 자동조종 제어기 설계 기법의 개발이 요구된다.

2.2 기존 유도 법칙 설계 기법

BTT 미사일용 고성능 유도 법칙의 개발에는 여러 어려움이 따르게 된다. 첫째로, BTT 미사일의 유도 법칙은 피치와 롤 모션을 포함한 3차원 추적 기하학을 모두 고려해야한다. STT 미사일의 경우 롤 채널이 안정화 되어있어 피치와 요 채널이 독립적으로 작용하기 때문에 2차원 평면상에서의 추적 시나리오만 고려하여 보다 쉽게 유도 법칙을 설계할 수 있다. 하지만, BTT 미사일의 경우 피치와 롤 모션이 역학적으로 커플링 되어있어 피치, 요 채널의 가속도를 롤 모션으로만 구현할 수 있기 때문에, 2차원 평면만을 고려한 STT 미사일용 유도 법칙을 바로 적용하기가 어렵다.

고전적으로 BTT 미사일용 종말 유도 법칙은 STT 미사일에서 일반적으로 사용하는 비례 항법 유도(PNG, proportional navigation guidance)법칙을 극좌표 변환(polar conversion logic)하여 사용하였다. 비례 항법 유도 법칙은 미사일과 표적이 바라보는 시선(line-of-sight)의 변화율을 0이 되도록 유지하여 미사일을 표적 충돌 코스로 유도하는 기법이다. 일반적으로 미사일의 가속도를 시선 변화율에 비례하도록 유지하는 형태를 취하기 때문에 쉽게 구현이 가능하고 실제 유도 무기에 적용하기가 용이하다는 장점으로 인해 널리 사용되고 있다. 또한, 표적이 움직이지 않는 경우에 대해서는 미사일의 가속도의 제곱을 최소로 하는 유도 기법임이 알려져 있다[28]. 또한, 비례항법유도 법칙은 정지 표적에 대해서는 좋은 성능을 보이지만, 기동하는 표적에 대해서는 종말 호밍 단계에서 과도한 가속도 명령이 나타날 수 있고, 미사일이 표적에 비해 충분히 큰 속도를 낼 수 있어야 하며 유도 성능이 미사일의 가속능력에 크게 영향을 받는 문제점이 있기에, 이를 개선한 APNG(augmented PNG), BPNG(biased PNG) 등이 연구되어왔다[29, 30]. 하지만 삼각함수의 역변환이 사용되는 극좌표 변환을 사용하였기 때문에 가제어성 문제가 발생할 수 있으며, 자동조종장치 동역학의 영향으로 요격 시점에서 피치 가속도 명령이 급변하고, 롤

각 명령이 불연속하게 변하여 요격 성능이 저하되는 현상이 발생하게 된다.

한편, 이러한 연구 결과들은 자동조종장치 동역학을 무시하고 미사일과 표적 간의 추적 기하학만을 이용하여 유도된 결과이기 때문에, 실제 미사일의 자동조종장치의 시간 지연 효과에 의해 요격 성능이 저하되게 된다. 이를 해결하기 위하여 STT 용 최적 유도 법칙이 제안되었고, 자동조종장치 동역학이 1차원 시불변(1st-order LTI) 시스템으로 표현될 경우 요격 성능을 향상시킬 수 있음을 보였다[31]. 표적이 요격 오차(miss distance)를 최대화시키도록 기동할 때 이를 게임 이론을 통해 효과적으로 요격할 수 있도록 하면서 자동조종장치 동역학을 시간 지연으로 고려한 결과도 제안되었다[32]. [33]에서는 미사일의 가속도가 제한되는 실제 상황에 맞춰 확률적 최적 유도 법칙을 통해 목표물을 요격하도록 하는 방법이 제시되었으며, [34]에서는 슬라이딩 모드 제어기(sliding-mode controller)를 이용하여 자동조종장치와 유도법칙을 동시에 설계할 수 있도록 하는 기법도 제시되었다.

그러나 이들 [31]-[34] 역시 STT 미사일을 대상으로 하여 2차원 평면상의 추적 시나리오만을 고려하였기 때문에, BTT 미사일에는 극좌표 변환을 사용하여 적용해야 하는 문제점이 있다. 이후, BTT 미사일에 적합한 3차원 추적 기하학을 고려하고, 자동조종장치 동역학을 1차원 시불변 시스템으로 가정한 최적유도법칙도 제안되었다[35, 36]. 이는 요격 오차와 피치 가속도, 롤각 변화율의 에너지를 최소화하는 관점에서 유도 되었지만, 롤각 변화율의 동역학이 무시할 수 있을 정도로 빠르다고 가정한 단점이 있다. 최근, 3차원 추적 기하학과 자동조종장치 동역학을 모두 고려한 최적유도법칙도 제안되었다[37]. 이는 앞서 설명한 유도 법칙들의 단점을 보완할 수 있는 최신의 결과이다.

하지만, 이러한 위의 연구 결과는 모두 표적을 점 질량으로 인식하고 있다는 점은 동일하다. 표적을 점 질량으로 보고 미사일을 유도할 경우 표적의 타격에 성공했다고 하더라도 표적의 방어 능력에 따라 표적의 파괴에는 실패할 수 있다. 만약

유도 미사일의 표적 충돌각을 제어할 수 있다면, 적정 비행경로의 설정이 기존 유도 기법에 비해 유리해짐과 동시에 우회공격 등이 가능할 뿐 아니라 미사일 타격 시 파괴력을 극대화할 수 있으므로 표적 충돌각 제어는 미사일의 효율성을 높이기 위해 꼭 필요한 기술이라 할 수 있다.

표적 충돌각을 고려한 유도 법칙 개발은 위에서 설명한 바와 같이 매우 중요한 문제인 것에 비해, 이에 관한 연구는 아직 활발히 진행되고 있지 않은 수준이다. [38]에서는 처음으로 공대지 미사일에 대한 표적 충돌각 최적 유도 기법을 제안하였다. 표적을 지상의 고정된 물체로 보고 미사일과 표적의 운동방정식을 2차원 공간에 대한 선형 시불변(linear time-invariant)으로 간략화하였다. 이 운동 방정식에 대해 원하는 표적 충돌각으로 미사일이 표적을 타격하도록 유도하는 유도 기법을 만들어 실제로 종말 호밍에서 원하는 표적 충돌각으로 타격이 이루어짐을 시뮬레이션으로 보였다. [39]에서는 랑데부 문제를 최적 유도 문제로 해결할 수 있음을 보였다. 이보다 발전된 형태로, 표적을 2차원 공간에서 지상의 고정된 물체가 아닌 일정한 속도와 가속도를 가진 움직이는 지상 물체로 보고 표적 충돌각에 대한 최적 유도 기법이 제안되었다[40]. 이 방법은 미사일과 표적의 운동방정식을 선형 시불변으로 간략화하여 새로운 제어 방법을 제안하고 정해진 표적 충돌각을 따라 미사일이 표적을 타격함을 시뮬레이션으로 보였다. [41]에서는 시변(time-varying) BPNG 법칙을 이용하여 비선형 시스템인 표적의 운동방정식을 선형화 하지 않고, 잔여 비행 시간(time-to-go)을 추정하지 않아도 되는 유도 기법을 제안되었다. [42]은 에너지 최소화 관점에서의 최적 유도 법칙을 제안하였고 닫힌 형태의 해(closed-form solution)를 구하였으며, [43]는 이를 발전시켜 잔여 비행 시간의 급수를 가중치로 갖는 에너지 최소화 관점의 최적 유도 법칙을 개발하였으며, 새로운 잔여 비행 시간 추정 기법을 제안하였다. 그러나 이 방법들은 미사일의 자동조종제어기, 핀 구동기 등의 동역학을 이상적인 형태로 가정하였다는 한계가 있다. 최근에도 선형 쿼

드라틱(linear quadratic)을 이용한 유도 기법[44], 슬라이딩 모드 제어(sliding mode control)를 이용한 기법[45] 등 많은 연구 결과가 나오고 있지만, 모두 2차원 평면상에서의 요격 상황만을 가정하고 있기 때문에 요와 피치의 커플링이 존재하는 BTT 미사일의 경우 적용하기 쉽지 않으며, 3차원 공간에서의 롤 명령까지 고려한 표적 충돌각 유도 기법의 연구는 많이 발표되지 않은 상황이다. 3차원 추적 기하학과 자동조종장치 동역학까지 모두 고려한 BTT 미사일의 표적 충돌각 유도 기법 또한 드물긴 하나 발표되었다[46]. 그러나 이는 컴퓨터를 이용한 수치 해석 방법을 통해 제어 입력을 계산하는 방법을 택하였기 때문에, 닫힌 형태의 해(closed-form solution)을 구하지 못하여 안정성을 보장할 수 없다는 문제점이 있다.

따라서, 움직이는 표적을 원하는 표적 충돌각으로 요격할 수 있도록 하는 BTT 미사일용 유도 기법 개발함에 있어서, 3차원 공간상에서의 추적 기하학 및 미사일 자동조종제어기, 핀 구동기 동역학을 모두 고려한 새로운 유도 기법의 개발이 필요하다.

제 3 장 구동기 동역학을 고려한 자동조종 제어기

3.1 BTT 미사일의 시스템 모델

미사일 시스템은 비행중인 비행환경에 의해 발생하는 여러 가지 복잡한 공기역학(aerodynamics)과 그로 인한 힘과 모멘트에 대응하여 일어나는 강체 동역학(rigid-body dynamics)으로 구성되는 비선형성이 강한 시스템이다. 3차원 공간을 비행하는 강체의 동역학은 다음과 같이 세 개의 힘 방정식과 세 개의 모멘트 방정식으로 표현된다[1, 2].

$$\begin{aligned}
 F_x &= m(\dot{U} + qW - rV) \\
 F_y &= m(\dot{V} + rU - pW) \\
 F_z &= m(\dot{W} + pV - qU) \\
 M_x &= I_x\dot{p} - (I_y - I_z)qr + I_{yz}(r^2 - q^2) - I_{zx}(pq + \dot{r}) + I_{xy}(rp - \dot{q}) \\
 M_y &= I_y\dot{q} - (I_z - I_x)rp + I_{zx}(p^2 - r^2) - I_{xy}(qr + \dot{p}) + I_{yz}(pq - \dot{r}) \\
 M_z &= I_z\dot{r} - (I_z - I_x)pq + I_{xy}(q^2 - p^2) - I_{yz}(rp + \dot{q}) + I_{zx}(qr - \dot{p})
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

여기에서 비행중인 강체에 작용하는 힘과 모멘트는 미사일의 받음각, 옆미끄러짐각, 제어 편각 및 비행 속도, 공기 밀도에 대한 비선형 함수로 주어지기 때문에 미사일의 제어를 어렵게 하는 기본적인 요인으로 작용한다. 이러한 힘과 모멘트는 풍동 실험을 통하여 구한 공력 계수들에 의하여 다음과 같이 나타난다[2].

$$\begin{aligned}
F_x &= QSC_x(\alpha, \beta, M, \delta_q, \delta_r) + F_{th} \\
F_y &= QSC_y(\alpha, \beta, M, \delta_r) \\
F_z &= QSC_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) \\
M_x &= QSDC_l(\alpha, \beta, M, \delta_p) \\
M_y &= QSDC_m(\alpha, M, \delta_q) \\
M_z &= QSDC_n(\alpha, \beta, M, \delta_r)
\end{aligned} \tag{3.2}$$

BTT 미사일의 동역학 방정식을 얻기 위하여 다음과 같은 가정을 한다.

(A1) m, I_x, I_y, I_z 는 상수로 주어진다.

(A2) 미사일 동체는 피치 평면에 대하여 대칭이다.

가정 (A1)은 종말 유도 상황에서는 일반적으로 받아들여지는 가정이다[31]. 가정 (A2)는 BTT 미사일의 설계 과정에서 만족시키도록 하는 조건이며, I_{xy} 와 I_{yz} 의 값이 0임을 의미한다. 이와 같은 가정을 바탕으로 다음과 같이 BTT 미사일에 대한 비선형 상태 방정식을 얻을 수 있다[1].

(Roll Dynamics)

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{I_z}{I_x I_z - I_{zx}^2} QSDC_l(\alpha, \beta, M, \delta_p, \delta_r) + \frac{I_{zx}}{I_x I_z - I_{zx}^2} QSDC_n(\alpha, \beta, M, \delta_r) \\
&\quad + \frac{I_y I_z - I_z^2 - I_{zx}^2}{I_x I_z - I_{zx}^2} qr + \frac{I_{zx}(I_z + I_x - I_y)}{I_x I_z - I_{zx}^2} pq \\
\dot{\phi} &= p
\end{aligned} \tag{3.3}$$

(Yaw Dynamics)

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= pW - Ur + \frac{QS}{m}C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r) \\
\dot{r} &= \frac{I_x}{I_x I_z - I_{zx}^2}QSdC_n(\alpha, \beta, M, \delta_r) + \frac{I_{zx}}{I_x I_z - I_{zx}^2}QSdC_l(\alpha, \beta, M, \delta_p, \delta_r) \\
&\quad + \frac{I_x^2 + I_{zx}^2 - I_x I_y}{I_x I_z - I_{zx}^2}pq + \frac{I_{zx}(I_y - I_z - I_x)}{I_x I_z - I_{zx}^2}qr
\end{aligned} \tag{3.4}$$

(Pitch Dynamics)

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= -pV + Uq + \frac{QS}{m}C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) \\
\dot{q} &= \frac{QSd}{I_y}C_m(\alpha, M, \delta_q) + \frac{I_z - I_x}{I_y}pr + \frac{I_{zx}}{I_y}(r^2 - p^2) \\
A_z &= \frac{QS}{m}C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

여기서, C_y, C_z, C_m, C_n, C_l 는 풍동 실험을 통해 지시표 형태로 구해지는 공역학 계수로써, $\alpha, \beta, M, \delta_p, \delta_q, \delta_r$ 등의 함수로 구성되어있다. 위의 방정식에는 X_M 축 방향의 직선 운동에 대한 동역학이 나타나 있지 않으며, 이는 X_M 축 방향 가속도가 제어 편각에 의해서 제어 가능한 변수가 아니기 때문이며, 실제 미사일 시스템에서도 X_M 축 방향의 직선 운동은 추진 기관의 추력(thrust)에 따라 결정되게 된다. 따라서 미사일 운동에 대한 상태 방정식에서는 X_M 축 방향 선속도 U 를 시변 외부 변수(time-varying exogenous variable)로 다룬다.

이제, $F_M \triangleq F_x i + F_y j + F_z k$ 을 전체 공력학적 힘이라 하고, $F_B \triangleq F_{Bx} i + F_{By} j + F_{Bz} k$ 를 미사일의 몸체에 의해 비행중 발생되어 평균적으로 C_b (center-of-pressure of cylindrical body)에 작용되는 힘이라 하자. 또, 제어 편각과 꼬리 날개에 의해 발생되어 평균적으로 C_f (center-of-pressure of control fins)에 작용되는 힘을 $F_F \triangleq F_{Fx} i + F_{Fy} j + F_{Fz} k$ 라 하자. 그리고 F_B 와 F_F 의 수직 방향 분력을 각각 $F_{B_N} \triangleq F_{By} j + F_{Bz} k$ 와 $F_{F_N} \triangleq F_{Fy} j + F_{Fz} k$ 라 하자. 지금까지 정의된 힘들은 그림 3.1에 나타나 있다. 그림에서 l_g, l_b, l_f 는 각각 미사일의 앞 부분으로부터 C_g (center-of-gravity), C_b, C_f 까지의 거리를 나타낸다. 추력이 소멸된 상태에서는 l_b 와 l_g 가 상

수입은 자명하다. 꼬리날개에 작용하는 힘은 비행 방향에 따라 다르게 나타나기 때문에 그 힘의 평균적 작용점은 다를 수 있으므로 엄밀하게 l_f 는 상수가 아닌 롤 각에 대한 함수로 주어진다. 그러나 꼬리날개의 축방향 길이가 미사일의 전체 길이에 비하여 현저히 작다고 할 수 있으므로 평균적으로 l_f 는 상수로 취급될 수 있다. 지금까지의 정의들과 그림 3.1로부터 다음과 같은 가정은 쉽게 받아들여질 수 있다[23, 24].

(A3) F_y, F_z, M_y, M_z 가 다음과 같이 분해된다.

$$\begin{aligned}
 F_y &= F_{By} + F_{Fy} \\
 F_z &= F_{Bz} + F_{Fz} \\
 M_y &= (l_b - l_g)F_{Bz} + (l_f - l_g)F_{Fz} \\
 M_z &= -(l_b - l_g)F_{By} - (l_f - l_g)F_{Fy}
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

가정 (A3)는 F_y 와 F_z 가 제어 편각의 영향을 받는 힘과 그렇지 않은 힘으로 분해될 수 있다고 가정하는 것이다. 그리고 M_y 와 M_z 도 F_B 와 F_F 의 수직 분력에 의하여 완벽하게 표현된다고 가정하였다.

이제 F_{BN} 과 F_{FN} 의 성질을 자세히 분석하도록 한다. 실제로, BTT 미사일의 비최소 위상 특성은 F_{FN} 에 의해 발생하게 된다. F_{FN} 은 제어 편각에 따라 매우 복잡하게 변화하기 때문에 단일한 수학적 형태로 표시하기가 매우 힘들지만, 대부분의 미사일 시스템은 다음 가정을 만족시킨다.

(A4) C_l, C_y, C_z 는 각각 $\delta_p, \delta_r, \delta_q$ 에 대하여 가역이다.

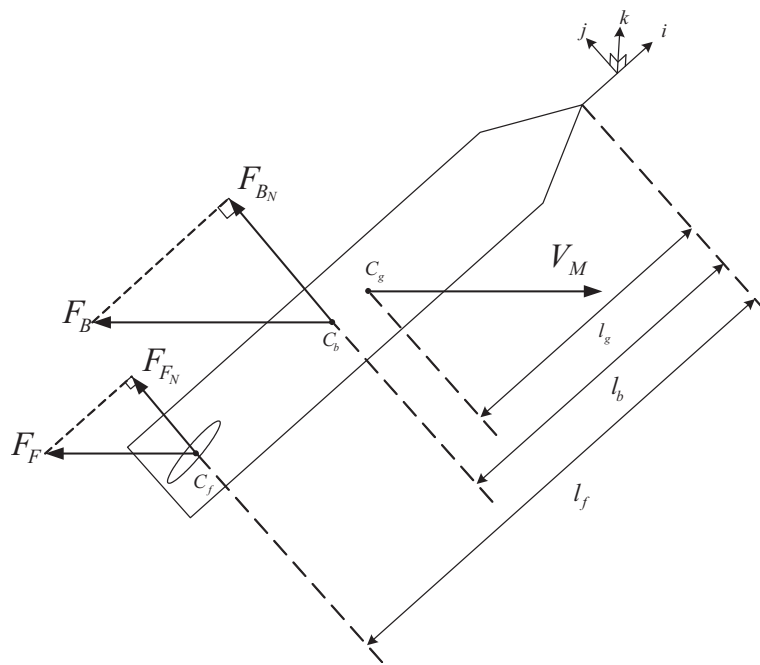


그림 3.1: 비행중인 미사일에 작용하는 힘

가정 (A4)가 타당하다는 것은 이미 잘 보여진 사실이다[4, 24]. 따라서, 다음을 만족시키는 사상(mapping) K_l, K_y, K_z 가 존재한다.

$$\begin{aligned} C_l(\alpha, \beta, M, K_l(\alpha, \beta, M, u_p, \delta_r), \delta_r) &= u_p \\ C_y(\alpha, \beta, M, K_y(\alpha, \beta, M, u_y)) &= u_y \\ C_z(\alpha, \beta, M, K_z(\alpha, \beta, M, u_z)) &= u_z \end{aligned} \quad (3.7)$$

공역학 계수 C_l, C_y, C_z 는 $\alpha, \beta, M, \delta_p, \delta_q, \delta_r$ 의 함수로 이루어진 비선형 함수이며, 일반적으로 풍동 실험을 통한 지시표 형태로 주어지게 된다, 따라서, 그의 역사상인 K_l, K_y, K_z 역시 지시표 형태로 구성할 수 있게 된다. 예를 들어, K_l 의 경우 주어진 범위 안에서 임의의 $\alpha, \beta, M, \delta_r$ 값에 대하여 $C_l(\alpha, \beta, M, \delta_p^c, \delta_r), \delta_r) = u_p$ 를 만족하는 δ_p^c 를 찾아 지시표를 구성하는 문제가 된다.

다음으로 미사일 동체에 작용하는 외력에 대해 아래와 같은 가정을 도입한다.

(A5) F_{BN} 은 오직 Q 와 α_T 에 대한 함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$|F_{BN}| = Qf_N(\alpha_T)$$

여기에서 함수 $f_N : [0, \alpha_{\max}] \rightarrow \mathfrak{R}$ 은 연속적으로 미분 가능하며 단조 증가한다.

엄밀하게 말하면, f_N 은 α_T 뿐만 아니라 ϕ 와 V_M 에 의해서도 영향을 받는다. 그러나 $\alpha_T \leq 25(deg)$ 이고 $V_M \geq V_s$ 인 경우에는 ϕ 와 V_M 의 영향을 상대적으로 무시할 수 있다고 알려져 있다. [47]에서는 실험 자료를 바탕으로 f_N 을 단순하게 $f_N = k \sin(\alpha_T), k > 0$ 와 같이 표시하였으며 이는 $\alpha_{\max} < 45(deg)$ 범위에서 가정 (A5)를 만족시킨다.

이제, 아래와 같이 함수 H_a, H_b 를 정의하고, 수학적 편의를 위하여 아래와 같은

가정을 한다. 이는 일반적인 상황에서 잘 만족된다[24].

$$H_a\left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M}\right) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{if } V = W = 0 \\ \left(\frac{l_f - l_b}{I_z}\right) \frac{V/V_M}{\sqrt{|V/V_M|^2 + |W/V_M|^2}} f_N\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{|V/V_M|^2 + |W/V_M|^2}\right)\right), & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H_b\left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M}\right) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{if } V = W = 0 \\ \left(\frac{l_f - l_b}{I_y}\right) \frac{W/V_M}{\sqrt{|V/V_M|^2 + |W/V_M|^2}} f_N\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{|V/V_M|^2 + |W/V_M|^2}\right)\right), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (3.8)$$

(A6) H_a, H_b 는 $V = 0, W = 0$ 에서 연속 미분 가능하다.

(A7) 비행중에는 양의 상수 $\alpha_{\max} < 45^\circ$ 에 대하여 $0 \leq \alpha_T \leq \alpha_{\max}$ 를 만족한다.

F_{By}, F_{Bz}, H_a, H_b 의 정의와 가정 (A5)에 의하여 다음과 같은 관계식이 만족함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} F_{By} &= -|F_{BN}| \cos \phi = \frac{QI_z}{l_b - l_f} H_a\left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M}\right) \\ F_{Bz} &= -|F_{BN}| \sin \phi = \frac{QI_y}{l_b - l_f} H_b\left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M}\right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

가정 (A4)와 함께, 식 (3.1), (3.9)에 의하면 F_{Fy} 와 F_{Fz} 는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} F_{Fy} &= QSC_y(\alpha, \beta, M, \delta_r) - \frac{QI_z}{l_b - l_f} H_a(\tilde{V}, \tilde{W}) \\ F_{Fz} &= QSC_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) - \frac{QI_y}{l_b - l_f} H_b(\tilde{V}, \tilde{W}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

위의 결과를 종합하면 공력 함수간에 다음과 같은 관계식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
C_m(\alpha, M, \delta_q) &= \frac{I_y}{SD} H_b(\tilde{V}, \tilde{W}) + \frac{l_f - l_g}{D} C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) \\
C_n(\alpha, \beta, M, \delta_r) &= -\frac{I_z}{SD} H_a(\tilde{V}, \tilde{W}) - \frac{l_f - l_g}{D} C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r)
\end{aligned} \tag{3.11}$$

위의 식에 나타난 공력 함수들간의 관계는 대개의 미사일 시스템이 일반적으로 만족시키는 것으로써, 미사일 동체에 작용하는 힘과 제어 편각에 작용하는 힘을 모두 포함하고 있다. 특히, 제어 편각에 작용하는 힘 성분은 미사일 시스템이 비최소 위상 특성을 갖게 하는 원인이지만, 기존의 자동조종 제어기 설계 기법 중 상당수는 제어 편각에 작용하는 힘 성분을 무시하여 얻어지는 최소위상 시스템에 대하여 궤환 선형화 기법을 적용하여 제어기를 구성함으로써 내부 동역학이 불안정해지는 문제점이 발생한다.

3.2 자동조종 제어기 설계

이 장에서는 비최소위상 특성을 갖는 미사일 가속도 동역학을 효과적으로 제어할 수 있도록 하는 기존의 유사특이섭동 기법을 이용한 자동조종 제어기[24]에 대하여 간략히 소개한 후, 구동기 동역학이 상대적으로 느릴 경우 발생하는 안정성 문제를 해결하기 위한 새로운 자동조종 제어기 설계 기법을 제시한다.

이제 식 (3.7)의 K_l 을 이용하여 롤 자동조종 제어기를 아래와 같이 구성한다.

$$\delta_p^c = K_l(\alpha, \beta, M, u_p, \delta_r) \quad (3.12)$$

롤 채널은 비최소위상 특성을 갖지 않으므로, 잘 알려진 궤환 선형화 기법을 직접 적용하여 아래와 같이 제어 입력 u_p 를 설계할 수 있다.

$$u_p = -\frac{I_{zx}}{I_z} C_n - \frac{I_y I_z - I_z^2 - I_{zx}^2}{Q S d I_z} q r - \frac{I_{zx}(I_z + I_x - I_y)}{Q S d I_z} p q + \frac{I_x I_z - I_{zx}^2}{Q S d I_z} \left[-a_p \lambda_p \omega_n p - b_p \lambda_p^2 \omega_n^2 \phi + \lambda_p^3 \omega_n^3 \int_0^t (\phi^c(\tau) - \phi(\tau)) d\tau \right] \quad (3.13)$$

양의 상수인 $a_p, b_p, \omega_n, \lambda_p$ 는 롤 채널의 입출력 동특성을 결정 지어주는 설계 변수들이다. ω_n 은 피치 채널의 대역폭을 결정하기 위한 변수이며, λ_p 는 피치 채널에 대한 롤 채널의 대역폭 비율을 조절하기 위한 변수이다. 일반적인 미사일의 경우 롤 채널이 피치 채널보다 3배 정도 빠르다고 알려져 있다($\lambda_p=3$). 이제 구동기 동역학이 없다고 가정하면 이를 통해 구해지는 롤 채널 동역학은 아래와 같다.

(Closed-Loop Roll Dynamics)

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -a_p \lambda_p \omega_n p - b_p \lambda_p^2 \omega_n^2 \phi + \lambda_p^2 \omega_n^2 \zeta_p \\ \dot{\zeta}_p &= \lambda_p \omega_n (\phi^c - \phi) \\ \dot{\phi} &= p \end{aligned} \quad (3.14)$$

따라서, 롤 채널의 입출력 전달함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\mathcal{L}[\phi(t)]}{\mathcal{L}[\phi^c(t)]} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\lambda_p \omega_n}\right)^3 + a_p \left(\frac{s}{\lambda_p \omega_n}\right)^2 + b_p \left(\frac{s}{\lambda_p \omega_n}\right) + 1} \quad (3.15)$$

식 (3.15)로부터 롤 자동조종 제어기는 롤 각 명령을 정확하게 추종함을 알 수 있다.

식 (3.7)의 K_y, K_z 를 이용하여 요와 피치 채널의 자동조종 제어기 역시 아래와 같이 구성한다.

$$\begin{aligned} \delta_r^c &= K_y \left(\alpha, \beta, M, \frac{m(u_y + Ur)}{QS} \right) \\ \delta_q^c &= K_z \left(\alpha, \beta, M, \frac{m(u_z - Uq)}{QS} \right) \end{aligned} \quad (3.16)$$

여기서, u_y 와 u_z 는 새로 제안될 제어 입력이다. 이를 통하여 요와 피치 채널의 동역학은 아래와 같이 주어진다.

(Closed-Loop Yaw Dynamics)

$$\begin{aligned} \dot{V} &= pW + u_y + \frac{QS}{m} C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r) - \frac{QS}{m} C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r^c) \\ \dot{r} &= -h_{v1}Ur - h_{v1}u_y - QH_a \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) + \frac{I_x - I_y}{I_z} pq - \frac{I_{zx}}{I_z} qr \\ &\quad + \frac{I_{zx}}{I_z} [-a_p \lambda_p \omega_n p - b_p \lambda_p^2 \omega_n^2 \phi + \lambda_p^2 \omega_n^2 \zeta p] \\ &\quad + \frac{h_{v1}QS}{m} C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r) - \frac{h_{v1}QS}{m} C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r^c) \end{aligned} \quad (3.17)$$

(Closed-Loop Pitch Dynamics)

$$\begin{aligned} \dot{W} &= -pV + u_z + \frac{QS}{m} C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) - \frac{QS}{m} C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q^c) \\ \dot{q} &= -h_{v2}Uq + h_{v2}u_z + QH_b \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) + \frac{I_z - I_x}{I_y} pr + \frac{I_{zx}}{I_y} (r^2 - p^2) \\ &\quad + \frac{h_{v2}QS}{m} C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) - \frac{h_{v2}QS}{m} C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q^c) \\ A_z &= -Uq + u_z + \frac{QS}{m} C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) - \frac{QS}{m} C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q^c) \end{aligned} \quad (3.18)$$

여기서, $h_{v1} \triangleq \frac{(l_f - l_g)m}{I_z}$, $h_{v2} \triangleq \frac{(l_f - l_g)m}{I_y}$ 로 정의되며 가정 (A1)에 의해 h_{v1}, h_{v2} 는 상수임을 알 수 있다.

[24]에서와 같이 구동기 동역학이 이상적으로 빠를 경우(i.e., $\delta_q^c = \delta_q$, $\delta_r^c = \delta_r$) 위의 식 (3.17), (3.18)의 요, 피치 채널 동역학은 아래와 같이 부분 선형화 되어 구해진다.

(Partially Linearized Closed-Loop Yaw Dynamics)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= pW + u_y \\ \dot{r} &= -h_{v1}Ur - h_{v1}u_y - QH_a \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) + \frac{I_x - I_y}{I_z} pq - \frac{I_{zx}}{I_z} qr \\ &\quad + \frac{I_{zx}}{I_z} [-a_p \lambda_p \omega_n p - b_p \lambda_p^2 \omega_n^2 \phi + \lambda_p^2 \omega_n^2 \zeta_p]\end{aligned}\quad (3.19)$$

(Partially Linearized Closed-Loop Pitch Dynamics)

$$\begin{aligned}\dot{W} &= -pV + u_z \\ \dot{q} &= -h_{v2}Uq + h_{v2}u_z + QH_b \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) + \frac{I_z - I_x}{I_y} pr + \frac{I_{zx}}{I_y} (r^2 - p^2) \\ A_z &= -Uq + u_z\end{aligned}\quad (3.20)$$

BTT 미사일의 비최소위상 특성은 식 (3.5), (3.6)에서 볼 수 있듯이 피치 가속도가 $A_z = (F_{B_z} + F_{F_z})/m$ 로 주어지기 때문에 나타나게 된다. 일반적으로는 동체에 가해지는 힘이 제어 편각에 가해지는 힘보다 매우 크기 때문에 ($F_{B_z} \gg F_{F_z}$) 이를 이용하여 가속도 제어가 이루어지게 된다. 대부분의 기존 결과들은 자동조종 제어기 설계에 있어서 제어 편각에 가해지는 힘 성분인 F_{F_z} 를 무시하고 설계하였기 때문에, 제어 초기 시점에 제어 편각 명령을 과도하게 발생시키는 문제가 있고 이는 동체에 가해지는 힘보다 제어 편각에 가해지는 힘이 커지게 만들게 된다($F_{B_z} \ll F_{F_z}$). 그런데, F_{F_z} 의 방향은 가속도 명령과 반대 방향으로 발생하게 되고 이는 큰 언더슈트를 발생시키게 되고, 심지어는 시스템을 불안정하게 만들기도 한다.

한편, 미사일의 X_M 축 방향 선속도 U 가 매우 크기 때문에 $h_{v2}U$ 는 일반적으로 자동조종장치 대역폭 ω_n 보다 매우 큰 값을 갖게 된다. 따라서 피치 채널의 각속도

변화율 동역학은 매우 빠르게 수렴하게 되며, 이는 곧 식 (3.19), (3.20), 마찬가지로 식 (3.4), (3.5)에서 $\dot{q} = 0, \dot{r} = 0$ 로 놓을 수 있음을 의미한다. 그러므로 식 (3.5), (3.11)에서 마지막 2개의 항을 무시할 수 있다면 $A_z \simeq -QH_b(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M})/h_{v2}$ 가 됨을 알 수 있다. 여기서, 식 (3.8), (3.9)로 정의되는 함수 H_b 는 미사일 동체에서 발생하는 힘인 F_{B_z} 에 비례하는 값을 갖는다. 이렇게 되면 피치 가속도 A_z 는 제어 입력인 u_z 와 무관하게 되며, 바로 궤환선형화 기법을 적용할 수 있게 된다.

이제 새로운 제어 입력을 아래와 같이 정의한다.

$$u_y = -pW - a_y\omega_n V - \omega_n^2 \int_0^t V(\tau)d\tau \quad (3.21)$$

$$u_z = pV + \omega_n F(\rho, U, V, W, \dot{\rho}, \dot{U}) + \omega_n G(\rho, U, V, W)v_z \quad (3.22)$$

$$\dot{v}_z = -a_z\omega_n v_z - b_z\omega_n A_z + \omega_n^2 \int_0^t (A_z^c(\tau) - A_z(\tau))d\tau \quad (3.23)$$

where $a_y, a_z, b_z, \lambda_z, \omega_n > 0$ and

$$\begin{aligned} F(\rho, U, V, W, \dot{\rho}, \dot{U}) &\triangleq -\frac{\dot{\rho}V_M}{2\rho N(U, V, W)}H_b + \frac{U\dot{U}}{2|V_M|^2 N(U, V, W)}[-2V_M H_b + VD_1 H_b + WD_2 H_b] \\ &\quad -\frac{(-a_y V + \omega_n \int_0^t V(\tau)d\tau)}{2|V_M|^2 N(U, V, W)}[2VV_M H_b + (U^2 + W^2)D_1 H_b - VW D_2 H_b] \\ G(\rho, U, V, W) &\triangleq -\frac{h_{v2}}{\rho V_M N(U, V, W)} \\ N(U, V, W) &\triangleq \frac{W}{V_M}H_b - \frac{VW}{2|V_M|^2}D_1 H_b + \frac{U^2 + V^2}{2|V_M|^2}D_2 H_b \end{aligned} \quad (3.24)$$

정리하면, 구동기 동역학과 미사일의 각속도 변화율 동역학이 충분히 빠를 경우, 비최소위상 특성이 거의 사라지게 되어 피치 가속도를 직접 제어할 수 있게 된다고 볼 수 있다[24]. 그러나, 구동기 동역학이 상대적으로 느릴 경우 이를 무시할 수 없어 더욱 어려운 문제가 되며 전체 시스템이 불안정해지는 경우도 발생하게 된다[25].

이제 아래와 같은 크기 및 시간 변환(magnitude and time-scaling transformation)을 정의한다.

$$\begin{aligned}
\hat{U}(t) &\triangleq U\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{V}(t) &\triangleq V\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{W}(t) &\triangleq W\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{p}(t) &\triangleq \frac{1}{\omega_n}p\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{q}(t) &\triangleq q\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{r}(t) &\triangleq r\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{\phi}^c(t) &\triangleq \phi^c\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{\phi}(t) &\triangleq \phi\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{\zeta}_p(t) &\triangleq \zeta_p\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{\zeta}_y(t) &\triangleq \zeta_y\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{A}_z^c(t) &\triangleq A_z^c\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{A}_z(t) &\triangleq A_z\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{\rho}(t) &\triangleq \rho\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{Q}(t) &\triangleq Q\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{v}_z(t) &\triangleq v_z\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{v}_o(t) &\triangleq v_o\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{\zeta}_z(t) &\triangleq \zeta_z\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{u}_y(t) &\triangleq \frac{1}{\omega_n}u_y\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{u}_z(t) &\triangleq \frac{1}{\omega_n}u_z\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{V}_M(t) &\triangleq V_M\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{x}_i(t) &\triangleq x_i\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{\delta}_i^c(t) &\triangleq \delta_i^c\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{\delta}_i(t) &\triangleq \delta_i\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & i &= q, r
\end{aligned} \tag{3.25}$$

핀 구동기 동역학은 아래와 같은 일반적인 선형 시불변(linear time-invariant) 시스템으로 표현된다고 가정한다.

$$\epsilon_a \dot{x}_r = A_r x_r + B_r \delta_r^c, \quad \delta_r = C_r x_r \tag{3.26}$$

$$\epsilon_a \dot{x}_q = A_q x_q + B_q \delta_q^c, \quad \delta_q = C_q x_q \tag{3.27}$$

where

$$C_r A_r^{-1} B_r = C_q A_q^{-1} B_q = 1, \quad x_r(t) \in R^l, \quad x_q(t) \in R^l \tag{3.28}$$

여기서, $A_r, B_r, C_r, A_q, B_q, C_q$ 는 상수값을 갖는 정사각 행렬이며, A_r, A_q 는 Hurwitz 행렬이다. 위의 구동기 동역학 모델은 일반적인 특이 섭동 모델을 따르게 됨을 알 수 있다[9].

이제, $\epsilon_a = 0$ 로 두자. 그러면, 식 (3.17), (3.18)의 요 및 피치 채널 동역학은 크기 및 시간 변환된 상태 변수에 의해 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\dot{\hat{V}} = -a_y \hat{V} + \hat{\zeta}_y \quad (3.29)$$

$$\dot{\hat{\zeta}}_y = -\hat{V} \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \omega_n \dot{\hat{r}} = & -h_{v1} \hat{U} \hat{r} + h_{v1} \omega_n \hat{p} \hat{W} + h_{v1} \omega_n a_y \hat{V} - h_{v1} \omega_n \hat{\zeta}_y \\ & - \hat{Q} H_a \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) + \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_n \hat{p} \hat{q} \\ & - \frac{I_{zx}}{I_z} \hat{q} \hat{r} + \frac{I_{zx}}{I_z} \omega_n^2 (-a_p \lambda_p \hat{p} - b_p \lambda_p^2 \hat{\phi} - \lambda_p^2 \hat{\zeta}_p) \end{aligned} \quad (3.31)$$

$$\dot{\hat{W}} = F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \dot{\hat{\rho}}, \dot{\hat{U}}) + G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z \quad (3.32)$$

$$\begin{aligned} \omega_n \dot{\hat{q}} = & -h_{v2} \hat{U} \hat{q} + h_{v2} \omega_n \left\{ \hat{p} \hat{V} + F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \dot{\hat{\rho}}, \dot{\hat{U}}) + G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z \right\} \\ & + \hat{Q} H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) + \frac{I_z - I_x}{I_y} \omega_n \hat{p} \hat{r} + \frac{I_{zx}}{I_y} (\hat{r}^2 - \omega_n^2 \hat{p}^2) \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\dot{\hat{A}}_z = -\hat{U} \hat{q} + \omega_n \left\{ \hat{p} \hat{V} + F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \dot{\hat{\rho}}, \dot{\hat{U}}) + G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z \right\} \quad (3.34)$$

위의 시변환된 시스템에서 볼 수 있듯이, 요 및 피치 채널의 각속도 변화율인 q 와 r 을 고속 동역학으로 설정할 수 있다. 앞서 설명한 바와 같이 U 는 일반적으로 ω_n 에 비해 매우 큰 값을 갖기 때문이다. 식 (3.16)는 고속 동역학을 갖는 q, r 을 포함하고 있으므로, 편 구동기 동역학이 이러한 고속 동역학을 잘 추종할 수 있을만큼 빠르지 않으면 안정성에 문제가 생기게 된다[25]. 게다가, 일반적인 미사일 편 구동기는 제어 편각 및 제어 편각의 각속도에 제한이 존재하게 된다.

이러한 안정성 문제를 해결하기 위해서는 충분히 빠른 구동기를 사용하는 방법이 있을 수 있다. 그러나 이는 실제 상황에서 비용 문제가 발생할 수 있고, 혹은 구동기 자체를 바꿀 수 없는 미사일 시스템이 있을 수도 있다. 따라서, 본 논문에서는

구동기 동역학이 상대적으로 느릴때에도 원하는 제어 성능을 가질 수 있도록 하는 새로운 자동조종 제어기 설계 기법을 제안한다. 간단히 설명하자면, 고속 동역학을 강제로 조금 느리게 만들어 상대적으로 느린 구동기가 이를 잘 반영할 수 있을 때 까지 늦추어 주는 아이디어를 기반으로 한다.

앞서 설명한 바와 같이 요 및 피치 채널 동역학은 그 대역폭에 따라 고속 동역학 r_f, q_f 및 저속 동역학 r_s, q_s 으로 나눌 수 있다. 이는 $h_{v1}U, h_{v2}U$ 값이 일반적으로 미사일 자동조종장치 대역폭보다 훨씬 크기 때문에 가능하다. 식 (3.29)-(3.34)에서 $\omega_n \rightarrow 0$ 일 때, 아래와 같은 저속 동역학 식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} r_s &= -QH_a \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) / \left(h_{v1}U + \frac{I_{zx}}{I_z} q_s \right) \\ q_s &= \frac{1}{h_{v2}U} \left[QH_b \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) + \frac{I_{zy}}{I_y} r_s^2 \right] \end{aligned} \quad (3.35)$$

이 때, 고속 동역학 r_f, q_f 은 아래와 같다.

$$r_f = r - r_s, \quad q_f = q - q_s \quad (3.36)$$

요 및 피치 채널 고속 동역학의 대역폭은 각각 $h_{v1}U, h_{v2}U$ 로 주어지므로, 구동기 동역학의 대역폭이 $h_{\max} \triangleq \max\{h_{v1}, h_{v2}\}$ 보다 작을 경우 고속 동역학의 안정성을 보장할 수 없게 된다.

그러므로, 고속 동역학의 대역폭을 적절히 낮춰 주도록 하기 위해 식 (3.21), (3.22)의 새로운 제어 입력 u_y, u_z 를 아래와 같이 수정하도록 한다.

$$u_y = -pW - a_y \alpha_c \omega_n V + \alpha_c \omega_n \zeta_y - (1 - \alpha_c) \left(Ur + \frac{1}{h_{v1}} QH_a \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) \right) \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} u_z &= pV + \alpha_c \omega_n F(\rho, U, V, W, \dot{\rho}, \dot{U}) + \alpha_c \omega_n G(\rho, U, V, W) v_z \\ &\quad + (1 - \alpha_c) \left(Uq - \frac{1}{h_{v2}} QH_b \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) \right) \end{aligned} \quad (3.38)$$

where

$$\zeta_y(t) \triangleq -\alpha_c \omega_n \int_0^t V(\tau) d\tau \quad (3.39)$$

여기서, 상수 $0 < \alpha_c \leq 1$ 는 고속 동역학의 대역폭을 낮춰주는 역할을 하는 설계 변수로, 뒤에 보다 자세한 설명을 기술하도록 한다. 전체 시스템의 안정성을 위해 고속 동역학의 대역폭이 α_c 만큼 낮춰지게 되면, 저속 동역학의 대역폭 역시 ω_n 에서 $\alpha_c \omega_n$ 으로 낮춰주었다. 한편, 고속 및 저속 동역학이 느려져도 전체 입출력 특성에는 영향을 미치지 않아야 하므로, 식 (3.38)의 v_z 는 구동기 동역학이 존재하지 않을 때와 같은 형태를 유지하도록 할 수 있다. 그러나, 보다 빠른 상승 시간(rise time)을 위하여 아래와 같이 새로운 v_z 를 사용하도록 한다.

$$v_z = -a_z v_o + \zeta_z \quad (3.40)$$

$$\dot{v}_o = -\lambda_z \omega_n v_o + \lambda_z \omega_n A_z \quad (3.41)$$

where

$$\zeta_z(t) \triangleq \omega_n \int_0^t (A_z^c - v_o) d\tau \quad (3.42)$$

식 (3.40)-(3.42)에 대한 설명도 뒤쪽에서 자세히 기술하도록 한다.

이제 위의 새로운 제어 입력을 통해 구해진 요 및 피치 채널의 동역학은 아래와 같다.

(Closed-Loop Yaw Dynamics)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= -a_y\alpha_c\omega_n V + \alpha_c\omega_n\zeta_y - (1 - \alpha_c) \left(Ur + \frac{1}{h_{v1}}QH_a \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) \right) \\ &\quad + \frac{QS}{m}C_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{W}{U}\right), \tan^{-1}\left(\frac{V}{U}\right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_r \right) - \frac{QS}{m}C_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{W}{U}\right), \tan^{-1}\left(\frac{V}{U}\right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_r^c \right)\end{aligned}\quad (3.43)$$

$$\begin{aligned}\dot{r} &= -\alpha_ch_{v1}Ur - h_{v1}(-pW - a_y\alpha_c\omega_n V + \alpha_c\omega_n\zeta_y) - \alpha_cQH_a \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) \\ &\quad + \frac{I_x - I_y}{I_z}pq - \frac{I_{zx}}{I_z}qr + \frac{I_{zx}}{I_z}(-a_p\lambda_p\omega_n p - b_p\lambda_p^2\omega_n^2\phi + \lambda_p^2\omega_n^2\zeta_p) \\ &\quad - \frac{h_{v1}QS}{m} \left\{ C_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{W}{U}\right), \tan^{-1}\left(\frac{V}{U}\right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_r \right) - C_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{W}{U}\right), \tan^{-1}\left(\frac{V}{U}\right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_r^c \right) \right\}\end{aligned}\quad (3.44)$$

(Closed-Loop Pitch Dynamics)

$$\begin{aligned}\dot{W} &= \alpha_c\omega_n F(\rho, U, V, W, \dot{\rho}, \dot{U}) + \alpha_c\omega_n G(\rho, U, V, W)v_z \\ &\quad + (1 - \alpha_c) \left(Uq - \frac{1}{h_{v2}}QH_b \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) \right) \\ &\quad + \frac{QS}{m}C_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{W}{U}\right), \tan^{-1}\left(\frac{V}{U}\right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_q \right) - \frac{QS}{m}C_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{W}{U}\right), \tan^{-1}\left(\frac{V}{U}\right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_q^c \right)\end{aligned}\quad (3.45)$$

$$\begin{aligned}\dot{q} &= -\alpha_ch_{v2}Uq + h_{v2} \left\{ pV + \alpha_c\omega_n F(\rho, U, V, W, \dot{\rho}, \dot{U}) + \alpha_c\omega_n G(\rho, U, V, W)v_z \right\} \\ &\quad + \alpha_cQH_b \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) + \frac{I_z - I_x}{I_y}pr + \frac{I_{zx}}{I_y}(r^2 - p^2) \\ &\quad + \frac{h_{v2}QS}{m} \left\{ C_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{W}{U}\right), \tan^{-1}\left(\frac{V}{U}\right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_q \right) - C_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{W}{U}\right), \tan^{-1}\left(\frac{V}{U}\right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_q^c \right) \right\}\end{aligned}\quad (3.46)$$

$$\begin{aligned}A_z &= -Uq + pV + \alpha_c\omega_n F(\rho, U, V, W, \dot{\rho}, \dot{U}) + \alpha_c\omega_n G(\rho, U, V, W)v_z \\ &\quad + (1 - \alpha_c) \left(Uq - \frac{1}{h_{v2}}QH_b \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) \right) \\ &\quad + \frac{QS}{m} \left\{ C_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{W}{U}\right), \tan^{-1}\left(\frac{V}{U}\right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_q \right) - C_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{W}{U}\right), \tan^{-1}\left(\frac{V}{U}\right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_q^c \right) \right\}\end{aligned}\quad (3.47)$$

식 (3.44), (3.46)로부터 r , q 의 고속 동역학 대역폭이 $\alpha_ch_{v1}U$, $\alpha_ch_{v2}U$ 로 각각 바뀌었음을 확인할 수 있다. 이는 설계 변수인 α_c 를 구동기 동역학 대역폭에 맞춰 적절히 조절하여 고속 동역학의 대역폭을 맞춰줄 수 있음을 의미한다. 이제 설계 변수

인 α_c 를 아래와 같이 잡아주도록 한다.

$$\alpha_c \triangleq 1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a \quad (3.48)$$

여기서 새로운 설계 변수인 $\bar{\alpha}_c$ 는 $0 < \alpha_c \leq 1$ 와 다음 절에서 설명할 안정성과 관련된 부등식들을 만족하도록 결정된다. $\epsilon_a \rightarrow 0$ 일 때(i.e., 구동기 동역학이 이상적으로 빠를 경우), $\alpha_c \rightarrow 1$ 가 되므로, 식 (3.37)-(3.39)의 제어 입력 u_y, u_z 는 구동기 동역학이 존재하지 않을 경우 사용하였던 식 (3.21)-(3.24)의 제어 입력과 같은 형태가 됨을 쉽게 알 수 있다.

이제 식 (3.25)의 크기 및 시간 변환을 적용하면, 요 및 피치 채널의 동역학은 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \dot{\hat{V}} &= -\alpha_c a_y \hat{V} + \alpha_c \hat{\zeta}_y - \frac{1 - \alpha_c}{\omega_n} \left(\hat{U} \hat{r} + \frac{1}{h_{v1}} \hat{Q} H_a \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\hat{Q} S}{m \omega_n} \left\{ C_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r \right) - C_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r^c \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\dot{\hat{\zeta}}_y = -\alpha_c \hat{V} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \omega_n \dot{\hat{r}} &= -\alpha_c h_{v1} \hat{U} \hat{r} + h_{v1} \omega_n \hat{p} \hat{W} + h_{v1} \alpha_c \omega_n a_y \hat{V} - h_{v1} \alpha_c \omega_n \hat{\zeta}_y \\ &\quad - \alpha_c \hat{Q} H_a \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) + \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_n \hat{p} \hat{q} - \frac{I_{zx}}{I_z} \hat{q} \hat{r} + \frac{I_{zx}}{I_z} \omega_n^2 (-a_p \lambda_p \hat{p} - b_p \lambda_p^2 \hat{\phi} + \lambda_p^2 \hat{\zeta}_p) \\ &\quad - \frac{h_{v1} \hat{Q} S}{m} \left\{ C_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r \right) - C_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r^c \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\begin{aligned} \dot{\hat{W}} &= \alpha_c F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \dot{\hat{\rho}}, \dot{\hat{U}}) + \alpha_c G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z + \frac{1 - \alpha_c}{\omega_n} \left(\hat{U} \hat{q} - \frac{1}{h_{v2}} \hat{Q} H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right) \\ &\quad + \frac{\hat{Q} S}{m \omega_n} \left\{ C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q \right) - C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q^c \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\begin{aligned}
\omega_n \dot{\hat{q}} = & -\alpha_c h_{v2} \hat{U} \hat{q} + h_{v2} \omega_n \left\{ \hat{p} \hat{V} + \alpha_c F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \dot{\hat{\rho}}, \dot{\hat{U}}) + \alpha_c G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z \right\} \\
& + \alpha_c \hat{Q} H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) + \frac{I_z - I_x}{I_y} \omega_n \hat{p} \hat{r} + \frac{I_{zx}}{I_y} (\hat{r}^2 - \omega_n^2 \hat{p}^2) \\
& + \frac{h_{v2} \hat{Q} S}{m} \left\{ C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q \right) - C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q^c \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\hat{v}_z = -a_z \hat{v}_o + \hat{\zeta}_z \tag{3.54}$$

$$\dot{\hat{v}}_o = -\lambda_z (\hat{v}_o - \hat{A}_z) \tag{3.55}$$

$$\dot{\hat{\zeta}}_z = \hat{A}_z^c - \hat{v}_o \tag{3.56}$$

$$\begin{aligned}
\hat{A}_z = & -\hat{U} \hat{q} + \omega_n \left\{ \hat{p} \hat{V} + \alpha_c F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \dot{\hat{\rho}}, \dot{\hat{U}}) + \alpha_c G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z \right\} \\
& + (1 - \alpha_c) \left(\hat{U} \hat{q} - \frac{1}{h_{v2}} \hat{Q} H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right) \\
& + \frac{\hat{Q} S}{m} \left\{ C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q \right) - C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q^c \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.57}$$

$$\omega_n \epsilon_a \dot{\hat{x}}_q = A_q \hat{x}_q + B_q \hat{\delta}_q^c, \quad \hat{\delta}_q = C_q \hat{x}_q \tag{3.58}$$

$$\omega_n \epsilon_a \dot{\hat{x}}_r = A_r \hat{x}_r + B_r \hat{\delta}_r^c, \quad \hat{\delta}_r = C_r \hat{x}_r \tag{3.59}$$

where

$$\hat{\delta}_r^c(t) = K_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \frac{m}{\hat{Q} S} \left(\omega_n \hat{u}_y + \hat{U} \hat{r} \right) \right) \tag{3.60}$$

$$\hat{\delta}_q^c(t) = K_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \frac{m}{\hat{Q} S} \left(\omega_n \hat{u}_z - \hat{U} \hat{q} \right) \right) \tag{3.61}$$

위의 동역학에서 축소된 동역학을 구하기 위해 2단계의 작업을 수행하도록 한다. 먼저 $\epsilon_a \rightarrow 0$ 으로 두어 식을 구한 후, $\omega_n \rightarrow 0$ 의 식을 구하도록 한다. 이는 각각, 구동기 동역학이 가장 빠르므로 먼저 수렴하였다 보고 그 다음으로 고속 동역학이 수렴하였다고 보는 과정이다. 먼저, $\epsilon_a \rightarrow 0$ 으로 두면 $\alpha_c \rightarrow 1$ 이므로, 위의 동역학

식은 아래와 같이 축소된다.

$$\dot{\hat{V}} = -a_y \hat{V} + \hat{\zeta}_y \quad (3.62)$$

$$\dot{\hat{\zeta}}_y = -\hat{V} \quad (3.63)$$

$$\begin{aligned} \omega_n \dot{\hat{r}} = & -h_{v1} \hat{U} \hat{r} + h_{v1} \omega_n \hat{p} \hat{W} + h_{v1} \omega_n a_y \hat{V} - h_{v1} \omega_n \hat{\zeta}_y \\ & - \frac{\hat{\rho}(\hat{U}^2 + \hat{V}^2 + \hat{W}^2)}{2} H_a \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) + \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_n \hat{p} \hat{q} \\ & - \frac{I_{zx}}{I_z} \hat{q} \hat{r} + \frac{I_{zx}}{I_z} \omega_n^2 (-a_p \lambda_p \hat{p} - b_p \lambda_p^2 \hat{\phi} + \lambda_p^2 \hat{\zeta}_p) \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$\dot{\hat{W}} = F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \hat{\rho}, \hat{U}) + G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z \quad (3.65)$$

$$\begin{aligned} \omega_n \dot{\hat{q}} = & -h_{v2} \hat{U} \hat{q} + h_{v2} \omega_n \left\{ \hat{p} \hat{V} + F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \hat{\rho}, \hat{U}) + G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z \right\} \\ & + \frac{\hat{\rho}(\hat{U}^2 + \hat{V}^2 + \hat{W}^2)}{2} H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) + \frac{I_z - I_x}{I_y} \omega_n \hat{p} \hat{r} + \frac{I_{zx}}{I_y} (\hat{r}^2 - \omega_n^2 \hat{p}^2) \end{aligned} \quad (3.66)$$

$$\hat{v}_z = -a_z \hat{v}_o + \hat{\zeta}_z \quad (3.67)$$

$$\dot{\hat{v}}_o = -\lambda_z (\hat{v}_o - \hat{A}_z) \quad (3.68)$$

$$\dot{\hat{\zeta}}_z = \hat{A}_z^c - \hat{v}_o \quad (3.69)$$

$$\dot{\hat{A}}_z = -\hat{U} \hat{q} + \omega_n \left\{ \hat{p} \hat{V} + F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \hat{\rho}, \hat{U}) + G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z \right\} \quad (3.70)$$

$$\hat{x}_q = -A_q^{-1} B_q \hat{\delta}_q^c, \quad \hat{\delta}_q = C_q \hat{x}_q = \hat{\delta}_q^c \quad (3.71)$$

$$\hat{x}_r = -A_r^{-1} B_r \hat{\delta}_r^c, \quad \hat{\delta}_r = C_r \hat{x}_r = \hat{\delta}_r^c \quad (3.72)$$

where

$$\hat{\delta}_r^c(t) = K_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{V_S}, \frac{m}{QS} (\omega_n \hat{u}_y^c + \hat{U} \hat{r}) \right) \quad (3.73)$$

$$\hat{\delta}_q^c(t) = K_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{V_S}, \frac{m}{QS} \left(\omega_n \hat{u}_z^c - \hat{U} \hat{q} \right) \right) \quad (3.74)$$

위의 1차적으로 축소된 동역학은 구동기 동역학만을 수렴시킨 상태이므로 [24]의 시 변환이 적용된 동역학과 거의 흡사한 꼴임을 알 수 있다.

이제, $\omega_n \rightarrow 0$ 으로 두어 위의 1차적으로 축소된 동역학을 최종적으로 축소된 동역학으로 구하도록 한다.

(Reduced Yaw Dynamics)

$$\dot{\hat{V}} = -a_y \hat{V} + \hat{\zeta}_y \quad (3.75)$$

$$\dot{\hat{\zeta}}_y = -\hat{V} \quad (3.76)$$

$$\left(h_{v1} \hat{U} + \frac{I_{zx}}{I_z} \hat{q} \right) \hat{r} = -\frac{\hat{\rho}(\hat{U}^2 + \hat{V}^2 + \hat{W}^2)}{2} H_a \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \quad (3.77)$$

(Reduced Pitch Dynamics)

$$\dot{\hat{W}} = F(\rho, U, \hat{V}, \hat{W}, \hat{\rho}, \dot{U}) + G(\rho, U, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z \quad (3.78)$$

$$\hat{q} = \frac{1}{h_{v2} \hat{U}} \left\{ \frac{\hat{\rho}(\hat{U}^2 + \hat{V}^2 + \hat{W}^2)}{2} H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) + \frac{I_{zx}}{I_y} \hat{r}^2 \right\} \quad (3.79)$$

$$\hat{v}_z = -a_z \hat{v}_o + \hat{\zeta}_z \quad (3.80)$$

$$\dot{\hat{v}}_o = -\lambda_z (\hat{v}_o - \hat{A}_z) \quad (3.81)$$

$$\dot{\hat{\zeta}}_z = \hat{A}_z^c - \hat{v}_o \quad (3.82)$$

$$\hat{A}_z = -\frac{1}{h_{v2}} \left\{ \frac{\hat{\rho}(\hat{U}^2 + \hat{V}^2 + \hat{W}^2)}{2} H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) + \frac{I_{zx}}{I_y} \hat{r}^2 \right\} \quad (3.83)$$

식 (3.75),(3.76)으로 부터 요 채널 자동조종 제어기는 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $\hat{V} \rightarrow 0$ 를 만족하도록 설계되었음을 알 수 있다. 이와 더불어 식 (3.77)과 식 (3.8)의 H_a 의 정의

로부터 $H_a((\hat{V}/\hat{V}_M), (\hat{W}/\hat{V}_M))$ 와 \hat{r} 는 항상 작은 값으로 유지 된다는 것을 알 수 있다. 그러므로 [24]에서와 마찬가지로 식 (3.79), (3.83)의 $\frac{I_{zx}}{I_y} \hat{r}^2$ 항을 무시하도록 한다. 그러면,

$$\dot{\hat{A}}_z = \hat{v}_z \quad (3.84)$$

이는 식 (3.75), (3.78)의 $\dot{\hat{V}}, \dot{\hat{W}}$, 식 (3.8)의 H_b 와 식 (3.24)의 F, G, N 을 이용해 식 (3.83)의 \hat{A} 를 미분하여 구할 수 있다. 이제, 식 (3.80)-(3.82)에서 주어지는 \hat{v}_z 를 통해 축소된 피치 채널의 입출력 동역학은 아래와 같이 구해지게 된다.

$$\bar{G}(s) \triangleq \frac{\mathcal{L}[\bar{A}_z(t)]}{\mathcal{L}[A_z^c(t)]} = \frac{\omega_n^2(s + \lambda_z \omega_n)}{s^3 + \lambda_z \omega_n s^2 + a_z \lambda_z \omega_n^2 s + \lambda_z \omega_n^3} \quad (3.85)$$

위의 식 (3.85)에서 볼 수 있듯이 $\bar{G}(s)$ 는 최소위상 특성을 갖게 된다. 따라서, 실제 전체 시스템이 축소된 시스템을 따라가게 된다면 위의 제어 기법을 통해 비최소위상 특성이 거의 사라지게 됨을 알 수 있다. 또한, 위의 축소된 피치 채널 입출력 동특성은 설계 변수인 α_c 와 무관하게 주어지므로, 구동기 동역학이 없을 때와 그 형태가 동일하게 나타나게 된다.

실제 상황에서는 공역학 계수들은 비선형성이 심한 지시표 형태로 주어지게 되므로 $C_y, C_z, C_m, C_n, H_a, H_b$ 사이의 관계식인 식 (3.11)는 정확히 들어맞지 않게 되므로, 식 (3.84)는 제어 편각에 따라 매우 빠르게 변화하는 불확실성을 가지게 된다. 이를 해결하기 위하여 식 (3.41)과 같은 1차 필터를 적용하였다. 필터의 설계 변수가 $\lambda_z \gg 1$ 의 값을 가지므로, 식 (3.85)의 $\bar{G}(s)$ 는 아래와 같은 2차 선형 시스템의 형태로 근사될 수 있다.

$$\bar{G}(s) \simeq \frac{\omega_n^2}{s^2 + a_z \omega_n s + \omega_n^2} \quad (3.86)$$

정리하면, 제안된 자동조종 제어기에 의해 구해진 피치 채널의 입출력 동특성은 1개의 영점(zero)를 갖는 3차 선형 시스템의 형태로 주어지며 이는 영점이 없는 2차 선

형 시스템의 형태로 잘 근사된다. 따라서, 이득 설정이나 설계 변수의 설정과 관계 없이 영점 없는 3차 선형 시스템의 형태를 갖는 [24]의 자동조종 제어기보다 빠른 상승 시간을 갖게 됨은 자명하다.

한편, 식 (3.75), (3.76)으로부터 축소된 요 채널의 속도는 아래 식의 동역학을 따르게 된다.

$$\ddot{V} + a_y \omega_n \dot{V} + \omega_n^2 \bar{V} = 0 \quad (3.87)$$

그러므로, 최종적으로 축소된 동역학에서는 $t \rightarrow \infty$ 일 때 $\bar{A}_z(t) \rightarrow A_z^c$, $\bar{V}(t) \rightarrow 0$ 로 수렴하게 된다.

그리고, \hat{A}_z^c 와 $\hat{\phi}^c$ 계단 입력이라 가정하였을 때, 아래의 부등식을 만족하는 양의 상수 $\gamma_p, \gamma_V, \gamma_{\zeta_y}, \gamma_z, \gamma_{\zeta_p}, \gamma_A, \sigma_p, \sigma_V, \sigma_z$ 가 존재하게 된다.

$$\begin{aligned} |\hat{p}(t)| &\leq \gamma_p \|\hat{\chi}_p(0)\| e^{-\sigma_p t} \\ |\hat{V}(t)| &\leq \gamma_V \|\hat{\chi}_V(0)\| e^{-\sigma_V t} \\ |\hat{\zeta}_y(t)| &\leq \gamma_{\zeta_y} \|\hat{\chi}_V(0)\| e^{-\sigma_V t} \\ |\hat{v}_z(t)| &\leq \gamma_z \|\hat{\chi}_z(0)\| e^{-\sigma_z t} \\ |\hat{\zeta}_p(t) - b_p \phi(t)| &\leq \gamma_{\zeta_p} \|\hat{\chi}_p(0)\| e^{-\sigma_p t} \\ |\hat{A}_z^c - \hat{A}_z(t)| &\leq \gamma_A \|\hat{\chi}_z(0)\| e^{-\sigma_z t} \end{aligned} \quad (3.88)$$

where

$$\begin{aligned}
 \hat{\chi}_p &\triangleq \begin{bmatrix} \hat{p} & (\hat{\zeta}_p - b_p \hat{\phi}) & (\hat{\phi}^c - \hat{\phi}) \end{bmatrix}^T \\
 \hat{\chi}_v &\triangleq \begin{bmatrix} \hat{V} & \hat{\zeta}_y \end{bmatrix}^T \\
 \hat{\chi}_z &\triangleq \begin{bmatrix} \hat{v}_z & (\hat{\zeta}_z - a_z \hat{A}_z) & (\hat{A}_z^c - \hat{A}_z) \end{bmatrix}^T
 \end{aligned} \tag{3.89}$$

초기 조건에 따라 얻어지는 위의 부등식 (3.88)은 롤 채널의 페루프 동역학인 식 (3.14), (3.15), 축소된 요 채널 동역학 식 (3.75), (3.76), 그리고 축소된 피치 채널 동역학 식 (3.84), (3.85)의 안정한 동역학에 따라 구해진다.

위에서 사용된 미사일 시스템 모델은 기존 결과들에서 사용한 선형화된 혹은 가정에 의해 단순화된 BTT 미사일 모델을 모두 포함하는 가장 일반적인 모델이라 할 수 있다. 그러므로, 제안된 자동조종 제어기는 계산이 복잡해 보이지만, 미사일 종류와 관계없이 체계적으로 쉽게 적용될 수 있다. 또한, 널리 사용되는 제어용 DSP를 사용할 경우 μs 수준으로 계산되어 실시간 구현이 가능하다.

3.3 성능 분석

이 절에서는 제안된 자동조종 제어기의 성능 분석을 수행한다. 이를 위해 오차 동역학(error dynamics)를 유도하고 이 오차 동역학이 수렴함을 보이도록 한다. 먼저 아래와 같이 오차 변수(error variable)을 정의한다.

$$\hat{e}_\xi \triangleq \begin{bmatrix} \hat{e}_{z1} & \hat{e}_{z2} & \hat{e}_\eta \end{bmatrix}^T \quad (3.90)$$

$$\hat{\hat{e}}_\xi \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\hat{e}}_{z1} & \hat{\hat{e}}_{z2} & \hat{\hat{e}}_\eta \end{bmatrix}^T \quad (3.91)$$

$$\hat{\hat{\hat{e}}}_\xi \triangleq \begin{bmatrix} \hat{\hat{\hat{e}}}_{z1} & \hat{\hat{\hat{e}}}_{z2} & \hat{\hat{\hat{e}}}_\eta \end{bmatrix}^T \quad (3.92)$$

$$\hat{e}_q \triangleq \hat{q} - \frac{1}{h_{v2}\hat{U}} \frac{\hat{\rho}(\hat{U}^2 + \hat{V}^2 + \hat{W}^2)}{2} H_b \begin{pmatrix} \hat{V} & \hat{W} \\ \hat{V}_M & \hat{V}_M \end{pmatrix} \quad (3.93)$$

$$\hat{\hat{e}}_q \triangleq \hat{\hat{q}} - \frac{1}{h_{v2}\hat{\hat{U}}} \frac{\hat{\hat{\rho}}(\hat{\hat{U}}^2 + \hat{\hat{V}}^2 + \hat{\hat{W}}^2)}{2} H_b \begin{pmatrix} \hat{\hat{V}} & \hat{\hat{W}} \\ \hat{\hat{V}}_M & \hat{\hat{V}}_M \end{pmatrix} \quad (3.94)$$

$$\hat{e}_v \triangleq \begin{bmatrix} \hat{e}_{v1} & \hat{e}_{v2} \end{bmatrix}^T \quad (3.95)$$

$$\hat{e}_{xr} \triangleq \hat{x}_r - \hat{\hat{x}}_r, \quad \hat{e}_{xq} \triangleq \hat{x}_q - \hat{\hat{x}}_q \quad (3.96)$$

where

$$\hat{e}_{z1} \triangleq \hat{v}_z - \hat{\hat{v}}_z, \quad \hat{e}_{z2} \triangleq \hat{v}_o - \hat{\hat{v}}_o, \quad \hat{e}_z \triangleq \hat{A}_z - \hat{\hat{A}}_z \quad (3.97)$$

$$\hat{\hat{e}}_{z1} \triangleq \hat{\hat{v}}_z - \hat{\hat{\hat{v}}}_z, \quad \hat{\hat{e}}_{z2} \triangleq \hat{\hat{v}}_o - \hat{\hat{\hat{v}}}_o, \quad \hat{\hat{e}}_z \triangleq \hat{\hat{A}}_z - \hat{\hat{\hat{A}}}_z \quad (3.98)$$

$$\hat{\hat{\hat{e}}}_{z1} \triangleq \hat{\hat{\hat{v}}}_z - \hat{\hat{\hat{\hat{v}}}}_z, \quad \hat{\hat{\hat{e}}}_{z2} \triangleq \hat{\hat{\hat{v}}}_o - \hat{\hat{\hat{\hat{v}}}}_o, \quad \hat{\hat{\hat{e}}}_z \triangleq \hat{\hat{\hat{A}}}_z - \hat{\hat{\hat{\hat{A}}}}_z \quad (3.99)$$

$$\begin{aligned} \hat{e}_\eta \triangleq & \hat{e}_z + \alpha_c \hat{U} \hat{e}_q - \omega_n \hat{p} \hat{V} - \alpha_c \omega_n F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \hat{\rho}, \dot{\hat{U}}) - \alpha_c \omega_n G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z \\ & - \frac{\hat{Q}S}{m} \left\{ C_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q \right) - C_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{\hat{W}}}{\hat{\hat{U}}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{\hat{V}}}{\hat{\hat{U}}}\right), \frac{\hat{\hat{V}}_M}{\hat{\hat{V}}_S}, \hat{\delta}_q^c \right) \right\} \end{aligned} \quad (3.100)$$

$$\begin{aligned}
\hat{e}_\eta &\triangleq \hat{e}_z + \alpha_c \hat{U} \hat{e}_q - \omega_n \hat{p} \hat{V} - \alpha_c \omega_n F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \hat{\rho}, \dot{\hat{U}}) \\
&\quad - \alpha_c \omega_n G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z - \hat{e}_\eta + \hat{e}_z \\
&\quad - \frac{\hat{Q}S}{m} \left\{ C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q \right) - C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q^c \right) \right\} \\
&\hspace{15em} (3.101)
\end{aligned}$$

$$\hat{e}_\eta \triangleq \hat{e}_z + \hat{U} \hat{e}_q - \omega_n \hat{p} \hat{V} - \omega_n F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \hat{\rho}, \dot{\hat{U}}) - \omega_n G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z \quad (3.102)$$

$$\hat{e}_{v1} \triangleq \int_0^t \{ \hat{V}(\tau) - \hat{V}(\tau) \} d\tau \quad (3.103)$$

$$\hat{e}_{v2} \triangleq \hat{V}(t) - \hat{V}(t) \quad (3.104)$$

$$\hat{x}_r \triangleq -A_r^{-1} B_r \hat{\delta}_r^c(t), \quad \hat{x}_q \triangleq -A_q^{-1} B_q \hat{\delta}_q^c(t) \quad (3.105)$$

오차 동역학은 위에 정의된 오차 변수들에 의해 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{e}}_\xi &= A_{11} \hat{e}_\xi + \alpha_c \hat{U} A_{12} \hat{e}_q - \alpha_c \omega_n A_{12} \hat{g}(t) - A_{12} (1 - \alpha_c) \omega_n \hat{p} \hat{V} \\
&\quad + \frac{\hat{\rho} \hat{V}_M (1 - \alpha_c)}{h_{v2} \omega_n} B_1 \left\{ N_1(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \left(\hat{U} \hat{q} - \frac{1}{h_{v2}} \hat{Q} H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right) \right. \\
&\quad \left. - N_2(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \left(U r + \frac{1}{h_{v1}} \hat{Q} H_a \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right) \right\} \\
&\quad - (1 - \alpha_c) B_1 \left(\hat{v}_z + \frac{\hat{V}_M^2}{h_{v2}} H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \hat{\rho} \right) \\
&\quad - \frac{\hat{\rho} (1 - \alpha_c) \hat{U}}{h_{v2}} B_1 \left\{ 2 H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) - \frac{\hat{V}}{\hat{V}_M} D_1 H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) - \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} D_2 H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right\} \dot{\hat{U}} \\
&\quad + \frac{\hat{Q}S}{m} \left(\frac{\hat{\rho} \hat{V}_M}{h_{v2} \omega_n} N_1(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \right) B_1 \\
&\quad \times \left\{ C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q \right) - C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q^c \right) \right\} \\
&\quad - \frac{\hat{\rho} \hat{V}_M \hat{Q}S}{m h_{v2} \omega_n} N_2(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) B_1 \\
&\quad \times \left\{ C_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r \right) - C_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r^c \right) \right\} \\
&\hspace{15em} (3.106)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{e}}_\xi = & A_{11}\hat{e}_\xi + \alpha_c\hat{U}A_{12}\hat{e}_q - \alpha_c\omega_n A_{12}\hat{g}(t) - (1-\alpha_c)\omega_n A_{12}\hat{p}\hat{V} - A_{12}\hat{e}_\eta + A_{12}\hat{e}_z \\
& + \frac{\hat{\rho}\hat{V}_M(1-\alpha_c)}{h_{v2}\omega_n} B_1 \left\{ N_1(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \left(\hat{U}\hat{q} - \frac{1}{h_{v2}}\hat{Q}\hat{H}_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right) \right. \\
& \left. - N_2(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \left(Ur + \frac{1}{h_{v1}}\hat{Q}\hat{H}_a \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right) \right\} - (1-\alpha_c)B_1 \left(\hat{v}_z + \frac{\hat{V}_M^2}{h_{v2}}\hat{H}_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \hat{\rho} \right) \\
& - \frac{\hat{\rho}(1-\alpha_c)\hat{U}}{h_{v2}} B_1 \left\{ 2\hat{H}_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) - \frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}D_1\hat{H}_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) - \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M}D_2\hat{H}_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right\} \hat{U} \\
& + \frac{\hat{Q}S}{m} \left(\frac{\hat{\rho}\hat{V}_M}{h_{v2}\omega_n} N_1(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \right) B_1 \\
& \times \left\{ C_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q \right) - C_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q^c \right) \right\} \\
& - \frac{\hat{\rho}\hat{V}_M\hat{Q}S}{mh_{v2}\omega_n} N_2(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) B_1 \\
& \times \left\{ C_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r \right) - C_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r^c \right) \right\} \tag{3.107}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_n\hat{e}_q = & -\alpha_ch_{v2}\hat{U}\hat{e}_q + \alpha_c\omega_nh_{v2}\hat{g}(t) - (1-\alpha_c)\omega_nh_{v2}\hat{p}\hat{V} + \frac{I_z - I_x}{I_y}\omega_n\hat{p}\hat{r} + \frac{I_z}{I_y}\hat{r}^2 - \frac{I_{zx}}{I_y}\omega_n^2\hat{p}^2 \\
& + \frac{\omega_n}{\hat{U}} \left[\alpha_c\hat{v}_z + \frac{1}{h_{v2}} \left\{ \frac{\hat{U}}{\hat{U}}\hat{Q} - (1-\alpha_c)\hat{V}_M^2\hat{\rho} \right\} \hat{H}_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right] \\
& - \frac{\hat{\rho}(1-\alpha_c)\omega_n}{h_{v2}} \left\{ 2\hat{H}_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) - \frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}D_1\hat{H}_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) - \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M}D_2\hat{H}_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right\} \hat{U} \\
& - \frac{\hat{\rho}\hat{V}_M(1-\alpha_c)}{h_{v2}\hat{U}} \left\{ N_1(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \left(\hat{U}\hat{q} - \frac{1}{h_{v2}}\hat{Q}\hat{H}_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right) \right. \\
& \left. - N_2(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \left(Ur + \frac{1}{h_{v1}}\hat{Q}\hat{H}_a(\tilde{V}, \tilde{W}) \right) \right\} + \frac{\hat{Q}S}{m} (h_{v2} - \frac{\hat{\rho}\hat{V}_M}{h_{v2}\hat{U}} N_1(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W})) \\
& \times \left\{ C_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q \right) - C_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q^c \right) \right\} \\
& - \frac{\hat{\rho}\hat{V}_M\hat{Q}S}{mh_{v2}\hat{U}} N_2(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \\
& \times \left\{ C_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r \right) - C_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r^c \right) \right\} \tag{3.108}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{e}_v = & \alpha_c A_v \hat{e}_v - \frac{1-\alpha_c}{\omega_n} B_{v1} \left(\hat{U}\hat{r} + \frac{1}{h_{v1}}\hat{Q}\hat{H}_a \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right) + (1-\alpha_c)B_{v2}\hat{V} - (1-\alpha_c)B_{v1}\hat{\zeta}_y \\
& + \frac{1}{m\omega_n} B_{v1}\hat{Q}S \left\{ C_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r \right) - C_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r^c \right) \right\} \tag{3.109}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{e}}_{xr} = & \frac{1}{\epsilon_a\omega_n} A_r \hat{e}_{xr} + \frac{1}{\omega_n} A_r^{-1} B_r \frac{d}{dt} K_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \frac{m}{\hat{Q}S} \left(\omega_n \hat{u}_y + \hat{U}\hat{r} \right) \right) \tag{3.110}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{e}}_{xq} = & \frac{1}{\epsilon_a\omega_n} A_q \hat{e}_{xq} + \frac{1}{\omega_n} A_q^{-1} B_q \frac{d}{dt} K_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \frac{m}{\hat{Q}S} \left(\omega_n \hat{u}_z - \hat{U}\hat{q} \right) \right) \tag{3.111}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_n \dot{\hat{r}} &= -\alpha_c h_{v1} \hat{U} \hat{r} + h_{v1} \omega_n (\hat{p} \hat{W} + \alpha_c a_y \hat{V} - \alpha_c \hat{\zeta}_y) + \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_n \hat{p} \hat{e}_q \\
&\quad - \alpha_c \hat{Q} H_a \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) + \frac{I_x - I_y}{I_z} \omega_n \hat{p} \frac{1}{h_{v2} \hat{U}} \hat{Q} H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \\
&\quad - \frac{I_{zx}}{I_z} \hat{r} \hat{e}_q - \frac{I_{zx}}{I} \hat{r} \frac{1}{h_{v2} \hat{U}} \hat{Q} H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) + \frac{I_{zx}}{I_z} \omega_n^2 [-a_p \lambda_p \hat{p} - b_p \lambda_p^2 \hat{\phi} + \lambda_p^2 \hat{\zeta}_p] \\
&\quad - \frac{h_{v1} \hat{Q} S}{m} \left\{ C_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r \right) - C_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_r^c \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.112}$$

$$\begin{aligned}
\hat{e}_z &= \hat{e}_\eta - \alpha_c \hat{U} \hat{e}_q + \omega_n \hat{p} \hat{V} + \alpha_c \omega_n F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \dot{\hat{\rho}}, \dot{\hat{U}}) + \alpha_c \omega_n G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z \\
&\quad + \frac{\hat{Q} S}{m} \left\{ C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q \right) - C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q^c \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.113}$$

where

$$\begin{aligned}
A_{11} &\triangleq \begin{bmatrix} 0 & \lambda_z a_z - 1 & -\lambda_z a_z \\ 0 & -\lambda_z & \lambda_z \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, A_{12} \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_z a_z \\ -\lambda_z \\ 0 \end{bmatrix}, A_v \triangleq \begin{bmatrix} -a_y & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \\
B_1 &\triangleq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{v1} \triangleq \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{v2} \triangleq \begin{bmatrix} a_y \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.114}$$

$$\begin{aligned}
\hat{g}(t) &\triangleq \hat{p} \hat{V} + F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \dot{\hat{\rho}}, \dot{\hat{U}}) + G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \hat{v}_z \\
&\quad + \frac{\hat{Q} S}{m \omega_n} \left\{ C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q \right) - C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{\hat{V}_S}, \hat{\delta}_q^c \right) \right\}
\end{aligned} \tag{3.115}$$

$$N_1(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \triangleq \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} H_b + \frac{1}{2} \frac{\hat{U}^2 + \hat{V}^2}{\hat{V}_M^2} D_2 H_b - \frac{1}{2} \frac{\hat{V} \hat{W}}{\hat{V}_M^2} D_1 H_b \tag{3.116}$$

$$N_2(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) \triangleq \frac{\hat{V}}{\hat{V}_M} H_b + \frac{1}{2} \frac{\hat{U}^2 + \hat{V}^2}{\hat{V}_M^2} D_1 H_b - \frac{1}{2} \frac{\hat{V} \hat{W}}{\hat{V}_M^2} D_2 H_b \tag{3.117}$$

한편, 아래의 리아푸노프(Lyapunov) 식을 만족하는 양의 행렬(positive-definite matrices) $P_{11}, Q_{11}, P_v, Q_v, P_r, Q_r, P_q, Q_q$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned}
A_{11}^T P_{11} + P_{11} A_{11} &= -Q_{11} \\
A_v^T P_v + P_v A_v &= -Q_v \\
A_q^T P_q + P_q A_q &= -Q_q \\
A_r^T P_r + P_r A_r &= -Q_r.
\end{aligned} \tag{3.118}$$

또한, 가정 (A6), (A7)로 부터 아래의 부등식을 만족하는 양의 상수 $J_{\min}, h_a, \alpha_M, \beta_{M1}, \beta_{M2}$ 가 존재한다[24].

$$\begin{aligned}
N(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W}) &\geq J_{\min} \\
\left| H_a \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right| &\leq h_a |\hat{V}| \\
\left| H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right| &\leq \alpha_M \\
\left| D_1 H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right| &\leq \beta_{M1} \\
\left| D_2 H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) \right| &\leq \beta_{M2}
\end{aligned} \tag{3.119}$$

수학적 성능 분석을 위해 아래와 같은 가정을 추가하도록 한다.

(A8) 공역학 계수 C_y , C_z 와 그의 역사상인 K_y , K_z 는 연속 미분 가능하다.

(A9) $t \geq 0$ 에 대하여 아래의 부등식을 만족하는 양의 상수 $\rho_{\min}, \rho_{\max}, U_{\min}, U_{\max}, \gamma_{\dot{\rho}}, \gamma_{\ddot{\rho}}, \gamma_{\dot{U}}, \gamma_{\ddot{U}}, \gamma_r, \gamma_q$ 가 존재한다.

$$\begin{aligned} \rho(t) &\in I_\rho \triangleq [\rho_{\min}, \rho_{\max}], \quad |\dot{\rho}(t)| \leq \gamma_{\dot{\rho}}, \quad |\ddot{\rho}(t)| \leq \gamma_{\ddot{\rho}}, \\ U(t) &\in I_U \triangleq [U_{\min}, U_{\max}], \quad |\dot{U}(t)| \leq \gamma_{\dot{U}}, \quad |\ddot{U}(t)| \leq \gamma_{\ddot{U}}, \\ |\delta_r(t)| &\leq \gamma_r, \quad |\delta_q(t)| \leq \gamma_q \end{aligned}$$

가정 (A8)은 잘 설계된 미사일에 대하여 일반적으로 받아들여 질 수 있으며, 이후 그림 3.4와 그림 3.5에서 확인할 수 있듯이, 모의 실험에 사용할 ILAAT 미사일은 가정 (A8)을 만족한다. 가정 (A9)는 일반적인 상황에서 당연한 가정이다.

가정 (A7), (A8), (A9)로 부터 아래 부등식을 만족하는 상수 $L_{c1}, L_{c2}, K_{c1}, K_{c2}$ 가 존재함을 알 수 있다.

$$L_{c1} \leq D_4 C_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{V_S}, \hat{\delta}_r \right) \leq L_{c2} \quad (3.120)$$

$$K_{c1} \leq D_4 C_z \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{V_S}, \hat{\delta}_q \right) \leq K_{c2} \quad (3.121)$$

그러면 식 (3.120), (3.121)과 가정 (A8)로 부터 아래 부등식을 만족하는 상수 L_c, K_c 역시 존재하게 된다.

$$\left| C_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{V_S}, \hat{\delta}_r \right) - C_y \left(\tan^{-1}\left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}}\right), \tan^{-1}\left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}}\right), \frac{\hat{V}_M}{V_S}, \hat{\delta}_r^c \right) \right| \leq L_c |\hat{\delta}_r - \hat{\delta}_r^c| \quad (3.122)$$

$$\left| C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{V_S}, \hat{\delta}_q \right) - C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{V_S}, \hat{\delta}_q^c \right) \right| \leq K_c |\hat{\delta}_q - \hat{\delta}_q^c| \quad (3.123)$$

또한, 식 (3.119), 가정 (A6), (A7), (A9)를 통해 아래 부등식을 만족하는 양의 상수 $\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \bar{N}_1, \bar{N}_2$ 가 존재함을 알 수 있다[24].

$$\begin{aligned} |F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \dot{\hat{\rho}}, \dot{\hat{U}})| &\leq \kappa_1 \frac{U_{\max}}{\rho_{\min}} |\dot{\hat{\rho}}| + \kappa_2 |\dot{\hat{U}}| + \kappa_2 (a_y |\hat{V}| + |\hat{\zeta}_y|) \\ |G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W})| &\leq \frac{\kappa_3}{\rho_{\min} U_{\min}} \\ |N_1(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W})| &\leq \bar{N}_1 \\ |N_2(\hat{U}, \hat{V}, \hat{W})| &\leq \bar{N}_2. \end{aligned} \quad (3.124)$$

마지막으로, 가정 (A5)-(A9), 식 (3.119), (3.124), (3.49)-(3.61)으로부터 아래의 역 사상 K_y, K_z 의 미분에 관한 부등식을 만족하는 양의 상수 $K_{yi}, i = 1, \dots, 26$ 와 $K_{zi}, i = 1, \dots, 44$ 역시 존재함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} &\left| \frac{d}{dt} K_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{V_S}, \frac{m(\omega_n \hat{u}_y + \hat{U} \hat{r})}{\hat{Q}_S} \right) \right| \\ &\leq (K_{y1} + K_{y2} \omega_n + K_{y3} \frac{1 - \alpha_c}{\omega_n}) |\hat{V}| + (K_{y4} + K_{y5} \omega_n) |\hat{\zeta}_y| \\ &\quad + [K_{y6} \frac{1 - \alpha_c}{\omega_n} + (1 - \alpha_c) K_{y7} + K_{y8} \frac{1}{\omega_n}] |U_{\min} \hat{e}_q| \\ &\quad + K_{y9} |\dot{\hat{\rho}}| + (K_{y10} \frac{1}{\omega_n} + K_{y11}) \|\hat{e}_{xr}\| \\ &\quad + (K_{y12} + K_{y13} \alpha_c |U_{\min} \hat{r}|) |\dot{\hat{U}}| + (K_{y14} + K_{y15} \omega_n) |\hat{\xi}_p - b_p \hat{\phi}| \\ &\quad + \left(K_{y16} \frac{1 - \alpha_c}{\omega_n} + K_{y17} \frac{1}{\omega_n} + (1 - \alpha_c) K_{y18} \right) |U_{\min} \hat{r}| + \left(K_{y19} \frac{1}{\omega_n} + K_{y20} \right) \|\hat{e}_{xq}\| \\ &\quad + |\hat{\rho}| [\omega_n (K_{y21} |\hat{V}| + K_{y22} |\hat{\zeta}_y|)] + K_{y23} \|\hat{e}_{xq}\| + K_{y24} + \omega_n K_{y25} + K_{y26} |U_{\min} \hat{e}_q| \end{aligned} \quad (3.125)$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{d}{dt} K_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{V_S}, \frac{m(\omega_n \hat{u}_z - \hat{U} \hat{q})}{\hat{Q} S} \right) \right| \\
& \leq \left(K_{z1} + K_{z2} \frac{1 - \alpha_c}{\omega_n} + \omega_n K_{z3} \right) |\hat{V}| + (K_{z4} + K_{z5} \omega_n) |\hat{\zeta}_y| \\
& + \left(K_{z6} \frac{1 - \alpha_c}{\omega_n} + (1 - \alpha_c) K_{z7} \right) |U_{\min} \hat{r}| \\
& + \left(K_{z8} + K_{z10} \omega_n + K_{z11} \frac{1}{\omega_n} + K_{z12} \omega_n |\hat{v}_z| \right) |\dot{\hat{\rho}}| + \left(K_{z13} \frac{1}{\omega_n} + K_{z14} \right) \|\hat{e}_{xr}\| \\
& + \left(K_{z15} + K_{z16} \omega_n + K_{z17} \frac{1}{\omega_n} + K_{z18} \omega_n |\hat{v}_z| + K_{z19} \alpha_c |U_{\min} \hat{e}_q| \right) |\dot{\hat{U}}| \\
& + \left(K_{z20} \frac{1 - \alpha_c}{\omega_n} + K_{z21} \frac{1}{\omega_n} + (1 - \alpha_c) K_{z22} \right) |U_{\min} \hat{e}_q| + \left(K_{z23} \frac{1}{\omega_n} + K_{z24} \right) \|\hat{e}_{xq}\| \\
& + |\hat{p}| [\omega_n (K_{z25} |\hat{V}| + K_{z26} |\hat{\zeta}_y|) + K_{z28} \|\hat{e}_{xr}\| + K_{z29} + ((1 - \alpha_c) K_{z30} + K_{z31}) |U_{\min} \hat{r}|] \\
& + K_{z27} |\hat{\xi}_p - b_p \hat{\phi}| |\hat{V}| + K_{z32} \omega_n |\dot{\hat{\rho}}| + K_{z33} \omega_n |\ddot{\hat{U}}| + \omega_n K_{z34} |\hat{p}|^2 + \frac{1}{\omega_n} K_{z35} |U_{\min} \hat{r}|^2 \\
& + \left(\omega_n K_{z36} |\hat{V}| + K_{z37} |\hat{\zeta}_y| + K_{z38} (1 - \alpha_c) |U_{\min} \hat{r}| + K_{z39} \|\hat{e}_{xr}\| \right) |\hat{v}_z| \\
& + (K_{z40} (1 - \alpha_c) |U_{\min} \hat{e}_q| + K_{z41} \|\hat{e}_{xq}\| + \omega_n K_{z42} + K_{z43} + \omega_n K_{z44} |\hat{v}_z|) |\hat{v}_z| \quad (3.126)
\end{aligned}$$

이제, 아래의 정리 1을 기술하도록 한다. $\bar{P} \triangleq \text{diag}(P_{11}, P_v, 1, 1, P_q, P_r)$, $\bar{Q} \triangleq [\bar{Q}_{ij}]$ 로 정의하며, \bar{Q}_{ij} 와 그 외의 다른 변수들은 부록 6.1에서 정의하도록 한다.

정리 1. 피치 가속도 명령 A_z^c 가 상수일 때, 설계 변수 $\omega_n, \bar{\alpha}_c, a_y, a_z, \lambda_z$ 가 아래의 부등식 조건을 만족한다고 하자.

$$X \triangleq \begin{bmatrix} -(1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) a_{33} + \bar{\alpha}_c \epsilon_a b_{33} & \bar{\alpha}_c \epsilon_a a_{34} & b_{35} + \bar{\alpha}_c \epsilon_a c_{35} & b_{36} + \bar{\alpha}_c \epsilon_a c_{36} \\ \bar{\alpha}_c \epsilon_a a_{34} & -(1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) a_{44} + b_{44} & b_{45} + \bar{\alpha}_c \epsilon_a c_{45} & b_{46} + \bar{\alpha}_c \epsilon_a c_{46} \\ b_{35} + \bar{\alpha}_c \epsilon_a c_{35} & b_{45} + \bar{\alpha}_c \epsilon_a c_{45} & -\frac{\lambda_m(Q_q)}{\epsilon_a} + b_{55} & b_{56} \\ b_{36} + \bar{\alpha}_c \epsilon_a c_{36} & b_{46} + \bar{\alpha}_c \epsilon_a c_{46} & b_{56} & -\frac{\lambda_m(Q_r)}{\epsilon_a} + b_{66} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.127)$$

$$Y \triangleq \begin{bmatrix} -C_1 + \omega_n(C_2 - \bar{A}_1 X^{-1} \bar{A}_1^T) - \bar{A}_2 X^{-1} \bar{A}_1^T - \bar{A}_1 X^{-1} \bar{A}_2^T & C_3 & \bar{A}_2 \\ C_3^T & -\omega_n & 0 \\ \bar{A}_2^T & 0 & \omega_n X \end{bmatrix} < 0 \quad (3.128)$$

$$\bar{b}_1 \leq \frac{\lambda_m^2(\bar{Q})}{64M_w^3} \quad (3.129)$$

$$\|\hat{\chi}_p(0)\|, \|\hat{\chi}_z(0)\| \leq \bar{\mu}_1 = \min \left(\frac{\lambda_m(\bar{Q})}{4(M_{pw}^2 \gamma_p + M_{\zeta p} w^2 \gamma_{\zeta p} + \gamma_z M_{vzw}^2)}, \frac{1}{2K_2} \left(-K_1 + \sqrt{K_1^2 + 4 \left(\frac{\lambda_m^2(\bar{Q})}{64M_w^3} - \bar{b}_1 \right) K_2} \right) \right) \quad (3.130)$$

$$\|\hat{\chi}_v(0)\| \leq \bar{\mu} \triangleq \frac{1}{\bar{b}_3} \left\{ \left(2 \sqrt{\frac{\lambda_m(\bar{P})}{\lambda_M(\bar{P})}} - \frac{\lambda_m(\bar{P})}{\lambda_M(\bar{P})} \right) \frac{\lambda_m^2(\bar{Q})}{64M_w^3} - \bar{b}_1 - \bar{b}_2 \right\} \quad (3.131)$$

$$\|\hat{w}(0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_m(\bar{P}) \lambda_m(\bar{Q})}{\lambda_M(\bar{P}) 8M_w^3}} \quad (3.132)$$

$$\|\hat{w}(0)\| \leq \sqrt{\frac{\lambda_m(P_0) \lambda_m(Q_0) \omega_n U_{\min} / I_{zx}}{\lambda_M(P_0) 8|1/I_z - 1/I_y|}} \quad (3.133)$$

여기서 $\lambda_m(\cdot), \lambda_M(\cdot)$ 는 각각 최소 및 최대 고유값(eigenvalue)를 의미한다.

$$\hat{w}(t) \triangleq [\|\hat{\xi}_\xi(t)\| \quad \|\hat{e}_v(t)\| \quad |U_{\min} \hat{e}_q(t)| \quad |U_{\min} \hat{r}(t)| \quad \|\hat{e}_{xq}(t)\| \quad \|\hat{e}_{xr}(t)\|]^T. \quad (3.134)$$

$$\hat{w}(t) \triangleq [|\hat{e}_\xi(t)| \quad |U_{\min} \hat{e}_q(t)| \quad |U_{\min} \hat{r}(t)|]^T. \quad (3.135)$$

그러면,

$$|V(t) - \bar{V}(t)| \leq \tilde{d}_V e^{-\bar{\sigma}_{\min} \omega_n t} + \tilde{d}_{V1} \gamma_{\dot{\rho}} + \tilde{d}_{V2} \gamma_{\dot{U}} + \tilde{d}_{21} \gamma_{\dot{\rho}} + \tilde{d}_{22} \gamma_{\dot{U}}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.136)$$

$$|A_z(t) - \bar{A}_z(t)| \leq \tilde{d}_0 e^{-\bar{\sigma}_{\min} \omega_n t} + \tilde{d}_{11} \gamma_{\dot{\rho}} + \tilde{d}_{12} \gamma_{\dot{U}} + \tilde{d}_{21} \gamma_{\dot{\rho}} + \tilde{d}_{22} \gamma_{\dot{U}}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.137)$$

$$|A_z(t) - A_z^c| \leq \tilde{d} e^{-\bar{\sigma}_{\min} \omega_n t} + \tilde{d}_{11} \gamma_{\dot{\rho}} + \tilde{d}_{12} \gamma_{\dot{U}} + \tilde{d}_{21} \gamma_{\dot{\rho}} + \tilde{d}_{22} \gamma_{\dot{U}}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.138)$$

■

증명. 아래와 같이 유사 리아푸노프 함수(Lyapunov-like function)를 정의한다.

$$V_w \triangleq \frac{1}{2} \hat{w}^T \bar{P} \hat{w} \quad (3.139)$$

조건 (3.127)와 (3.128)로 부터 부록 6.1에 정의된 \bar{Q} 가 양의 행렬(positive definite matrix)임을 알 수 있으며, 식 (3.88),(3.89), (3.106)-(3.126)을 이용한 복잡한 계산을 거쳐 정의된 유사 리아푸노프 함수의 미분이 아래의 부등식을 만족함을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{V}_w &\leq -\frac{1}{2}\hat{w}^T \bar{Q} \hat{w} + \|\hat{w}\| \left\{ M_\rho |\dot{\hat{\rho}}| + M_U |\dot{\hat{U}}| + M_{\rho\rho} |\ddot{\hat{\rho}}| + M_{UU} |\ddot{\hat{U}}| + M_{\bar{V}} |\hat{\bar{V}}| \right. \\
&\quad \left. + (M_{p\bar{V}} |\hat{p}| + M_{\zeta_p \bar{V}} |\hat{\zeta}_P - b_P \hat{\phi}|) |\hat{\bar{V}}| + M_{\zeta_y} |\hat{\zeta}_y| \right\} \\
&\quad + \|\hat{w}\| \left\{ M_{p\zeta_y} |\hat{p}| |\hat{\zeta}_y| + M_{\bar{v}_z \bar{V}} |\hat{v}_z| |\hat{\bar{V}}| + M_{\bar{v}_z \bar{\zeta}_y} |\hat{v}_z| |\hat{\zeta}_y| + M_{\bar{v}_z^2} |\hat{v}_z|^2 + M_{v_z} |\hat{v}_z| + M_{e_\xi} \|\hat{w}\| \right\} \\
&\quad + |\hat{v}_z| \|\hat{w}\|^2 M_{v_z w^2} + |\hat{p}| \|\hat{w}\|^2 M_{pw^2} + |\hat{p}|^2 \|\hat{w}\| M_{p^2 w} + |\hat{p}| \|\hat{w}\| M_{pw} + |\hat{\zeta}_P - b_P \hat{\phi}| \|\hat{w}\| M_{\zeta_p w} \\
&\quad + |\hat{\zeta}_P - b_P \hat{\phi}| \|\hat{w}\|^2 M_{\zeta_p w^2} + M_{w^3} \|\hat{w}\|^3 \\
&\leq M_{w^3} \|\hat{w}\|^3 - \left(\frac{1}{2} \lambda_m(\bar{Q}) - |\hat{p}| M_{pw^2} - |\hat{\zeta}_P - b_P \hat{\phi}| M_{\zeta_p w^2} - |\hat{v}_z| M_{v_z w^2} \right) \|\hat{w}\|^2 \\
&\quad + \|\hat{w}\| \left\{ M_{\bar{V}} |\hat{\bar{V}}| + (M_{p\bar{V}} |\hat{p}| + M_{\zeta_p \bar{V}} |\hat{\zeta}_P - b_P \hat{\phi}|) |\hat{\bar{V}}| + M_{p\zeta_y} |\hat{p}| |\hat{\zeta}_y| \right. \\
&\quad \left. + M_{\zeta_y} |\hat{\zeta}_y| + M_{v_z} |\hat{v}_z| + M_{p^2 w} |\hat{p}|^2 + M_{pw} |\hat{p}| + M_{\zeta_p w} |\hat{\zeta}_P - b_P \hat{\phi}| + M_{e_\xi} \|\hat{w}\| \right. \\
&\quad \left. + M_{\bar{v}_z \bar{V}} |\hat{v}_z| |\hat{\bar{V}}| + M_{\bar{v}_z \bar{\zeta}_y} |\hat{v}_z| |\hat{\zeta}_y| + M_{\bar{v}_z^2} |\hat{v}_z|^2 + M_\rho |\dot{\hat{\rho}}| \right. \\
&\quad \left. + M_U |\dot{\hat{U}}| + M_{\rho\rho} |\ddot{\hat{\rho}}| + M_{UU} |\ddot{\hat{U}}| \right\} \\
&\leq -\left(\frac{1}{2} \lambda_m(\bar{Q}) - \|\hat{\chi}_p(0)\| (\gamma_p M_{pw^2} + \gamma_{\zeta_p} M_{\zeta_p w^2}) e^{-\sigma_p t} - \|\hat{\chi}_z(0)\| \gamma_z M_{v_z w^2} e^{-\sigma_z t} \right) \|\hat{w}\|^2 \\
&\quad + M_{w^3} \|\hat{w}\|^3 + \|\hat{w}\| \left[M_{e_\xi} M_3 e^{-\sigma_0 t} + (M_{v_z} \gamma_z + M_{\bar{v}_z^2} \gamma_z^2 \|\hat{\chi}_z(0)\|) \|\hat{\chi}_z(0)\| e^{-\sigma_z t} \right. \\
&\quad \left. + \|\hat{\chi}_p(0)\| e^{-\sigma_p t} \left(M_{p^2 w} \gamma_p^2 \|\hat{\chi}_p(0)\| + M_{pw} \gamma_p + M_{\zeta_p w} \gamma_{\zeta_p} \right) \right. \\
&\quad \left. + \left\{ M_{\bar{V}} \gamma_V + M_{\zeta_y} \gamma_{\zeta_y} + \left((M_{p\zeta_y} \gamma_{\zeta_y} + M_{pV} \gamma_V) \gamma_p + M_{\zeta_p \bar{V}} \gamma_V \gamma_{\zeta_p} \right) \|\hat{\chi}_p(0)\| \right\} \|\hat{\chi}_V(0)\| e^{-\sigma_V t} \right. \\
&\quad \left. + \left((M_{\bar{v}_z \bar{V}} \gamma_z + M_{\bar{v}_z \bar{\zeta}_y} \gamma_{\zeta_y}) \|\hat{\chi}_z(0)\| \right) \|\hat{\chi}_V(0)\| e^{-\sigma_V t} + (M_\rho + M_{e_\xi} M_1) |\dot{\hat{\rho}}| \right. \\
&\quad \left. + M_{\rho\rho} |\ddot{\hat{\rho}}| + M_{UU} |\ddot{\hat{U}}| + (M_U + M_{e_\xi} M_2) |\dot{\hat{U}}| \right] \\
&\leq \|\hat{w}\| f(\|\hat{w}\|)
\end{aligned} \tag{3.140}$$

where

$$f(\|\hat{w}\|) = M_{w^3} \|\hat{w}\|^2 - \frac{1}{4} \lambda_m(\bar{Q}) \|\hat{w}\| + (\bar{b}_1 - M_{e_\xi} M_3) + (\bar{b}_2 + M_{e_\xi} M_3) e^{-\bar{\sigma}_{\min} t} + \bar{\mu} \bar{b}_3 e^{-\sigma_V t} \tag{3.141}$$

식 (3.127), (3.128)로부터 아래의 부등식이 만족함을 알 수 있다.

$$\dot{V}_w < 0, \quad \forall \hat{w} \in S_w \triangleq \left\{ \hat{w} \in R^6 \mid \hat{w}_{\min} < \|\hat{w}\| < \hat{w}_{\max} \right\} \quad (3.142)$$

where

$$\hat{w}_{\min} \triangleq \frac{1}{2M_{w^3}} \left(\frac{\lambda_m(\bar{Q})}{4} - \sqrt{\Gamma} \right), \quad \hat{w}_{\max} \triangleq \frac{1}{2M_{w^3}} \left(\frac{\lambda_m(\bar{Q})}{4} + \sqrt{\Gamma} \right),$$

$$\Gamma \triangleq \frac{1}{16} \lambda_m^2(\bar{Q}) - 4M_{w^3}(\bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \bar{\mu}\bar{b}_3).$$

또한, 식 (3.129),(3.130), (3.131)으로부터 Γ 는 양수임을 알 수 있고, 귀류법(contradiction)을 통해 아래의 부등식이 만족함을 보일 수 있다[24].

$$\|\hat{w}(t)\| < \bar{b}_4 \sqrt{\frac{\lambda_M(\bar{P})}{\lambda_m(\bar{P})}}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.143)$$

\bar{b}_4 의 정의에 의해,

$$M_{w^3} \|\hat{w}\|^2 < \frac{1}{8} \lambda_m(\bar{Q}) \|\hat{w}\| \quad (3.144)$$

$$f(\|\hat{w}\|) \leq -\frac{1}{8} \lambda_m(\bar{Q}) \|\hat{w}\| + (\bar{b}_1 - M_{e_\xi} M_3 + (\bar{b}_2 + M_{e_\xi} M_3) e^{-\bar{\sigma}_{\min} t} + \bar{\mu} \bar{b}_3 e^{-\sigma_V t}). \quad (3.145)$$

식 (3.140), (3.145)와 the Comparison Principle[9]에 의해 아래 부등식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} \|\hat{w}(t)\| \leq & \sqrt{\frac{\lambda_M(\bar{P})}{\lambda_m(\bar{P})}} \|\hat{w}(0)\| e^{-\bar{\sigma} t} + \frac{8\lambda_M(\bar{P})}{\lambda_m(\bar{P})\lambda_m(\bar{Q})} ((M_\rho + M_{e_\xi} M_1)\gamma_\rho + (M_U + M_{e_\xi} M_2)\gamma_U \\ & + M_{\rho\rho}\gamma_\rho + M_{UU}\gamma_U) + \frac{1}{\lambda_m(\bar{P})} \left(\frac{\bar{b}_2 + M_{e_\xi} M_3}{|\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_{\min}|} + \frac{\bar{\mu}\bar{b}_3}{|\bar{\sigma} - \sigma_V|} \right) e^{-\bar{\sigma}_{\min} t}. \end{aligned} \quad (3.146)$$

$\hat{w}(t)$ 의 정의와 식 (3.146)으로 부터 식 (3.136)이 성립하게 되며, 식 (3.127)-(3.133)로 부터 $\epsilon_a \rightarrow 0$ 일 때 아래의 부등식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
|\hat{e}_z(t)| \leq & \left(\sqrt{1 + (U_{\max}/U_{\min})^2} + \frac{\omega_n \kappa_3}{U_{\min} \rho_{\min}} \right) \|\hat{w}(t)\| \\
& + (\omega_n \gamma_p \|\hat{\chi}_p(0)\| e^{-\sigma_p t} + \omega_n \kappa_2 a_y) \gamma_V \|\hat{\chi}_V(0)\| e^{-\sigma_V t} \\
& + \omega_n \kappa_2 \gamma_{\zeta_y} \|\hat{\chi}_V(0)\| e^{-\sigma_V t} + \omega_n \frac{\kappa_3}{U_{\min} \rho_{\min}} \gamma_z \|\hat{\chi}_z(0)\| e^{-\sigma_z t} \\
& + \kappa_1 \omega_n \frac{U_{\min}}{\rho_{\min}} |\dot{\hat{\rho}}| + \omega_n \kappa_2 |\dot{\hat{U}}|
\end{aligned} \tag{3.147}$$

$$\begin{aligned}
\|\hat{w}(t)\| \leq & \sqrt{\frac{\lambda_M(P_0)}{\lambda_m(P_0)}} \|\hat{w}(0)\| e^{-\sigma t} + \frac{8\lambda_M(P_0)}{\lambda_m(P_0)\lambda_m(Q_0)} (d_2 \gamma_{\dot{\rho}} + d_3 \gamma_{\dot{U}}) \\
& + \frac{1}{\lambda_m(P_0)} \left(\frac{b_2}{|\sigma - \sigma_p|} + \frac{\mu b_3}{|\sigma - \sigma_0|} \right) e^{-\sigma_{\min} t}.
\end{aligned} \tag{3.148}$$

식 (3.101), (3.102), (3.115), (3.146), (3.147), (3.148)을 이용하여 또한 아래의 부등식이 $|\hat{e}_z|$ 에 대해 성립함을 보일 수 있다.

$$\begin{aligned}
|\hat{e}_z| &\leq |\hat{e}_\eta| + (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \frac{U_{\max}}{U_{\min}} |U_{\min} \hat{e}_q| + \omega_n |\hat{\rho}| (|\hat{e}_{v2}| + |\hat{V}|) + |\hat{e}_\eta| + |\hat{e}_z| \\
&\quad + (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n |F(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W}, \dot{\hat{\rho}}, \dot{\hat{U}})| \\
&\quad + (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n |G(\hat{\rho}, \hat{U}, \hat{V}, \hat{W})| (|\hat{e}_{z1}| + |\hat{e}_{z2}| + |\hat{v}_z|) \\
&\quad + \frac{QS}{m} \left| C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{V_S}, \hat{\delta}_q \right) - C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{\hat{W}}{\hat{U}} \right), \tan^{-1} \left(\frac{\hat{V}}{\hat{U}} \right), \frac{\hat{V}_M}{V_S}, \hat{\delta}_q^c \right) \right| \\
&\leq \sqrt{1 + \left((1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \frac{U_{\max}}{U_{\min}} \right)^2} \|\hat{w}(t)\| + |\hat{e}_\eta| + |\hat{e}_z| \\
&\quad + \omega_n \gamma_p \|\hat{\chi}_p(0)\| e^{-\sigma_p t} \left(\|\hat{w}(t)\| + \gamma_V \|\hat{\chi}_V(0)\| e^{-\sigma_V t} \right) \\
&\quad + (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \left(\kappa_1 \frac{U_{\min}}{\rho_{\min}} |\dot{\hat{\rho}}| + \kappa_2 |\dot{\hat{U}}| + \kappa_2 \left(a_y |\hat{e}_{v2}| + a_y |\hat{V}| + |\hat{e}_{v1}| + |\hat{\zeta}_y| \right) \right) \\
&\quad + (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \frac{\kappa_3}{U_{\min} \rho_{\min}} \left(|\hat{e}_{z1}| + |\hat{e}_{z2}| + |\hat{v}_z| \right) + \frac{QS}{m} K_c \|C_q\| \|\hat{e}_{xq}\| \\
&\leq \bar{d}_{01} \|\hat{w}(t)\| + (2\omega_n \gamma_p \|\hat{\chi}_p(0)\| e^{-\sigma_p t} + (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_2 a_y) \gamma_V \|\hat{\chi}_V(0)\| e^{-\sigma_V t} \\
&\quad + (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_2 \gamma_{\zeta_y} \|\hat{\chi}_V(0)\| e^{-\sigma_V t} + (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \frac{\kappa_3}{U_{\min} \rho_{\min}} \gamma_z \|\hat{\chi}_z(0)\| e^{-\sigma_z t} \\
&\quad + (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_1 \frac{U_{\min}}{\rho_{\min}} |\dot{\hat{\rho}}| + (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_2 |\dot{\hat{U}}| \\
&\quad + (1 + \sqrt{1 + \left(\frac{U_{\max}}{U_{\min}} \right)^2} + \omega_n \frac{\kappa_3}{U_{\min} \rho_{\min}} + (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \frac{\kappa_3}{U_{\min} \rho_{\min}}) \|\hat{w}(t)\| \\
&\leq \bar{d}_{01} \|\hat{w}(t)\| + (2\omega_n \gamma_p \|\hat{\chi}_p(0)\| e^{-\sigma_p t} + (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_2 a_y) \gamma_V \|\hat{\chi}_V(0)\| e^{-\sigma_V t} \\
&\quad + (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_2 \gamma_{\zeta_y} \|\hat{\chi}_V(0)\| e^{-\sigma_V t} + (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \frac{\kappa_3}{U_{\min} \rho_{\min}} \gamma_z \|\hat{\chi}_z(0)\| e^{-\sigma_z t} \\
&\quad + (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_1 \frac{U_{\min}}{\rho_{\min}} |\dot{\hat{\rho}}| + (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_2 |\dot{\hat{U}}| + \bar{d}_{02} \|\hat{w}(t)\| \\
&\leq \tilde{d}_0 e^{-\bar{\sigma}_{\min} t} + \bar{d}_{11} \gamma_{\dot{\rho}} + \bar{d}_{12} \gamma_{\dot{U}} + \tilde{d}_{21} \gamma_{\ddot{\rho}} + \tilde{d}_{22} \gamma_{\ddot{U}}
\end{aligned} \tag{3.149}$$

그러므로, 부등식 (3.137)은 성립한다. 마지막으로, 부등식 (3.138)은 식(3.88), (3.147), (3.149) 로 부터 아래와 같이 구해진다.

$$\begin{aligned}
|\hat{A}_z(t) - \hat{A}_z^c| &\leq |\hat{A}_z(t) - \hat{\hat{A}}_z(t)| + |\hat{\hat{A}}_z(t) - \hat{A}_z(t)| + |\hat{\hat{A}}_z(t) - \hat{A}_z^c| \\
&\leq |\hat{e}_z(t)| + |\hat{e}_z(t)| + \gamma_A \|\hat{\chi}_z(0)\| e^{-\sigma_z t} \\
&\leq \tilde{d} e^{-\bar{\sigma}_{\min} t} + \bar{d}_{11} \gamma_{\dot{\rho}} + \bar{d}_{12} \gamma_{\dot{U}} + \tilde{d}_{21} \gamma_{\ddot{\rho}} + \tilde{d}_{22} \gamma_{\ddot{U}}
\end{aligned} \tag{3.150}$$

■

제안된 자동조종 제어기의 안정성 조건은 설계 변수인 $\bar{\alpha}_c$ 와 ω_n 로 구성되는 두 행렬 부등식에 의해 주어지게 된다. 구동기 동역학이 주어졌을 때, 즉 ϵ_a 가 정해졌을 때, 두 행렬 부등식 조건 (3.127), (3.128)을 만족하는 값의 설계 변수 $\bar{\alpha}_c$ 와 ω_n 을 설정하여 자동조종 제어기를 설계할 수 있다. 수학적 분석을 통해 구동기 동역학이 이상적으로 빠르거나 저속 동역학이 상대적으로 매우 느릴 때 (i.e., $\epsilon_a \simeq 0$, $\omega_n \simeq 0$), 즉 3단계로 분리하여 설계하도록 한 조건이 잘 만족될 때, (3.127), (3.128)를 만족하는 $\bar{\alpha}_c$ 와 ω_n 가 항상 존재함을 이론적으로 보일 수 있다. 실제 설계 시에는 잘 알려진 컨벡스 최적화 기법(convex optimization techniques)[52] 등을 통해 적절한 설계 변수의 값을 정하도록 할 수 있다.

비행 조건인 ρ 와 U 가 상수로 주어질 경우(i.e., $\dot{\rho} = 0$, $\dot{U} = 0$) 아래와 같이 수렴 조건이 간단히 구해지게 된다.

$$|V(t) - \bar{V}(t)| \leq \tilde{d}_V e^{-\bar{\sigma}_{\min} \omega_n t}, \quad \forall t \geq 0, \quad (3.151)$$

$$|A_z(t) - \bar{A}_z(t)| \leq \tilde{d}_0 e^{-\bar{\sigma}_{\min} \omega_n t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.152)$$

$$|A_z(t) - A_z^c| \leq \tilde{d} e^{-\bar{\sigma}_{\min} \omega_n t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (3.153)$$

또한, ω_n 이 작아지게 되면 실제 미사일 시스템의 입출력 동특성이 축소된 동역학의 입출력 동특성인 $\bar{G}(s)$ 와 같이 나타나게 된다. 그리고, 고속 동역학의 대역폭이 $\alpha_{chv1}U$, $\alpha_{chv2}U$ 로 줄어들긴 하였지만 여전히 자동조종장치 대역폭보다는 훨씬 큰 값을 갖기 때문에 적절한 값의 ω_n 을 찾는 것은 어려운 일이 아니다. 마지막으로, [24]의 안정성 조건은 구동기 동역학을 무시하고 유도된 결과이며, 식 (3.127), (3.128)에서 $\epsilon_a = 0$ 으로 두면 [24]의 안정성 조건과 동일한 형태의 행렬 부등식을 구할 수 있다.

3.4 모의 실험 결과

이 절에서는 제안된 자동조종 제어기의 성능을 평가하기 위하여 ILAAT(Inter-Laboratory Air-to-Air Missile Technology) 미사일의 공역학 자료[53]를 이용하여 모의 실험을 수행하도록 한 결과를 설명하도록 한다. 그림 3.2, 3.3와 같이 ILAAT 미사일의 공역학 계수들은 강한 비선형성을 띄게 되며, 그림 3.4, 3.5에서 볼 수 있듯이 아래와 같이 계수를 설정하였을 때 식 (3.120), (3.121)의 부등식이 만족됨을 확인할 수 있다.

$$L_{c1} = 0.045, L_{c2} = 0.19, K_{c1} = -0.205, K_{c2} = -0.053. \quad (3.154)$$

보다 자세한 ILAAT 미사일의 제원 및 공역학 계수들은 부록 6.1에서 기술하도록 하였다.

함수 H_a 와 H_b 는 식 (3.11)에 의해 지시표(look-up table) 형태로 주어지며, 미사일의 초기 선속도는 $[U(0), V(0), W(0)] = [680, 0, 0](m/s)$ 로 가정하였고, 제어 편각은 $\pm 20(deg)$ 제어 편각의 각속도는 $\pm 250(deg/s)$ 로 제한을 두었다. 롤 각 명령 및 피치 가속도 명령은 각각 $\phi^c = 20(s(t) - s(t-3))(deg)$, $A_z^c(t) = 100s(t-0.1)(m/s^2)$ 의 값으로 실험하였으며, 여기서 $s(t)$ 는 단위 계단 함수(unit step function)을 의미한다.

식 (3.12), (3.13), (3.16), (3.37)-(3.42)의 설계 변수들은 편 구동기 동역학이 존재하지 않을 경우 아래와 같이 선택될 수 있다.

$$\begin{aligned} \alpha_c &= 1, \\ a_y &= a_z = 1.414, \quad a_p = 1.75, \quad b_p = 2.15, \\ \omega_n &= 10, \quad \lambda_p = 3 \end{aligned} \quad (3.155)$$

먼저, a_p, b_p, a_y, a_z 는 식 (3.15), (3.86), (3.87)의 입출력 전달 함수가 ITAE (integral of time multiplied absolute error)[48]의 형태를 갖도록 설계되었으며, 일반적인 경우를 채널이 피치 채널보다 3배 정도 빠르다고 볼 수 있으므로, $\lambda_p = 3$ 으로 설정하였다.

그림 3.6에서와 같이 제안된 식 (3.41)의 1차 필터가 없을 경우 피치 가속도에 고주파 성분의 진동이 나타나게 된다. 앞서 3.3절에서 설명한 바와 같이, 이는 ILLAT 미사일의 공역학 자료가 식 (3.11)의 관계를 정확히 만족시키지 못하기 때문에 발생하게 된다. 그 결과, 식 (3.84)는 제어 편각에 따라 빠르게 변화하는 불확실성(uncertainty)를 가지고 성립하게 되며, 제어 편각과 그 미분은 물리적 제한 조건을 가지고 있기 때문에 제어 편각 및 피치 가속도 응답에 채터링과 같은 현상을 나타나게 한다. 피치 채널의 입출력 동특성이 식 (3.86)의 2차 선형 시스템과 근사한 형태로 나타나게 하려면 필터의 설계 변수를 $\lambda_z \gg 1$ 로 설정하여 근사적으로 무시될 수 있도록 해야한다. 동시에, 1차 필터가 고주파 성분의 불확실성을 제거하고 저속 동역학 대역에 머무르도록 하기 위해서 λ_z 는 $\lambda_z \omega_n \ll \alpha_c h_{max} U$ 를 만족해야한다. 따라서, $\lambda_z = 10$ 으로 설정하였다.

그림 3.7는 핀 구동기 동역학이 없을 경우(i.e., $\delta_i^c = \delta_i$ for $i = p, q, r$)에 대한 모의 실험 결과를 나타낸다. 이 때, 실제 피치 채널의 입출력 동특성은 설계 목표인 2차 선형 시스템 $\bar{G}(s)$ 와 유사한 형태로 나타나게 된다. 또한, 기존 결과인 식 (3.12), (3.13), (3.16), (3.21)-(3.24))의 자동조종 제어기[24]와 비교했을 때 짧은 상승 시간으로 인한 성능 향상이 있음을 확인 할 수 있다.

이제, 제안된 자동조종 제어기가 구동기 동역학의 영향을 얼마나 효과적으로 보상해 줄 수 있는지를 알아보기 위해, 핀 구동기 동역학을 아래의 2차 선형 시불변

시스템 형태로 가정하기로 한다.

$$\frac{\mathcal{L}[\delta_i(t)]}{\mathcal{L}[\delta_i^c(t)]} = \frac{\omega_a^2}{s^2 + 2\zeta_a\omega_a s + \omega_a^2} \quad \text{for } i = p, q, r \quad (3.156)$$

이 때, 식 (3.26), (3.27)의 시스템은 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\epsilon_a = \frac{1}{\omega_a}, \quad A_r = A_q = \begin{bmatrix} -2\zeta_a & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_r = B_q = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C_r = C_q = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.157)$$

물론 제안된 자동조종 제어기는 2차 이상의 고차 혹은 일반적인 형태로 구동기 시스템이 주어졌을 때도 적용 가능하나, 여기서는 2차 선형 시스템 형태의 구동기 동역학의 영향만을 우선 분석하였다.

구동기 동역학이 상대적으로 빠를 경우($\omega_a = 120\text{Hz}$, $\zeta_a = 0.707$)의 롤, 요 및 피치 채널의 응답 특성과 제어 편각을 그림 3.8에 나타내었다. 이 때는, 특별히 α_c 를 조절하여 보상하지 않아도 구동기 동역학이 없을 때와 거의 흡사한 응답 특성을 나타낸다. 그러나, 구동기 동역학의 대역폭인 ω_a 를 60 Hz로 낮추었을 때, 기존 자동조종 제어기와 같은 $\alpha_c = 1$ 을 사용했을 때 그림 3.9와 같이 그 제어 성능은 매우 나빠져 전체 시스템이 불안정해지게 된다. 이를 보상하기 위해 $\alpha_c = 0.35$ 으로 설정하여 식 (3.37),(3.38)의 제안된 자동조종 제어기를 적용해 보았다. 그림 3.10에서 볼 수 있듯이, 전체 시스템이 안정해졌고, 제어 성능도 원하는 입출력 동특성에 근사적으로 나타나게 됨을 알 수 있다.

구동기 동역학이 느려질수록, 즉, ω_a 가 작아질수록, 설계 변수인 α_c 를 더욱 작은 값으로 선택해야 한다. ω_a 를 60 Hz에서 30 Hz로 더욱 낮추고, 마찬가지로 α_c 를 0.35에서 0.28로 낮춘 후의 모의 실험 결과를 그림 3.11에 나타내었다. 그림 3.10과 그림 3.11의 응답 특성을 비교해 보았을 때, 구동기 동역학이 더욱 느려짐에 따라 롤 채널의 명령이 변화할 때마다 채널 간의 결합 특성 때문에 나타나는 요 및 피치

채널에서의 영향이 더욱 심해짐을 알 수 있다. 그러나 매우 느린 구동기 동역학이 존재함에도 불구하고, 그러한 영향은 곧 사라지고 원하는 입출력 동특성을 따라 잘 제어됨을 알 수 있다.

또한, 공역학 자료의 불확실성(uncertainties in aerodynamic data)이 존재할 경우에도 제안된 자동조종 제어기가 강인하게 동작함을 보이도록 한다. 피치 채널 동역학에 주된 영향을 미치는 공역학 계수인 C_z 와 C_m 에 $\pm 30\%$ 오차가 존재할 경우의 실험 결과를 그림 3.12에 나타내었다. $\pm 30\%$ 오차가 존재함에 따라 오버슈트가 커지거나 하는 성능 저하가 나타나게 되지만, 여전히 정상 상태 오차가 없고(zero steady state error), 뛰어난 과도 응답 특성을 보여줌을 알 수 있다. 이제 측정 오차 및 시간 지연에 의한 영향을 확인 하도록 한다. 이를 위해 미사일 속도 U, V, W 에 분산이 $|0.1(m/s)|^2$ 이고 평균이 0인 가우시안 잡음(zero-mean Gaussian noise)이 존재하며, 미사일 각속도 p, q, r 에 분산이 $|0.1(deg/s)|^2$ 이고 평균이 0인 가우시안 잡음이 존재한다고 가정하였다. 잡음의 수준은 일반적으로 기존 논문에서[54] 실험용으로 사용되는 고성능 IMU(inertial measurement unit)의 잡음 수준보다 높게 설정하였다. 또한, 제어 편각 명령이 1ms의 시간 지연 후 전달되며, U, V, W, p, q, r 의 정보가 역시 1ms의 시간 지연 후 측정된다고 가정하였다. 이 때의 모의 실험 결과는 그림 3.13과 같다. 잡음 및 시간 지연이 존재할 경우에도 제어 편각 명령이 흔들리는 경향은 나타나지만 상대적으로 느린 피치 가속도의 응답 특성에는 큰 영향을 미치지 못하여 원하는 제어 성능을 나타냄을 확인할 수 있다. 롤 및 요 채널 역시 그 영향이 미미하여 모의 실험 결과는 생략하였다.

지금까지의 실험 결과는 마하2의 비행 조건에서 이루어진 모의 실험을 바탕으로 하고 있다. 마지막으로, 그림 3.14는 각각 다른 속도로 비행하는 미사일에 대해 그 응답 특성을 보이고 있다. 제안된 자동조종 제어기는 마하 수와 관계없이 마하1, 마하3, 마하3.5의 환경에서도 거의 일정한 제어 성능을 나타냄을 알 수 있다.

ILAAT 미사일의 공역학 자료가 마하3.5 까지로 제한되어 있어 위와 같이 실험을 설정하였다. 앞서 설명한 바와 같이, 피치 각속도 변화율 q 의 대역폭은 U , 즉 마하 수와 비례하게 되며 따라서 마하 수에 따라 피치 채널의 응답 특성은 변화하게 된다. 하지만 그 영향은 미미한 수준이며, 마하 수에 따라 α_c 를 각각 다르게 설정하여 좀 더 원하는 입출력 동특성에 근사되도록 조절할 수도 있다.

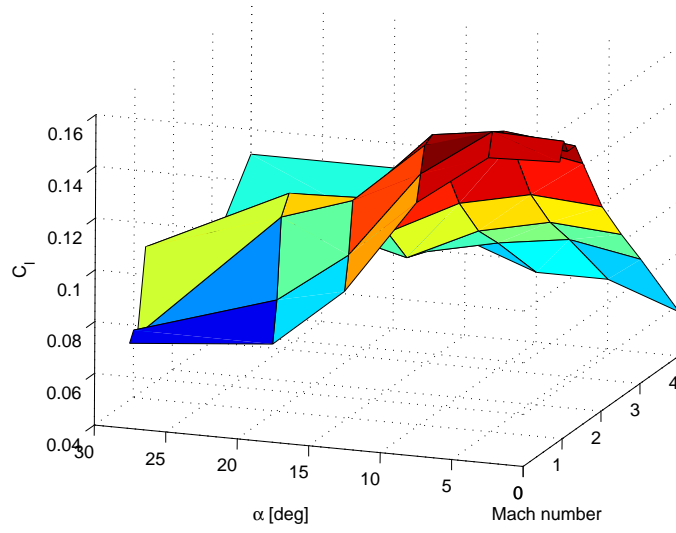


그림 3.2: C_l 의 3차원 그래프 ($\delta_p = 0$)

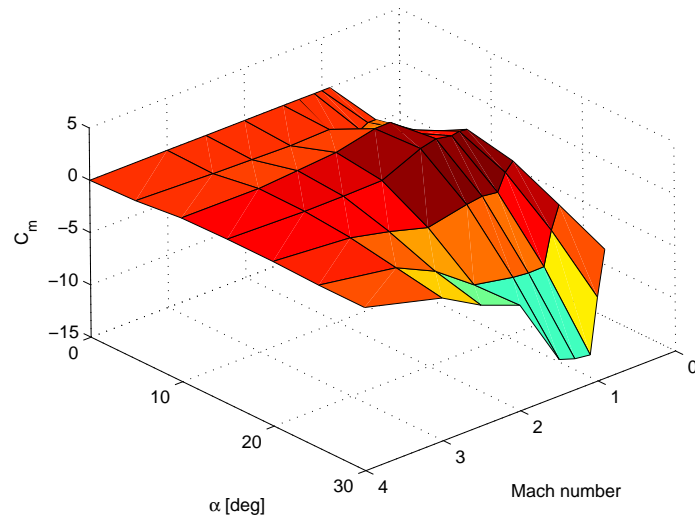


그림 3.3: C_m 의 3차원 그래프 ($\delta_q = 0$)

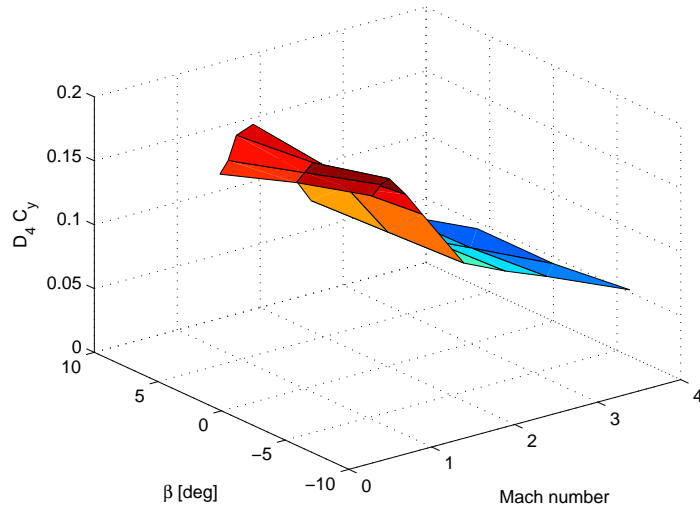


그림 3.4: $D_4 C_y$ 의 3차원 그래프

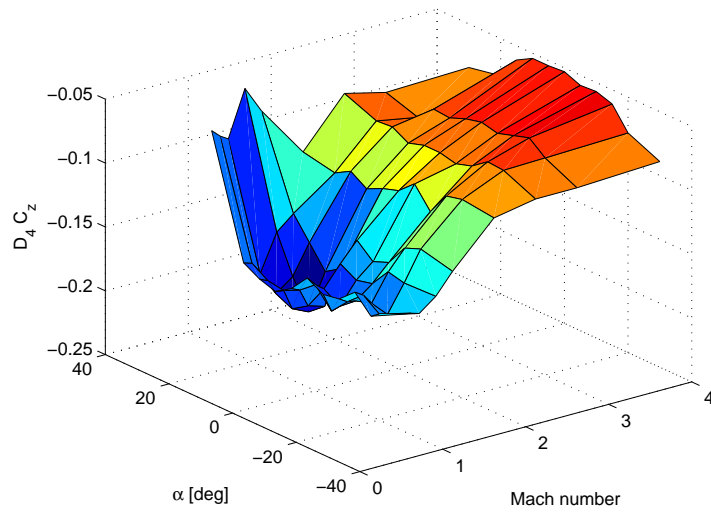
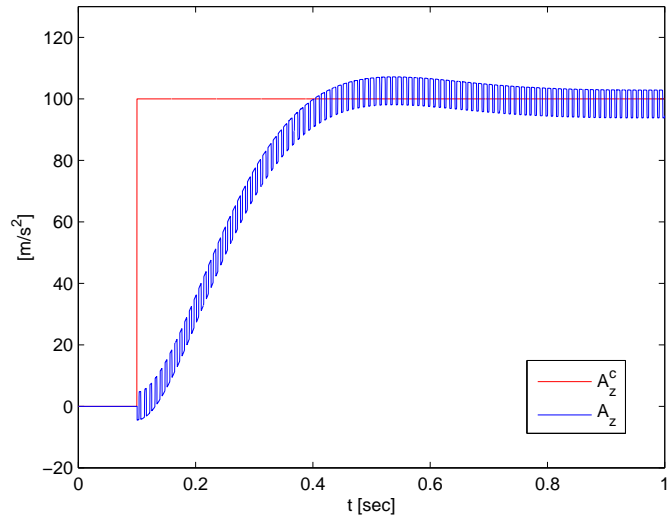
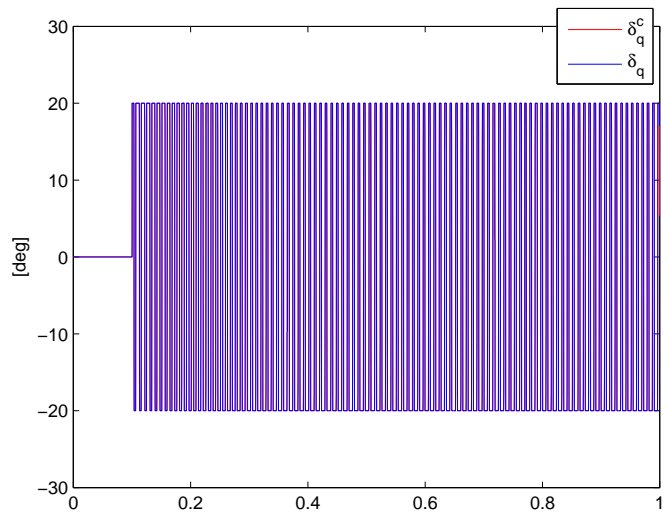


그림 3.5: $D_4 C_z$ 의 3차원 그래프

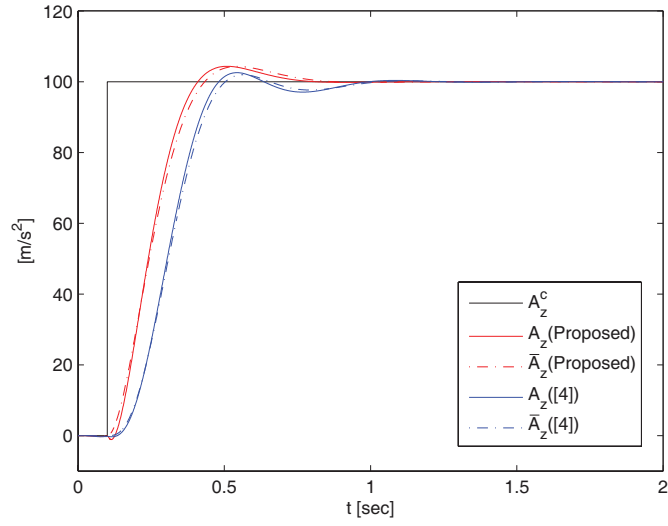


(a) 피치 가속도

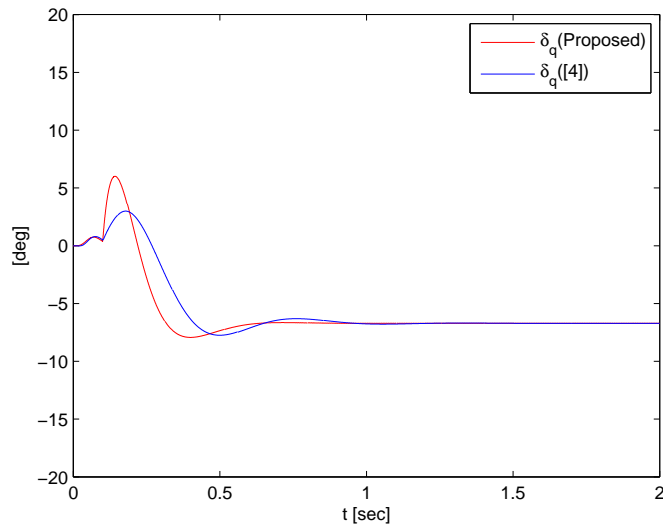


(b) 제어 편각

그림 3.6: 구동기 동역학과 1차 필터가 존재하지 않을 경우의 응답 특성(i.e., $\lambda_z = \infty$, and $\delta_q^c = \delta_q$)

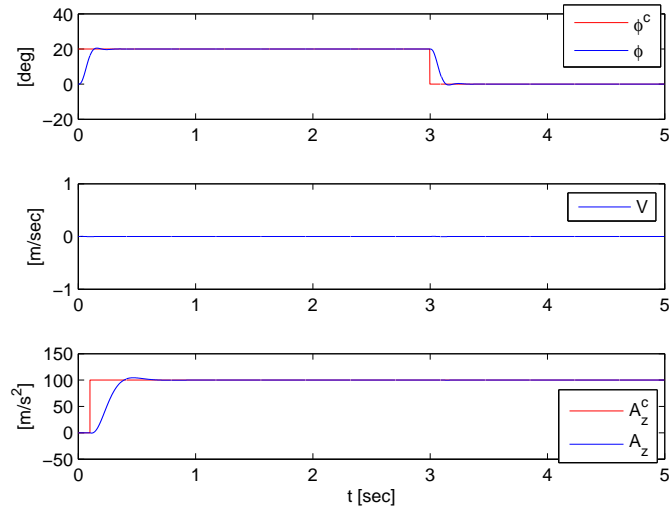


(a) 피치 가속도

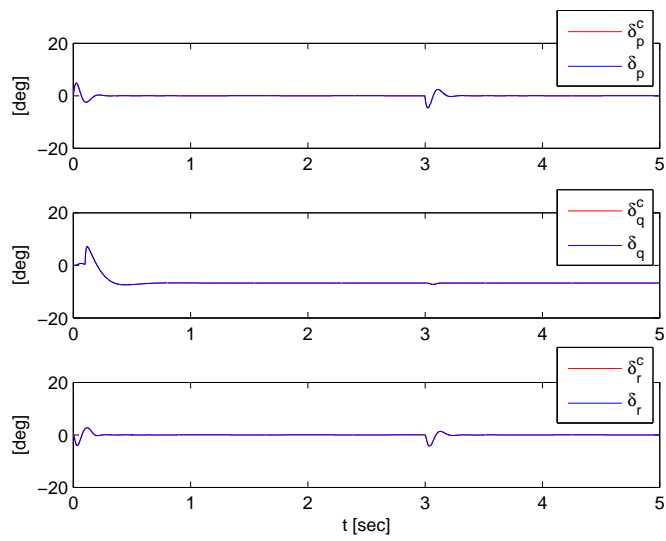


(b) 제어 편각

그림 3.7: 구동기 동역학이 이상적으로 빠를 경우의 응답 특성(i.e., $\delta_i^c = \delta_i$)

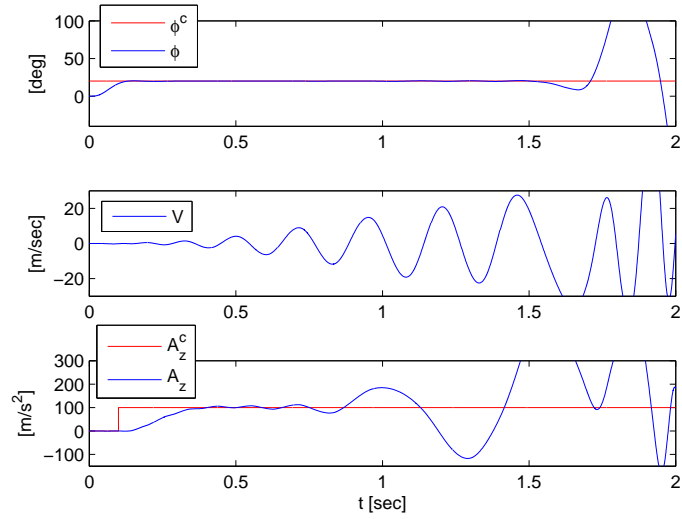


(a) 롤 각, 요 속도, 피치 가속도

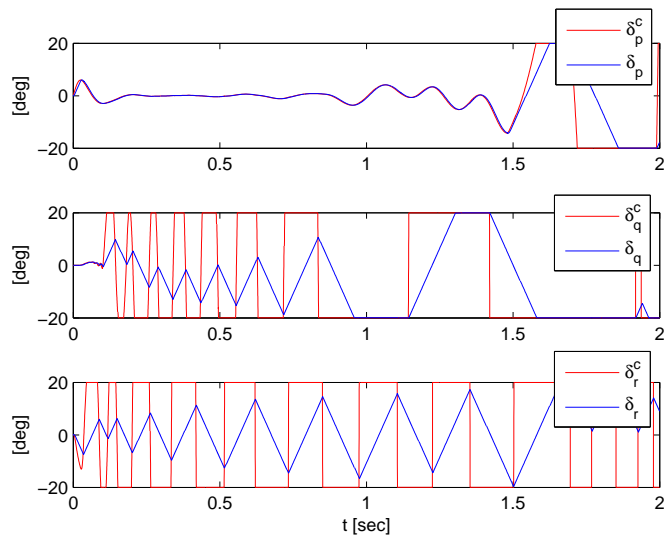


(b) 제어 편각

그림 3.8: 상대적으로 빠른 구동기 동역학이 존재할 경우의 응답 특성($\omega_a = 120Hz, \alpha_c = 1$)

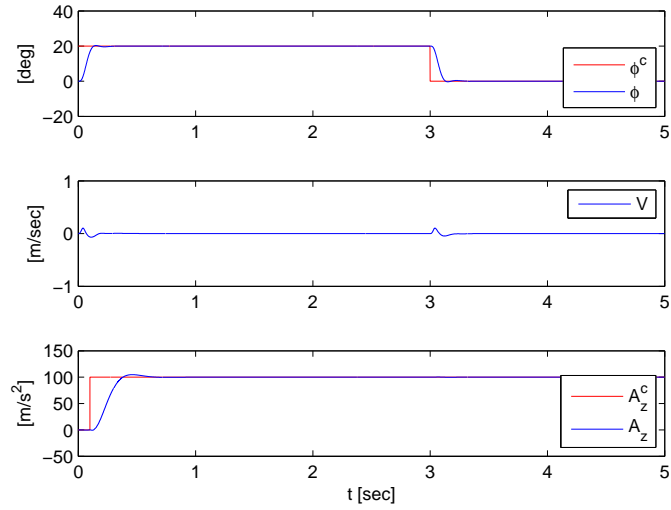


(a) 롤 각, 요 속도, 피치 가속도

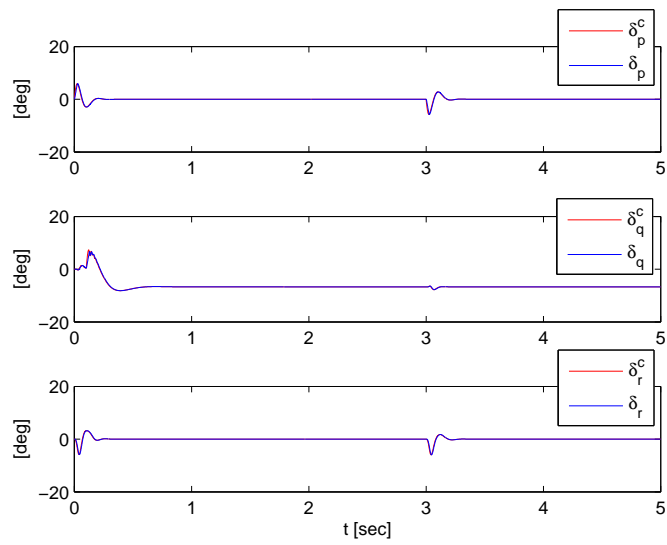


(b) 제어 편각

그림 3.9: 상대적으로 느린 구동기 동역학이 존재할 경우의 응답 특성, 기존의 자동조종 제어기 ($\omega_a = 60Hz, \alpha_c = 1$)

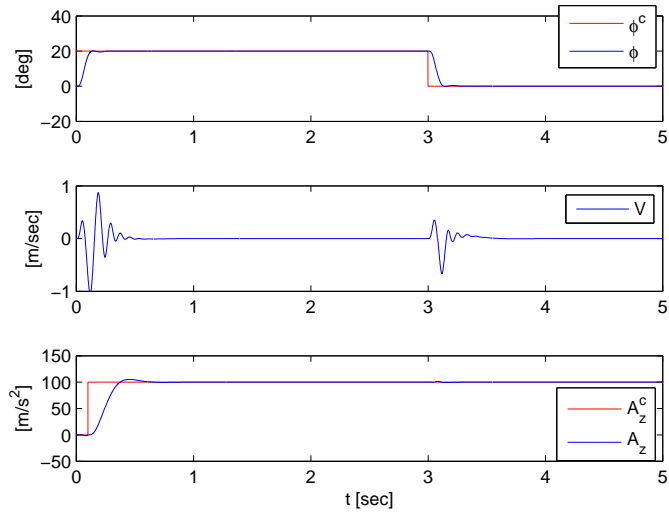


(a) 롤 각, 요 속도, 피치 가속도

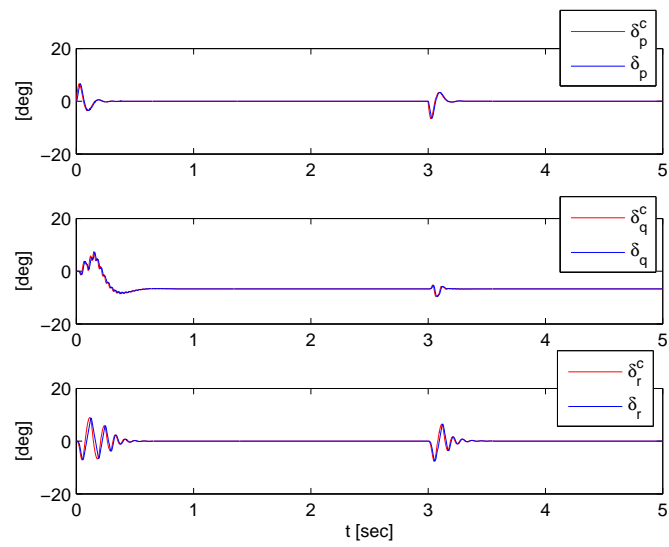


(b) 제어 편각

그림 3.10: 상대적으로 느린 구동기 동역학이 존재할 경우의 응답 특성, 제안된 자동조종 제어기 ($\omega_a = 60Hz, \alpha_c = 0.35$)



(a) 롤 각, 요 속도, 피치 가속도



(b) 제어 편각

그림 3.11: 더욱 느린 구동기 동역학이 존재할 경우의 응답 특성, 제안된 자동조종 제어기 ($\omega_a = 30Hz, \alpha_c = 0.28$)

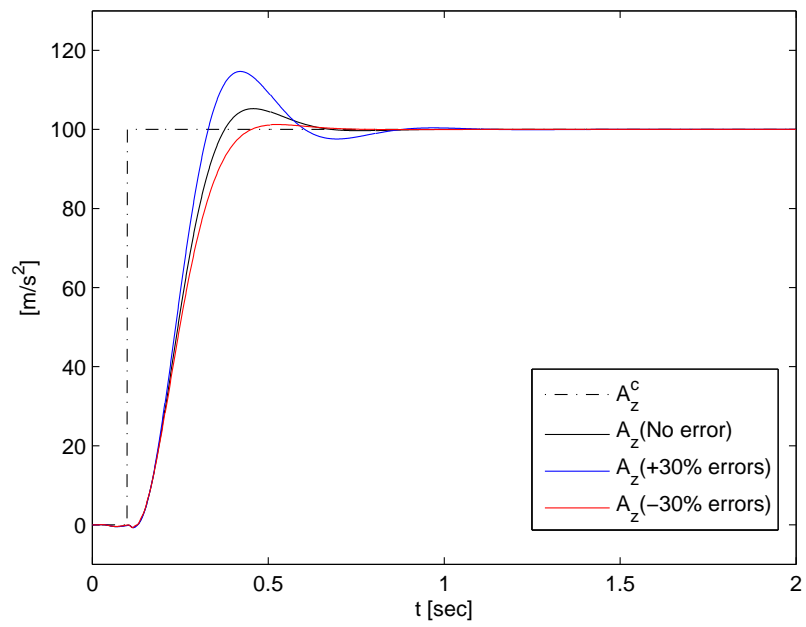
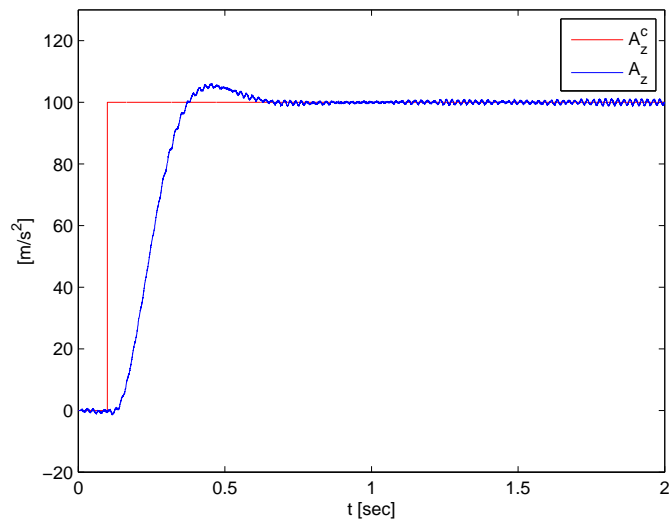
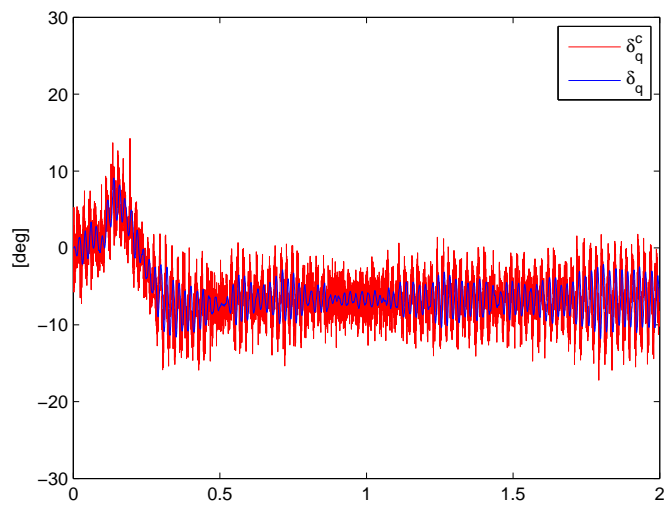


그림 3.12: C_z, C_m 에 $\pm 30\%$ 오차가 존재할 경우의 응답 특성 ($\omega_a = 60Hz, \alpha_c = 0.35$)



(a) 피치 가속도



(b) 제어 편각

그림 3.13: U, V, W, p, q, r 의 측정 잡음 및 2 ms의 시간 지연이 있을 경우의 응답 특성 ($\omega_a = 60Hz, \alpha_c = 0.35$)

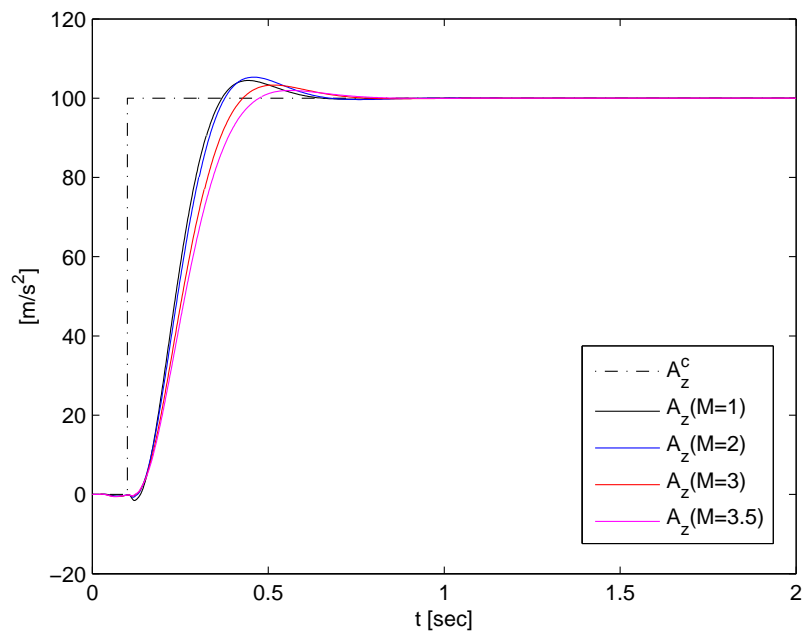


그림 3.14: $M = 1, 2, 3, 3.5$ 의 마하 수에 따른 응답 특성 ($\omega_a = 60\text{Hz}$, $\alpha_c = 0.35$)

3.5 소결론

기존의 자동조종 제어기 [24]는 그림 3.8에서와 같이 구동기 동역학이 이상적으로 빠를 때는 원하는 입출력 동특성을 나타내지만, 구동기 동역학이 느려질 경우 그림 3.9에서와 같이 불안정해지는 것을 확인할 수 있다. 제안된 자동조종 제어기는 모의 실험 결과 그림 3.10와 그림 3.11에서 확인할 수 있듯이, 구동기 동역학이 느릴 경우에도 그 영향을 잘 보상할 수 있음을 알 수 있다. 언더슈트(undershoot)가 거의 사라진 것으로 보아, BTT 미사일의 비최소위상 특성이 거의 나타나지 않는다고 할 수 있다. 또한, 그림 3.12, 그림 3.13, 그림 3.14에서 확인할 수 있듯이 공역학 계수의 불확실성(uncertainty), 측정 잡음, 시간 지연 등이 존재할 경우에도 안정적으로 동작하며, 비행 조건이 변화해도 항상 일정한 선형 시스템 형태의 입출력 동특성을 나타내게 된다.

제안된 자동조종 제어기는 구동기 동역학, 비선형 미사일 동역학을 모두 고려하여 유사 특이 섭동 기법을 이용하여 설계되었으며, 어떤 미사일의 종류에도 관계없이 체계적으로(systematic) 적용이 가능하다. 계산 과정에서 미분 정보를 사용하지 않으며 비행 조건에 관계 없이 입출력 동특성을 유지할 수 있어서 실제 미사일 시스템의 안정성을 크게 개선할 수 있다. 수학적 성능 분석 및 안정성 증명을 완료하여 이론적으로도 무결한 설계 기법임이 확인 되었다. 이 결과는 국제 학회에서 발표 되었으며[49], 저명한 국제 학술지에 곧 게재될 예정이다[55]. 또한, 롤 채널과 피치 채널 간의 커플링을 해결하여 자동조종장치 동역학이 비행조건에 관계없이 선형 시스템의 형태로 표시 가능하게 된다. 유도 장치 설계 과정에서도 자동조종장치 동역학이 선형 시스템의 특성을 갖도록 함으로써, 자동조종장치 동역학을 고려한 유도 법칙 설계가 용이해져 요격 성능을 향상시키는 데에 기여할 수 있다.

제 4 장 표적 충돌각을 고려한 최적 유도 법칙

4.1 3차원 추적 기하학

3차원 공간상에서 미사일이 목표물을 요격하는 상황을 3차원 공간상에서 나타내면 그림 4.1 과 같다. 이러한 요격 상황에서의 추적 기하학은 복잡한 비선형 함수를 포함하는 역학 방정식으로 표현된다[50]. 따라서 이를 모두 고려하여 유도 법칙을 푸는 것은 불가능하기 때문에, 아래와 같은 가정을 통해 추적 기하학을 단순화 하도록 한다.

(A10) 시선각 θ_M, ψ_M 은 충분히 작다.

(A11) 미사일의 받음각 α 와, 옆미끄러짐각 β 는 충분히 작다.

(A12) 미사일과 목표물의 접근 속도는 상수이다.

(A13) 표적 충돌각 오차는 충분히 작다.

중간 유도 단계에서 미사일이 목표 방향으로 잘 유도 되었다고 볼 수 있기 때문에, 종말 유도 단계가 시작되는 시점에서 가정 (A10)은 타당하다고 볼 수 있다. 가정 (A11)과 (A12)는 기존 연구에서고 BTT 미사일의 종말 유도 단계에서는 일반적으로 받아들여지는 가정이다. 또한, 중간 유도 단계에서 이미 표적의 취약부위를 파악하여 그 방향으로 유도 되었다고 볼 수 있으며, 표적의 180도 뒤를 돌아 요격한다던지 하는 미사일의 기동 한계를 벗어난 불가능한 상황을 고려하지 않기로 하면, (A13) 역시 받아들여질 수 있다.

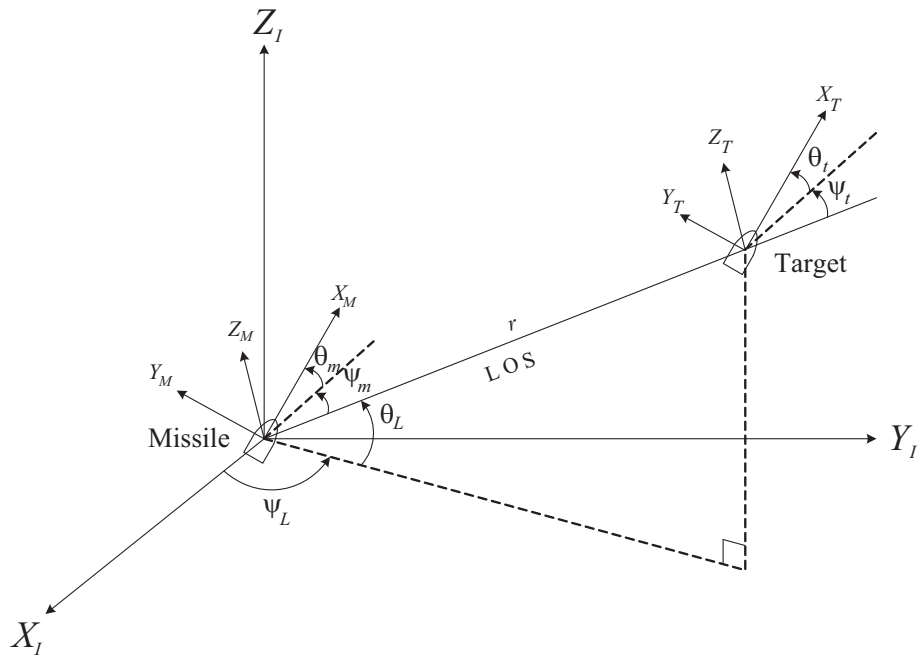


그림 4.1: 3차원 추적 기하학

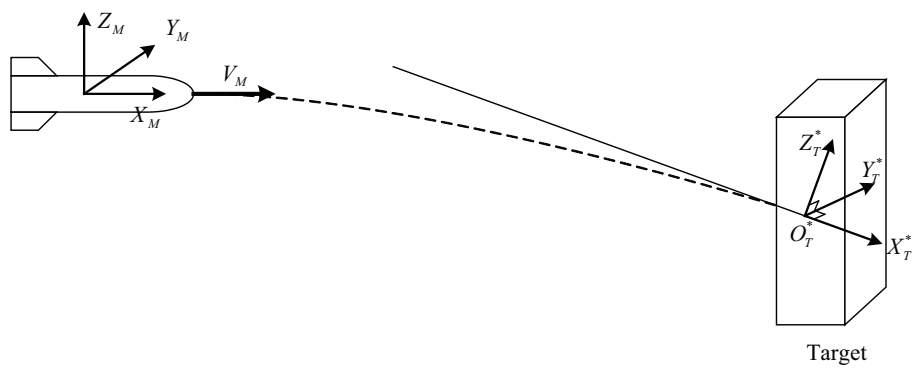


그림 4.2: 표적 충돌각 좌표계

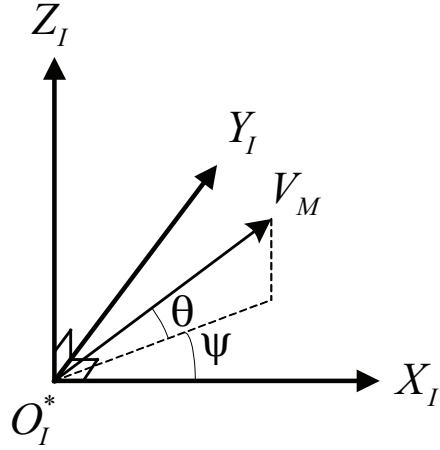


그림 4.3: 표적 충돌각의 정의

이제 그림 4.2와 같이 좌표계를 정의한다. 영상 정보로부터 표적과 미사일의 자세 정보를 추정할 수 있다고 가정하면, 종말 유도 단계가 시작되는 시점에 표적 충돌각 좌표계를 정의할 수 있다. 그림 4.2에서 표적 충돌각 좌표계 (X_T^*, Y_T^*, Z_T^*) 의 X_T^* 는 요격 시 미사일이 향하길 원하는 방향이 되도록 한다. 따라서, 맞추고자 하는 표적 충돌각은 관성 좌표계와 표적 충돌각 좌표계 사이의 회전 각으로 나타나며 요 방향을 ψ^* , 피치 방향을 θ^* 로 정의 한다. 이 때, 그림 4.3과 같이 미사일이 향하는 방향과 관성 좌표계 사이의 자세 관계를 표적 충돌각으로 표시하도록 하며 피치 방향 각을 θ , 요 방향 각을 ψ 로 정의한다. 이후 최적 유도 법칙을 설계할 때, 관성 좌표계와 표적 충돌각 좌표계 사이의 오일러 각인 원하는 표적 충돌각 θ^*, ψ^* 와 요격시의 표적 충돌각 $\theta(t_f), \psi(t_f)$ 의 차이인 표적 충돌각 오차 $\theta_e \triangleq \theta^* - \theta(t_f), \psi_e \triangleq \psi^* - \psi(t_f)$ 를 최소가 되도록 함으로써 원하는 표적 충돌각에 맞는 요격 상황을 만들 수 있다. 이 때, 위 가정들을 만족하면서 표적이 충돌경로상에 있게 되면 관성 좌표계에서의 등

속 운동하는 표적에 대한 추적기하학을 다음과 같이 단순화하여 쓸 수 있다[30, 35].

$$\begin{aligned}
 \dot{y} &= V_M \psi_e - V_{Ty} \\
 V_M \dot{\psi}_e &= A_z \sin \phi \\
 \dot{z} &= V_M \theta_e - V_{Tz} \\
 V_M \dot{\theta}_e &= -A_z \cos \phi + g
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

또한, 앞서 소개한 자동조종 제어기를 이용하면 자동조종장치 동역학의 입출력 동특성이 선형화되고, 롤 및 피치 채널간 간섭 효과를 무시할 수 있게되며, 선형 전달함수의 극을 임의로 설정할 수 있기 때문에, 다음과 같이 근사적으로 1차 선형 시스템의 특성을 갖도록 설계할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi} &= -k_\phi \phi + k_\phi \phi^c \\
 \dot{A}_z &= -k_a A_z + k_a A_z^c
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

여기서 k_a, k_ϕ 는 각각 피치 및 롤 채널의 대역폭을 나타낸다.

4.2 최적 유도 법칙 설계

종말 유도 단계가 $t = 0$ 에서 시작되고 t_f 에서 요격이 이루어진다고 하자. 그러면 잔여 비행 시간(time-to-go) t_{go} 는 $t_{go} = t_f - t$ 로 주어진다. 표적을 원하는 표적 충돌각으로 오차 없이 요격하기 위해서는, 요격 오차(miss distance)와 표적 충돌각 오차(impact angle error)를 최소화 하면 된다.

$$\begin{aligned}
 y(t_f) &= 0 \\
 z(t_f) &= 0 \\
 \psi_e(t_f) &= 0 \\
 \theta_e(t_f) &= 0
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

따라서, 목적 함수(performance index) J 를 아래와 같이 설정한다.

$$\begin{aligned}
 J \triangleq & \frac{1}{2} \left[|y(t_f)|^2 + |z(t_f)|^2 + w(|\psi_e(t_f)|^2 + |\theta_e(t_f)|^2) \right. \\
 & \left. + \int_0^{t_f} (w_1 |A_z^c(\tau)|^2 + w_2 |\phi^c(\tau) - \bar{\phi}|^2) d\tau \right]
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

여기서 w, w_1, w_2 는 각각의 항에 대한 가중치를 의미한다. 이제 풀고자 하는 최적 유도 문제는 식 (4.1)의 추적 기하학과 식 (4.2)의 자동조종장치 동역학을 통해 식 (4.4)의 목적 함수 J 를 최소화 하는 최적 유도 명령을 생성하는 것이 된다.

최적 제어 문제를 보다 효율적으로 풀기 위해, 아래와 같이 유도 좌표계를 새로 정의하도록 한다. 표적 충돌각 좌표계를 X_T^* 축에 대해 회전하여 시선각과 X_T^* 축이 이루는 평면(피치 평면)위에 Z_T^* 축이 놓이도록 하여 이를 유도 좌표계 (X_G, Y_G, Z_G)라 한다. 이때 회전한 각을 $\bar{\phi}$ 로 정의한다. 이제, 식 (4.1), (4.2)를 유도 좌표계에서 아래와 같은 상태 방정식으로 쓸 수 있다.

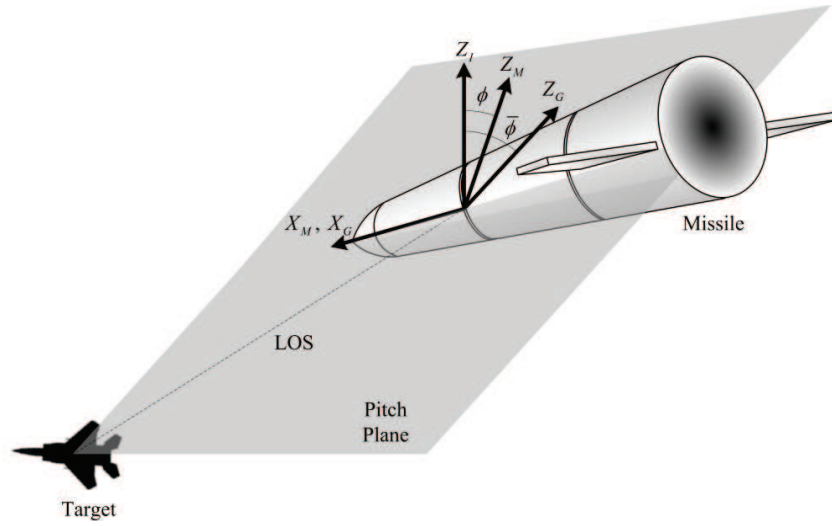


그림 4.4: ϕ 와 $\bar{\phi}$ 의 정의

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -x_3 \cos x_6 + g_1 \\
 \dot{x}_3 &= -k_a x_3 + k_a u_1 \\
 \dot{x}_4 &= x_5 \\
 \dot{x}_5 &= x_3 \sin x_6 + g_2 \\
 \dot{x}_6 &= -k_\phi x_6 + k_\phi u_2
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

where

$$\begin{aligned}
x_1 &\triangleq z \cos \bar{\phi} - y \sin \bar{\phi} \\
x_2 &\triangleq (V_M \theta_e - V_{Tz}) \cos \bar{\phi} - (V_M \psi_e - V_{Ty}) \sin \bar{\phi} \\
x_3 &\triangleq A_z \\
x_4 &\triangleq z \sin \bar{\phi} + y \cos \bar{\phi} \\
x_5 &\triangleq (V_M \theta_e - V_{Tz}) \sin \bar{\phi} + (V_M \psi_e - V_{Ty}) \cos \bar{\phi} \\
x_6 &\triangleq \phi - \bar{\phi} \\
u_1 &\triangleq A_z^c \\
u_2 &\triangleq \phi^c - \bar{\phi} \\
g_1 &\triangleq g \cos \bar{\phi} \\
g_2 &\triangleq g \sin \bar{\phi}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

위의 식 (4.6)에 의해 목적 함수 J 는 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
J &\triangleq \frac{1}{2} \left[|y(t_f)|^2 + |z(t_f)|^2 + w(|\psi_e(t_f)|^2 + |\theta_e(t_f)|^2) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{t_f} (w_1 |A_z^c(\tau)|^2 + w_2 |\phi^c(\tau) - \bar{\phi}|^2) d\tau \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[x_1(t_f)^2 + x_4(t_f)^2 + w_a (|x_2(t_f) + V_{Gz}|^2 + |x_5(t_f) + V_{Gy}|^2) \right. \\
&\quad \left. + \int_0^{t_f} (w_1 u_1^2 + w_2 u_2^2) d\tau \right]
\end{aligned} \tag{4.7}$$

where

$$V_{Gz} \triangleq V_{Tz} \cos \bar{\phi} - V_{Ty} \sin \bar{\phi} \tag{4.8}$$

$$V_{Gy} \triangleq V_{Tz} \sin \bar{\phi} + V_{Ty} \cos \bar{\phi} \tag{4.9}$$

여기서, $w_a \triangleq \frac{w}{V_M^2}$ 이다.

표적을 요격하기 위해서는 미사일이 타겟 방향으로 롤링 하도록 하는 것이 우선이다. 또한, $|\phi^c - \bar{\phi}|^2$ 의 $[0, t_f]$ 에서의 적분 값이 목적 함수 J 에 포함되어 있다. 따라서, 아래의 가정을 하는것이 타당하다 할 수 있다.

(A14) 미사일의 롤링은 피치 평면 근처에서 일어난다.

이는

$$\sin x_6 \cong x_6, \quad \cos x_6 \cong 1 \quad (4.10)$$

를 의미하며, 따라서 식 (4.5)는 아래와 같이 근사될 수 있다.

$$\begin{aligned} \Sigma_p : \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_3 + g_1 \\ \dot{x}_3 &= -k_a x_3 + k_a u_1 \\ \Sigma_y : \dot{x}_4 &= x_5 \\ \dot{x}_5 &= x_3 x_6 + g_2 \\ \dot{x}_6 &= -k_\phi x_6 + k_\phi u_2 \end{aligned} \quad (4.11)$$

그림 4.5에서와 같이, 위의 시스템은 쌍일차 시스템(bilinear and cascaded system)의 형태를 가지고 있음을 확인할 수 있다. 따라서, 이러한 특수한 형태를 갖는 비선형 시스템의 특성을 이용하면 폰트리아진의 최소값 정리(Pontryagin's minimum principle)[51]를 통해 최적 유도 문제를 풀 수 있다.

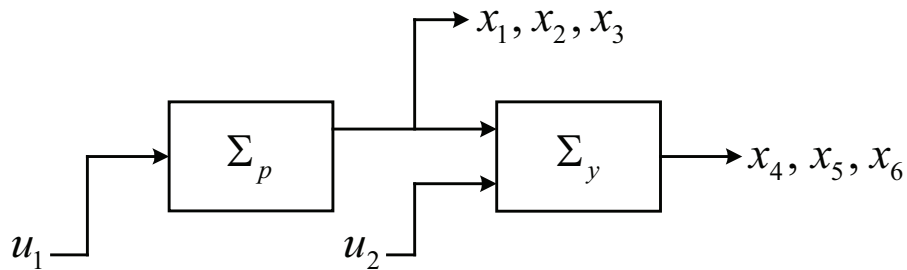


그림 4.5: 쌍일차 시스템(Bilinear and Cascaded System)의 구성도

위 시스템의 해밀토니안(Hamiltonian)을 아래와 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
H \triangleq & \lambda_1 x_2 + \lambda_2(-x_3 + g_1) + \lambda_3(-k_a x_3 + k_a u_1) \\
& + \lambda_4 x_5 + \lambda_5(x_3 x_6 + g_2) + \lambda_6(-k_\phi x_6 + k_\phi u_2) \\
& + \frac{1}{2} (w_1 \|u_1\|^2 + w_2 \|u_2\|^2)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

준상태 방정식(costate equations), 경계 조건(boundary conditions), 필요 조건(stationary conditions)은 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
\Lambda_p : \dot{\lambda}_1 &= 0 \\
\dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 \\
\dot{\lambda}_3 &= \lambda_2 + k_a \lambda_3 + \lambda_5 x_6 \\
\Lambda_y : \dot{\lambda}_4 &= 0 \\
\dot{\lambda}_5 &= -\lambda_4 \\
\dot{\lambda}_6 &= \lambda_5 x_3 + k_\phi \lambda_6
\end{aligned} \tag{4.13}$$

$$\begin{aligned}
\Lambda'_p : \lambda_1(t_f) &= x_1(t_f) \\
\lambda_2(t_f) &= w_a x_2(t_f) \\
\lambda_3(t_f) &= 0 \\
\Lambda'_y : \lambda_4(t_f) &= x_4(t_f) \\
\lambda_5(t_f) &= w_a x_5(t_f) \\
\lambda_6(t_f) &= 0
\end{aligned} \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
U_p : \frac{\partial H}{\partial u_1} &= k_a \lambda_3 + w_1 u_1 = 0 \\
U_y : \frac{\partial H}{\partial u_2} &= k_\phi \lambda_6 + w_2 u_2 = 0
\end{aligned} \tag{4.15}$$

준상태 방정식 (4.13)과 경계 조건 (4.14)의 Λ_p, Λ'_p 를 통해 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\lambda_1(t) &= \lambda_1(t_f) = x_1(t_f) = r_p \\
\lambda_2(t) &= r_p(t_f - t) + w_a v_p \\
\lambda_3(t) &= \frac{-r_p(-1 + e^{-k_a(t_f-t)} + k_a(t_f - t)) + (-1 + e^{-k_a(t_f-t)})k_a v_p w_a}{k_a^2}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

여기서, $r_p \triangleq x_1(t_f)$, $v_p \triangleq x_2(t_f)$ 로 정의한다. 그러므로, 최적 제어 입력 u_1^* 는 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{aligned}
u_1^*(t) &= -\frac{k_a}{w_1} \lambda_3(t) \\
&= \frac{r_p(-1 + e^{-k_a(t_f-t)} + k_a(t_f - t)) + (1 - e^{-k_a(t_f-t)})k_a v_p w_a}{k_a w_1}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

이제 Σ_p 를 적분하여 x_1, x_2, x_3 를 계산하게 되면 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{e^{-k_a(t+t_0+2t_f)}}{6k_a^3 w_1} \left[k_a e^{k_a(t+t_0+2t_f)} (6r_p(t_0 - t_f) - 6v_p w_a + k_a^2(r_p(t - t_0)^2(t + 2t_0 - 3t_f) \right. \\
&\quad + 3(g_1 w_1(t - t_0)^2 - v_p w_a(t - t_0)^2 + 2w_1(x_1(t_0) + (t - t_0)x_2(t_0)))) + 6w_1 x_3(t_0) \\
&\quad + 6k_a(t - t_0)(r_p(t_f - t_0) + v_p w_a - w_1 x_3(t_0))) + 3(r_p(-e^{k_a(2t+t_0+t_f)} + e^{k_a(3t_0+t_f)} \\
&\quad + 2k_a(e^{k_a(t+2t_0+t_f)}(t - t_0) + e^{2k_a(t_0+t_f)}(t_f - t_0))) + k_a(v_p w_a(2e^{2k_a(t_0+t_f)} \\
&\quad + e^{k_a(2t+t_0+t_f)} - e^{k_a(3t_0+t_f)} - 2e^{k_a(t+2t_0+t_f)})k_a(t - t_0)) - 2w_1 x_3(t_0)e^{2k_a(t_0+t_f)})] \\
x_2(t) &= \frac{e^{-k_a(t+t_0+2t_f)}}{2k_a^2 w_1} \left[k_a e^{k_a(t+t_0+2t_f)} (2r_p(t_f - t_0) + k_a((t - t_0)(r_p(t + t_0 - 2t_f) + 2g_1 w_1 \right. \\
&\quad - 2v_p w_a) + 2w_1 x_2(t_0)) - 2w_1 x_3(t_0)) + e^{k_a(t_0+t_f)}((e^{tk_a} - e^{t_0 k_a})^a)(2e^{t_f k_a} k_a v_p w_a \\
&\quad - (e^{tk_a} - e^{t_0 k_a})(r_p - k_a v_p w_a)) + 2e^{k_a(t_0+t_f)} k_a(r_p(t_0 - t_f) + w_1 x_3(t_0))] \\
x_3(t) &= \frac{e^{-k_a(t+t_f)}}{2k_a w_1} \left[r_p(e^{2tk_a} - e^{2k_a t_0} + 2k_a(e^{k_a(t_0+t_f)}(t_0 - t_f) + e^{k_a(t+t_f)}(t_f - t)) \right. \\
&\quad \left. - k_a(v_p w_a(e^{2tk_a} - e^{2t_0 k_a} - 2e^{k_a(t+t_f)}) - 2e^{k_a(t_0+t_f)}(w_1 x_3(t_0) - v_p w_a))) \right]
\end{aligned} \tag{4.18}$$

위의 식을 통해 $r_p = x_1(t_f)$, $v_p = x_2(t_f)$ 의 연립 방정식을 풀게 되면 아래와 같이 r_p 와 v_p 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
r_p = & 6k_a w_1 ((2(w_v(t_f - t_0) + w_1)k_a - w_v(e^{-2k_a(t_f - t_0)} - 4e^{-k_a(t_f - t_0)} + 3))k_a^2 x_1(0) \\
& + ((w_v(t_f - t_0) + 2w_1)(t_f - t_0)k_a^2 - w_v(e^{-k_a(t_f - t_0)} - 1)^2(t_f - t_0)k_a \\
& - w_v(e^{-k_a(t_f - t_0)} - 1)^2)k_a x_2(0) - ((w_v(e^{-k_a(t_f - t_0)} + 1)(t_f - t_0) + 2w_1)(t_f - t_0)k_a^2 \\
& + (e^{-k_a(t_f - t_0)} - 1)(w_v(e^{-k_a(t_f - t_0)} + 3)(t_f - t_0) + 2w_1)k_a \\
& + 2w_v(e^{-k_a(t_f - t_0)} - 1)^2)x_3(0)) / \\
& ((4w_1((t_f - t_0)^3 + 3w_1) + w_v((t_f - t_0)^3 + 12w_1)(t_f - t_0))k_a^4 \\
& - 2(w_v(e^{-2k_a(t_f - t_0)} + 2e^{-k_a(t_f - t_0)} + 3)(t_f - t_0)^3 + 6w_1(t_f - t_0)^2 \\
& + 3w_1 w_v(e^{-2k_a(t_f - t_0)} - 4e^{-k_a(t_f - t_0)} + 3))k_a^3 - 12(w_1(2e^{-k_a(t_f - t_0)} - 1) \\
& + w_v(e^{-2k_a(t_f - t_0)} + e^{-k_a(t_f - t_0)} - 1)(t_f - t_0))(t_f - t_0)k_a^2 \\
& - 6(e^{-k_a(t_f - t_0)} - 1)(e^{-k_a(t_f - t_0)}(w_1 + 4w_v(t_f - t_0)) + w_1)k_a \\
& - 12w_v(e^{-k_a(t_f - t_0)} - 1)^2)
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
v_p = & -2w_1(3((t_f - t_0)k_a + e^{-k_a(t_f-t_0)} - 1)^2 k_a^2 x_1(0) + ((t_f - t_0)^3 - 6w_1)k_a^3 \\
& + 6e^{-k_a(t_f-t_0)}(t_f - t_0)^2 k_a^2 + 3(e^{-2k_a(t_f-t_0)} + 2e^{-k_a(t_f-t_0)} - 1)(t_f - t_0)k_a \\
& + 3(e^{-2k_a(t_f-t_0)} - 1))k_a x_2(0) - (((2e^{-k_a(t_f-t_0)} + 1)(t_f - t_0)^3 \\
& + 6w_1(e^{-k_a(t_f-t_0)} - 1))k_a^3 + 3(e^{-k_a(t_f-t_0)} - 1)(t_f - t_0)^2 k_a^2 - \\
& 3(e^{-2k_a(t_f-t_0)} - 1)(t_f - t_0)k_a - 6(e^{-k_a(t_f-t_0)} - 1)^2)x_3(0))/ \\
& ((4w_1((t_f - t_0)^3 + 3w_1) + w_v((t_f - t_0)^3 + 12w_1)(t_f - t_0))k_a^4 \\
& - 2(w_v(e^{-2k_a(t_f-t_0)} + 2e^{-k_a(t_f-t_0)} + 3)(t_f - t_0)^3 + 6w_1(t_f - t_0)^2 \\
& + 3w_1w_v(e^{-2k_a(t_f-t_0)} - 4e^{-k_a(t_f-t_0)} + 3))k_a^3 - 12(w_1(2e^{-k_a(t_f-t_0)} - 1) \\
& + w_v(e^{-2k_a(t_f-t_0)} + e^{-k_a(t_f-t_0)} - 1)(t_f - t_0))(t_f - t_0)k_a^2 \\
& - 6(e^{-k_a(t_f-t_0)} - 1)(e^{-k_a(t_f-t_0)}(w_1 + 4w_v(t_f - t_0)) + w_1)k_a \\
& - 12w_v(e^{-k_a(t_f-t_0)} - 1)^2)
\end{aligned} \tag{4.20}$$

이제 $t = t_0$ 에서의 최적 제어 입력 u_1^* 은 아래와 같이 잔여 비행 시간의 함수를 계수로 갖는 시변 상태 궤환 형태(state-feedback form with time-varying gain)로 구해지게 된다.

$$u_1^*(t_0) = \frac{r_p(t_{go})(-1 + e^{-k_a t_{go}} + k_a t_{go}) - k_a w_a v_p(t_{go})(-1 + e^{-k_a t_{go}})}{k_a w_1} \tag{4.21}$$

또한, 앞서 설명한 대로 미사일과 표적의 상대 운동에 대한 추적 기하학인 6차 시스템이 유도 좌표계 Z_G 축 상의 상대 운동에 대한 3차 시스템 Σ_p 와 유도 좌표계 Y_G 축 상의 상대 운동에 대한 3차 시스템 Σ_y 로 구분되며, 그림 4.5과 같이 독립적으로 동작하게 된다. 따라서, Σ_p 의 상태 변수들이 Σ_y 를 시변 시스템(time-varying system)으로 나타나게 한다. 이와 같은 성질로 인하여 최적 피치 가속도 명령을 계산할 때 구해진 x_3 을 Σ_y 와 Λ_y 의 시변 계수(time-varying coefficient)로 이용하여 최

적 룰 각 명령 역시 구할 수 있게 된다.

앞서 피치 가속도와 마찬가지로 준상태 방정식 (4.13)과 경계 조건 (4.14)의 Λ_y, Λ'_y 를 통해 아래와 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\lambda_4(t) &= \lambda_4(t_f) = x_4(t_f) = r_y \\ \lambda_5(t) &= r_y(t_f - t) + w_a v_y\end{aligned}\tag{4.22}$$

여기서, 마찬가지로 $r_y \triangleq x_4(t_f)$, $v_y \triangleq x_5(t_f)$ 로 정의한다. 위의 식 (4.22)과 식 (4.18)의 x_3 를 이용하여 아래 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_6 &= -k_2(r_y(t_f - t) + w_a v_y)x_3 + k_\phi \lambda_6 \\ &= -\frac{1}{2k_a w_1} k_2(r_y(t_f - t) + w_a v_y) [e^{-k_a(t_f+t)}(k_1(r_p(e^{2tk_a} - e^{2k_a t_0}) \\ &\quad + 2e^{k_a t_f} k_a(e^{k_a t}(t_f - t) - e^{k_a t_0}(t_f - t_0))) - (e^{k_a t} - e^{k_a t_0})(e^{k_a t} + e^{k_a t_0} \\ &\quad - 2e^{k_a t_f})k_a v_p w_a) + 2e^{k_a(t_f+t_0)}k_a w_1 x_3(t_0)) + k_\phi \lambda_6]\end{aligned}\tag{4.23}$$

위의 식 (4.23)과 식 (4.14)의 경계 조건을 통해 λ_6 를 구할 수 있으며, $t = t_0$ 에서의 최적 제어 입력 u_2^* 를 아래와 같이 결정할 수 있다.

$$\begin{aligned}u_2(t) &= [2k_a k_\phi^2 (k_a^2 - k_\phi^2)^2 w_1 w_2 (r_y (b_1 + b_2 t + b_3 t^2 \\ &\quad + b_4 e^{k_a t} + b_5 e^{-k_a t} + b_6 e^{k_\phi t} + b_7 t e^{k_a t} + b_8 t e^{-k_a t}) \\ &\quad + w_v v_y (b_9 + b_{10} t + b_{11} e^{k_a t} + b_{12} e^{-k_a t} + b_{13} e^{k_\phi t}))]^{-1}\end{aligned}\tag{4.24}$$

where

$$\begin{aligned}a_1 &= 2k_a t_f (r_p t_f + v_p w_v) \\ a_2 &= -2k_a (2r_p t_f + v_p w_v) \\ a_3 &= 2k_a r_p \\ a_4 &= e^{-k_a t_f} t_f (r_p - k_a v_p w_v)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a_5 &= -e^{k_a(t_0-t_f)}t_f(r_p(e^{k_a t_0} + 2e^{k_a t_f}k_a(-t_0 + t_f)) - k_a((e^{k_a t_0} - 2e^{k_a t_f})v_p w_v \\
&\quad + 2e^{k_a t_f}w_1 x_3(0))) \\
a_6 &= e^{-k_a t_f}(-r_p + k_a v_p w_v) \\
a_7 &= e^{k_a(t_0-t_f)}(r_p(e^{k_a t_0} + 2e^{k_a t_f}k_a(-t_0 + t_f)) - k_a((e^{k_a t_0} - 2e^{k_a t_f})v_p w_v \\
&\quad + 2e^{k_a t_f}w_1 x_3(0))) \\
a_8 &= 2k_a(r_p t_f + v_p w_v) \\
a_9 &= -2k_a r_p \\
a_{10} &= e^{-k_a t_f}(r_p - k_a v_p w_v) \\
a_{11} &= e^{k_a(t_0-t_f)}(-r_p(e^{k_a t_0} + 2e^{k_a t_f}k_a(-t_0 + t_f)) + k_a((e^{k_a t_0} - 2e^{k_a t_f})v_p w_v \\
&\quad + 2e^{k_a t_f}w_1 x_3(0)))
\end{aligned} \tag{4.25}$$

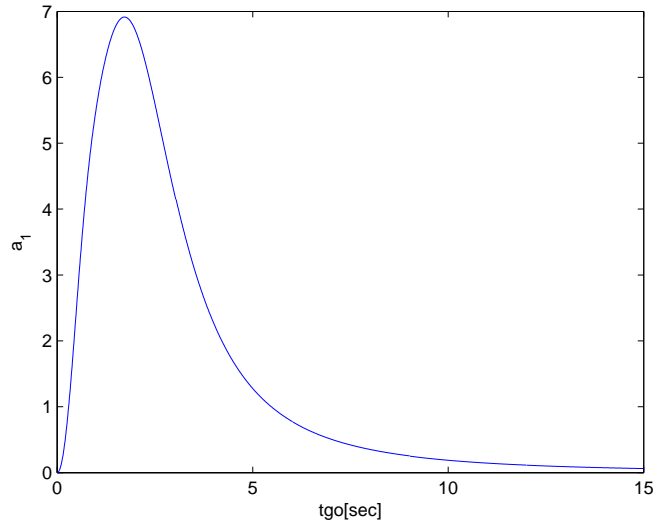
$$\begin{aligned}
b_1 &= -(k_a^2 - k_\phi^2)^2(2a_3 + k_\phi(a_2 + a_1 k_\phi)) \\
b_2 &= -k_\phi(2a_3 + a_2 k_\phi)(k_a^2 - k_\phi^2)^2 \\
b_3 &= -a_3(-k_a^2 k_\phi + k_\phi^3)^2 \\
b_4 &= -k_\phi^3(k_a + k_\phi)^2(a_6 + a_4(-k_a + k_\phi)) \\
b_5 &= -(k_a - k_\phi)^2 k_\phi^3(a_7 + a_5(k_a + k_\phi)) \\
b_6 &= e^{-(k_a+k_\phi)t_f}(e^{k_a t_f}a_3(k_a^2 - k_\phi^2)^2(2 + 2k_\phi t_f + k_\phi^2 t_f^2) \\
&\quad + k_\phi(e^{k_a t_f}a_2(k_a^2 - k_\phi^2)^2(1 + k_\phi t_f) + k_\phi(e^{k_a t_f}a_1(k_a^2 - k_\phi^2)^2 \\
&\quad + k_\phi(-e^{2k_a t_f}a_6(k_a + k_\phi)^2(-1 + k_a t_f - k_\phi t_f) \\
&\quad + (k_a - k_\phi)(-(k_a + k_\phi)(a_5(-k_a + k_\phi) \\
&\quad + e^{2k_a t_f}a_4(k_a + k_\phi))a_7(k_a - k_\phi)(1 + k_a t_f + k_\phi t_f))))))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_7 &= a_6(k_a - k_\phi)k_\phi^3(k_a + k_\phi)^2 \\
b_8 &= -a_7(k_a - k_\phi)^2k_\phi^3(k_a + k_\phi) \\
b_9 &= -k_\phi(a_9 + a_8k_\phi)(k_a^2 - k_\phi^2)^2 \\
b_{10} &= -a_9(-k_a^2k_\phi + k_\phi^3)^2 \\
b_{11} &= a_{10}(k_a - k_\phi)k_\phi^3(k_a + k_\phi)^2 \\
b_{12} &= -a_{11}(k_a - k_\phi)^2k_\phi^3(k_a + k_\phi) \\
b_{13} &= e^{-(k_a+k_\phi)t_f}k_\phi(-k_a^2 + k_\phi^2)(k_\phi(-e^{k_a t_f}a_8(k_a^2 - k_\phi^2) + k_\phi(a_{11}(-k_a + k_\phi) \\
&\quad + e^{2k_a t_f}a_{10}(k_a + k_\phi))) + e^{k_a t_f}a_9(-k_a^2 + k_\phi^2)(1 + k_\phi t_f)
\end{aligned} \tag{4.26}$$

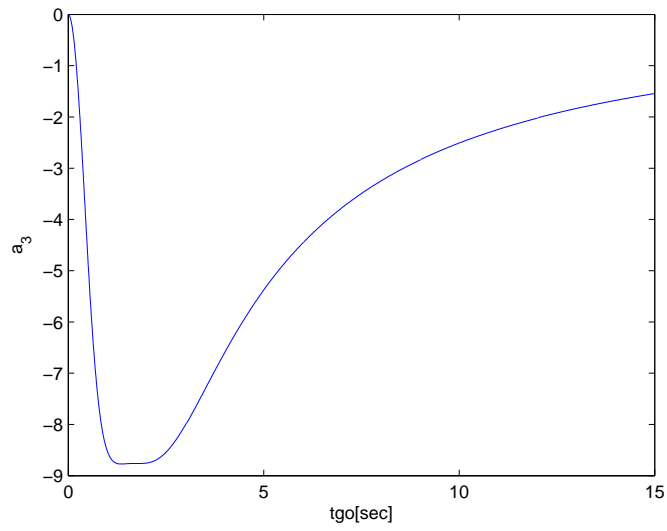
최종적으로 구해진 최적 유도 법칙의 해는 아래와 같다.

$$\begin{aligned}
A_z^c &= A_1(t_{go})x_1 + A_2(t_{go})x_2 + A_3(t_{go})x_3 + A_4(t_{go})g_1 \\
\phi^c &= \bar{\phi} + \frac{P_1^T B_1(t_{go})x_4 + P_2^T B_2(t_{go})x_5 + P_3^T B_3(t_{go})x_6 + P_4^T B_4(t_{go})g_2}{P_5^T B_5(t_{go})}
\end{aligned} \tag{4.27}$$

여기서, $A_i : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, i = 1, 2, 3, 4$, $B_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{416}$, $B_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{420}$, $B_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{427}$, $B_4 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{480}$, $B_5 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{580}$ 는 비행 잔여 시간 t_{go} 와 상태 변수 x_1, x_2, x_3, g_1 의 곱으로 이루어진 열벡터 P_i , ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)의 함수로 나타나게 된다. 예를 들어 $P_1 \in \mathbf{R}^{416}$ 은 $P_1(x_1, x_2, x_3, g_1) \triangleq (x_1^{10}, x_1^9 x_2, x_1^8 x_2 x_3, \dots, x_3 g_1, g_1, 1)$ 로 주어진다. 시변 함수 a_1 과 a_3 의 형태는 그림 4.6에서 확인할 수 있다. 주어진 최적 유도 법칙의 해는 매우 복잡하고 양이 방대하지만, 앞서 설명한 바와 같이 잔여 비행 시간의 함수를 계수로 갖는 시변 상태 귀환 형태(state-feedback form with time-varying gain)로 구해지게 되므로, 지시표 형태로 구현이 가능하다.



(a) $A_1(t_{go})$



(b) $A_3(t_{go})$

그림 4.6: 잔여 비행 시간의 시변 함수

4.3 모의 실험 결과

제안된 표적 충돌각을 고려한 유도 법칙의 모의 실험을 수행하여 그 성능을 평가하였다. 3장의 모의 실험에서와 같이 ILAAT의 공역학 자료[53]를 적용하였으며, 비선형 추적 기하학, 중력 가속도, 미사일 동역학 등을 근사없이 고려하였다. 자동 조종장치는 3장에서 제안된 자동조종 제어기를 적용하였다. 유도 법칙의 계산을 위해 사용하였던 가정들은 모두 무시하고 실제 상황에 최대한 근접하도록 모든 공역학 모델 및 비선형성을 고려하여 모의 실험을 진행하였다.

먼저, 가중치를 $w_a = 1$, $w_1 = 0.1$, $w_2 = 0.5$ 로 설정하였다. 이는 에너지 부분보다 요격 오차 및 표적 충돌각 오차를 더욱 최소화하기 위함이다. w_2 가 w_1 에 비해 상대적으로 크게 설정된 이유는 비행 중 가정(A10)을 만족시키기 위함이다. 자동조종 제어기의 설계 변수들은 식 (3.155)와 모두 동일하지만, $\omega_n = 3$ 으로 더욱 작게 설정하였다. 이는 자동조종장치 동역학이 아주 느릴 경우에도 제안된 표적 충돌각을 고려한 유도 법칙이 잘 동작함을 보이기 위해서이다. 이 때, 롤과 피치 채널의 정착 시간(settling time)은 각각 0.6초와 1.8초 근방으로 설정된다. 또한, $k_\phi = 0.75$, $k_a = 0.25$ 로 설정하였으며 이는 실제 롤 및 피치 채널의 입출력 응답과 유사한 형태의 1차 선형 시스템으로 근사하기 위해서이다. 미사일과 표적의 위치, 속도, 가속도 정보는 모두 정확히 알고 있다고 가정하였으며, 실제 상황과 유사한 조건을 갖도록 피치 가속도는 5g를 넘지 않도록 하였으며, 자동조종 제어기의 모의 실험에서와 마찬가지로 제어 편각과 그 미분을 $\pm 20(deg)$, $\pm 250(deg/s)$ 로 제한하였다. 비행 잔여 시간(time-to-go)은 $t_{go} = [(x^2 + y^2 + z^2)/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)]^{1/2}$ 로 계산하였다. 기본적으로 미사일의 초기 속도 및 위치는 $[U(0), V(0), W(0)] = [510, 0, 0](m/s)$, $[x_M(0), y_M(0), z_M(0)] = [0, 0, 0](m)$ 로 설정하였다.

표적의 다양한 초기 위치 및 속도에 대한 실험을 진행하였다. 첫번째로, 정지 표적이 $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [8000, 0, -100](\text{m})$ 의 위치에 존재하는 경우이다. 이 때, 원하는 표적 충돌각을 $(\psi^* = 0^\circ, \theta^* = 0^\circ)$, $(\psi^* = 0^\circ, \theta^* = -30^\circ)$, $(\psi^* = 5^\circ, \theta^* = -20^\circ)$ 의 3가지 경우로 변화시켜 가며 실험하였다. 그 결과를 표 4.1과 그림 4.7 - 4.9에 나타내었다. 첫번째와 두번째 경우 롤링을 전혀 하지 않아도 되는 위치이기 때문에 ψ_e 는 0으로 고정되며, -30° 로 비교적 큰 표적 충돌각으로 설정하였을 때는 앞서 설정한 가정들이 잘 맞지 않게 되므로 요격 오차가 1m 내외로 어느 정도 발생하게 된다. 하지만 표적 충돌각 오차는 거의 없이 명중하였음을 알 수 있다. 세번째의 경우 롤 각 명령이 발생하며 롤링을 하게 된다. 이 때, 명중하기 직전이 되면 롤 각 명령인 ϕ^c 가 매우 큰 값으로 진동하는 현상이 발생하게 됨을 볼 수 있다. 이는 요격 직전에는 최소화 하고자 하는 상태 변수인 x_1, x_2, x_4, x_5 가 0에 가까워지거나 혹은 0을 지나가기 때문에 식 (4.27)의 ϕ^c 의 분모 부분이 0에 가까워져 매우 큰 명령 생성되기 때문이다. 하지만, 이 때 전체 미사일 동역학의 대역폭이 상대적으로 느리기 때문에 과도한 명령의 흔들림을 추종하지 않아 명중 성능에는 지장을 주지 않게 된다. 롤 각 명령을 안정적으로 만들어 주기 위해 제한 값을 둔다던지 하는 방법들이 있겠지만, 요격 성능에 영향을 미치지 않으므로 본 논문에서는 더 이상의 기술은 하지 않도록 한다.

두번째로, 정지 표적이 $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 100, -200](\text{m})$ 의 단거리 위치에 존재할 경우에 대한 실험을 수행하였다. 역시 원하는 표적 충돌각을 $(\psi^* = -5^\circ, \theta^* = -10^\circ)$, $(\psi^* = -10^\circ, \theta^* = -10^\circ)$, $(\psi^* = -10^\circ, \theta^* = -15^\circ)$ 의 3가지 경우로 변화시켜 가며 실험하였으며, 그 결과는 표 4.2과 그림 4.10 - 4.12에 나타내었다. 단거리인 3km의 사거리에서 제어를 시작하였으므로 큰 각도를 맞추는 기동은 불가능하였다. 따라서 첫번째 두번째 경우는 오차 없이 잘 요격하였지만, 각도가 상대적으로 큰 세번째 경우에는 가속도 명령이 5g로 포화되어 요격 오차가 크게 발

생하였음을 알 수 있다. 하지만 가속도 명령이 포화 되어도 전체 시스템이 불안정해지지 않고 어느 정도의 요격 성능은 보장해 줌을 알 수 있다. 본 결과는 이러한 한계 상황에서의 성능을 알아보기 위한 실험으로써, 앞서 설명한 바와 같이 자동조종장치 대역폭도 매우 느리게 설정하였으며, 가속도 제한 조건도 5g로 매우 작게 잡았으므로 나온 결과라 할 수 있다. 실제 상황에서는 보다 먼 거리부터 종말 단계 제어 시작되며 미사일 가속도 역시 본 논문의 조건보다 고기동이 가능한 상황일 것이므로 좋은 요격 성능을 기대할 수 있다.

마지막으로, 등속 운동하는 표적에 대한 실험 결과이다. $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [6000, 100, -200](\text{m})$ 의 위치에서 출발하여 등속으로 움직이는 표적에 대한 실험을 수행하였다. 첫번째로, $[V_{Tx}, V_{Ty}, V_{Tz}] = [0, -10, 0](\text{m/s})$ 의 속도로 움직이는 표적을 ($\psi^* = 0^\circ$, $\theta^* = -10^\circ$)의 충돌각으로 요격하고자 하는 실험이다. 두번째는, $[V_{Tx}, V_{Ty}, V_{Tz}] = [5, -10, 0](\text{m/s})$ 의 속도로 움직이는 표적을 ($\psi^* = 5^\circ$, $\theta^* = -15^\circ$)의 충돌각으로 요격하고자 하는 실험이며, 세번째는 $[V_{Tx}, V_{Ty}, V_{Tz}] = [10, 5, 0](\text{m/s})$ 의 속도로 움직이는 표적을 ($\psi^* = -10^\circ$, $\theta^* = -10^\circ$)의 충돌각으로 요격하는 실험이다. 표 4.3과 그림 4.13 - 4.15의 결과에서 볼 수 있듯이 등속 운동하는 표적의 경우에도 이미 추적 기하학에서 표적의 속도를 고려하였기 때문에 오차 없이 잘 요격됨을 확인할 수 있다.

추가적으로 제안된 유도 기법의 실용성을 확인하고자, 고정된 위치에서 다양한 표적 충돌각이 주어졌을 때의 요격 성능을 확인하였다. $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 100, -200](\text{m})$ 에 위치한 정지 표적에 대해 표적 충돌각을 표 4.4와 같이 변화시켜가며 실험을 수행하였다. 그 결과 표 4.4에서 확인할 수 있듯이 요격 오차 및 표적 충돌각 오차가 모두 허용 범위 이내로 요격에 성공하였음을 알 수 있다. 관성 좌표계와 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적은 그림 4.16과 같다. 또한, 미사일의 탄두가 요격시 최고의 폭발 성능을 내기 위해서는 충돌 시의 미사일 받음각이 $\pm 5^\circ$

안에 존재해야 한다는 조건이 있다. 제안된 기법은 그림 4.17에서 볼 수 있듯이 요격시 미사일 받음각을 항상 작게 유지해 줌으로써 이 조건을 만족하고 있다는 것도 확인하였다.

표 4.1: $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [8000, 0, -100](\text{m})$ 정지 표적에 대한 요격 오차 및 표적 충돌각 오차

	요격오차(m)	$\psi_e(t_f)(\text{deg})$	$\theta_e(t_f)(\text{deg})$
Case 1	0.76	0	-0.16
Case 2	1.31	0	0.07
Case 3	0.68	0.24	-0.09

표 4.2: $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 100, -200](\text{m})$ 정지 표적에 대한 요격 오차 및 표적 충돌각 오차

	요격오차(m)	$\psi_e(t_f)(\text{deg})$	$\theta_e(t_f)(\text{deg})$
Case 1	0.14	0.01	0.14
Case 2	0.95	-0.01	-0.03
Case 3	5.56	0.46	-0.81

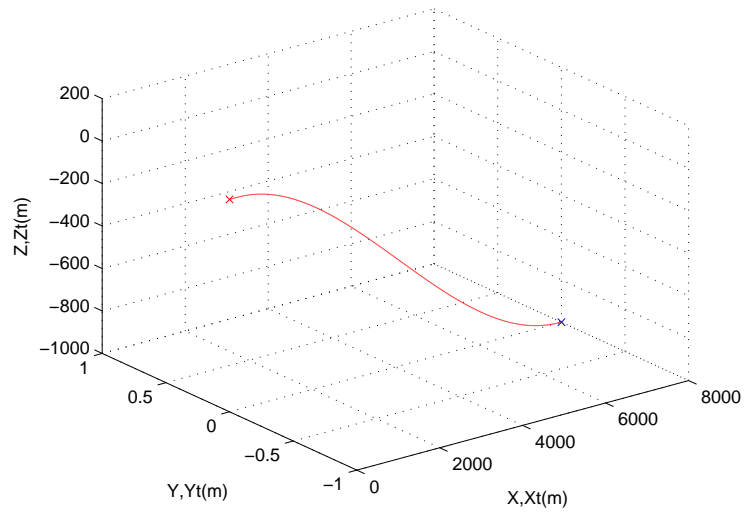
표 4.3: $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [6000, 100, -200](\text{m})$ 에서 등속 운동하는 표적에 대한 요격 오차 및 표적 충돌각 오차

	요격오차(m)	$\psi_e(t_f)(\text{deg})$	$\theta_e(t_f)(\text{deg})$
Case 1	0.23	-0.21	0.03
Case 2	0.61	0.11	-0.13
Case 3	0.43	-0.07	0.41

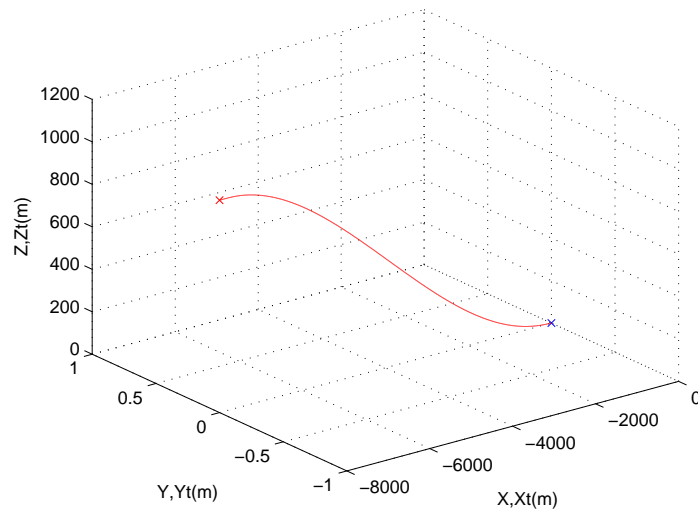
표 4.4: $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 100, -200](\text{m})$ 정지 표적에 대한 다양한 추적 시나리오

ψ^* θ^*	0° 0°	0° -10°	0° -20°	0° -35°	8° -20°
요격오차(m)	0.81	0.50	0.52	1.23	0.92
$\psi_e(t_f)(\text{deg})$	0.33	-0.08	-0.05	-0.01	0.08
$\theta_e(t_f)(\text{deg})$	-0.15	0.02	-0.36	-0.30	0.32
$\alpha(t_f)(\text{deg})$	0.45	0.68	-0.46	-2.10	0.05

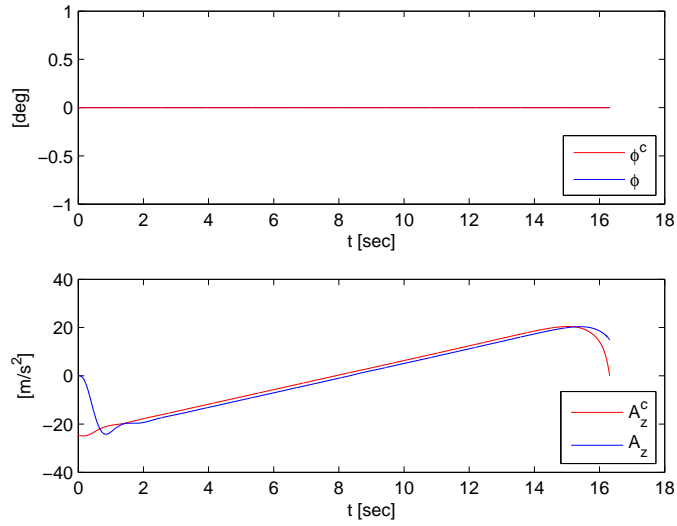
ψ^* θ^*	15° -20°	22° -20°	-10° -20°	-14° -20°	-20° -20°
요격오차(m)	0.80	1.28	0.33	1.03	0.88
$\psi_e(t_f)(\text{deg})$	-0.23	0.38	0.27	-0.19	2.16
$\theta_e(t_f)(\text{deg})$	0.33	0.88	-0.41	0.24	0.38
$\alpha(t_f)(\text{deg})$	1.03	1.39	-1.11	-1.26	-1.82



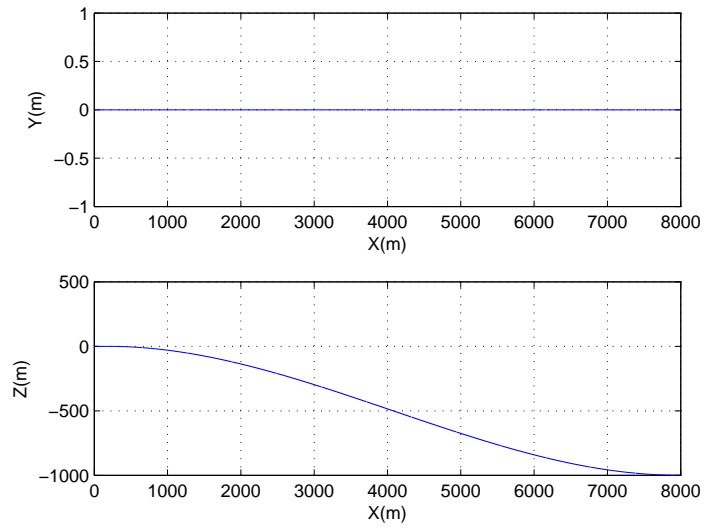
(a) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적



(b) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

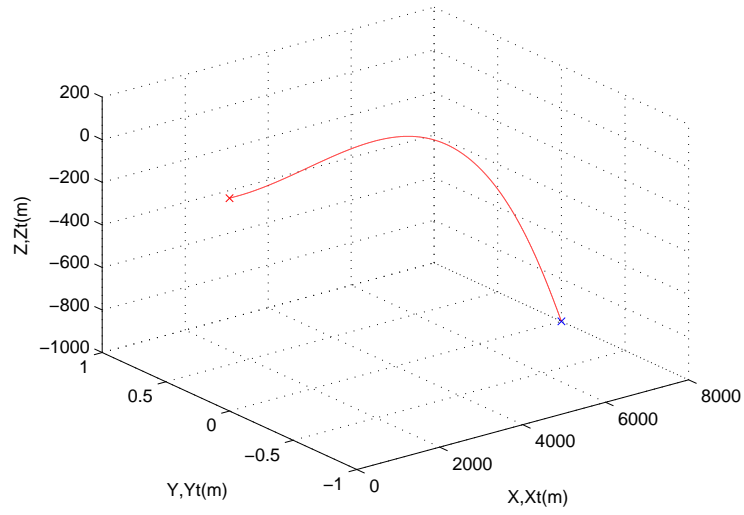


(c) 롤 각 및 피치 가속도

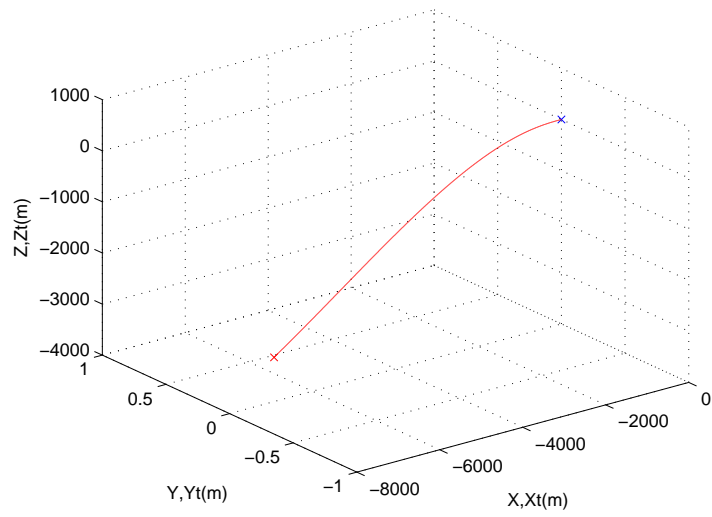


(d) 2D로 표현한 미사일 궤적

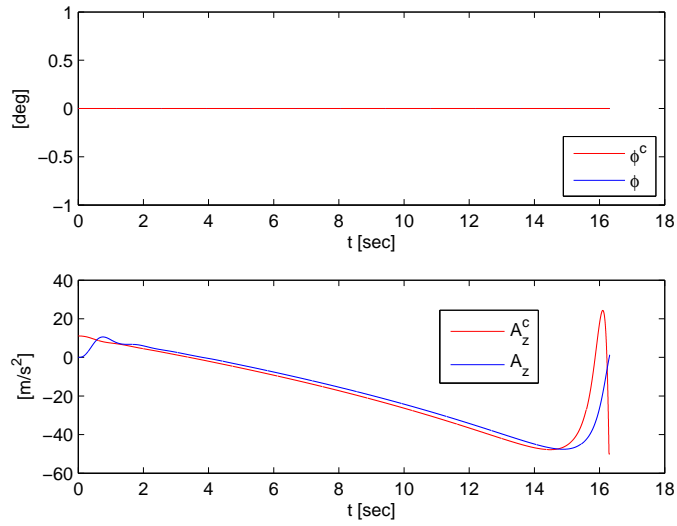
그림 4.7: $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [8000, 0, -100](m)$, $(\psi^* = 0^\circ, \theta^* = 0^\circ)$ 정지 표적에 대한 모의 실험 결과



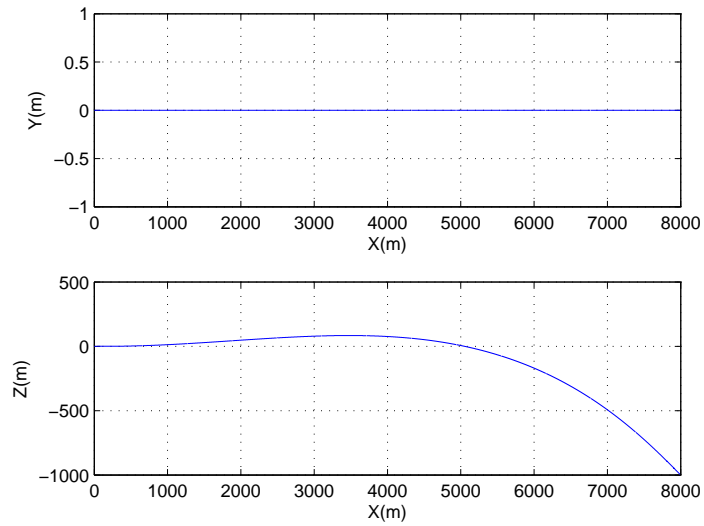
(a) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적



(b) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

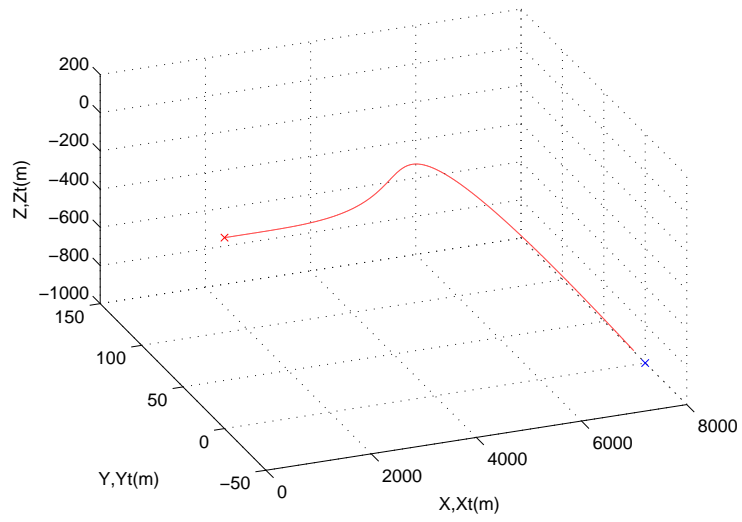


(c) 롤 각 및 피치 가속도

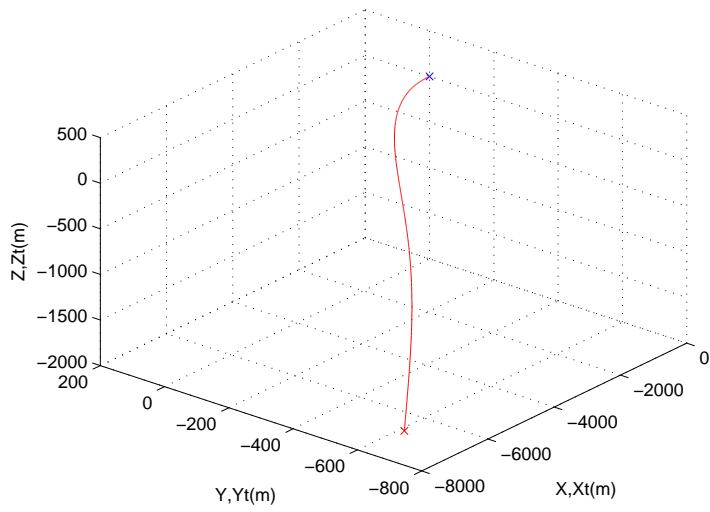


(d) 2D로 표현한 미사일 궤적

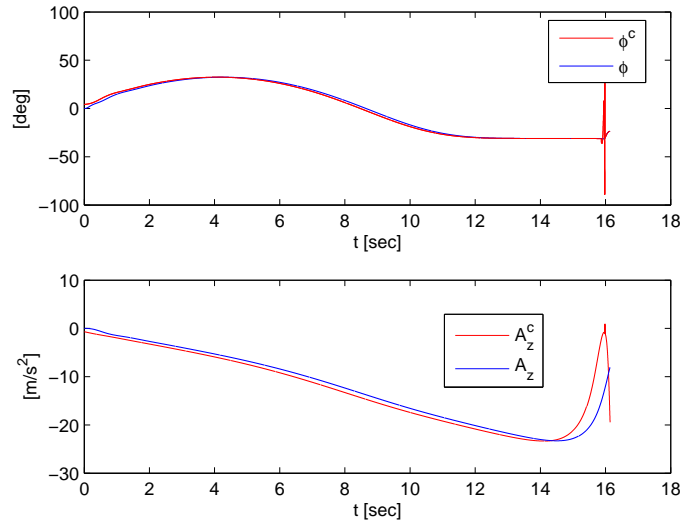
그림 4.8: $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [8000, 0, -100](m)$, $(\psi^* = 0^\circ, \theta^* = -30^\circ)$ 정지 표적에 대한 모의 실험 결과



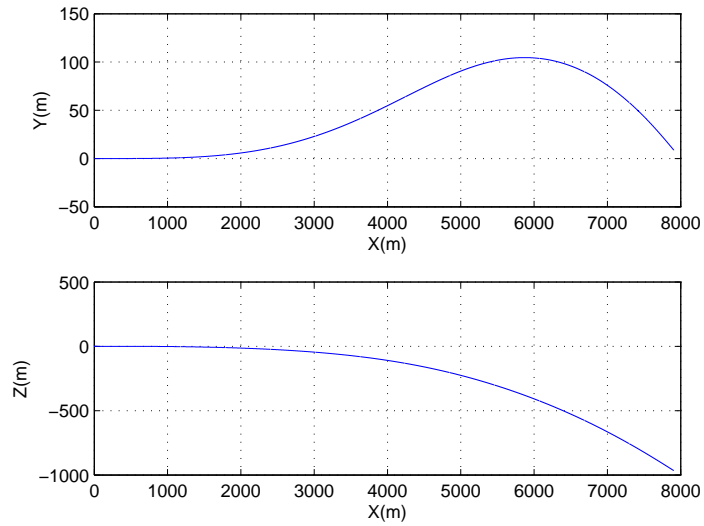
(a) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적



(b) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

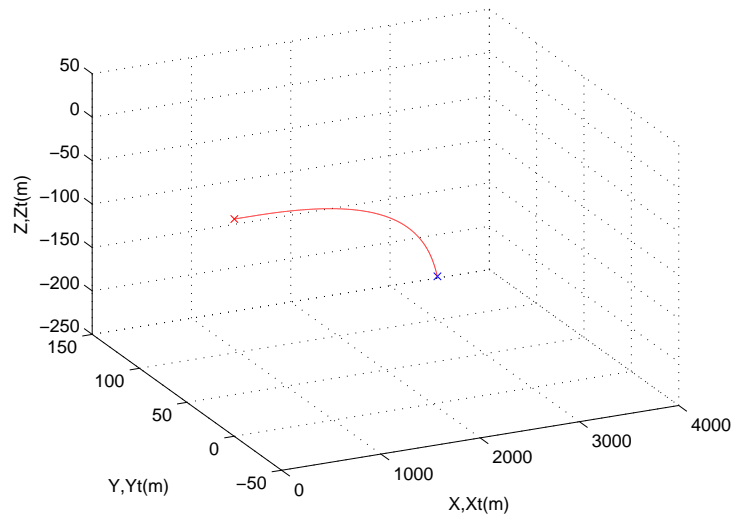


(c) 롤 각 및 피치 가속도

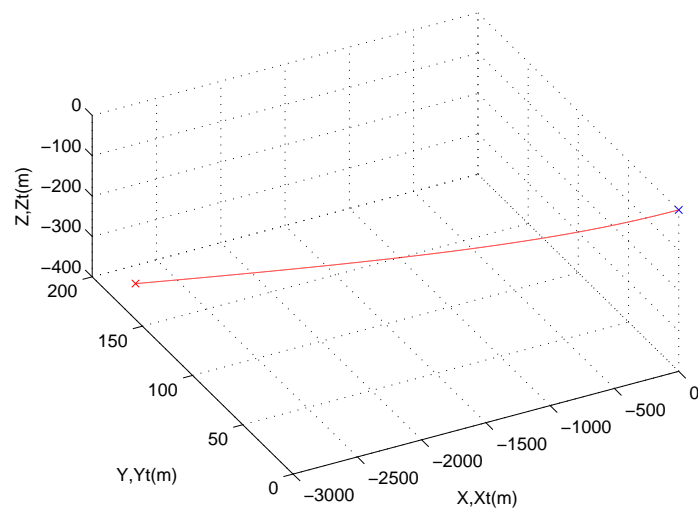


(d) 2D로 표현한 미사일 궤적

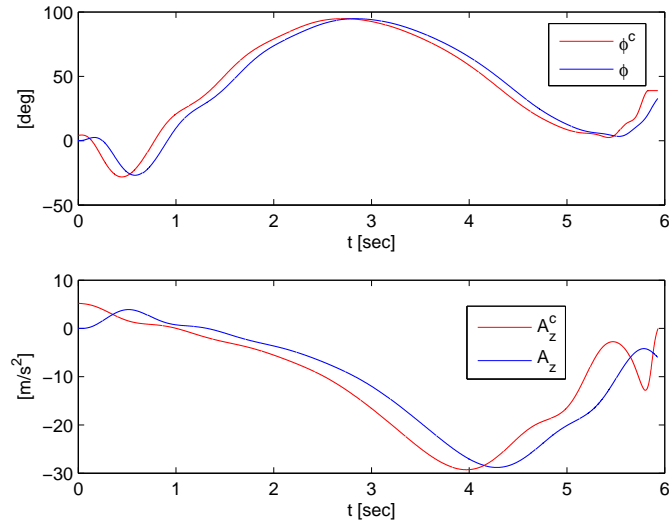
그림 4.9: $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [8000, 0, -100](m)$, $(\psi^* = 5^\circ, \theta^* = -20^\circ)$ 정지 표적에 대한 모의 실험 결과



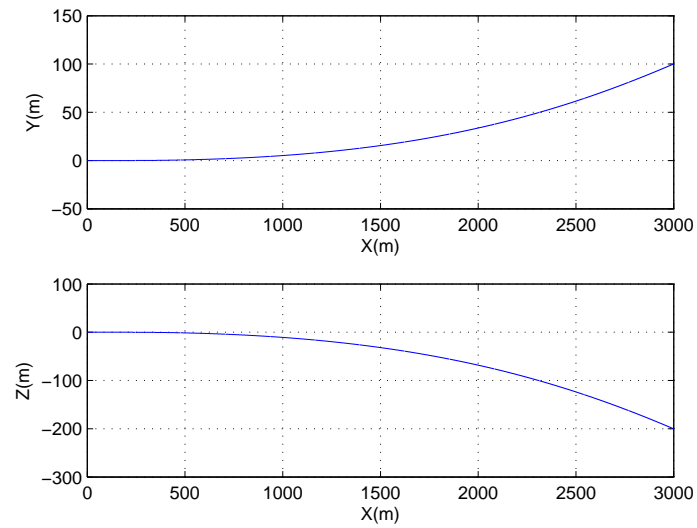
(a) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적



(b) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

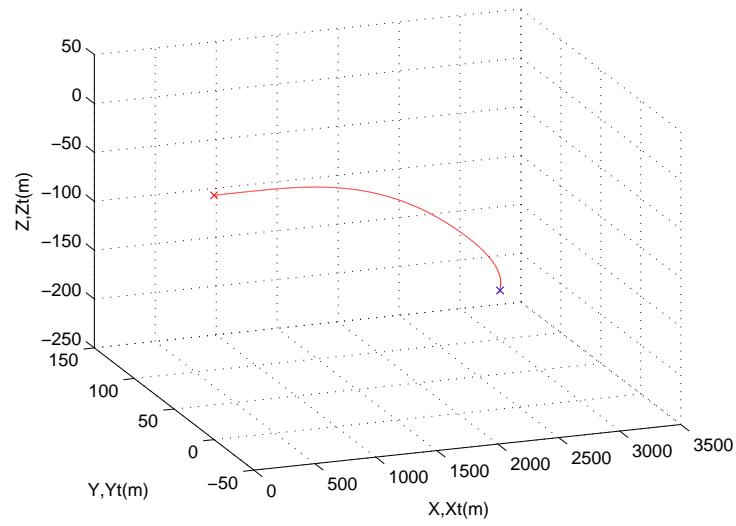


(c) 롤 각 및 피치 가속도

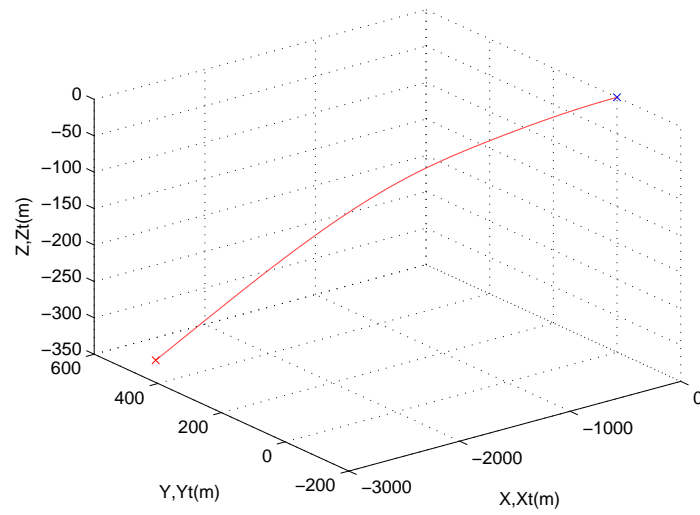


(d) 2D로 표현한 미사일 궤적

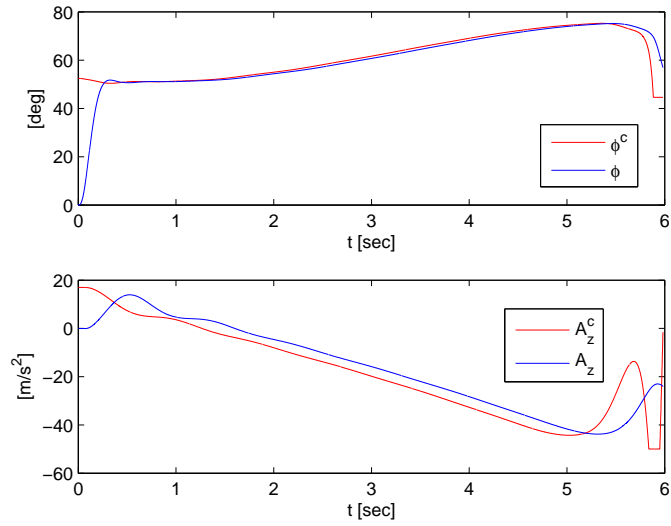
그림 4.10: $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 100, -200](m)$, $(\psi^* = -5^\circ, \theta^* = -10^\circ)$ 정지 표적에 대한 모의 실험 결과



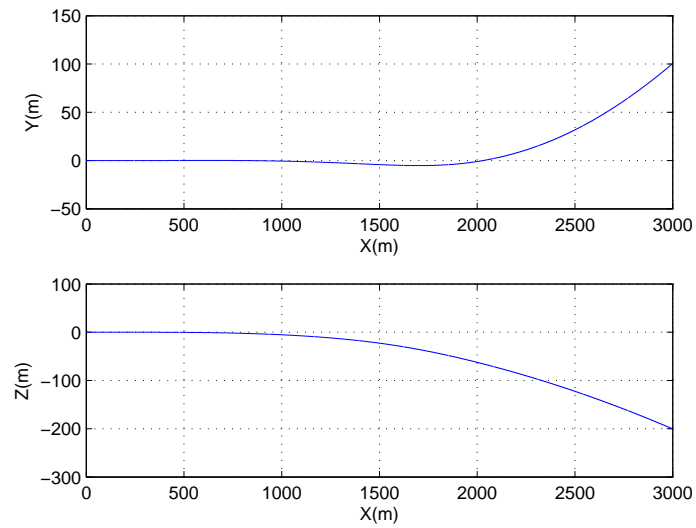
(a) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적



(b) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

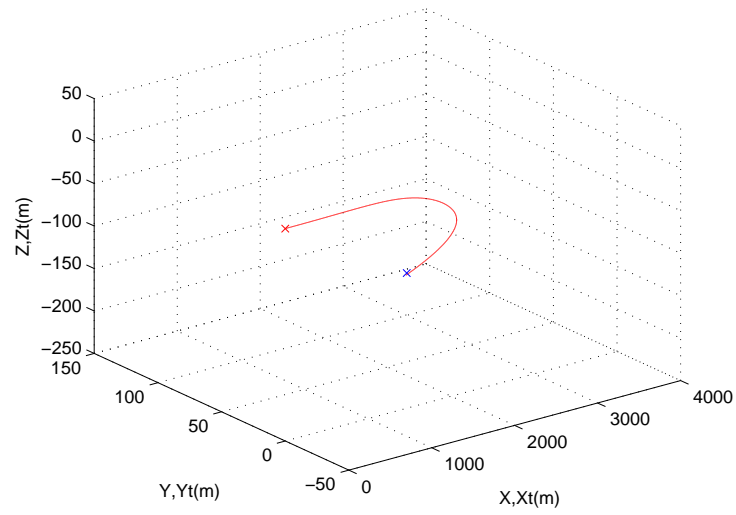


(c) 롤 각 및 피치 가속도

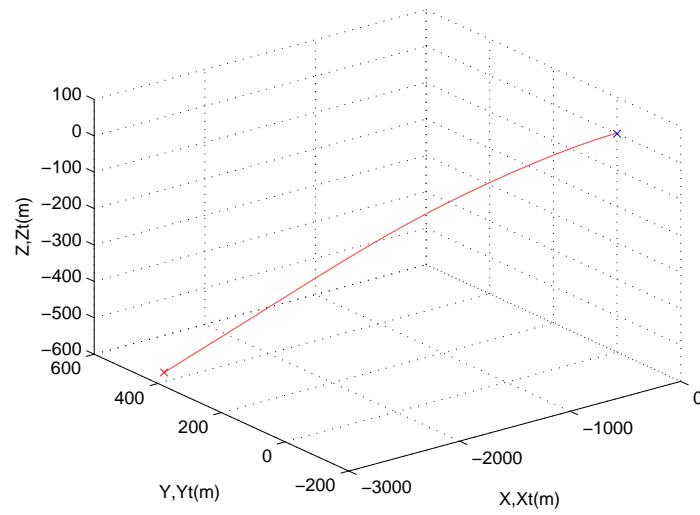


(d) 2D로 표현한 미사일 궤적

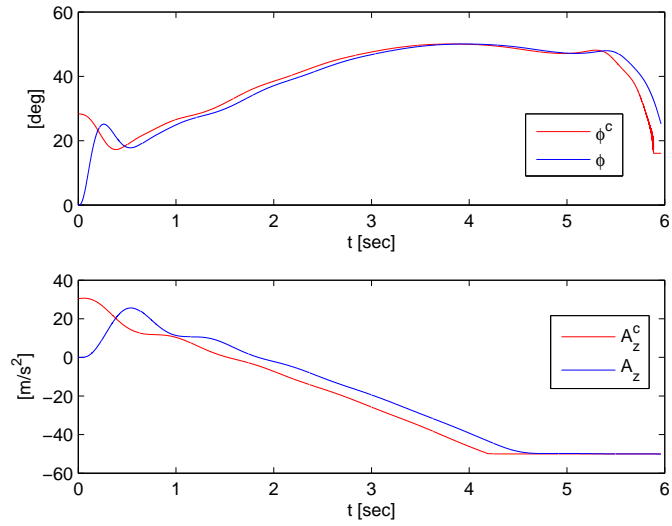
그림 4.11: $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 100, -200](m)$, $(\psi^* = -10^\circ, \theta^* = -10^\circ)$
정지 표적에 대한 모의 실험 결과



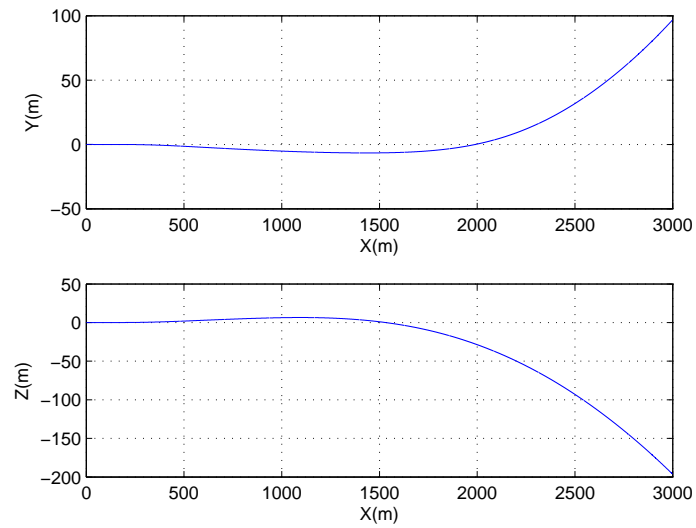
(a) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적



(b) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

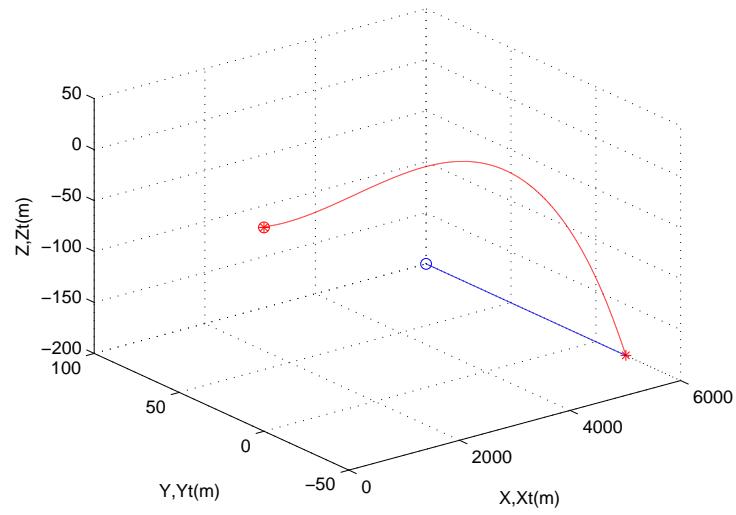


(c) 롤 각 및 피치 가속도

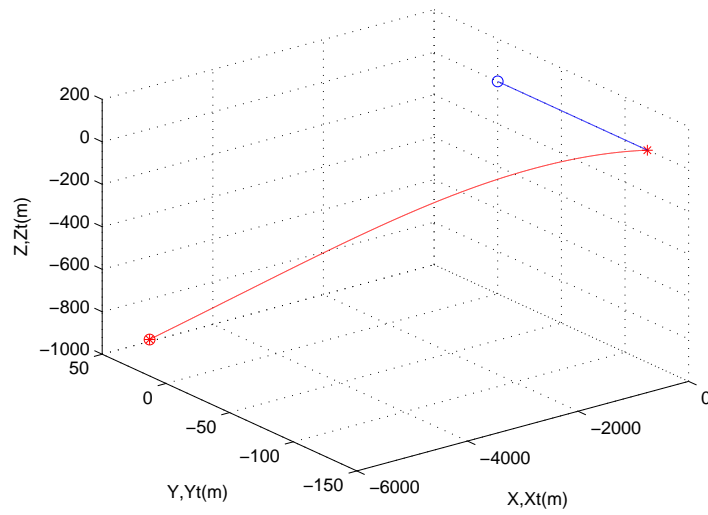


(d) 2D로 표현한 미사일 궤적

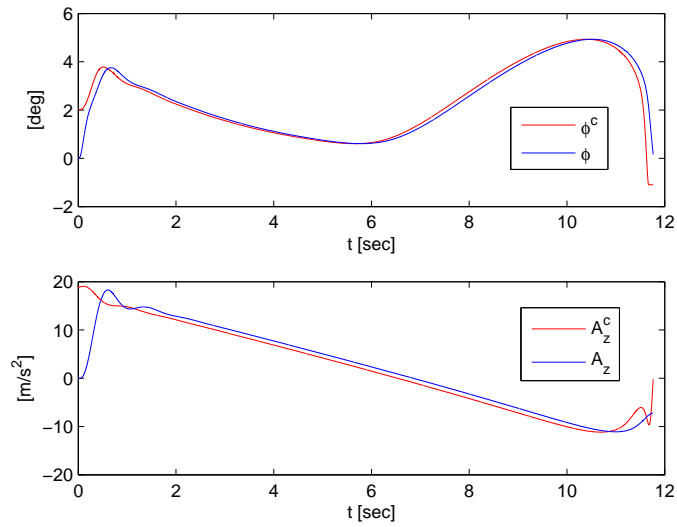
그림 4.12: $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 100, -200](m)$, $(\psi^* = -10^\circ, \theta^* = -15^\circ)$
정지 표적에 대한 모의 실험 결과



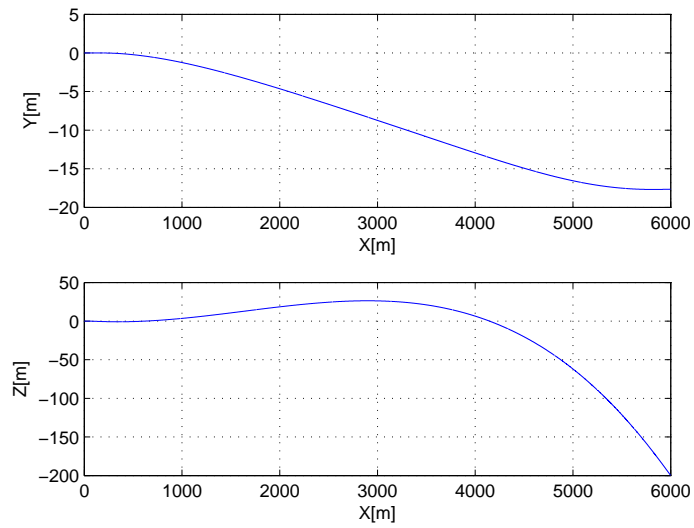
(a) 관성 좌표계에서의 미사일과 표적의 궤적



(b) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일과 표적의 궤적

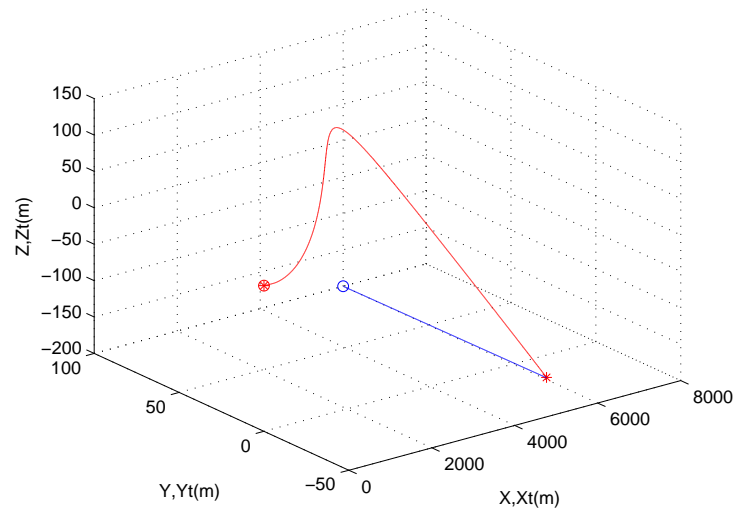


(c) 롤 각 및 피치 가속도

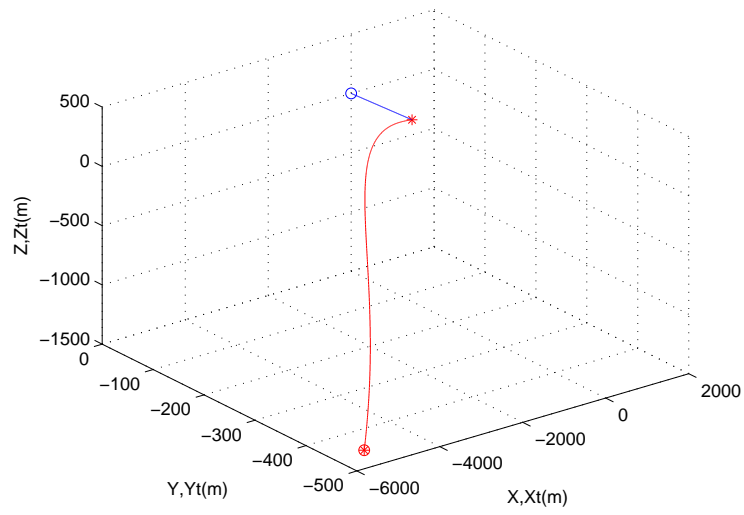


(d) 2D로 표현한 미사일 궤적

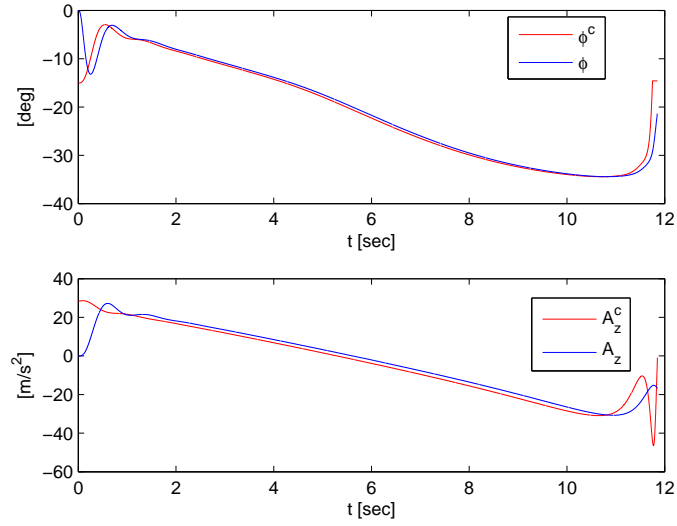
그림 4.13: $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [6000, 100, -200](m)$, $[V_{Tx}, V_{Ty}, V_{Tz}] = [0, -10, 0]$ (m/s), $(\psi^* = 0^\circ, \theta^* = -10^\circ)$ 에 대한 모의 실험 결과



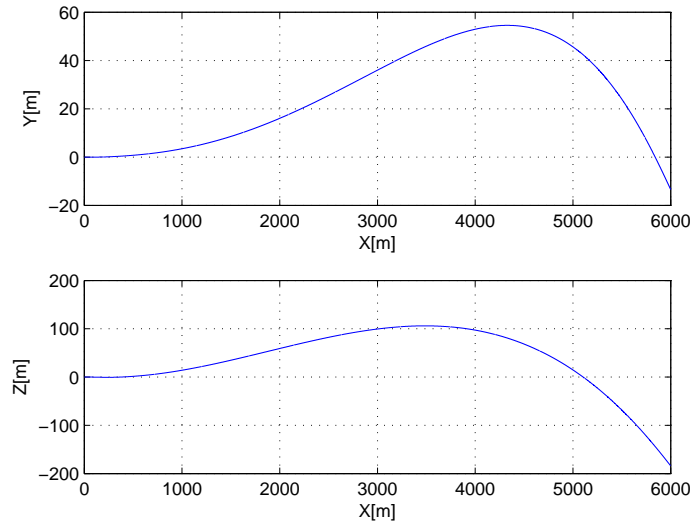
(a) 관성 좌표계에서의 미사일과 표적의 궤적



(b) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일과 표적의 궤적

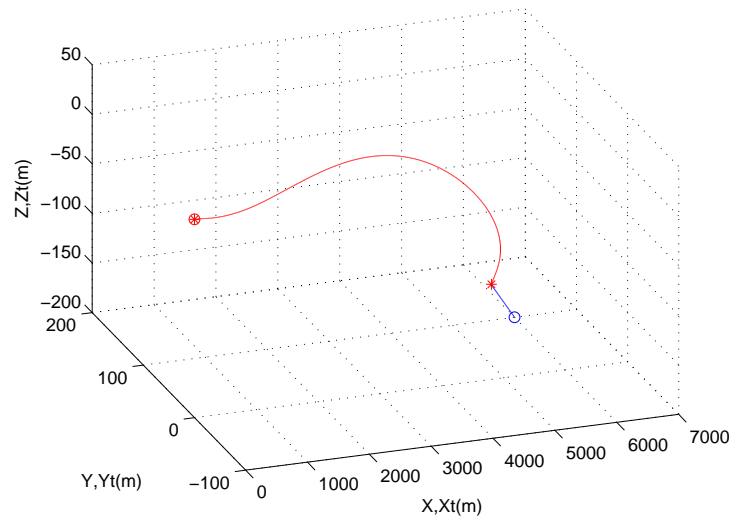


(c) 롤 각 및 피치 가속도

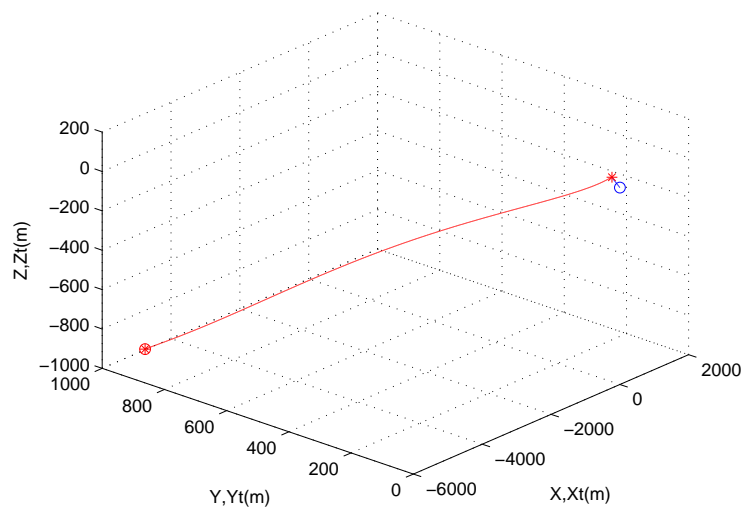


(d) 2D로 표현한 미사일 궤적

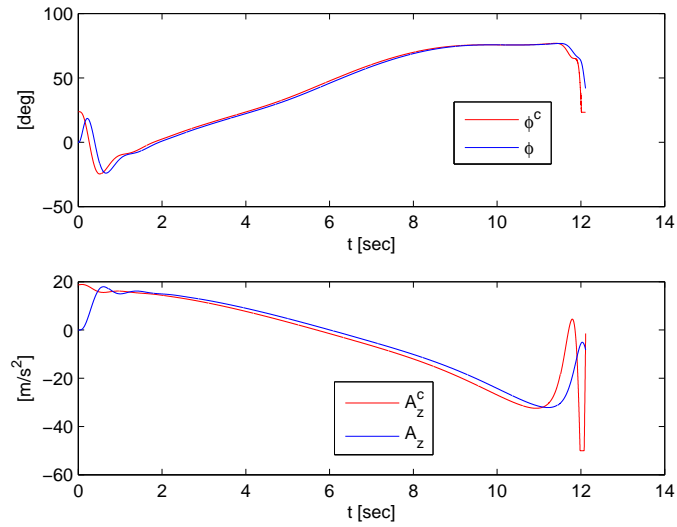
그림 4.14: $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [6000, 100, -200](m)$, $[V_{Tx}, V_{Ty}, V_{Tz}] = [5, -10, 0]$ (m/s), $(\psi^* = 5^\circ, \theta^* = -15^\circ)$ 에 대한 모의 실험 결과



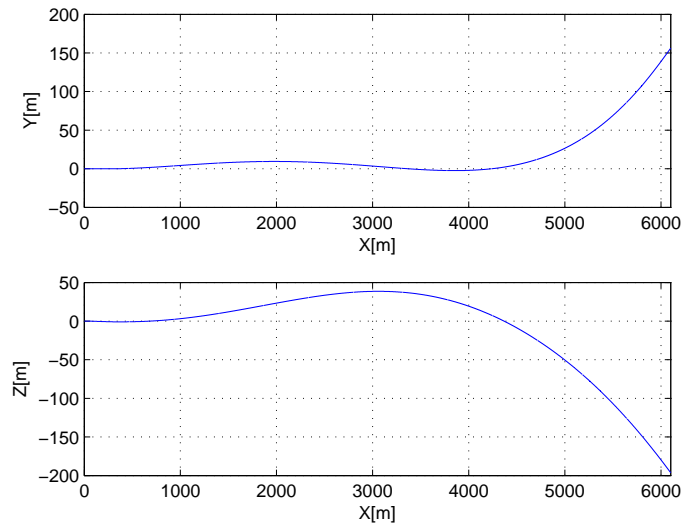
(a) 관성 좌표계에서의 미사일과 표적의 궤적



(b) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일과 표적의 궤적

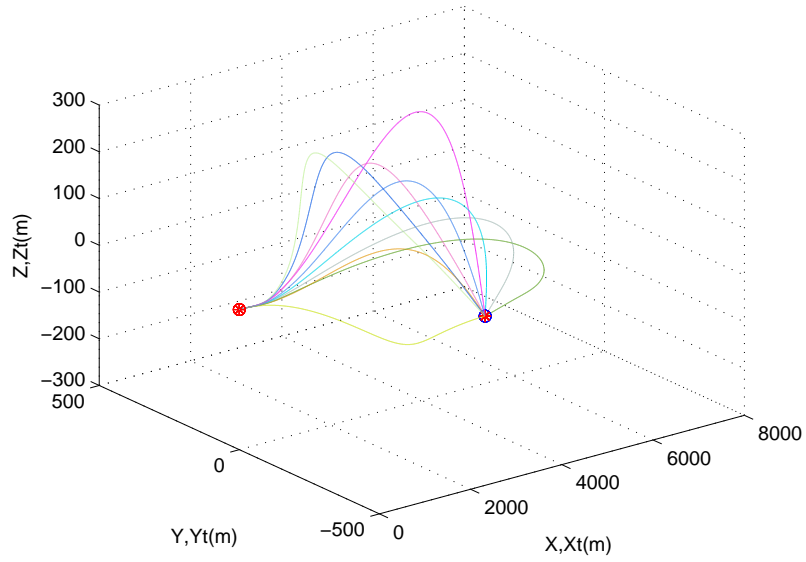


(c) 롤 각 및 피치 가속도

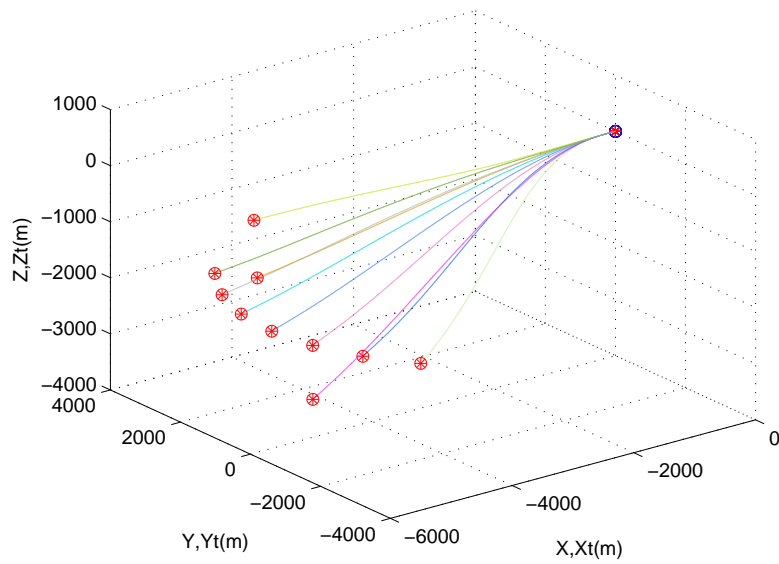


(d) 2D로 표현한 미사일 궤적

그림 4.15: $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [6000, 100, -200](\text{m})$, $[V_{Tx}, V_{Ty}, V_{Tz}] = [10, 5, 0]$ (m/s), $(\psi^* = -10^\circ, \theta^* = -10^\circ)$ 에 대한 모의 실험 결과



(a) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적



(b) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

그림 4.16: 다양한 표적 충돌각에 대한 모의 실험 결과

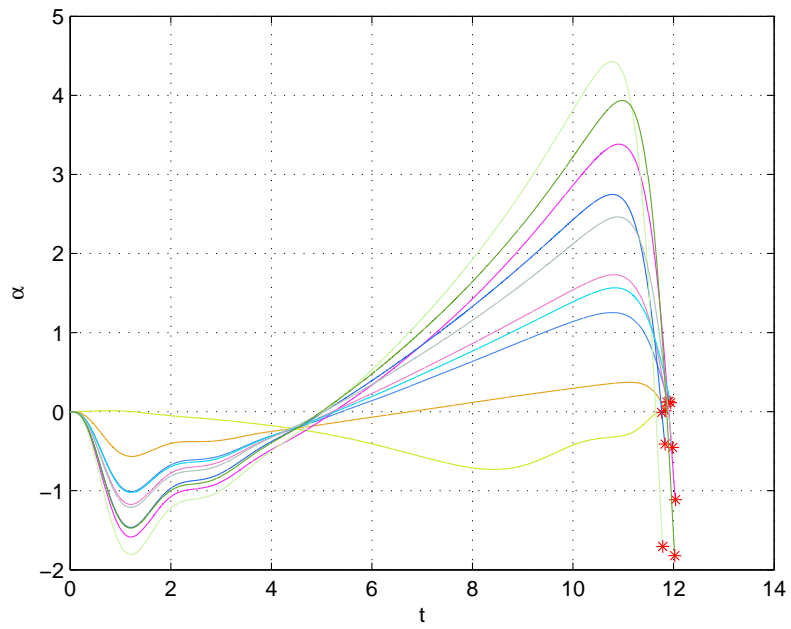


그림 4.17: 다양한 표적 충돌각에 대한 미사일의 받음각

4.4 소결론

표 4.1-4.4, 그림 4.7 - 4.17의 모의 실험 결과를 통해 정지 표적 및 등속 운동하는 표적에 대해 요격 오차과 표적 충돌각 오차 모두 매우 작은 값을 가지며 요격에 성공함을 확인할 수 있다. 또한, 다양한 추적 시나리오에 대해서 안정적으로 동작함을 보여 그 실용성을 검증하였다. 최적 유도 기법의 특성상 요격 시점에서 가속도 명령을 작게 하려는 특성이 있어, 요격 시 미사일의 받음각이 $\pm 2^\circ$ 이내로 유지되어 탄두의 효율성을 극대화 시킬 수 있다는 장점이 있다.

제안된 최적 유도 법칙은 미사일과 표적 사이의 3차원 추적 기하학을 모두 고려하여 BTT 미사일에서도 그 성능이 보장된다. 표적 충돌각 오차를 성능 지표(performance index)에 포함시켜 요격 오차와 더불어 최소화하는 방식으로 설계되었으며, 자동조종장치 동역학까지 모두 고려한 결과이다. 구해진 유도 법칙의 해는 앞서 설명한 바와 같이 매우 복잡하고 방대한 양의 수식으로 표현된다. 하지만 잔여 비행 시간(time-to-go)의 함수를 계수로 가지는 시변 상태 궤환 형태(state-feedback with time-varying gain)의 꼴로 정리가 되기 때문에 미리 제작된 지시표를 통해 실시간 구현이 가능하다.

앞으로 표적 충돌각의 크기, 잔여 비행 시간, 자동조종장치 대역폭 등의 변수가 주어졌을 때, 이를 수학적으로 분석해 요격 가능성 여부를 판별할 수 있도록 하는 추가 연구가 필요하다. 그러나 본 학위 논문에서는 최초로 3차원 추적 기하학 및 자동조종장치 동역학을 모두 고려하여 등속 운동하는 표적의 충돌각을 맞출 수 있는 최적 유도 기법의 닫힌 형태의 해(closed-form solution)을 유도하였다는 데에 의의를 두고 이와 관련된 연구는 이후 연구 과제로 진행하도록 한다.

제 5 장 결 론

본 ‘표적 충돌각 및 구동기 동역학을 고려한 BTT 미사일의 유도 조종 시스템 설계’ 논문의 연구 결과를 요약하면 아래와 같다.

먼저, 상대적으로 느린 구동기 동역학이 존재할 경우에도 이를 잘 보상해줄 수 있는 새로운 BTT 미사일용 자동조종 제어기의 설계 기법을 제안하였다. 기존 기법은 BTT 미사일 모델을 여러 가정을 통해 근사하거나 혹은 선형화 하여 자동조종 제어기를 설계한 결과가 대부분이었다. 하지만 제안된 기법은 유사 특이 섭동 기법을 바탕으로 하여 BTT 미사일의 비최소위상 특성을 포함한 모든 비선형성을 고려한 결과이다. 제안된 기법을 사용할 경우 비행 조건에 관계없이 입출력 동특성이 항상 2차 선형 시스템의 형태로 근사된다. 이를 통해 자동조종장치 동역학을 선형 시스템의 형태로 상태 방정식에 추가할 수 있으므로, 유도 법칙 설계가 유용해진다는 장점이 있다. 구동기 동역학이 느릴 경우 기존 기법을 사용하면 시스템이 불안정해지는 문제점을 대역폭 조절을 통해 해결하였으며, 수학적 분석과 안정성 증명을 통해 이론적인 검증을 완료하였다. ILAAT 미사일의 실제 공역학 자료를 바탕으로 한 모의 실험으로 실제 성능에 대해 검증하였다.

두번째로, BTT 미사일의 표적 충돌각을 고려한 최적 유도 법칙을 설계하였다. 기존 연구들은 유도 법칙 설계 문제에 있어, 자동조종장치 동역학을 무시하거나 1차로 근사한 경우가 대부분이었지만 기존의 자동조종 제어기를 사용할 경우 1차로 잘 근사되지 않는다는 문제점이 있었다. 본 연구에서는 구동기 동역학의 영향을 보상할 수 있는 새로운 자동조종 제어기를 설계하였고, 이는 앞서 설명한 바와 같이 입출력 동특성이 비행 환경에 무관하게 일정한 형태의 선형 시스템으로 표시 가능하게 되는 장점이 있다. 이를 이용하여 자동조종장치와 유도법칙 간의 커플링 문제를

해결할 수 있게 되었고, 이를 통해 자동조종장치 동역학을 고려한 최적 유도 법칙을 설계할 수 있게 되었다. 또한 기존의 표적 충돌각을 고려한 유도 법칙 연구 결과는 2D 평면상의 추적 기하학을 고려한 경우로 국한되지만, 본 연구에서는 3차원에서의 추적 기하학을 모두 고려하여 구성된 유도 법칙으로서 롤과 피치가속도 명령의 최적 해를 닫힌 형태(closed-form)으로 구하였다. 최적 유도 법칙 문제의 해는 수학적으로 매우 복잡한 형태를 갖지만, 잔여 비행 시간(time-to-go)의 함수를 계수로 가지는 시변 상태 궤환 형태(state-feedback with time-varying gain)의 꼴로 정리되며, 이를 바탕으로 지시표(look-up table) 형태의 제어 입력을 구성하면 실시간 구현이 가능하다. 기존 결과와 다르게 등속 운동하는 표적에 대한 동역학 식을 바탕으로 유도 되었으므로 등속 운동하는 표적, 혹은 느리게 기동하는 표적에 대해서도 그 요격 성능을 보장할 수 있다. 자동조종 제어기와 마찬가지로 ILAAT 미사일의 공역학 자료를 바탕으로 모의 실험을 진행하여 다양한 추적 시나리오에 대해서 그 성능을 검증하였다.

제 6 장 부 록

6.1 기호의 정의

(X_I, Y_I, Z_I)	관성 좌표계
(X_M, Y_M, Z_M)	미사일 동체 좌표계
i, j, k	X_{M-}, Y_{M-}, Z_{M-} -축의 단위 벡터
U, V, W	미사일 선속도의 X_{M-}, Y_{M-}, Z_{M-} -축 성분
p, q, r	미사일 각속도의 X_{M-}, Y_{M-}, Z_{M-} -축 성분
I_x, I_y, I_z	미사일 관성 모멘트의 X_{M-}, Y_{M-}, Z_{M-} -축 성분
I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}	관성 곱
m	미사일의 질량
S	미사일의 공역학적 기준 면적
d	미사일의 길이
l_b	미사일의 기수로부터 미사일 동체의 압력 중심까지의 거리
l_f	미사일의 기수로부터 제어 편각의 압력 중심까지의 거리
l_g	미사일의 기수로부터 미사일 동체의 질량 중심까지의 거리
V_M	미사일의 속력 ($\triangleq \sqrt{ U ^2 + V ^2 + W ^2}$)
V_S	음속
ρ	공기 밀도
M	마하 수
Q	동압 ($\triangleq \rho V_M ^2 / 2$)
g	중력 가속도

α_T	총 공격각 ($\triangleq \sin^{-1}(\sqrt{ V ^2 + W ^2}/V_M)$)
α	받음각 ($\alpha \triangleq \tan^{-1}(W/U)$)
β	옆미끄러짐각 ($\beta \triangleq \tan^{-1}(V/U)$)
ϕ, ϕ^c	실제 롤 각 및 롤 각 명령
A_z, A_z^c	실제 피치 가속도 및 피치 가속도 명령
$\delta_p, \delta_q, \delta_r$	롤, 피치, 요 제어 편각
$\delta_p^c, \delta_q^c, \delta_r^c$	롤, 피치, 요 제어 편각 명령
F_x, F_y, F_z	미사일에 작용하는 공역학적 힘의 X_M-, Y_M-, Z_M- 축 성분
M_x, M_y, M_z	미사일에 작용하는 공역학적 모멘트의 X_M-, Y_M-, Z_M- 축 성분
$D_i f$	함수 f 의 i -번째 변수에 대한 편미분
(X_T^*, Y_T^*, Z_T^*)	표적 충돌각 좌표계
(X_G, Y_G, Z_G)	유도 좌표계
$\bar{\phi}$	피치 평면각
ψ, ψ^*	요 방향 오일러 각 및 맞추고자 하는 표적 충돌각
θ, θ^*	피치 방향 오일러 각 및 맞추고자 하는 표적 충돌각
x_M, y_M, z_M	관성 좌표계에서의 미사일의 위치
x_T, y_T, z_T	관성 좌표계에서의 표적의 위치
V_{Tx}, V_{Ty}, V_{Tz}	관성 좌표계에서의 표적의 속도

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &\triangleq \lambda_m(Q_{11}) - 2\bar{\alpha}_c\epsilon_a\|P_{11}\| - \frac{2(1 - \bar{\alpha}_c\epsilon_a)\omega_n\kappa_3\kappa_4}{\rho_{\min}U_{\min}} \\
\bar{Q}_{12} &\triangleq -(1 - \bar{\alpha}_c\epsilon_a)\omega_n\kappa_2\kappa_4\sqrt{a_y^2 + 1} - \frac{1}{\omega_n} \frac{\sqrt{2}\rho_{\max}^2 U_{\max}^3}{h_{v2}h_{v1}} h_a \bar{N}_2 \bar{\alpha}_c\epsilon_a \|P_{11}\| \\
\bar{Q}_{13} &\triangleq -(1 - \bar{\alpha}_c\epsilon_a)\kappa_4 \frac{U_{\max}}{U_{\min}} - \frac{\sqrt{2}\rho_{\max} U_{\max}^2 \bar{\alpha}_c\epsilon_a \|P_{11}\| \bar{N}_1}{\omega_n U_{\min} h_{v2}} - \left(\frac{\kappa_3}{\rho_{\min}} h_{v2} + 1 \right) (1 - \bar{\alpha}_c\epsilon_a) \\
\bar{Q}_{14} &\triangleq -\frac{1}{\omega_n} \frac{\sqrt{2}\rho_{\max} U_{\max}^2}{h_{v2} U_{\min}} \bar{N}_2 \bar{\alpha}_c\epsilon_a \\
\bar{Q}_{15} &\triangleq -\frac{\rho_{\max} U_{\max}^2 S}{m} K_c \kappa_4 \|C_q\| - \|P_{11}\| \frac{\sqrt{2}\rho_{\max}^2 U_{\max}^3 S}{m\omega_n h_{v2}} \bar{N}_1 K_c \|C_q\| \\
&\quad - (\omega_n(K_{z12}\gamma_{\dot{r}} + K_{z18}\gamma_{\dot{v}} + K_{z42}) + K_{z43} + 2\omega_n K_{z44} \bar{K}) \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
\bar{Q}_{16} &\triangleq -\frac{\sqrt{2}\rho_{\max}^2 U_{\max}^3 S}{m\omega_n h_{v2}} \|P_{11}\| \bar{N}_2 L_c \|C_r\| \\
\bar{Q}_{22} &\triangleq 2(1 - \bar{\alpha}_c\epsilon_a)\lambda_m(Q_v) - 2\|P_v\| \frac{\bar{\alpha}_c\epsilon_a \rho_{\max} U_{\max}^2 h_a}{\omega_n h_{v1}} \\
\bar{Q}_{23} &\triangleq -h_{v2}(1 - \bar{\alpha}_c\epsilon_a)\kappa_2 U_{\min} \sqrt{a_y^2 + 1} - \frac{1}{\omega_n} \frac{\sqrt{2}\rho_{\max}^2 U_{\max}^3}{h_{v2} h_{v1}} \bar{N}_2 \bar{\alpha}_c\epsilon_a h_a \\
\bar{Q}_{24} &\triangleq -\frac{\bar{\alpha}_c\epsilon_a U_{\max} \|P_v\|}{\omega_n U_{\min}} - (1 - \bar{\alpha}_c\epsilon_a) h_{v1} U_{\min} \sqrt{a_y^2 + 1} - \frac{\rho_{\max} U_{\max}^2 h_a}{\omega_n} U_{\min} (1 - \bar{\alpha}_c\epsilon_a) \\
\bar{Q}_{25} &\triangleq -\left(K_{z1} + K_{z2} \frac{\bar{\alpha}_c\epsilon_a}{\omega_n} + \omega_n K_{z3} + K_{z4} + K_{z5}\omega_n + \bar{K}(K_{z37} + K_{z36}\omega_n) \right) \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
\bar{Q}_{26} &\triangleq -(K_{y1} + K_{y2}\omega_n + K_{y3} \frac{\bar{\alpha}_c\epsilon_a}{\omega_n} + K_{y4} + K_{y5}\omega_n) \|P_r A_r^{-1} B_r\| - \|P_v\| \frac{\rho_{\max} U_{\max}^2 S}{m\omega_n} L_c \|C_r\| \\
\bar{Q}_{33} &\triangleq \frac{2}{\omega_n} \left[(1 - \bar{\alpha}_c\epsilon_a) h_{v2} U_{\min} - \frac{\rho_{\max} U_{\max}^2}{h_{v2} U_{\min}} \bar{N}_1 \bar{\alpha}_c\epsilon_a \right] \\
\bar{Q}_{34} &\triangleq -\frac{1}{\omega_n} \frac{\sqrt{2}\rho_{\max} U_{\max}}{h_{v2}} \bar{N}_2 \bar{\alpha}_c\epsilon_a \\
\bar{Q}_{35} &\triangleq -\frac{1}{\omega_n} \left[\frac{\rho_{\max} U_{\max}^2 U_{\min} S}{m} \left(h_{v2} + \frac{\sqrt{2}\rho_{\max} U_{\max}}{h_{v2} U_{\min}} \bar{N}_1 \right) K_c \|C_q\| \right. \\
&\quad \left. + (K_{z19}(1 - \bar{\alpha}_c\epsilon_a) \bar{\omega}_B \gamma_{\dot{v}} + K_{z20} \bar{\alpha}_c\epsilon_a + K_{z21} + \bar{\alpha}_c\epsilon_a \bar{\omega}_B (K_{z22} + K_{z40} \bar{K})) \|P_q A_q^{-1} B_q\| \right] \\
\bar{Q}_{36} &\triangleq -\frac{1}{\omega_n} \left[\frac{\sqrt{2}\rho_{\max}^2 U_{\max}^3 S}{mh_{v2}} \bar{N}_2 L_c \|C_r\| + (K_{y6} \bar{\alpha}_c\epsilon_a + \bar{\alpha}_c\epsilon_a \bar{\omega}_B K_{y7} + K_{y8}) \|P_r A_r^{-1} B_r\| \right] \\
\bar{Q}_{44} &\triangleq \frac{1}{\omega_n} \left[(1 - \bar{\alpha}_c\epsilon_a) 2h_{v1} U_{\min} - \frac{2I_{zx} \rho_{\max} U_{\max} \alpha_M}{I_z h_{v2}} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{45} &\triangleq -\frac{1}{\omega_n} (K_{z6}\bar{\alpha}_c\epsilon_a + \bar{\alpha}_c\epsilon_a\bar{\omega}_B(K_{z7} + K_{z38}\bar{K}))\|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
\bar{Q}_{46} &\triangleq -\frac{1}{\omega_n} \left[\frac{h_{v1}\rho_{\max} U_{\max}^2 S}{m} U_{\min} L_c \|C_r\| + (K_{y16}\bar{\alpha}_c\epsilon_a + K_{y17} + K_{y18}\bar{\alpha}_c\epsilon_a\bar{\omega}_B \right. \\
&\quad \left. + K_{y13}\bar{\omega}_B\gamma_{\dot{U}}) \|P_r A_r^{-1} B_r\| \right] \\
\bar{Q}_{55} &\triangleq \frac{1}{\omega_n} \left[\frac{\lambda_m(Q_q)}{\epsilon_a} - 2(K_{z23} + K_{z24}\bar{\omega}_B + K_{z41}\bar{K}\bar{\omega}_B)\|P_q A_q^{-1} B_q\| \right] \\
\bar{Q}_{56} &\triangleq -\frac{1}{\omega_n} \left\{ (K_{z13} + K_{z14}\bar{\omega}_B + K_{z39}\bar{K}\bar{\omega}_B) \|P_q A_q^{-1} B_q\| + (K_{y19} + K_{y20}\bar{\omega}_B) \|P_r A_r^{-1} B_r\| \right\} \\
\bar{Q}_{66} &\triangleq \frac{1}{\omega_n} \left[\frac{\lambda_m(Q_r)}{\epsilon_a} - 2(K_{y10} + K_{y11}\bar{\omega}_B)\|P_r A_r^{-1} B_r\| \right] \\
\bar{\omega}_B &\triangleq \frac{\lambda_m(Q_{11})\rho_{\min} U_{\min}}{2\kappa_3\kappa_4} \\
\kappa_1 &\triangleq \frac{\alpha_M}{\sqrt{2}J_{\min}} \\
\kappa_2 &\triangleq \frac{\alpha_M + \beta_{M1}/2 + \beta_{M2}/2}{J_{\min}} \\
\kappa_3 &\triangleq \frac{h_{v2}}{J_{\min}} \\
\kappa_4 &\triangleq \|P_{11}\|\lambda_z\sqrt{1+a_z^2} \\
a_{11} &\triangleq \frac{2\kappa_3\kappa_4}{\rho_{\min} U_{\min}} \\
a_{12} &\triangleq \kappa_2\kappa_4\sqrt{a_y^2 + 1} \\
a_{33} &\triangleq 2h_{v2}U_{\min} \\
a_{34} &\triangleq \sqrt{2}\rho_{\max}U_{\max}\bar{N}_2/h_{v2} \\
a_{44} &\triangleq 2h_{v1}U_{\min} \\
b_{11} &\triangleq 0 \\
b_{12} &\triangleq \frac{\sqrt{2}\rho_{\max}^2 U_{\max}^4}{h_{v2}h_{v1}} h_a \bar{N}_2 \bar{\alpha}_c \epsilon_a \\
b_{13} &\triangleq \frac{\sqrt{2}\rho_{\max} U_{\max}^2 \bar{\alpha}_c \epsilon_a \bar{N}_1}{h_{v2} U_{\min}} \|P_{11}\| \\
b_{14} &\triangleq \frac{\sqrt{2}\rho_{\max} U_{\max}^2}{h_{v2} U_{\min}} \bar{N}_2 \bar{\alpha}_c \epsilon_a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b_{15} &\triangleq \|P_{11}\| \frac{\sqrt{2}\rho_{\max}^2 U_{\max}^3 S}{mh_{v2}} \bar{N}_1 K_c \|C_q\| \\
b_{16} &\triangleq \frac{\sqrt{2}\rho_{\max}^2 U_{\max}^3 S}{mh_{v2}} \|P_{11}\| \bar{N}_2 L_c \|C_r\| \\
b_{22} &\triangleq 2\|P_v\| \frac{\bar{\alpha}_c \epsilon_a \rho_{\max} U_{\max}^2 h_a}{h_{v1}} \\
b_{23} &\triangleq \frac{\sqrt{2}\rho_{\max}^2 U_{\max}^3}{h_{v2} h_{v1}} \bar{N}_2 \bar{\alpha}_c \epsilon_a h_a \\
b_{24} &\triangleq \frac{\bar{\alpha}_c \epsilon_a U_{\max}}{U_{\min}} \|P_v\| + \rho_{\max} U_{\max}^2 h_a U_{\min} (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \\
b_{25} &\triangleq K_{z2} \bar{\alpha}_c \epsilon_a \\
b_{26} &\triangleq \|P_v\| \frac{\rho_{\max} U_{\max}^2 S}{m} L_c \|C_r\| + K_{y3} \bar{\alpha}_c \epsilon_a \\
b_{33} &\triangleq 2 \frac{\rho_{\max} U_{\max}^2}{h_{v2} U_{\min}} \bar{N}_1 \\
b_{34} &\triangleq a_{34} \\
b_{35} &\triangleq \frac{\rho_{\max} U_{\max}^2 U_{\min} S}{m} (h_{v2} + \frac{\sqrt{2}\rho_{\max} U_{\max}}{h_{v2} U_{\min}} \bar{N}_1) K_c \|C_q\| + (K_{z21} + K_{z19} \bar{\omega}_B \gamma_{\dot{U}}) \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
b_{36} &\triangleq \frac{1}{mh_{v2}} \sqrt{2}\rho_{\max}^2 U_{\max}^3 S \bar{N}_2 L_c \|C_r\| + K_{y8} \|P_r A_r^{-1} B_r\| \\
b_{44} &\triangleq 2 \frac{I_{zx} \rho_{\max} U_{\max} \alpha_M}{I_z h_{v2}} \\
b_{45} &\triangleq 0 \\
b_{46} &\triangleq \frac{h_{v1} \rho_{\max} U_{\max}^2 S}{m} U_{\min} L_c \|C_r\| + (K_{y17} + K_{y13} \bar{\omega}_B \gamma_{\dot{U}}) \|P_r A_r^{-1} B_r\| \\
b_{55} &\triangleq 2(K_{z23} + (K_{z24} + K_{z41} \bar{K}) \bar{\omega}_B) \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
b_{56} &\triangleq (K_{z13} + (K_{z14} + K_{z39} \bar{K}) \bar{\omega}_B) \|P_q A_q^{-1} B_q\| + (K_{y19} + K_{y20} \bar{\omega}_B) \|P_r A_r^{-1} B_r\| \\
b_{66} &\triangleq 2(K_{y10} + K_{y11} \bar{\omega}_B) \|P_r A_r^{-1} B_r\| \\
c_{13} &\triangleq (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \left(\kappa_4 \frac{U_{\max}}{U_{\min}} + \frac{h_{v2} \kappa_3}{\rho_{\min} U_{\min}} + 1 \right) \\
c_{15} &\triangleq \frac{\rho_{\max} U_{\max}^2 S}{m} K_c \kappa_4 + (\bar{\omega}_B (K_{z12} \gamma_{\dot{\rho}} + K_{z18} \gamma_{\dot{U}} + K_{z42} + 2K_{z44} \bar{K}) + K_{z43}) \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
c_{23} &\triangleq (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) h_{v2} U_{\min} \kappa_2 \sqrt{a_y^2 + 1}
\end{aligned}$$

$$c_{24} \triangleq (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) h_{v1} U_{\min} \sqrt{a_y^2 + 1}$$

$$c_{25} \triangleq (K_{z1} + K_{z4} + K_{z37} \bar{K} + \bar{\omega}_B (K_{z3} + K_{z5} + K_{z36} \bar{K})) \|P_q A_q^{-1} B_q\|$$

$$c_{26} \triangleq (K_{y1} + K_{y4} + \bar{\omega}_B (K_{y2} + K_{y5})) \|P_r A_r^{-1} B_r\|$$

$$c_{35} \triangleq ((K_{z22} + K_{z40} \bar{K}) \bar{\omega}_B + K_{z20} + K_{z19} \bar{\omega}_B \gamma_{\dot{J}}) \|P_q A_q^{-1} B_q\|$$

$$c_{36} \triangleq (K_{y7} \bar{\omega}_B + K_{y6}) \|P_r A_r^{-1} B_r\|$$

$$c_{45} \triangleq ((K_{z7} + K_{z38} \bar{K}) \bar{\omega}_B + K_{z6}) \|P_q A_q^{-1} B_q\|$$

$$c_{46} \triangleq (K_{y18} \bar{\omega}_B + K_{y16}) \|P_r A_r^{-1} B_r\|$$

$$C_1 \triangleq \begin{bmatrix} \lambda_m(Q_{11}) - 2\bar{\alpha}_c \epsilon_a \|P_{11}\| & 0 \\ 0 & (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \lambda_m(Q_v) \end{bmatrix}$$

$$C_2 \triangleq (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$C_3 \triangleq \frac{1}{\sqrt{b_{22}}} \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_1 \triangleq \begin{bmatrix} c_{13} & 0 & c_{15} & 0 \\ c_{23} & c_{24} & c_{25} & c_{26} \end{bmatrix}$$

$$\bar{A}_2 \triangleq \begin{bmatrix} b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}_1 \triangleq (M_\rho + M_{e_\xi} M_1) \gamma_{\dot{\rho}} + (M_U + M_{e_\xi} M_2) \gamma_{\dot{U}} + M_{\rho\rho} \gamma_{\dot{\rho}} + M_{UU} \gamma_{\dot{U}} + M_{e_\xi} M_3$$

$$\bar{b}_2 \triangleq \bar{\mu}_1 \left\{ \bar{\mu}_1 (M_{p^2 w} \gamma_p^2 + M_{v_z^2} \gamma_z^2) + M_{pw} \gamma_p + M_{\zeta_p w} \gamma_{\zeta_p} + M_{v_z} \gamma_z \right\}$$

$$\bar{\mu}_1 \triangleq \min \left(\frac{\lambda_m(\bar{Q})}{4(M_{pw^2} \gamma_p + M_{\zeta_p w^2} \gamma_{\zeta_p} + \gamma_z M_{v_z w^2})}, \frac{1}{2K_2} \left(-K_1 + \sqrt{K_1^2 + 4 \left(\frac{\lambda_m^2(\bar{Q})}{64M_{w^3}} - \bar{b}_1 \right) K_2} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
K_1 &\triangleq M_{pw}\gamma_p + M_{\zeta_p w}\gamma_{\zeta_p} + M_{vz}\gamma_z \\
K_2 &\triangleq M_{p^2w}\gamma_p^2 + M_{v_z^2}\gamma_z^2 \\
\bar{b}_3 &\triangleq \gamma_V M_{\bar{V}} + \gamma_{\zeta_y} M_{\zeta_y} + (\gamma_{\zeta_y}\gamma_p M_{p\zeta_y} + \gamma_V\gamma_p M_{pV} + \gamma_V\gamma_{\zeta_p} M_{\zeta_p\bar{V}} + \gamma_z M_{\bar{v}_z\bar{V}} + \gamma_{\zeta_y} M_{\bar{v}_z\bar{\zeta}_y})\bar{\mu}_1 \\
\bar{b}_4 &\triangleq \sqrt{\frac{\lambda_m(\bar{P})}{\lambda_M(\bar{P})} \frac{\lambda_m(\bar{Q})}{8M_{w^3}}} \\
M_1 &\triangleq \frac{8\lambda_M(P_0)}{\lambda_m(P_0)\lambda_m(Q_0)}d_2 \\
M_2 &\triangleq \frac{8\lambda_M(P_0)}{\lambda_m(P_0)\lambda_m(Q_0)}d_3 \\
M_3 &\triangleq \sqrt{\frac{\lambda_M(P_0)}{\lambda_m(P_0)}}\|\hat{w}(0)\| + \frac{1}{\lambda_m(P_0)}\left(\frac{b_2}{|\sigma - \sigma_p|} + \frac{\mu b_3}{|\sigma - \sigma_0|}\right) \\
\bar{K} &\triangleq M_1\gamma_{\bar{\rho}} + M_2\gamma_{\bar{v}} + M_3 \\
b_2 &\triangleq d_1\gamma_z + \frac{\lambda_m(Q_0)}{4\left|\frac{I_z - I_x}{I_y} - \frac{I_z - I_y}{I_x}\right|}\left\{d_6 + d_8\frac{\lambda_m(Q_0)}{4\left|\frac{I_z - I_x}{I_y} - \frac{I_z - I_y}{I_x}\right|} + d_9(a_p\lambda_p + \lambda_p^2\gamma_{\zeta_p}/\gamma_p)\right\} \\
b_3 &\triangleq d_4\gamma_V\frac{\lambda_m(Q_0)}{4\left|\frac{I_z - I_x}{I_y} - \frac{I_z - I_y}{I_x}\right|} + d_5(a_y\gamma_V + \gamma_{\zeta_y}) + d_7\gamma_V \\
\bar{\sigma} &\triangleq \frac{\lambda_m(\bar{Q})}{8\lambda_M(\bar{P})} \\
\sigma_0 &\triangleq \min\{\sigma_V, \sigma_Z\} \\
\bar{\sigma}_{\min} &\triangleq \min\{\bar{\sigma}, \sigma_0, \sigma_p, \sigma, \sigma_{\min}\} \\
M_{w^3} &\triangleq \frac{1}{\omega_n U_{\min}}\left|\frac{I_{zx}}{I_z} - \frac{I_{zx}}{I_y}\right| + \frac{1}{\omega_n}K_{z35}\|P_q A_q^{-1}B_q\| \\
&\quad + (\omega_n K_{z36} + K_{z37} + K_{z38}\bar{\alpha}_c\epsilon_a + K_{z39} + K_{z40}\bar{\alpha}_c\epsilon_a + K_{z41} + \omega_n K_{z44})\|P_q A_q^{-1}B_q\| \\
M_\rho &\triangleq (\kappa_4\omega_n(2 - \bar{\alpha}_c\epsilon_a) + h_{v2}(1 - \bar{\alpha}_c\epsilon_a)U_{\min})\kappa_1 U_{\max}/\rho_{\min} + \bar{\alpha}_c\epsilon_a\frac{2U_{\max}\alpha_M}{h_{v2}}(1 + U_{\max}) \\
&\quad + \left((K_{z8} + K_{z10}\omega_n + K_{z11}\frac{1}{\omega_n})\|P_q A_q^{-1}\bar{B}_q\| + K_{y9}\|P_r A_r^{-1}B_r\|\right) \\
M_{\rho\rho} &\triangleq K_{z32}\omega_n\|P_q A_q^{-1}B_q\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_U &\triangleq (\kappa_4 \omega_n (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) + h_{v2} (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) U_{\min}) \kappa_2 + \bar{\alpha}_c \epsilon_a (1 + U_{\max}) 2 J_{\min} \kappa_2 \frac{\rho_{\max}}{h_{v2}} \\
&\quad + \frac{2 \rho_{\max} U_{\max} \alpha_M}{h_{v2}} + ((K_{z15} + K_{z16} \omega_n + K_{z17} \frac{1}{\omega_n}) \|P_q A_q^{-1} B_q\| + K_{y12} \|P_r A_r^{-1} B_r\|) \\
M_{UU} &\triangleq K_{z33} \omega_n \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
M_{\bar{V}} &\triangleq \frac{\sqrt{2} \rho_{\max}^2 U_{\max}^3 h_a}{\omega_n h_{v1} h_{v2}} U_{\min} \bar{N}_2 \bar{\alpha}_c \epsilon_a \|P_{11}\| + \frac{\sqrt{2} \rho_{\max} U_{\max}^2 h_a}{\omega_n h_{v1}} \bar{\alpha}_c \epsilon_a \|P_v\| \\
&\quad + (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_2 \kappa_4 a_y + \bar{\alpha}_c \epsilon_a \sqrt{a_y^2 + 1} \|P_v\| + h_{v2} (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) U_{\min} \kappa_2 a_y \\
&\quad + \frac{\sqrt{2} \rho_{\max}^2 U_{\max}^3 h_a}{\omega_n h_{v1} h_{v2}} \bar{N}_2 \bar{\alpha}_c \epsilon_a U_{\min} + \frac{\rho_{\max} U_{\max}^2 h_a}{\omega_n} (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) + (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) h_{v1} U_{\min} a_y \\
&\quad + \left(K_{z1} + K_{z2} \frac{\bar{\alpha}_c \epsilon_a}{\omega_n} + \omega_n (K_{z3} + K_{z36} \bar{K}) \right) \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
&\quad + (K_{y1} + K_{y3} \frac{\bar{\alpha}_c \epsilon_a}{\omega_n} + K_{y2} \omega_n) \|P_r A_r^{-1} B_r\| \\
M_{\zeta_y} &\triangleq (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_2 \kappa_4 + \bar{\alpha}_c \epsilon_a \|P_v\| + h_{v2} (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) U_{\min} \kappa_2 + (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) h_{v1} U_{\min} \\
&\quad + (K_{z4} + K_{z5} \omega_n + K_{z37} \bar{K}) \|P_q A_q^{-1} B_q\| + (K_{y4} + K_{y5} \omega_n) \|P_r A_r^{-1} B_r\| \\
M_{v_z} &\triangleq (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \frac{\omega_n \kappa_3 \kappa_4}{\rho_{\min} U_{\min}} + \bar{\alpha}_c \epsilon_a \|P_{11}\| + (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) + (\omega_n (K_{z12} \gamma \dot{\rho} + K_{z18} \gamma \dot{U} + K_{z42}) \\
&\quad + K_{z43} + 2 \omega_n K_{z44} \bar{K}) \|P_q A_q^{-1} B_q\| + h_{v2} (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \frac{\kappa_3}{\rho_{\min}} \\
M_{v_z w^2} &\triangleq (\omega_n K_{z36} + K_{z37} + K_{z38} \bar{\alpha}_c \epsilon_a + K_{z39} + K_{z40} \bar{\alpha}_c \epsilon_a + K_{z41} + \omega_n K_{z44}) \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
M_{\bar{v}_z \bar{V}} &\triangleq \omega_n K_{z36} \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
M_{\bar{v}_z \bar{\zeta}_y} &\triangleq K_{z37} \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
M_{v_z^2 w} &\triangleq \omega_n K_{z44} \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
M_{e_\xi} &\triangleq \kappa_4 \left(1 + \frac{\kappa_3 \omega_n}{\rho_{\min} U_{\min}} + \sqrt{1 + (U_{\max}/U_{\min})^2} \right) + \bar{\alpha}_c \epsilon_a \|P_{11}\| \\
&\quad + (h_{v2} \frac{\kappa_3}{\rho_{\min}} + 1) (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) + (\omega_n K_{z42} + K_{z43} + \omega_n K_{z44} \bar{K}) \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
M_{p \bar{V}} &\triangleq 2 \omega_n \kappa_4 + h_{v2} U_{\min} + (\omega_n K_{z25}) \|P_q A_q^{-1} B_q\| + \omega_n K_{y21} \|P_r A_r^{-1} B_r\| \\
M_{\zeta_p \bar{V}} &\triangleq K_{z27} \|P_q A_q^{-1} \bar{B}_q\|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\zeta_p w} &\triangleq \omega_n U_{\min} \lambda_p^2 I_{zx} / I_z + (K_{y14} + K_{y15} \omega_n) \|P_r A_r^{-1} B_r\| \\
M_{p \zeta_y} &\triangleq \omega_n K_{z26} \|P_q A_q^{-1} B_q\| + \omega_n K_{y22} \|P_r A_r^{-1} B_r\| \\
M_{p w^2} &\triangleq \omega_n \kappa_4 + h_{v2} U_{\min} + \left| \frac{I_z - I_x}{I_y} \right| + \left| \frac{I_x - I_y}{I_z} \right| \\
&\quad + (\omega_n (K_{z25} + K_{z26}) + K_{z28} + \bar{\alpha}_c \epsilon_a K_{z30} + K_{z31}) \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
&\quad + \omega_n (K_{y21} + K_{y22}) + K_{y23} + K_{y26} \|P_r A_r^{-1} B_r\| \\
M_{\zeta_p w^2} &\triangleq (\omega_n K_{y15} + K_{y14}) \|P_r A_r^{-1} B_r\| + K_{z27} \|P_q A_q^{-1} \bar{B}_q\| \\
M_{p w} &\triangleq \frac{I_{zx}}{I_z} \omega_n U_{\min} a_p \lambda_p + h_{v1} U_{\min} U_{\max} / \sqrt{2} + \left| \frac{I_x - I_y}{I_z} \right| \frac{\rho_{\max} U_{\max}^2 \alpha_M}{h_{v2}} \\
&\quad + (K_{y24} + K_{y25} \omega_n) \|P_r A_r^{-1} B_r\| + K_{z29} \|P_q A_q^{-1} B_q\| \\
M_{p^2 w} &\triangleq \frac{I_{zx}}{I_y} \omega_n U_{\min} + K_{z34} \omega_n \|P_q A_q^{-1} \bar{B}_q\| \\
\tilde{d}_V &\triangleq \sqrt{\frac{\lambda_M(\bar{P})}{\lambda_m(\bar{P})}} \|\hat{w}(0)\| + \frac{1}{\lambda_m(\bar{P})} \left(\frac{\bar{b}_2 + M_{e_\xi} M_3}{|\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_{\min}|} + \frac{\bar{\mu} \bar{b}_3}{|\bar{\sigma} - \sigma_V|} \right) \\
\tilde{d}_{V1} &\triangleq \frac{8 \lambda_M(\bar{P})}{\lambda_m(\bar{P}) \lambda_m(\bar{Q})} (M_\rho + M_{e_\xi} M_1) \\
\tilde{d}_{V2} &\triangleq \frac{8 \lambda_M(\bar{P})}{\lambda_m(\bar{P}) \lambda_m(\bar{Q})} (M_U + M_{e_\xi} M_2) \\
\bar{d}_{01} &\triangleq \sqrt{1 + \left((1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \frac{U_{\max}}{U_{\min}} \right)^2 + \omega_n \gamma_p \|\hat{\chi}_p(0)\|} + (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_2 \sqrt{a_y^2 + 1} \\
&\quad + (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \frac{\kappa_3}{\rho_{\min} U_{\min}} + \frac{\rho_{\max} U_{\max}^2 S}{m} K_c \|C_q\| \\
\bar{d}_{02} &\triangleq \sqrt{1 + \left(\frac{U_{\max}}{U_{\min}} \right)^2 + 1} + (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \frac{\omega_n \kappa_3}{U_{\min} \rho_{\min}} \\
\bar{d}_{11} &\triangleq (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_1 \frac{U_{\min}}{\rho_{\min}} + \bar{d}_{01} \frac{8 \lambda_M(\bar{P})}{\lambda_m(\bar{P}) \lambda_m(\bar{Q})} (M_\rho + M_{e_\xi} M_1) + \bar{d}_{02} \frac{8 \lambda_M(P_0)}{\lambda_m(P_0) \lambda_m(Q_0)} d_2 \\
\bar{d}_{12} &\triangleq (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_2 + \bar{d}_{01} \frac{8 \lambda_M(\bar{P})}{\lambda_m(\bar{P}) \lambda_m(\bar{Q})} (M_U + M_{e_\xi} M_2) + \bar{d}_{02} \frac{8 \lambda_M(P_0)}{\lambda_m(P_0) \lambda_m(Q_0)} d_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{d}_{11} &\triangleq (3 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_1 \frac{U_{\min}}{\rho_{\min}} + \bar{d}_{01} \frac{8\lambda_M(\bar{P})}{\lambda_m(\bar{P})\lambda_m(\bar{Q})} (M_\rho + M_{e_\xi} M_1) \\
&\quad + (2\bar{d}_{02} - 1 - (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \frac{\kappa_3}{U_{\min} \rho_{\min}}) \frac{8\lambda_M(P_0)}{\lambda_m(P_0)\lambda_m(Q_0)} d_2 \\
\tilde{d}_{12} &\triangleq (3 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \kappa_2 + \bar{d}_{01} \frac{8\lambda_M(\bar{P})}{\lambda_m(\bar{P})\lambda_m(\bar{Q})} (M_U + M_{e_\xi} M_2) \\
&\quad + (2\bar{d}_{02} - 1 - (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \frac{\kappa_3}{U_{\min} \rho_{\min}}) \frac{8\lambda_M(P_0)}{\lambda_m(P_0)\lambda_m(Q_0)} d_3 \\
\tilde{d}_{21} &\triangleq \bar{d}_{01} \frac{8\lambda_M(\bar{P})}{\lambda_m(\bar{P})\lambda_m(\bar{Q})} M_{\rho\rho} \\
\tilde{d}_{22} &\triangleq \bar{d}_{01} \frac{8\lambda_M(\bar{P})}{\lambda_m(\bar{P})\lambda_m(\bar{Q})} M_{UU} \\
\hat{d}_{01} &\triangleq \bar{d}_{01} \sqrt{\frac{\lambda_M(\bar{P})}{\lambda_m(\bar{P})}} \|\hat{w}(0)\| + \bar{d}_{01} \frac{1}{\lambda_m(\bar{P})} \left(\frac{\bar{b}_2 + M_{e_\xi} M_3}{|\bar{\sigma} - \bar{\sigma}_{\min}|} + \frac{\bar{\mu} \bar{b}_3}{|\bar{\sigma} - \sigma_0|} \right) \\
\hat{d}_{02} &\triangleq \left(\sqrt{\frac{\lambda_M(P_0)}{\lambda_m(P_0)}} \|\hat{w}(0)\| + \frac{1}{\lambda_m(P_0)} \left(\frac{b_2}{|\sigma - \sigma_p|} + \frac{\mu b_3}{|\sigma - \sigma_0|} \right) \right) \\
\hat{d}_{03} &\triangleq \omega_n \left(\kappa_2 a_y \gamma_V + \kappa_2 \gamma_{\zeta_y} \right) \|\hat{\chi}_V(0)\| + \omega_n \frac{\kappa_3}{\rho_{\min} U_{\min}} \gamma_z \|\hat{\chi}_z(0)\| \\
\hat{d}_{04} &\triangleq \omega_n \gamma_p \gamma_V \|\hat{\chi}_p(0)\| \cdot \|\hat{\chi}_V(0)\| \\
\tilde{d}_0 &\triangleq \hat{d}_{01} + \bar{d}_{02} \hat{d}_{02} + (2 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \hat{d}_{03} + 2\hat{d}_{04} \\
\tilde{d} &\triangleq \hat{d}_{01} + \left(2\bar{d}_{02} - 1 - (1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \omega_n \frac{\kappa_3}{U_{\min} \rho_{\min}} \right) \hat{d}_{02} + (3 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a) \hat{d}_{03} + 3\hat{d}_{04} + \gamma_A \|\hat{\chi}_z(0)\|
\end{aligned}$$

where the constants $\sigma, \sigma_{\min}, \mu, P_0, Q_0$ and $d_i, i = 1, \dots, 9$, are defined in [24].

6.2 ILAAT 미사일의 제원

본 논문에서 제안된 자동조종 제어기와 최적 유도 법칙의 성능 검증을 위해 모의 실험에 사용된 ILAAT(Inter-Laboratory Air-to-Air Missile Technology) 미사일의 제원은 연료가 소모된 이후의 상태(burnout)에 대하여 표 6.1와 같다 [53].

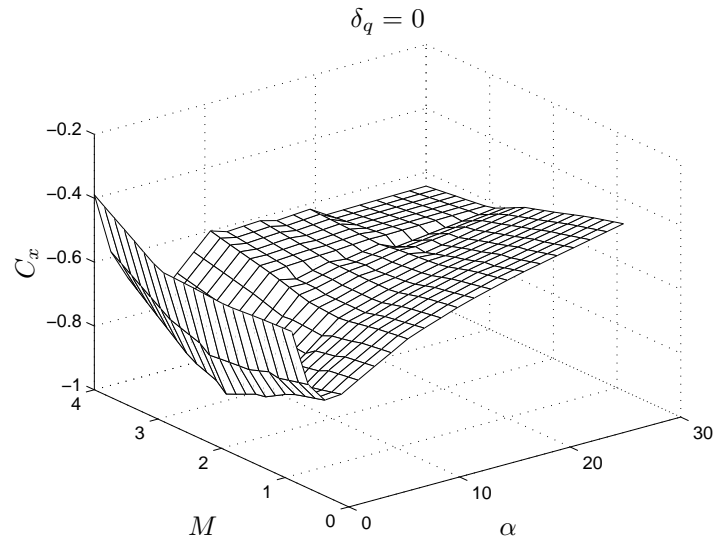
한편, ILAAT 미사일의 공역학 모델은 아래와 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r) &= C_{y\beta}(\alpha, M)\beta + C_{y\delta_r}(\beta, M)\delta_r \\
 C_z(\alpha, M, \delta_q) &= C_{z\alpha}(M)\alpha + C_{z\delta_q}(\alpha, M)\delta_q \\
 C_l(\alpha, \beta, M, \delta_p) &= C_{l\beta}(\alpha, M)\beta + C_{l\delta_p}(\alpha, M)\delta_p \\
 &\quad + C_{lp}(\alpha, M)\frac{pD}{2V_M} \\
 C_m(\alpha, M, \delta_q) &= C_{m0}(\alpha, M) + C_{m\delta_q}(\alpha, M)\delta_q \\
 &\quad + C_{mq}(\alpha, M)\frac{qD}{2V_M} \\
 C_n(\alpha, \beta, M, \delta_r) &= C_{n\beta}(\alpha, M)\beta + C_{n\delta_r}(\beta, M)\delta_r \\
 &\quad + C_{nr}(\alpha, M)\frac{rD}{2V_M}
 \end{aligned} \tag{6.1}$$

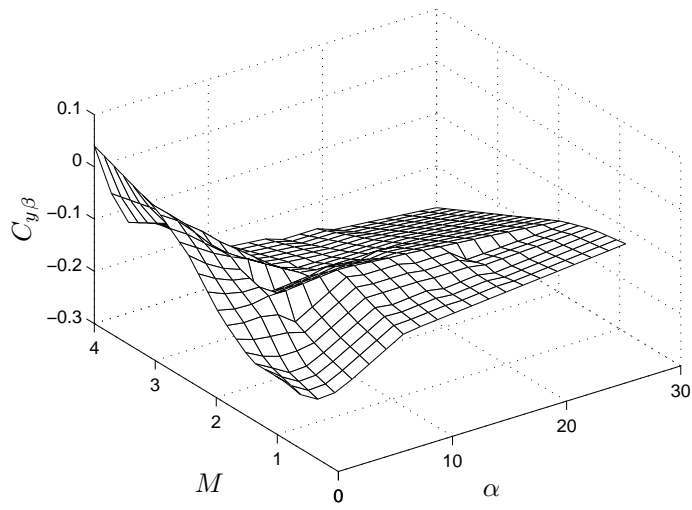
식 (6.1) 모델의 공력 계수는 지시표 형태로 주어지며 그림 6.1에 나타내었다. 단, $C_x(\alpha, M, \delta_q)$ 의 형태는 $\delta_q = 0$ 인 경우에 대해서만 나타내었다.

표 6.1: ILAAT 미사일의 제원

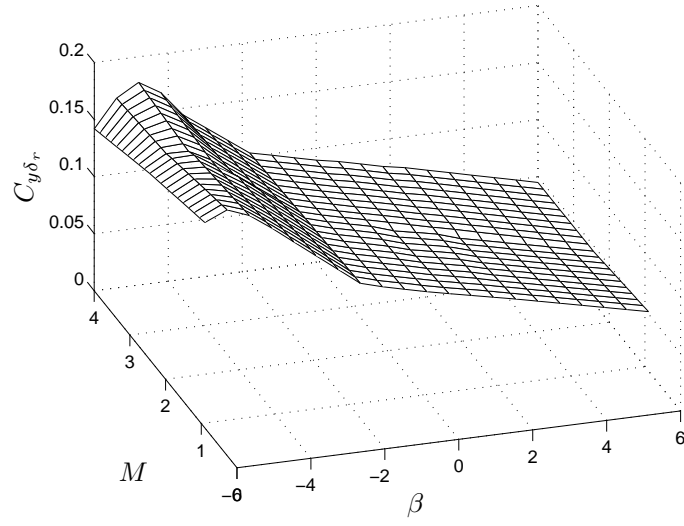
항목	Burnout	단위
l_g	54.6	<i>inch</i>
m	3.48	<i>slug</i>
I_x	0.23	<i>slug/ft²</i>
I_y	27.16	<i>slug/ft²</i>
I_z	27.2	<i>slug/ft²</i>
S	0.307	<i>ft²</i>
d	0.625	<i>ft</i>



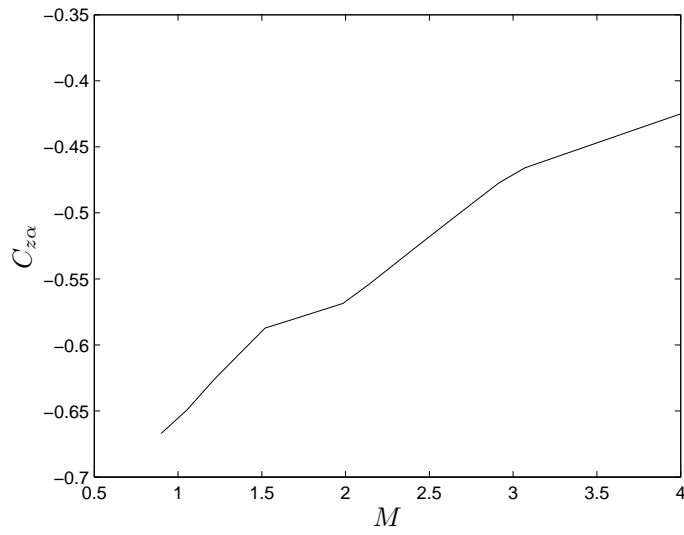
(a) C_x 의 3차원 그래프



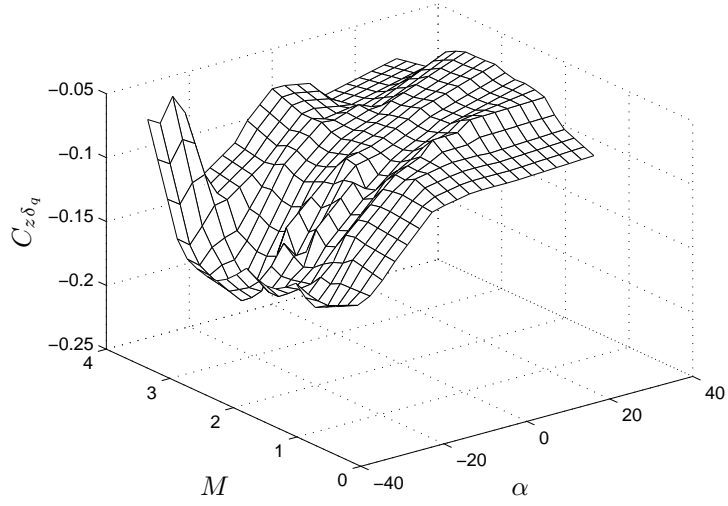
(b) $C_{y\beta}$ 의 3차원 그래프



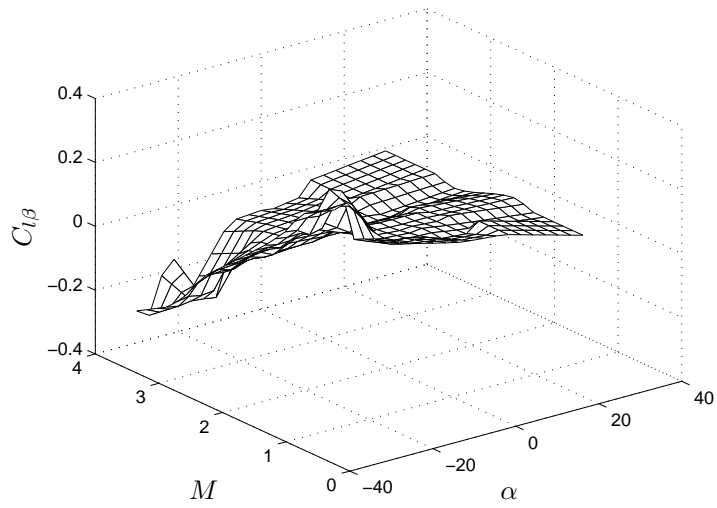
(c) $C_{y\delta_r}$ 의 3차원 그래프



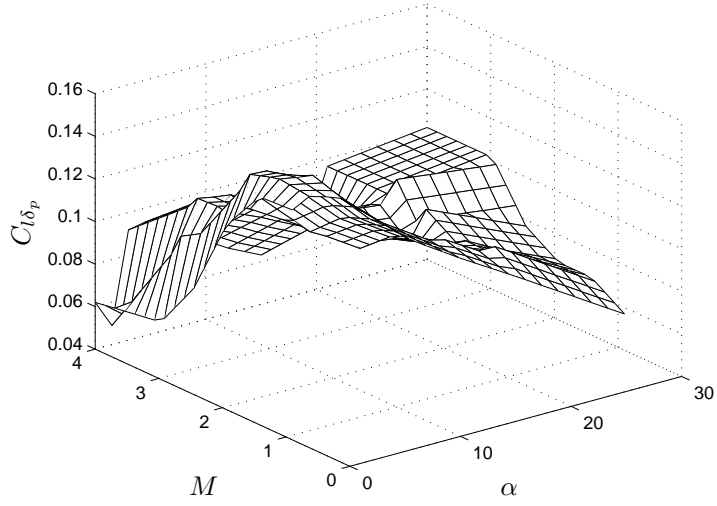
(d) $C_{z\alpha}$ 의 2차원 그래프



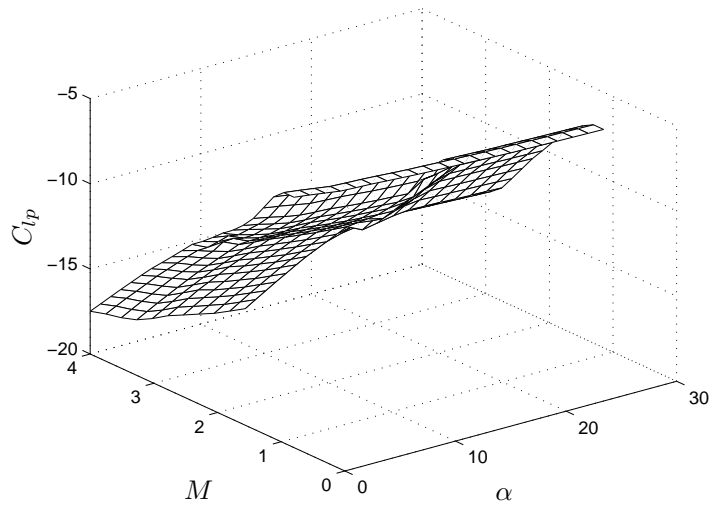
(e) $C_{z\delta_q}$ 의 3차원 그래프



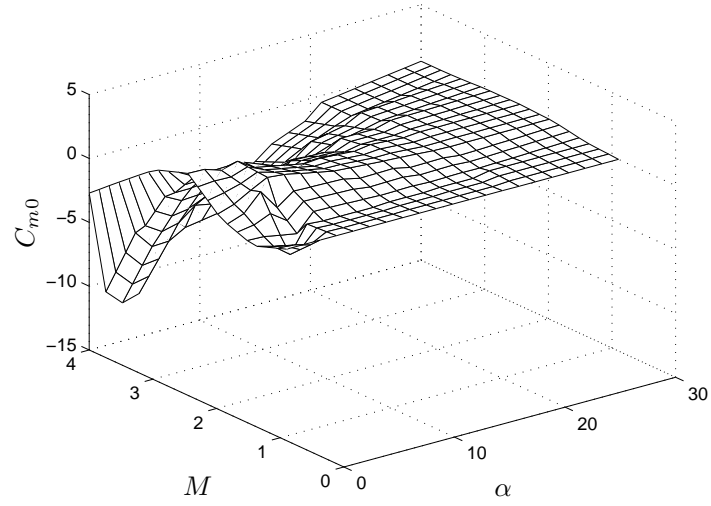
(f) $C_{l\beta}$ 의 3차원 그래프



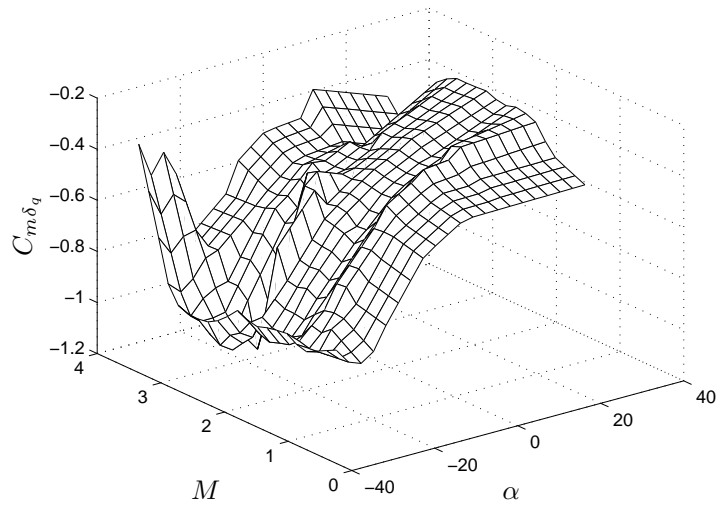
(g) $C_{l\delta_p}$ 의 3차원 그래프



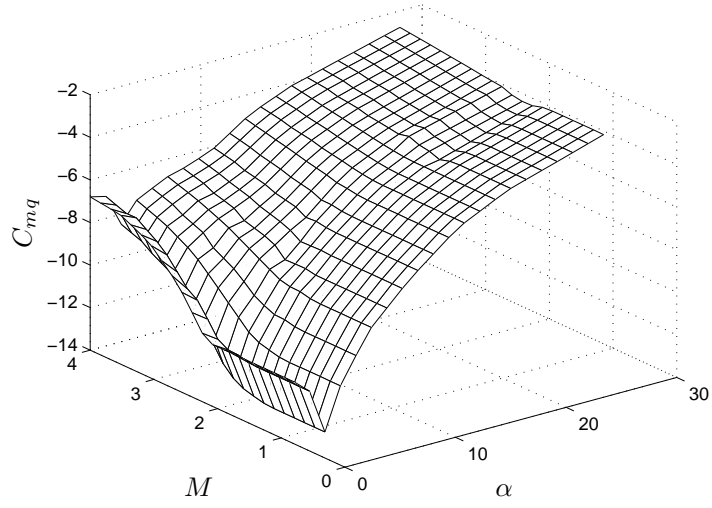
(h) C_{lp} 의 3차원 그래프



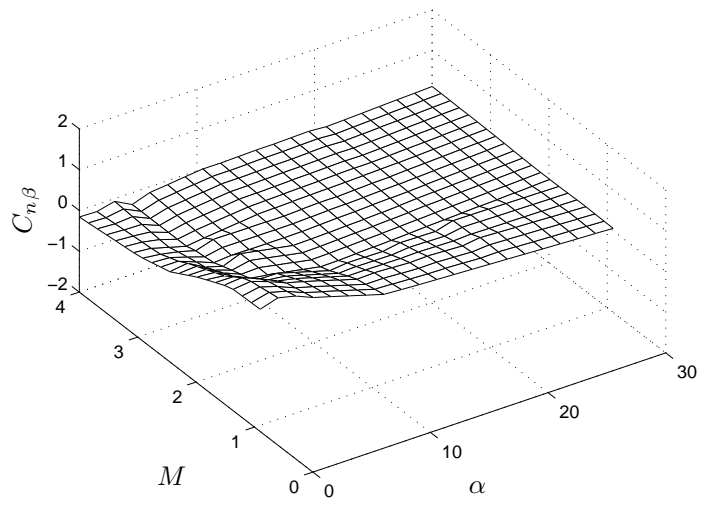
(i) C_{m0} 의 3차원 그래프



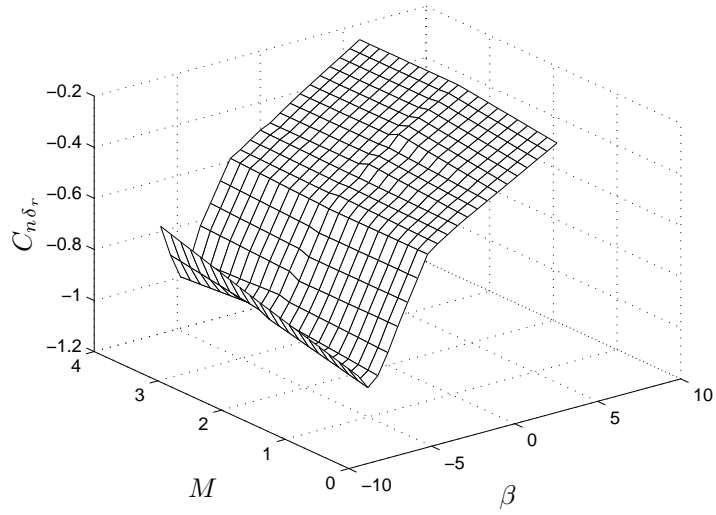
(j) $C_{m\delta_q}$ 의 3차원 그래프



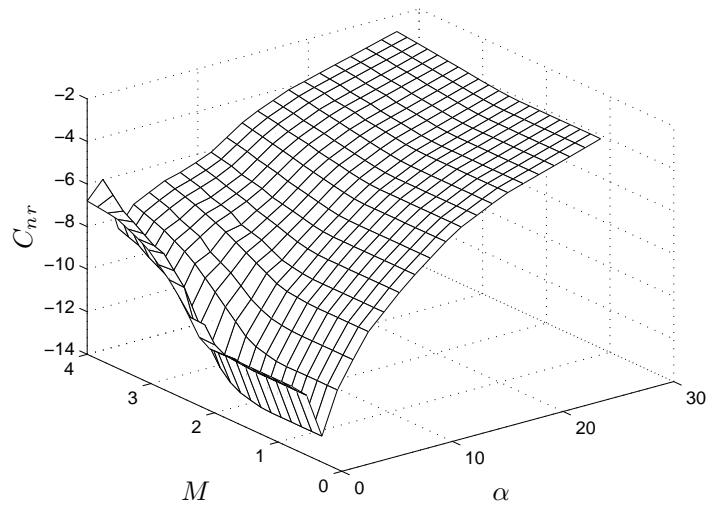
(k) C_{mq} 의 3차원 그래프



(l) $C_{n\beta}$ 의 3차원 그래프



(m) $C_{n\delta_r}$ 의 3차원 그래프



(n) C_{nr} 의 3차원 그래프

그림 6.1: ILAAT 미사일의 공력 계수

참 고 문 헌

- [1] J. H. Blakelock, *Automatic Control of Aircraft and Missile*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [2] P. Garnell and D. J. East, *Guided Weapon Control Systems*, Pergamon Press, 1977.
- [3] M. J. Stephens and D. B. Ridgely, "Autopilot Design for a Tail-Controlled Missile Using Two Degree of Freedom Controllers," *AIAA-95-3264-CP*, 1995, pp. 834-844.
- [4] L. H. Carter and J. S. Shamma, "Gain-scheduled bank-to-turn autopilot design using linear parameter varying transformation", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 19, no. 5. pp. 1056-1063, 1996.
- [5] R. A. Nichols, R. T. Reichet, and W. J. Rugh, "Gain-scheduling for H_∞ controllers : A flight control example", *IEEE trans. on Control Systems Technology*, vol. 1, no. 2, pp. 69-79, June, 1993.
- [6] C. L. Sheperd and L. Valavani, " Autopilot design for bank-to-turn missiles using LQG/LTR methodology", *Proceedings of American Control Conference*, pp. 579-586, 1988.
- [7] D. E. Williams, B. Friedland, and A. N. Madiwale, "Modern control theory for design of autopilots for bank-to-turn missiles", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 10, no. 4, pp. 378-386, 1987.
- [8] S. Lim, and J. P. How, "Modeling and H_∞ control for switches linear parameter-varying missile autopilot", *IEEE trans. on Control Systems Technology*, vol. 11, no. 6, pp. 830-838, Nov. 2003.
- [9] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*, 3rd Ed., Prentice-Hall, 2002.

- [10] A. Isidori, *Nonlinear Control System*, Berlin: Springer-Verlag, 1989.
- [11] I. J. Ha and S. Chong, "Design of a CLOS Guidance Law via Feedback Linearization," *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 28, pp. 51-62, 1992.
- [12] J. E. Slotine and W. Li, *Applied Nonlinear Control*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1991.
- [13] L. C. Fu, W. D. Chang, J. H. Yang, and T. S. Kuo, "Adaptive Robust Bank-to-Turn Missile Autopilot Design using Neural Networks", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 2, pp. 346-354, 1997.
- [14] D. M. McDowell, G. W. Irwin, G. Lightbody, and G. McConnel, "Hybrid neural adaptive control for bank-to-turn missile", *IEEE trans. on Control System Technology*, Vol. 5, no. 3, pp. 297-308, 1997.
- [15] S. Kang, H. J. Kim, J. I. Lee, B. E. Jun, and M. J. Tahk, "Roll-Pitch-Yaw Integrated Robust Autopilot Design for a High Angle-of-Attack Missile", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 32, No. 5, pp. 1622-1628, Sep. 2009.
- [16] J. Yang, W. H. Chen, and S. Li, "Robust Autopilot Design of Uncertain Bank-to-Turn Missiles using State-Space Disturbance Observers", *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G, Journal of Aerospace Engineering*, Vol. 226, pp. 97-107, 2012
- [17] S. Li and J. Yang, "Robust Autopilot Design for Bank-to-Turn Missiles using Disturbance Observers", *IEEE trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 49, No. 1, pp. 558-579, 2013.
- [18] C. F. Lin, *Advanced Control System Design*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1994.
- [19] K. Y. Lian, L. C. Fu, D. M. Chuang, and T. S. Kuo, "Nonlinear Autopilot and Guidance for a Highly Maneuverable Missiles", *Proceedings of American Control Conference*, pp. 2293-2297, 1994.

- [20] M. Xin, and S. N. Balakrishnan, “Nonlinear H_∞ missile longitudinal autopilot design with θ -D method”, *IEEE trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 44, no. 1, pp. 41-56, Jan. 2008.
- [21] B. A. White, L. Bruyere, and A. Tsourdos, “Missile Autopilot Design using Quasi-LPV Polynomial Eigenstructure Assignment”, *IEEE trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 43, No. 4, pp. 1470-1483, Oct. 2007.
- [22] J. H. Oh and I. J. Ha, “Missile Autopilot Design via Functional Inversion and Time-Scaled Transformation”, *IEEE trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 33, No. 1, pp. 64-76, Jan. 1997.
- [23] J. I. Lee and I. J. Ha, “Autopilot design for highly maneuvering STT missiles via singular perturbation-like technique”, *IEEE trans. on Control Systems Technology*, vol. 7, no. 5, pp. 527-541, Sep. 1999.
- [24] S. Y. Lee, J. I. Lee, and I. J. Ha, “Nonlinear autopilot for high maneuverability of bank-to-turn missiles”, *IEEE trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 37, no. 4, pp. 1236-1253, Oct. 2001.
- [25] D. Chwa, J. Y. Choi, and J. H. Seo, “Compensation of actuator dynamics in nonlinear missile control”, *IEEE trans. on Control Systems Technology*, vol. 12, no. 4, pp. 620-626, Jul. 2004.
- [26] M. J. Kim, W. H. Kwon, Y. H. Kim, and C. Song “Autopilot Design for Bank-to-Turn Missile using Receding Horizon Predictive Control scheme”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 20, No. 6, pp. 1248-1254, Nov. 1997.
- [27] P. K. Menon, V. R. Iragavarapu, and E. J. Ohlmeyer, “Nonlinear missile autopilot design using time-scale separation”, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, New Orleans, 1997.
- [28] F. P. Alder, “Missile guidance by three-dimensional proportional navigation”, *Journal of Applied Physics*, Vol. 27, No. 3, 1956, pp. 500-507.
- [29] G. M. Siouris, “Comparison between Proportional and Augmented Proportional Navigation”, *Nachrichtentechnische Zeitschrift*, 1974, pp. 278-280.

- [30] J. G. Lee, H. S. Han, and Y. J. Kim, "Guidance Performance Analysis of Bank-To-Turn(BTT) Missiles", *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications*, Hawaii, USA, 1999, pp. 991-996.
- [31] P. Zarchan, *Tactical and strategic missile guidance*, Vol.124, Progress in Astronautics and Aeronautics, AIAA, Wshington, D.C., 1997, pp. 135-154.
- [32] Chen, R. H., Speyer, J. L., and Lianos, D., "Optimal Intercept Missile Guidance Strategies with Autopilot Lag", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 4, 2010, pp. 1264-1272.
- [33] Hexner, G., and Pila, A. W., "Practical Stochastic Optimal Guidance Law for Bounded Acceleration Missiles", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 34, No. 2, 2011, pp. 437-445.
- [34] Shima, T., Idan M., and Golan O. M., "Sliding-Mode Control for Integrated Missile Autopilot Guidance", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 2, 2006, pp. 250-260.
- [35] R. K. Aggarwal and C. R. Moore, "Terminal guidance algorithm for ramjet-powered missiles", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 6, 1998, pp. 862-866.
- [36] R. K. Aggarwal and C. R. Moore, "A Bank-to-Turn Guidance Law", GACIAC, 1984
- [37] J.H. Yeom, S. J. Yoo, J. W. Hong, and I. J. Ha, "Terminal-Phase Optimal Guidance Law for BTT Missiles Considering Significant Autopilot Dynamics", *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Aug. 2011.
- [38] M. Kim, and K.B. Grider, "Terminal Guidance for Impact Attitude Angle Constrained Flight Trajectories.", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.9, No.6, pp.852-859, Dec. 1973.
- [39] A. E. Bryson and Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, Washington, DC: Hemisphere, 1975.

- [40] T. L. Song, S. J. Shin, and H. Cho, "Impact Angle Control for Planar Engagements", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.35, No.4, Oct. 1999.
- [41] B. S. Kim, J. G. Lee, and H. S. Han, "Biasd PNG Law for Impact with Angular Constraint", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.34, No.1, Jan. 1998.
- [42] C. K. Ryoo, H. Cho, and M. J. Tahk, "Closed-Form Solutions of Optimal Guidance with Terminal Impact Angle Constraint", *IEEE Conference on Control Applications*, 2003.
- [43] C. K. Ryoo, H. Cho, and M. J. Tahk, "Time-to-Go Weighted Optimal Guidance with Impact Angle Constraints", *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, 2006.
- [44] Vitaly Shaferman and Tal Shima, "Linear Quadratic Guidance Laws for Imposing a Terminal Intercept Angle", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 5, 2008
- [45] Tal Shima, "Intercept-Angle Guidance", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 34, No. 2, 2011
- [46] Asif Farooq and David J. N. Limebeer, "Bank-to-Turn Missile Guidance with Radar Imaging Constraints", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 6, 2005
- [47] B. Morton, "A Dynamic Inversion Control Approach for High-Mach Trajectory tracking," *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, Illinois, pp. 1332-1336, 1992.
- [48] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, 3rd Ed., Addison-Wesley Publishing Company Inc., 1994.
- [49] J.W. Hong, J. H. Yeom, I. J. Ha, and S. H. Song, "A Singular Perturbation-like Method to Compensate the Effect of Fin-Actuator Dynamics in Nonlinear Missile Control", *SICE-ICASE International Joint Conference*, Oct. 2006.

- [50] S. H. Song and I. J. Ha, "A Lyapunov-Like Approach to Performance Analysis of 3-Dimensional Pure PNG Laws", *IEEE transactions on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 30, No. 1, 1994, pp. 238-248.
- [51] F. L. Lewis, and V. L. Syrmos, *Optimal Control 2nd Ed.*, John Wiley & Sons, INC., 1995.
- [52] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, Vol.15, Studies in Applied Mathematics, SIAM, 1994.
- [53] D. E. Williams, A. N. Madiwale, and B. Friedland, *Modern control theory for autopilots*, Air Force Armament Laboratory, 1984.
- [54] L. Lau, P. Cross, and M. Steen, "Flight Tests of Error-Bounded Heading and pitch Determination with Two GPS Receivers", *IEEE trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 48, No. 1, pp. 388-404, Jan. 2012.
- [55] Joon-Hyung Yeom, Seong-Ho Song, Jin-Woo Hong, and In-Joong Ha, "Singular Perturbation-Like Approach to Compensation of Actuator Dynamics Effect in Missile Control", *IEEE trans. on Aerospace and Electronic Systems*, 2013 (Accepted)

Abstract

This thesis aims to develop a BTT missile guidance and control system considering impact angle constraint and actuator dynamics. For this aim, the following research subjects have been carried out. Firstly, the autopilot controller which can eliminate nearly the effect of slow actuator dynamics, while still maintaining the desired linear I/O dynamic characteristics is proposed. It considers fully the nonminimum-phase nonlinear BTT missile dynamics but requires no differentiations of noisy variables, differently from other existing control methods. The control performance of the proposed autopilot controller also has been analyzed in a mathematically rigorous way. Secondly, an optimal terminal guidance law which can make a BTT missile intercept a target maneuvering with constant velocity along the desired impact angles is developed. In doing so, the gravitational effect as well as autopilot dynamics and 3D nonlinear pursuit kinematics are fully considered. Finally, the effectiveness and practicality of the proposed methods have been shown through some simulation results using the aerodata of the ILAAT missile.

Keywords: BTT Missile Control, Singular Perturbation, Fin-Actuator Dynamics, Autopilot Controller, Optimal Guidance Law, Impact Angle Constraint

Student Number: 2004-21558