



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

工學博士學位論文

표적 충돌각과 자동조종장치 동역학을 고려한
궤환형태의 BTT 미사일용 최적 종말 유도 법칙 연구

(A Feedback-Form of Terminal-Phase Optimal Guidance Law for BTT Missiles
Considering Impact Angle Constraint and Autopilot Dynamics)

2016年 8月

서울대학교 大學院
電氣컴퓨터 工學部
俞 盛 在

工學博士學位論文

표적 충돌각과 자동조종장치 동역학을 고려한
궤환형태의 BTT 미사일용 최적 종말 유도 법칙 연구

(A Feedback-Form of Terminal-Phase Optimal Guidance Law for BTT Missiles
Considering Impact Angle Constraint and Autopilot Dynamics)

2016年 8月

서울대학교 大學院
電氣컴퓨터 工學部
俞 盛 在

표적 충돌각과 자동조종장치 동역학을 고려한 궤환형태의 BTT 미사일용 최적 종말 유도 법칙 연구

(A Feedback-Form of Terminal-Phase Optimal Guidance Law for BTT Missiles
Considering Impact Angle Constraint and Autopilot Dynamics)

지도교수 하 인 중

이 논문을 공학박사 학위논문으로 제출함
2016년 6월

서울대학교 대학원
電氣컴퓨터 工學部
俞 盛 在

俞盛在의 공학박사 학위논문을 인준함
2016년 6월

위 원 장	서	진	현	(인)
부위원장	하	인	중	(인)
위 원	최	진	영	(인)
위 원	심	형	보	(인)
위 원	송	성	호	(인)

초 록

본 논문에서는 표적에 대한 BTT(bank-to-turn) 미사일의 요격 성능 향상을 위해 표적 충돌각과 자동조종장치 동역학을 고려한 최적 종말 유도 법칙을 제안한다. BTT 미사일은 STT(skid-to-turn) 미사일과는 달리 피치와 롤 채널이 동역학적으로 결합되어 있다. 그러므로 BTT 미사일의 유도 법칙은 설계 시 3차원 추적 기하학을 고려하여야 한다. 하지만 기존의 대부분 유도 법칙들은 미사일과 표적 사이의 2차원 평면상의 추적 기하학만을 고려하였기 때문에 BTT 미사일에는 적합하지 않다.

본 논문에서 제안하는 최적 종말 유도 법칙은 3차원 추적 기하학을 고려하였을 뿐만 아니라 자동조종장치의 피치와 롤 채널 동역학을 모두 고려한다. 그 결과, 제안하는 최적 종말 유도 법칙은 상대적으로 느린 자동조종장치 동역학에서도 시간 지연 효과로 인한 성능 하락 없이 작은 요격 오차를 유지할 수 있어 높은 요격 성능을 보장한다. 또한, 표적 충돌각을 고려하여 요격 시 미사일이 표적을 원하는 충돌각으로 요격할 수 있도록 하여, 실제 전장에서 보다 효과적인 표적 요격이 가능하도록 한다.

제안하는 최적 종말 유도 법칙은 잔여 비행 시간(time-to-go)의 함수를 계수로 하는 궤환 형태로 정리할 수 있으며 유도 법칙의 단순화를 통해 실시간 구현이 가능하도록 하여 그 실용성을 제고한다. 끝으로 다양한 요격 상황에서의 모의 실험을 통해 제안하는 최적 종말 유도 법칙의 성능을 입증한다.

주요어 : BTT 미사일, 최적 유도 법칙, 종말 유도 법칙, 표적 충돌각, 자동조종장치 동역학

학 번 : 2009-30197

목 차

초 록	i
목 차	ii
표 목 차	iv
그 림 목 차	v
제 1 장 서 론	1
1.1 연구 배경	1
1.2 연구 목표	10
제 2 장 BTT 미사일 시스템의 모델 소개	12
2.1 미사일 시스템의 동역학적 상태 방정식	12
2.2 미사일 시스템의 공력학적 특성	15
2.3 구동기 동역학을 고려한 자동조종 제어기	20
2.4 3차원 추적 기하학	27
제 3 장 표적 충돌각과 자동조종장치 동역학을 고려한 최적 유도 법칙 개발	30
3.1 최적 유도 문제 설정	30
3.2 준최적 유도 법칙 유도	36
3.3 실시간 구현을 위한 준최적 유도 법칙의 단순화	58
3.4 준최적 유도 법칙의 타당성 검증	63
제 4 장 모의 실험을 통한 성능 분석	79
4.1 모의 실험 환경	79
4.2 표적 요격 성능 평가	82
제 5 장 결 론	125

부록 A. 표기법	127
부록 B. ILAAT 미사일의 제원	129
참 고 문 헌	138
Abstract	143

표 목 차

3.1	최적 유도 법칙의 단순화 전후의 계산량 비교	62
3.2	단순화 한 최적 유도 법칙의 계산 시간 비교	62
4.1	모의 실험 별 표적의 정보	86
4.2	$\bar{\phi}$ 유무에 따른 유도 성능 차이	87
4.3	단거리 정지 표적에 대한 요격 오차 및 충돌각 오차	87
4.4	장거리 정지 표적에 대한 요격 오차 및 충돌각 오차	88
4.5	등속 운동하는 표적에 대한 요격 오차 및 충돌각 오차	88
4.6	장거리 정지 표적에 대한 다양한 요격 시나리오	88
4.7	오차 및 잡음 존재 시 요격 오차와 충돌각 오차의 평균 및 표준 편차	89
1	ILAAT 미사일의 제원	130

그림 목 차

1.1 BTT 미사일 시스템의 블록선도	3
2.1 비행중인 미사일에 작용하는 힘	16
2.2 3차원 추적 기하학	28
3.1 표적 충돌각 좌표계	32
3.2 표적 충돌각의 정의	32
3.3 쌍일차 시스템의 구성도	39
3.4 상태 변수의 궤적 (Case 1) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-2}$	69
3.5 준상태 변수의 궤적 (Case 1) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-2}$	70
3.6 상태 변수의 궤적 (Case 1) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-6}$	71
3.7 준상태 변수의 궤적 (Case 1) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-6}$	72
3.8 $k_1\lambda_2 + k_a\lambda_3$ 와 $k_2\lambda_5x_6$ 의 비교 (Case 1)	73
3.9 상태 변수의 궤적 (Case 2) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-2}$	74
3.10 준상태 변수의 궤적 (Case 2) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-2}$	75
3.11 상태 변수의 궤적 (Case 2) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-6}$	76
3.12 준상태 변수의 궤적 (Case 2) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-6}$	77
3.13 $k_1\lambda_2 + k_a\lambda_3$ 와 $k_2\lambda_5x_6$ 의 비교 (Case 2)	78
4.1 BTT 미사일 통합 시뮬레이터	80
4.2 모의 실험 결과 ($\bar{\phi}$ 가 있는 경우)	91
4.3 모의 실험 결과 ($\bar{\phi}$ 가 없는 경우)	93
4.4 단거리 정지 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 1)	96
4.5 단거리 정지 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 2)	99
4.6 단거리 정지 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 3)	102
4.7 장거리 정지 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 1)	105
4.8 장거리 정지 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 2)	108
4.9 장거리 정지 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 3)	111

4.10	등속 운동하는 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 1)	114
4.11	등속 운동하는 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 2)	117
4.12	등속 운동하는 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 3)	120
4.13	다양한 표적 충돌각에 대한 모의 실험 결과	121
4.14	오차 및 잡음 유무에 대한 모의 실험 결과 (Case 1)	122
4.15	오차 및 잡음 유무에 대한 모의 실험 결과 (Case 2)	123
4.16	오차 및 잡음 유무에 대한 모의 실험 결과 (Case 3)	124
1	ILAAT 미사일의 공력 계수	137

제 1 장 서론

1.1 연구 배경

군사 기술의 발전에 따라 현대 전장에는 과거와는 비교할 수 없을 만큼 복잡하고 다양한 무기 체계가 존재한다. 그 중에서도 특히, 미사일은 강력한 위력으로 인해 단숨에 전황을 급변시킬 수 있어 전략, 전술적으로 매우 가치가 높은 무기이다. 또한 미사일은 항공기와 더불어 대표적인 비행 체계에 속하기도 한다. 특히 미사일은 항공기에 비하여 비선형성이 더 강한 시스템이다. 이는 미사일 시스템의 반응 속도가 항공기의 그것에 비하여 매우 빠르고 동일 시간 동안의 운동 범위가 더 넓기 때문이다. 따라서 미사일 시스템을 대상으로 개발된 여러 제어 기법들은 그 외의 여러 비행 체계에서 쉽게 적용이 가능할 것이다. 이처럼 무기 체계에서, 동시에 비행 체계에서도 미사일의 표적 요격 성능 향상은 중요한 사안이다.

미사일 시스템은 기동 시 방향 조종 방식에 따라 크게 두 가지로 나눌 수 있는데 바로 STT(skid-to-turn) 미사일과 BTT(bank-to-turn) 미사일이다. STT 미사일은 피치(pitch) 가속도와 요(yaw) 가속도를 동시에 독립적으로 조정하여 비행 방향을 조정한다. 그러한 기동 방식으로 인해 STT 미사일은 구조적으로 이들 피치와 요 평면에 대해 각각 대칭적 구조를 가져야 한다는 제약이 있다. 이와는 달리 BTT 미사일은 롤 각(roll angle)과 피치 가속도를 연계하여 복합적으로 조종해서 비행 방향을 조정한다. 그리하여 BTT 미사일은 STT 미사일과는 달리 피치 평면에 대해서만 구조적으로 대칭을 이루기만 하면 된다. 이는 STT 미사일에 비하여 상대적으로 구조적 제약이 덜하다는 BTT 미사일의 장점이다. 이러한 장점으로 인하여 BTT 미사일은 STT 미사일 보다 더 큰 날개 구조와 넓은 내부 저장 공간을 가질 수 있

다. 더 큰 날개 구조는 다시 보다 큰 가속도를 낼 수 있다는 장점으로 이어진다. 또한 넓은 내부 저장 공간은 공기 흡입 램제트 엔진(ramjet engine)과 스크램제트 엔진(supersonic combustion ramjet engine) 같은 추진 기관의 탑재가 용이하다는 장점으로 이어진다. 이로 인하여 BTT 미사일은 동일 양의 연료를 사용했을 때에 STT 미사일에 비하여 월등히 긴 거리를 보다 빠르게 비행할 수 있다.

그러나 이러한 추진 기관은 원활한 가동을 위해서 가동 중에 압축기로 유입되는 공기의 양을 늘 일정 수준 이상으로 유지해야 한다. 이를 위해서 추진 기관을 탑재한 BTT 미사일은 비행 시 항상 작은 옆미끄러짐각(side-slip angle)만을 허용한다는 엄격한 제약이 따른다. 또한 BTT 미사일은 앞서 언급한 대로 롤링과 피치 가속도의 복합 작용으로 비행 방향을 조종하기 때문에 이 둘 사이에 강한 커플링(coupling)이 나타나며 STT 미사일에 비하여 가속도 응답에 지연이 일어난다. 게다가 롤 각의 빠른 변화에서 생기는 피치 채널과 요 채널의 상호 간섭 효과는 앞서 언급한 BTT 미사일의 비대칭적인 구조에 기인하여 더욱 심해진다. 따라서 BTT 미사일의 동역학 방정식은 STT 미사일의 그것 보다 훨씬 더 복잡하고 일반적인 형태를 가진다.

BTT 미사일 시스템은 그림 1.1과 같이 구성되어 있다. 이는 크게 탐색기(seeker), 유도 장치(guidance), 자동조종장치(autopilot)의 3가지 하부 시스템으로 구분지어 볼 수 있다. 우선, 탐색기는 목표물을 포착하여 목표물과 미사일의 추적 기하학으로부터 이들 사이의 상대 운동 등과 같이 미사일의 유도에 필요한 정보를 획득하는 장치이다. 유도 장치는 탐색기로 부터 획득한 정보를 바탕으로 목표물을 요격하기 위한 유도 명령을 생성하는 장치이다. BTT 미사일의 경우에는 유도 명령으로 롤 각 명령과 피치 가속도 명령을 생성한다. 끝으로 자동조종장치는 유도 장치에서 생성된 유도 명령에 따라 미사일 동역학을 제어하는 장치이다.

BTT 미사일 시스템의 통합 제어 기법에 관한 연구는 다음의 문제점으로 인하여 오랫동안 해결하기 어려운 문제로 알려져 있다. 미사일 시스템의 동역학 방정

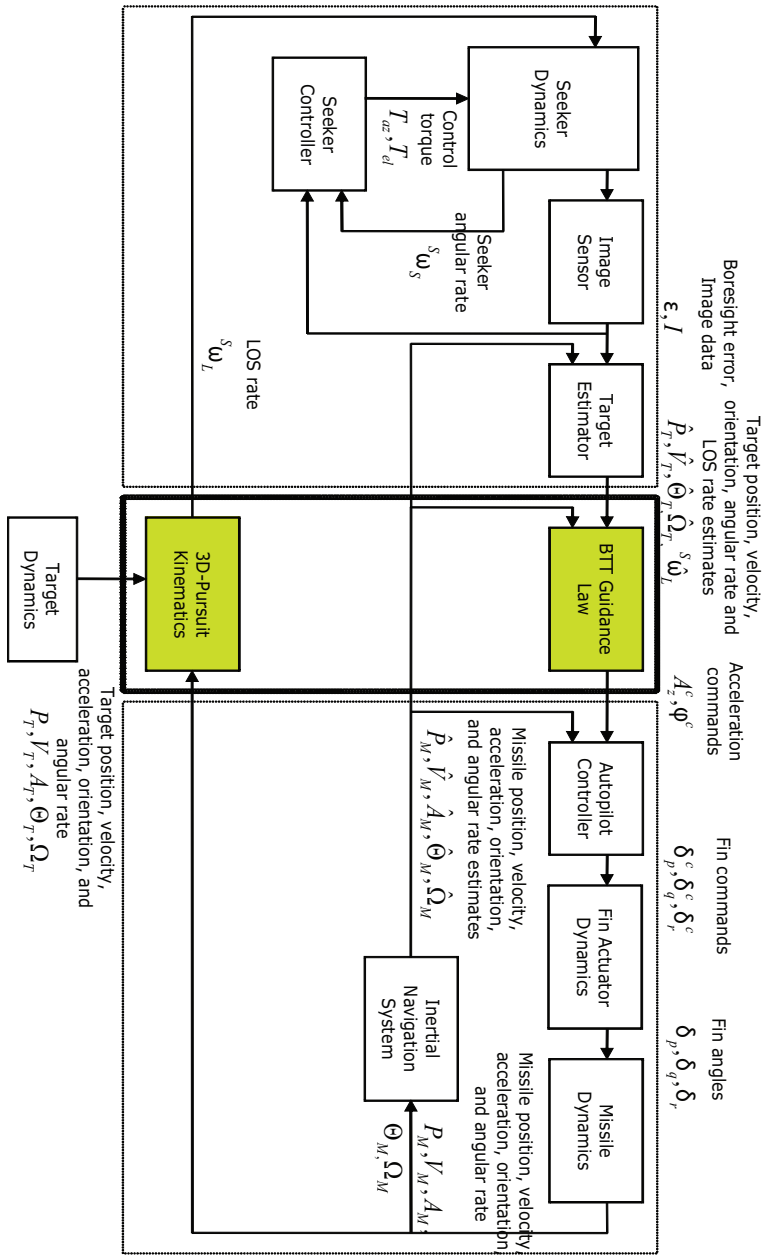


그림 1.1: BTT 미사일 시스템의 블록선도

식은 탐색기의 동역학 방정식, 미사일 동체의 동역학 방정식, 추적 기하학(pursuit kinematics)등으로 구성되어 있다. 그런데 이들 각각의 하부 시스템들은 모두 상당한 비선형성을 띄고 있다. 따라서 전체 시스템 또한 고차의 복잡한 비선형성을 띄게 된다. 특히 공역학(aerodynamics)의 경우, 풍동 실험을 통해 그 결과가 지시표(look-up table) 형태로 주어져 강한 비선형성을 내포하고 있다. 또한 제어 편각(control fins)으로부터 미사일 가속도까지의 입출력 동특성은 비최소위상(nonminimum phase)의 특성을 갖기 때문에 일반적인 궤환 선형화 기법을 통해서서는 제어하기 힘들다[1, 2, 3].

또한, 앞서 언급한 BTT 미사일의 구조적 장점이 유도 법칙 개발에 있어서는 단점으로 작용한다. STT 미사일은 피치 평면과 요 평면에 대해 대칭적인 구조를 가진다. 이 때문에 롤 채널이 안정화 되어있어 피치와 요 채널이 독립적으로 작용할 수 있다. 그러므로 2차원 평면상에서의 추적 기하학만 고려하여 보다 쉽고 간단하게 유도 법칙을 설계할 수 있다. 이에 반하여 BTT 미사일의 경우에는 롤과 피치 운동이 서로 역학적으로 커플링 되어있다. 그렇기 때문에 2차원 평면상에서의 추적 기하학만을 고려한 STT 미사일용 유도 법칙을 BTT 미사일에 바로 적용하기는 어렵다. 따라서 BTT 미사일의 유도 법칙은 롤과 피치 운동을 포함한 3차원 추적 기하학을 모두 고려해야 한다.

BTT 미사일의 고전적인 유도 법칙으로는 대표적으로 비례 항법 유도(proportional navigation guidance, PNG)법칙을 극좌표 변환(polar conversion logic, PCL)한 것을 꼽을 수 있다. 비례항법유도 법칙은 미사일에서 표적을 바라보는 시선(line-of-sight, LOS)의 변화율에 비례하는 가속도 명령을 생성하는 유도 법칙이다. 간단하게 구현할 수 있고 실제 시스템에 적용하기 쉬워 현재에도 미사일 뿐만 아니라 여러 비행 체계에서 종말 유도 법칙으로 사용 된다. 비례항법유도 장치는 자동조종장치 동역학이 이상적으로 빠르고 표적이 기동하지 않는 물체라는 가정하에 요격 시 상대 거리가 0이 되고, 요격 직전에 가속도 명령이 0으로 수렴하며, 요격 시점까지

의 가속도 명령의 제곱을 적분한 값을 최소화하며 요격을 보장하는 유도 법칙임이 알려져 있다[4, 5, 6]. 그러나 기동하는 표적에 대해서는 미사일이 표적에 비하여 빠른 속도를 낼 수 있어야 하며 요격 직전에 달성할 수 없는 과도한 가속도 명령을 필요로 하여 가속도 명령이 포화되어 요격 성능이 저하된다는 단점이 있다. 이를 개선하기 위해서 개발된 것이 바로 확장 비례 항법 유도(augmented-PNG, APNG)이다[7]. 이는 유도 법칙의 가속도 명령에 표적의 가속도 추정치에 비례하는 항을 포함시켜 유도 명령을 보상하는 유도 법칙이다.

한편, 비례 및 확장 비례 유도 법칙으로 인해 생성된 유도 명령을 BTT 미사일에 적용하기 위해서는 극좌표 변환을 거쳐야 하는데, 이는 STT 미사일의 피치, 요 방향의 가속도 명령을 BTT 미사일의 롤 각 명령과 피치 가속도 명령으로 변환하는 역할을 한다. 그러나 삼각함수의 역변환을 통해 롤 각 명령을 얻는 과정에서 롤 각 명령이 정의되지 않아 가제어성(controllability)을 상실하는 문제가 일어날 수 있다. 특히, 변환 전 가속도 명령이 0을 지나면 롤 각 명령이 불연속하게 변하게 되는 현상이 일어나 자동조종장치에 무리한 기동을 요구하는 문제가 발생한다. 이러한 문제점은 가속도 명령이 0이 되지 않도록 가속도 명령에 일정한 값을 더해주는 방식으로 유도 명령을 보상에 줄 수 있는데 이를 편향 비례 항법 유도(biased-PNG, BPNG) 기법이라 한다[8].

그러나 이상의 유도 법칙들은 모두 이상적인 자동조종장치를 가정하고 설계된 기법이라 자동조종장치의 동역학을 무시하였다는 한계가 있다. 그러므로 실제 미사일에 적용했을 시, 자동조종장치의 동역학으로 인한 시간 지연 효과에 의해 요격 성능이 저하된다. 이러한 문제점을 개선하기 위해 고전적인 유도 기법에서 탈피, 최적 유도 법칙이 개발되었다. [9]에서는 자동조종장치 동역학을 1차원 시불변(time-invariant) 시스템으로 표현할 경우에 요격 성능을 향상시킬 수 있다는 것을 보였다. 또한, 미사일은 요격 오차(miss distance)를 최소화 하기 위해서, 이에

반해 표적은 이를 최대화 하기 위해서 기동할 경우에 이를 게임 이론을 통해 효과적으로 유도하며 자동조종장치의 시간 지연 효과를 고려한 기법이 개발되었다[10]. [11]에서는 슬라이딩 모드 제어기(sliding-mode controller)를 통해 자동조종장치와 유도 법칙을 동시에 설계한 기법을 제안했다. 실제 미사일 시스템에서는 기동 시에 물리적으로 가속도가 제한 되어 있는데 이를 고려하여 확률적 최적 유도 법칙을 개발한 연구도 있다[12].

그러나, 이상의 연구 결과들[9]-[12]은 모두 2차원 평면상에서의 추적 기하학만을 고려한 결과들이다. 따라서 BTT 미사일에 적용하기 위해서는 앞서 언급한 극좌표 변환을 거쳐야 하는 문제점을 안고 있다. 이를 개선하여 3차원 공간상에서의 추적 기하학을 고려하며 동시에 자동조종장치의 동역학을 1차원 시불변 시스템으로 가정하고 고려한 최적 유도 법칙도 개발되었다[13, 14]. 하지만 롤 각 변화율의 동역학이 피치 가속도 변화율의 동역학에 비하여 매우 빨라 그 영향을 무시할 수 있다는 가정하에 피치 채널 동역학만 고려하여 개발되었다는 한계를 안고 있다. 이는 실제 미사일 시스템에서 적용할 시에 요격 오차의 생성의 원인이 된다. 이러한 단점들을 보완하여 3차원 추적 기하학과 자동조종장치 동역학을 고려한 BTT 미사일의 최적 유도 법칙이 개발 되었다[15].

한 편, 이와 같이 미사일 등의 유도 무기 성능이 발전함에 따라 동시에 이에 대항하여 전투기, 전차, 함선 등 그 요격 대상이 되는 여러 무기 체계들 또한 유도 무기에 대한 회피 및 방어 능력이 빠르게 발전하고 있다. 따라서 유도 무기 역시 이들 표적에 대한 요격 성능 및 파괴력 증진이 필요하며 이를 위해서는 보다 향상된 유도 법칙의 개발이 필요하다.

과거에는 기술적 한계로 인하여 탐색기의 센서로 부터 획득할 수 있는 정보가 제한적이었다. 그리하여 고전적인 종말 유도 법칙들은 이러한 탐색기에서 기인한 한계 때문에 표적을 점질량(point mass) 물체로만 간주하여 개발되었다. 하지만 이

처럼 표적을 점질량 물체로 가정 하였을 경우에는 유도 법칙 설계에 있어 표적의 운동 및 자세를 고려할 수가 없다. 따라서 표적이 요격 부위에 대해 방어 능력이 높거나 탄두의 신관이 요격 시 충돌각에 민감하다면 미사일은 표적에 대한 효과적인 요격이 어렵다.

최근에는 탐색기의 영상 센서 기술의 발전으로 인하여 표적의 영상 정보를 통해서 표적의 6자유도 운동 및 자세를 정밀하게 추정할 수 있게 되었다. 그리하여 표적을 점질량 물체가 아닌 실제의 3차원 물체로 인식할 수 있게 되었다. 이처럼 탐색기로 부터 획득할 수 있는 정보가 많아지면 이를 유도 법칙 설계에 적용하여 미사일의 종말 유도 성능을 향상시킬 수 있다. 가령, 미사일이 표적을 요격하는 각도인 표적 충돌각(impact angle)을 제어할 수 있다면 적절한 비행경로의 설정이 용이 할 뿐만 아니라 표적에 대한 우회 공격 등이 가능하고 또한, 미사일 탄두의 효과를 극대화 할 수 있다.

표적 충돌각을 고려한 유도 법칙은 공대지 미사일에 대한 표적 충돌각 최적 유도 기법 연구에서 처음으로 고안되었다[16]. 이 연구에서는 표적을 지상의 고정된 물체로 보고 미사일과 표적의 운동방정식을 2차원 평면에 대해서 선형 시불변(linear time-invariant)으로 간략화한 운동 방정식만을 고려하였다. 한 편, [17]에서는 최적 유도 법칙을 이용 해 랑데부 문제를 풀 수 있음을 보였으며, 이를 보다 발전 시켜, [18]에서는 표적을 2차원 평면에서 정지한 물체가 아닌 일정한 속도와 가속도를 가지고 움직이는 지상 물체로 간주하고 표적 충돌각을 고려한 최적 유도 기법을 개발 하였다.

또한, 고전적인 미사일 유도 법칙을 이용하여 표적 충돌각을 고려한 유도 법칙을 개발하려는 시도도 있었는데, 시변(time-varying) 편향 비례 항법 유도 법칙을 이용하여 표적 충돌각을 고려하며 비선형성을 가진 표적의 운동 방정식을 선형화 하지 않았으며, 끝으로 잔여 비행 시간(time-to-go)을 추정하지 않아도 되는 유도 법

칙을 개발하였다[19]. [20]에서는 에너지를 최소화하는 관점에서 표적 충돌각을 고려한 최적 유도 법칙을 개발하였으며, 그 유도 명령을 닫힌 형태의 해로 구하였다. 나아가 이를 발전시켜 잔여 비행 시간의 급수를 가중치로 갖는 에너지 최소화 관점의 최적 유도 법칙을 개발하였으며 이를 위해 새로운 잔여 비행 시간 추정 기법을 고안하였다[21]. 그 후, [22]에서는 [21]에서 제안한 잔여 비행 시간의 급수로 이뤄진 에너지 최적화 가중치에 대한 일반화에 대해 연구했다. 그러나 이상의 유도 법칙들[19]-[22]은 자동조종장치의 동역학이 이상적으로 빠르다는 가정하에 이들 동역학을 고려하지 않고 설계한 법칙들이라는 한계가 있다.

그 외에도 선형 쿼드라틱(linear quadratic)을 이용한 유도 기법[23]-[25]과 슬라이딩 모드 제어를 이용한 기법[26]-[28] 등의 연구 결과가 발표되었으나 이들 유도 법칙은 모두 2차원 평면상에서의 요격 상황만을 가정하고 표적 충돌각을 고려하여 개발한 유도 법칙이다. 따라서 요와 피치의 커플링이 존재하는 BTT 미사일의 경우에는 적용하기에 적합하지 않다. 하지만 3차원 공간에서의 추적 기하학을 바탕으로 하여 표적 충돌각과 자동조종장치의 동역학을 고려한 유도 법칙은 아직까지 그 연구 결과가 부족한 실정이다. 드물긴 하나 3차원 추적 기하학과 표적 충돌각, 그리고 자동조종장치 동역학까지 모두 고려한 BTT 미사일의 유도 법칙이 개발되었다[29]. [29]에서는 정지 표적에 대한 표적 충돌각을 제한 조건으로 두고 비선형 계획법(nonlinear programming)을 이용하여 BTT 미사일 유도 법칙 문제의 해를 산출 하였으나. 그러나 이는 닫힌 형태의 해가 아닌 컴퓨터 연산을 통한 수치적 해만을 제시 한 것으로 미사일 시스템 역학 모델의 불확실성이 존재하는 실제 상황에서는 그 안정성을 보장할 수 없다. 또한 상태 변수의 초기값에 의해 결정되는 수치적 해이므로 기동하는 표적에 대해서는 적용할 수 없다는 문제점이 있다.

이와 같이 표적 충돌각을 고려한 유도 법칙의 개발은 대단히 중요한 과제이나 기존의 표적 충돌각을 고려한 유도 법칙들은 2차원 평면상에서만 표적 충돌각을

고려한 후, 이를 3차원 공간으로 확장하여 적용하고 있다. 그러나 이들 기존 유도 기법들은 3차원 공간에서 롤 각과 피치 가속도를 동시에 고려해야하는 BTT 미사일에 직접 적용하기에는 한계가 있다. 따라서 BTT 미사일의 표적 요격 성능을 향상 시키기 위해서 표적 충돌각과 자동조종장치 동역학을 고려한 유도 법칙의 개발이 필요하다.

1.2 연구 목표

본 논문에서는 BTT 미사일의 표적 요격 성능 향상을 위해 탐색기로 부터 획득한 표적의 3차원 정보를 이용하여 표적 충돌각과 자동조종장치 동역학을 고려한 최적 종말 유도 법칙을 개발하는 것을 목표로 한다. 이를 위해 최근 개발된 자동조종 제어기를 착안한다[30]. [30]는 구동기 동역학의 영향을 보상할 수 있는 새로운 자동조종 제어기로 입출력 동특성을 비행 환경과 무관하게 일정한 형태의 선형 시스템으로 표시할 수 있다. 이로 인하여 자동조종장치와 유도법칙 간의 커플링 문제를 해결할 수 있게 되었다. 따라서 이를 통해 자동조종장치 동역학을 고려한 최적 유도 법칙을 설계한다.

한편, 기존의 표적 충돌각을 고려한 유도 법칙 연구 결과는 2차원 평면상의 추적 기하학만을 고려한 것으로 국한되었지만, 본 논문에서는 앞서 언급한 자동조종장치 동역학과 더불어 3차원에서의 추적 기하학을 모두 고려하여 롤 각과 피치 가속도 명령의 최적 해를 닫힌 형태(closed-form)으로 구한다. 최적 유도 법칙 문제의 해는 수학적으로 매우 복잡한 형태를 갖지만, 잔여 비행 시간(time-to-go)의 함수를 계수로 가지는 시변 상태 궤환 형태(state-feedback with time-varying gain)의 꼴로 정리할 수 있다. 나아가 최적 유도 법칙의 실용성 제고를 위해 단순화를 거쳐 정리한 간략화 한 제어 입력을 구한다. 이를 통해서 제어 입력을 지시표(look-up table) 형태로 구하지 않고 실시간 계산이 가능하도록 한다.

또한, 이와 같이 구한 닫힌 형태의 최적 해의 타당성을 입증 해 본다. 최적 유도 법칙 문제의 닫힌 해는 준상태 방정식의 근사를 통해 구할 수 있는데 이에 대한 타당성을 입증하기 위해서 준상태 방정식을 근사하지 않고 구한 수치 해와 비교 해 본다. 동역학 방정식을 근사하지 않고 풀기 위해서는 상태 변수(state variable)의 초기값과 준상태 변수(costate variable)의 최종값을 이용하여 상태 방정식 및 준상태 방정식을 2점 경계치 문제(two-point boundary value problem)화 한다. 이렇게 정리

된 문제는 사격법(shooting method)을 사용하여 풀 수 있다.

끝으로 개발된 유도 법칙의 성능 분석을 위해 모의 실험을 수행한다. 이를 위해 자동조종장치 동역학, 구동기 동역학, 미사일 동역학 등의 비선형성을 근사 없이 모두 고려한 모의 실험 환경을 구축한다. 이러한 모의 실험 환경에서 실제 전장에서 가능한 모든 경우를 상정하여 다양한 모의 실험을 실시 해 개발한 유도 법칙의 성능을 입증한다.

제 2 장 BTT 미사일 시스템의 모델 소개

2.1 미사일 시스템의 동역학적 상태 방정식

미사일 시스템은 비행 중인 비행 환경에 의해 발생하는 여러 가지 복잡한 공기역학(aerodynamics)과 그로 인한 힘과 모멘트에 대응하여 일어나는 강체 동역학(rigid-body dynamics)으로 구성되는 비선형성이 강한 시스템이다. 3차원 공간을 비행하는 강체의 동역학은 다음과 같이 세 개의 힘 방정식과 세 개의 모멘트 방정식으로 표현된다[1, 2].

$$\begin{aligned} F_x &= m(\dot{U} + qW - rV) \\ F_y &= m(\dot{V} + rU - pW) \\ F_z &= m(\dot{W} + pV - qU) \\ M_x &= I_x \dot{p} - (I_y - I_z)qr + I_{yz}(r^2 - q^2) - I_{zx}(pq + \dot{r}) + I_{xy}(rp - \dot{q}) \\ M_y &= I_y \dot{q} - (I_z - I_x)rp + I_{zx}(p^2 - r^2) - I_{xy}(qr + \dot{p}) + I_{yz}(pq - \dot{r}) \\ M_z &= I_z \dot{r} - (I_z - I_x)pq + I_{xy}(q^2 - p^2) - I_{yz}(rp + \dot{q}) + I_{zx}(qr - \dot{p}) \end{aligned} \tag{2.1}$$

여기에서 비행 중인 강체에 작용하는 힘과 모멘트는 미사일의 받음각, 옆 미끄럼각, 제어 편각 및 비행 속도, 공기 밀도에 대한 비선형 함수로 주어지기 때문에 미사일의 제어를 어렵게 하는 기본적인 요인으로 작용한다. 이러한 힘과 모멘트는 풍동 실험을 통하여 구한 공력 계수들에 의하여 다음과 같이 나타난다[1].

$$\begin{aligned}
F_x &= QSC_x(\alpha, \beta, M, \delta_q, \delta_r) + F_{th} \\
F_y &= QSC_y(\alpha, \beta, M, \delta_r) \\
F_z &= QSC_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) \\
M_x &= QSDC_l(\alpha, \beta, M, \delta_p) \\
M_y &= QSDC_m(\alpha, M, \delta_q) \\
M_z &= QSDC_n(\alpha, \beta, M, \delta_r)
\end{aligned} \tag{2.2}$$

BTT 미사일의 동역학 방정식을 얻기 위하여 다음과 같은 가정을 한다.

(A1) m, I_x, I_y, I_z 는 상수로 주어진다.

(A2) 미사일 동체는 피치 평면에 대하여 대칭이다.

가정 (A1)은 종말 유도 상황에서는 일반적으로 받아들여지는 가정이다[9]. 가정 (A2)는 BTT 미사일의 설계 과정에서 만족시키도록 하는 조건이며, 이는 I_{xy} 와 I_{yz} 의 값이 0임을 뜻한다. 이와 같은 가정들을 바탕으로 다음과 같이 BTT 미사일에 대한 비선형 상태 방정식을 얻을 수 있다.

(Roll Dynamics)

$$\begin{aligned}
\dot{p} &= \frac{I_z}{I_x I_z - I_{zx}^2} QSDC_l(\alpha, \beta, M, \delta_p) \\
&+ \frac{I_{zx}}{I_x I_z - I_{zx}^2} QSDC_n(\alpha, \beta, M, \delta_r) \\
&+ \frac{I_y I_z - I_z^2 - I_{zx}^2}{I_x I_z - I_{zx}^2} qr + \frac{I_{zx}(I_z + I_x - I_y)}{I_x I_z - I_{zx}^2} pq \\
\dot{\phi} &= p
\end{aligned} \tag{2.3}$$

(Yaw Dynamics)

$$\begin{aligned}
\dot{V} &= pW - Ur + \frac{QS}{m}C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r) \\
\dot{r} &= \frac{I_x}{I_x I_z - I_{zx}^2} QSDC_n(\alpha, \beta, M, \delta_r) \\
&\quad + \frac{I_{zx}}{I_x I_z - I_{zx}^2} QSDC_l(\alpha, \beta, M, \delta_r) \\
&\quad + \frac{I_{zx}(I_y - I_z - I_x)}{I_x I_z - I_{zx}^2} qr + \frac{I_x^2 + I_{zx}^2 - I_x I_y}{I_x I_z - I_{zx}^2} pq
\end{aligned} \tag{2.4}$$

(Pitch Dynamics)

$$\begin{aligned}
\dot{W} &= -pV + Uq + \frac{QS}{m}C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) \\
\dot{q} &= \frac{QSD}{I_y}C_m(\alpha, M, \delta_q) + \frac{I_z - I_x}{I_y}pr + \frac{I_{zx}}{I_y}(r^2 - p^2) \\
A_z &= \frac{QS}{m}C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q)
\end{aligned} \tag{2.5}$$

여기서, C_y, C_z, C_m, C_n, C_l 는 풍동 실험을 통해 지시표 형태로 구해지는 공역학 계수로써, $\alpha, \beta, M, \delta_p, \delta_q, \delta_r$ 등의 함수로 구성되어있다. 위의 방정식에는 X_M 축 방향의 직선 운동에 대한 동역학이 나타나 있지 않으며, 이는 X_M 축 방향의 가속도가 제어 편각에 의해서 제어 가능한 변수가 아니기 때문이다. 따라서, 실제 미사일 시스템에서도 X_M 축 방향의 직선 운동은 추진 기관의 추력(thrust)에 따라 결정되게 된다. 그러므로 미사일 운동에 대한 상태 방정식에서는 X_M 축 방향 선속도 U 를 시변 외부 변수(time-varying exogenous variable)로 다룬다.

2.2 미사일 시스템의 공력학적 특성

비행중인 미사일에 작용하고 있는 공력학적 힘과 모멘트의 특성은 다음과 같이 나타낼 수 있다. 먼저, $F_M \triangleq F_x i + F_y j + F_z k$ 을 전체 공력학적 힘이라 하고, $F_B \triangleq F_{Bx} i + F_{By} j + F_{Bz} k$ 를 미사일의 몸체에 의해 비행중 발생되어 평균적으로 C_b (center-of-pressure of cylindrical body)에 작용되는 힘이라 하자. 또한, 제어 편각과 꼬리 날개에 의해 발생되어 평균적으로 C_f (center-of-pressure of control fins)에 작용되는 힘을 $F_F \triangleq F_{Fx} i + F_{Fy} j + F_{Fz} k$ 라 하자. 그리고 F_B 와 F_F 의 수직 방향 분력을 각각 $F_{B_N} \triangleq F_{By} j + F_{Bz} k$ 와 $F_{F_N} \triangleq F_{Fy} j + F_{Fz} k$ 라 하자. 지금까지 정의된 힘들은 그림 2.1에 나타나 있다. 그림에서 l_g, l_b, l_f 는 각각 미사일의 앞 부분으로부터 C_g (center-of-gravity), C_b, C_f 까지의 거리를 나타낸다. 추력이 소멸된 상태에서는 l_b 와 l_g 가 상수임은 자명하다. 꼬리날개에 작용하는 힘은 비행 방향에 따라 다르게 나타나기 때문에 그 힘의 평균적 작용점은 다를 수 있으므로 엄밀하게 l_f 는 상수가 아닌 롤 각에 대한 함수로 주어진다. 그러나 꼬리날개의 축방향 길이가 미사일의 전체 길이에 비하여 현저히 작다고 할 수 있으므로 평균적으로 l_f 는 상수로 취급될 수 있다. 지금까지의 정의들과 그림 2.1로부터 다음과 같은 가정은 쉽게 받아들여질 수 있다[31, 32].

(A3) F_y, F_z, M_y, M_z 가 다음과 같이 분해된다.

$$\begin{aligned}
 F_y &= F_{By} + F_{Fy} \\
 F_z &= F_{Bz} + F_{Fz} \\
 M_y &= (l_b - l_g)F_{Bz} + (l_f - l_g)F_{Fz} \\
 M_z &= -(l_b - l_g)F_{By} - (l_f - l_g)F_{Fy}
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

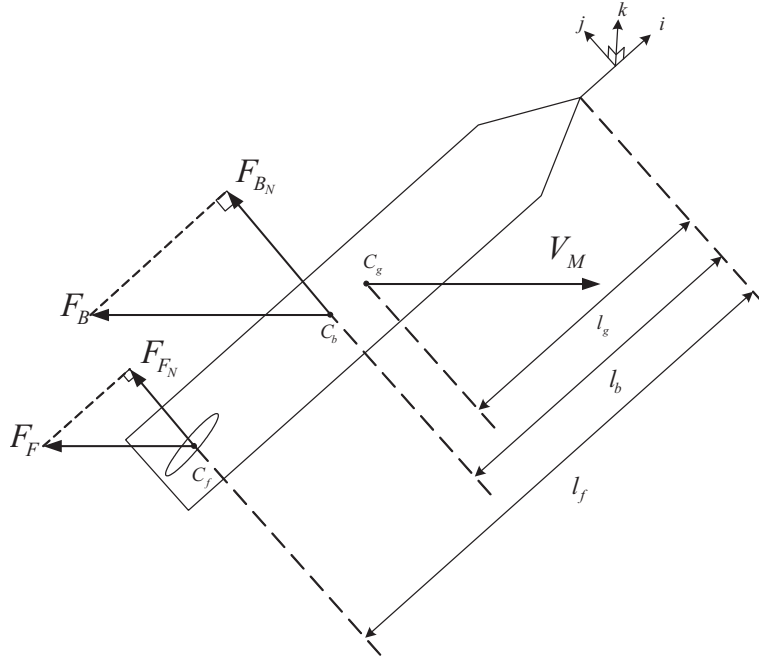


그림 2.1: 비행중인 미사일에 작용하는 힘

가정 (A3)는 F_y 와 F_z 가 제어 편각의 영향을 받는 힘과 그렇지 않은 힘으로 분해될 수 있다고 가정하는 것이다. 그리고 M_y 와 M_z 도 F_B 와 F_F 의 수직 분력에 의하여 완벽하게 표현된다고 가정하였다.

다음은 F_{B_N} 과 F_{F_N} 의 성질을 자세히 분석하도록 한다. 실제로, BTT 미사일의 비최소 위상 특성은 F_{F_N} 에 의해 발생하게 된다. F_{F_N} 은 제어 편각에 따라 매우 복잡하게 변화하기 때문에 단일한 수학적 형태로 표시하기가 매우 힘들지만, 대부분의 미사일 시스템은 다음 가정을 만족시킨다.

(A4) C_l, C_y, C_z 는 각각 $\delta_p, \delta_r, \delta_q$ 에 대하여 가역이다.

가정 (A4)가 타당하다는 것은 이미 잘 보여진 사실이다[32, 33]. 따라서, 다음을 만족시키는 사상(mapping) K_l, K_y, K_z 가 존재한다.

$$\begin{aligned} C_l(\alpha, \beta, M, K_l(\alpha, \beta, M, u_p, \delta_r), \delta_r) &= u_p \\ C_y(\alpha, \beta, M, K_y(\alpha, \beta, M, u_y)) &= u_y \\ C_z(\alpha, \beta, M, K_z(\alpha, \beta, M, u_z)) &= u_z \end{aligned} \quad (2.7)$$

공역학 계수 C_l, C_y, C_z 는 $\alpha, \beta, M, \delta_p, \delta_q, \delta_r$ 의 함수로 이루어진 비선형 함수이며, 일반적으로 풍동 실험을 통한 지시표 형태로 주어지게 된다, 따라서, 그의 역사상인 K_l, K_y, K_z 역시 지시표 형태로 구성할 수 있게 된다. 예를 들어, K_l 의 경우 주어진 범위 안에서 임의의 $\alpha, \beta, M, \delta_r$ 값에 대하여 $C_l(\alpha, \beta, M, \delta_p^c, \delta_r), \delta_r) = u_p$ 를 만족하는 δ_p^c 를 찾아 지시표를 구성하는 문제가 된다.

다음으로 미사일 동체에 작용하는 외력에 대해 아래와 같은 가정을 도입한다.

(A5) F_{B_N} 은 오직 Q 와 α_T 에 대한 함수로서 다음과 같이 주어진다.

$$|F_{B_N}| = Qf_N(\alpha_T)$$

여기에서 함수 $f_N : [0, \alpha_{\max}] \rightarrow \mathfrak{R}$ 은 연속적으로 미분 가능하며 단조 증가한다.

엄밀하게 말하면, f_N 은 α_T 뿐만 아니라 ϕ 와 V_M 에 의해서도 영향을 받는다. 그러나 $\alpha_T \leq 25(deg)$ 이고 $V_M \geq V_s$ 인 경우에는 ϕ 와 V_M 의 영향을 상대적으로 무시할 수 있다고 알려져 있다. [35]에서는 실험 자료를 바탕으로 f_N 을 단순하게 $f_N = k \sin(\alpha_T), k > 0$ 와 같이 표시하였으며 이는 $\alpha_{\max} < 45(deg)$ 범위에서 가정 (A5)를 만족시킨다.

이제, 다음과 같이 함수 H_a, H_b 를 정의하고, 수학적 편의를 위하여 아래와 같은

가정을 한다. 이는 일반적인 상황에서 잘 만족된다[32].

$$H_a\left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M}\right) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{if } V = W = 0 \\ \left(\frac{l_f - l_b}{I_z}\right) \frac{V/V_M}{\sqrt{|V/V_M|^2 + |W/V_M|^2}} f_N\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{|V/V_M|^2 + |W/V_M|^2}\right)\right), & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$H_b\left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M}\right) \triangleq \begin{cases} 0, & \text{if } V = W = 0 \\ \left(\frac{l_f - l_b}{I_y}\right) \frac{W/V_M}{\sqrt{|V/V_M|^2 + |W/V_M|^2}} f_N\left(\sin^{-1}\left(\sqrt{|V/V_M|^2 + |W/V_M|^2}\right)\right), & \text{otherwise} \end{cases} \quad (2.8)$$

(A6) H_a, H_b 는 $V = 0, W = 0$ 에서 연속 미분 가능하다.

(A7) 비행중에는 양의 상수 $\alpha_{\max} < 45^\circ$ 에 대하여 $0 \leq \alpha_T \leq \alpha_{\max}$ 를 만족한다.

F_{By}, F_{Bz}, H_a, H_b 의 정의와 가정 (A5)에 의하여 다음과 같은 관계식이 만족함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} F_{By} &= -|F_{BN}| \cos \phi = \frac{QI_z}{l_b - l_f} H_a\left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M}\right) \\ F_{Bz} &= -|F_{BN}| \sin \phi = \frac{QI_y}{l_b - l_f} H_b\left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M}\right) \end{aligned} \quad (2.9)$$

가정 (A4)와 함께, 식 (2.1), (2.9)에 의하면 F_{Fy} 와 F_{Fz} 는 다음과 같이 표시된다.

$$\begin{aligned} F_{Fy} &= QSC_y(\alpha, \beta, M, \delta_r) - \frac{QI_z}{l_b - l_f} H_a(\tilde{V}, \tilde{W}) \\ F_{Fz} &= QSC_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) - \frac{QI_y}{l_b - l_f} H_b(\tilde{V}, \tilde{W}) \end{aligned} \quad (2.10)$$

위의 결과를 종합하면 공력 함수간에 다음과 같은 관계식이 성립함을 알 수 있다.

$$\begin{aligned}
C_m(\alpha, M, \delta_q) &= \frac{I_y}{SD} H_b(\tilde{V}, \tilde{W}) + \frac{l_f - l_g}{D} C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) \\
C_n(\alpha, \beta, M, \delta_r) &= -\frac{I_z}{SD} H_a(\tilde{V}, \tilde{W}) - \frac{l_f - l_g}{D} C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r)
\end{aligned} \tag{2.11}$$

위의 식에 나타난 공력 함수들간의 관계는 대개의 미사일 시스템이 일반적으로 만족시키는 것으로써, 미사일 동체에 작용하는 힘과 제어 편각에 작용하는 힘을 모두 포함하고 있다. 특히, 제어 편각에 작용하는 힘 성분은 미사일 시스템이 비최소 위상 특성을 갖게 하는 원인이지만, 기존의 자동조종 제어기 설계 기법 중 상당수는 제어 편각에 작용하는 힘 성분을 무시하여 얻어지는 최소위상 시스템에 대하여 궤환 선형화 기법을 적용하여 제어기를 구성함으로써 내부 동역학이 불안정해지는 문제점이 발생한다.

2.3 구동기 동역학을 고려한 자동조종 제어기

이 장에서는 구동기 동역학이 상대적으로 느릴 경우에도 비최소위상 특성을 갖는 미사일 가속도 동역학을 효과적으로 제어할 수 있는 자동조종 제어기[30]에 대하여 소개한다. 식 (2.7)의 K_l 을 이용하여 롤 자동조종 제어기를 아래와 같이 구성한다.

$$\delta_p^c = K_l(\alpha, \beta, M, u_p, \delta_r) \quad (2.12)$$

롤 채널은 비최소위상 특성을 갖지 않으므로, 잘 알려진 궤환 선형화 기법을 직접 적용하여 아래와 같이 제어 입력 u_p 를 설계할 수 있다.

$$u_p = -\frac{I_{zx}}{I_z} C_n - \frac{I_y I_z - I_z^2 - I_{zx}^2}{Q S d I_z} q r - \frac{I_{zx}(I_z + I_x - I_y)}{Q S d I_z} p q + \frac{I_x I_z - I_{zx}^2}{Q S d I_z} \left[-a_p \lambda_p \omega_n p - b_p \lambda_p^2 \omega_n^2 \phi + \lambda_p^3 \omega_n^3 \int_0^t (\phi^c(\tau) - \phi(\tau)) d\tau \right] \quad (2.13)$$

양의 상수인 $a_p, b_p, \omega_n, \lambda_p$ 는 롤 채널의 입출력 동특성을 결정 지어주는 설계 변수들이다. ω_n 은 피치 채널의 대역폭을 결정하기 위한 변수이며, λ_p 는 피치 채널에 대한 롤 채널의 대역폭 비율을 조절하기 위한 변수이다. 일반적인 미사일의 경우 롤 채널이 피치 채널보다 3배 정도 빠르다고 알려져 있다($\lambda_p=3$). 이제 구동기 동역학이 없다고 가정하면 이를 통해 구해지는 롤 채널 동역학은 아래와 같다.

(Closed-Loop Roll Dynamics)

$$\begin{aligned} \dot{p} &= -a_p \lambda_p \omega_n p - b_p \lambda_p^2 \omega_n^2 \phi + \lambda_p^2 \omega_n^2 \zeta_p \\ \dot{\zeta}_p &= \lambda_p \omega_n (\phi^c - \phi) \\ \dot{\phi} &= p \end{aligned} \quad (2.14)$$

따라서, 롤 채널의 입출력 전달함수는 다음과 같이 주어진다.

$$\frac{\mathcal{L}[\phi(t)]}{\mathcal{L}[\phi^c(t)]} = \frac{1}{\left(\frac{s}{\lambda_p \omega_n}\right)^3 + a_p \left(\frac{s}{\lambda_p \omega_n}\right)^2 + b_p \left(\frac{s}{\lambda_p \omega_n}\right) + 1} \quad (2.15)$$

식 (2.15)로부터 롤 자동조종 제어기는 롤 각 명령을 정확하게 추종함을 알 수 있다.

식 (2.7)의 K_y, K_z 를 이용하여 요와 피치 채널의 자동조종 제어기 역시 아래와 같이 구성한다.

$$\begin{aligned}\delta_r^c &= K_y \left(\alpha, \beta, M, \frac{m(u_y + Ur)}{QS} \right) \\ \delta_q^c &= K_z \left(\alpha, \beta, M, \frac{m(u_z - Uq)}{QS} \right)\end{aligned}\quad (2.16)$$

여기서, u_y 와 u_z 는 새로 제안될 제어 입력이다. 이를 통하여 요와 피치 채널의 동역학은 아래와 같이 주어진다.

(Closed-Loop Yaw Dynamics)

$$\begin{aligned}\dot{V} &= pW + u_y + \frac{QS}{m}C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r) - \frac{QS}{m}C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r^c) \\ \dot{r} &= -h_{v1}Ur - h_{v1}u_y - QH_a \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) + \frac{I_x - I_y}{I_z}pq - \frac{I_{zx}}{I_z}qr \\ &\quad + \frac{I_{zx}}{I_z}[-a_p\lambda_p\omega_n p - b_p\lambda_p^2\omega_n^2\phi + \lambda_p^2\omega_n^2\zeta_p] \\ &\quad + \frac{h_{v1}QS}{m}C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r) - \frac{h_{v1}QS}{m}C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r^c)\end{aligned}\quad (2.17)$$

(Closed-Loop Pitch Dynamics)

$$\begin{aligned}\dot{W} &= -pV + u_z + \frac{QS}{m}C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) - \frac{QS}{m}C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q^c) \\ \dot{q} &= -h_{v2}Uq + h_{v2}u_z + QH_b \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) + \frac{I_z - I_x}{I_y}pr + \frac{I_{zx}}{I_y}(r^2 - p^2) \\ &\quad + \frac{h_{v2}QS}{m}C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) - \frac{h_{v2}QS}{m}C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q^c) \\ A_z &= -Uq + u_z + \frac{QS}{m}C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q) - \frac{QS}{m}C_z(\alpha, \beta, M, \delta_q^c)\end{aligned}\quad (2.18)$$

여기서, $h_{v1} \triangleq \frac{(l_f - l_g)m}{I_z}$, $h_{v2} \triangleq \frac{(l_f - l_g)m}{I_y}$ 로 정의되며 가정 (A1)에 의해 h_{v1}, h_{v2} 는 상수임을 알 수 있다.

위의 페루프 동역학에서 요와 피치 채널의 각속도 변화율 q, r 을 고속 및 저속 동역학으로 구분할 수 있다. 이 때, 구동기 동역학을 무시할 경우, 고속 동역학이 매우 빠르게 수렴하게 되므로 $\dot{q} = 0, \dot{r} = 0$ 으로 두어 구해진 축소된 동역학으로부터

제어기를 구성하는 것이 가능하다[32]. 또한, 고속 동역학의 대역폭은 U 의 크기에 따라 결정되는데, 구동기 동역학이 고속 동역학보다 느릴 경우 크면 시스템이 불안정해진다[34]. 그러므로 구동기 동역학을 보상하기 위해 다음의 제어 입력을 설계한다. $\alpha_c \triangleq 1 - \bar{\alpha}_c \epsilon_a$ 로 정의되는 설계 변수이며, 0과 1사이 값을 가져 고속 동역학의 대역폭을 조절하는 역할을 한다.

$$u_y = -pW - a_y \alpha_c \omega_n V + \alpha_c \omega_n \zeta_y - (1 - \alpha_c) \left(Ur + \frac{1}{h_{v1}} QH_a \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) \right) \quad (2.19)$$

$$u_z = pV + \alpha_c \omega_n F(\rho, U, V, W, \dot{\rho}, \dot{U}) + \alpha_c \omega_n G(\rho, U, V, W)v_z + (1 - \alpha_c) \left(Uq - \frac{1}{h_{v2}} QH_b \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) \right) \quad (2.20)$$

$$v_z = -a_z v_o + \zeta_z \quad (2.21)$$

$$\dot{v}_o = -\lambda_z \omega_n v_o + \lambda_z \omega_n A_z \quad (2.22)$$

이 때,

$$\zeta_y(t) \triangleq -\alpha_c \omega_n \int_0^t V(\tau) d\tau \quad (2.23)$$

$$\zeta_z(t) \triangleq \omega_n \int_0^t (A_z^c - v_o) d\tau \quad (2.24)$$

이제 위의 새로운 제어 입력을 통해 구해진 요 및 피치 채널의 동역학은 아래와 같다.

(Closed-Loop Yaw Dynamics)

$$\begin{aligned} \dot{V} = & -a_y \alpha_c \omega_n V + \alpha_c \omega_n \zeta_y - (1 - \alpha_c) \left(Ur + \frac{1}{h_{v1}} QH_a \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) \right) \\ & + \frac{QS}{m} C_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{W}{U} \right), \tan^{-1} \left(\frac{V}{U} \right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_r \right) - \frac{QS}{m} C_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{W}{U} \right), \tan^{-1} \left(\frac{V}{U} \right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_r^c \right) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned}
\dot{r} = & -\alpha_c h_{v1} U r - h_{v1} (-pW - a_y \alpha_c \omega_n V + \alpha_c \omega_n \zeta_y) - \alpha_c Q H_a \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) \\
& + \frac{I_x - I_y}{I_z} p q - \frac{I_{zx}}{I_z} q r + \frac{I_{zx}}{I_z} (-a_p \lambda_p \omega_n p - b_p \lambda_p^2 \omega_n^2 \phi + \lambda_p^2 \omega_n^2 \zeta_p) \\
& - \frac{h_{v1} Q S}{m} \left\{ C_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{W}{U} \right), \tan^{-1} \left(\frac{V}{U} \right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_r \right) - C_y \left(\tan^{-1} \left(\frac{W}{U} \right), \tan^{-1} \left(\frac{V}{U} \right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_r^c \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.26}$$

(Closed-Loop Pitch Dynamics)

$$\begin{aligned}
\dot{W} = & \alpha_c \omega_n F(\rho, U, V, W, \dot{\rho}, \dot{U}) + \alpha_c \omega_n G(\rho, U, V, W) v_z \\
& + (1 - \alpha_c) \left(U q - \frac{1}{h_{v2}} Q H_b \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) \right) \\
& + \frac{Q S}{m} C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{W}{U} \right), \tan^{-1} \left(\frac{V}{U} \right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_q \right) - \frac{Q S}{m} C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{W}{U} \right), \tan^{-1} \left(\frac{V}{U} \right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_q^c \right)
\end{aligned} \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}
\dot{q} = & -\alpha_c h_{v2} U q + h_{v2} \left\{ pV + \alpha_c \omega_n F(\rho, U, V, W, \dot{\rho}, \dot{U}) + \alpha_c \omega_n G(\rho, U, V, W) v_z \right\} \\
& + \alpha_c Q H_b \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) + \frac{I_z - I_x}{I_y} p r + \frac{I_{zx}}{I_y} (r^2 - p^2) \\
& + \frac{h_{v2} Q S}{m} \left\{ C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{W}{U} \right), \tan^{-1} \left(\frac{V}{U} \right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_q \right) - C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{W}{U} \right), \tan^{-1} \left(\frac{V}{U} \right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_q^c \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
A_z = & -U q + pV + \alpha_c \omega_n F(\rho, U, V, W, \dot{\rho}, \dot{U}) + \alpha_c \omega_n G(\rho, U, V, W) v_z \\
& + (1 - \alpha_c) \left(U q - \frac{1}{h_{v2}} Q H_b \left(\frac{V}{V_M}, \frac{W}{V_M} \right) \right) \\
& + \frac{Q S}{m} \left\{ C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{W}{U} \right), \tan^{-1} \left(\frac{V}{U} \right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_q \right) - C_z \left(\tan^{-1} \left(\frac{W}{U} \right), \tan^{-1} \left(\frac{V}{U} \right), \frac{V_M}{V_S}, \delta_q^c \right) \right\}
\end{aligned} \tag{2.29}$$

위의 보상기를 적용한 시스템의 식을 통해 고속 동역학의 대역폭이 각각 $\alpha_c h_{v1} U$, $\alpha_c h_{v2} U$ 로 정해짐을 알 수 있다. 따라서, 구동기 동역학의 대역폭에 맞게 α_c 의 값을 조절하여 구동기 동역학의 영향을 효과적으로 보상할 수 있다. 여기서, $\epsilon_a \rightarrow 0$ 일 때는 구동기 동역학이 이상적으로 빠를 경우를 뜻하는데, 이 때 $\alpha_c \rightarrow 1$ 이 되므로, 기존의 [32]의 자동조종 제어기와 같은 형태가 됨을 알 수 있다. 이제 다음과 같이 크기 및 시간 변환을 하여, 유사 특이 섭동 기법을 적용한다.

$$\begin{aligned}
\hat{U}(t) &\triangleq U\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{V}(t) &\triangleq V\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{W}(t) &\triangleq W\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{p}(t) &\triangleq \frac{1}{\omega_n}p\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{q}(t) &\triangleq q\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{r}(t) &\triangleq r\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{\phi}^c(t) &\triangleq \phi^c\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{\phi}(t) &\triangleq \phi\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{\zeta}_p(t) &\triangleq \zeta_p\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{\zeta}_y(t) &\triangleq \zeta_y\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{A}_z^c(t) &\triangleq A_z^c\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{A}_z(t) &\triangleq A_z\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{\rho}(t) &\triangleq \rho\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{Q}(t) &\triangleq Q\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{v}_z(t) &\triangleq v_z\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{v}_o(t) &\triangleq v_o\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{\zeta}_z(t) &\triangleq \zeta_z\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{u}_y(t) &\triangleq \frac{1}{\omega_n}u_y\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{u}_z(t) &\triangleq \frac{1}{\omega_n}u_z\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{V}_M(t) &\triangleq V_M\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{x}_i(t) &\triangleq x_i\left(\frac{t}{\omega_n}\right), \\
\hat{\delta}_i^c(t) &\triangleq \delta_i^c\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & \hat{\delta}_i(t) &\triangleq \delta_i\left(\frac{t}{\omega_n}\right), & i &= q, r
\end{aligned} \tag{2.30}$$

변환 된 시스템에 대하여 2단계로 특이섭동기법을 적용한다. 먼저, 구동기 동역학이 수렴하였다고 간주하여 $\epsilon_a \rightarrow 0$ 으로 두어 1차적으로 축소된 동역학을 구한 후, 고속 동역학이 수렴하였다고 보고 다시 $\omega_n \rightarrow 0$ 으로 두어 최종적으로 축소된 동역학을 구할 수 있다.

(Reduced Yaw Dynamics)

$$\dot{\hat{V}} = -a_y \hat{V} + \hat{\zeta}_y \tag{2.31}$$

$$\dot{\hat{\zeta}}_y = -\hat{V} \tag{2.32}$$

$$\left(h_{v1}\hat{U} + \frac{I_{zx}\hat{q}}{I_z}\right)\hat{r} = -\frac{\hat{\rho}(\hat{U}^2 + \hat{V}^2 + \hat{W}^2)}{2}H_a\left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M}\right) \tag{2.33}$$

(Reduced Pitch Dynamics)

$$\dot{\hat{W}} = F(\rho, U, \hat{V}, \hat{W}, \hat{\rho}, \dot{U}) + G(\rho, U, \hat{V}, \hat{W})\hat{v}_z \tag{2.34}$$

$$\hat{q} = \frac{1}{h_{v2}\hat{U}} \left\{ \frac{\hat{\rho}(\hat{U}^2 + \hat{V}^2 + \hat{W}^2)}{2}H_b\left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M}\right) + \frac{I_{zx}\hat{r}^2}{I_y} \right\} \tag{2.35}$$

$$\hat{v}_z = -a_z \hat{v}_o + \hat{\zeta}_z \quad (2.36)$$

$$\dot{\hat{v}}_o = -\lambda_z (\hat{v}_o - \hat{A}_z) \quad (2.37)$$

$$\dot{\hat{\zeta}}_z = \hat{A}_z^c - \hat{v}_o \quad (2.38)$$

$$\hat{A}_z = -\frac{1}{h_{v2}} \left\{ \frac{\hat{\rho}(\hat{U}^2 + \hat{V}^2 + \hat{W}^2)}{2} H_b \left(\frac{\hat{V}}{\hat{V}_M}, \frac{\hat{W}}{\hat{V}_M} \right) + \frac{I_{zx}}{I_y} \hat{r}^2 \right\} \quad (2.39)$$

따라서, 축소된 요 채널의 속도는 다음과 같다.

$$\ddot{V} + a_y \omega_n \dot{V} + \omega_n^2 V = 0 \quad (2.40)$$

또한, 위 식에서 $\dot{\hat{A}}_z = \hat{v}_z$ 의 관계식을 유도할 수 있으며, 이에 따라 축소된 피치 채널의 입출력 동특성은 다음과 같다.

$$\bar{G}(s) \triangleq \frac{\mathcal{L}[\bar{A}_z(t)]}{\mathcal{L}[A_z^c(t)]} = \frac{\omega_n^2 (s + \lambda_z \omega_n)}{s^3 + \lambda_z \omega_n s^2 + a_z \lambda_z \omega_n^2 s + \lambda_z \omega_n^3} \quad (2.41)$$

위의 식 (2.41)에서 볼 수 있듯이 $\bar{G}(s)$ 는 최소위상 특성을 갖게 된다. 따라서, 실제 전체 시스템이 축소된 시스템을 따라가게 된다면 위의 제어 기법을 통해 비최소 위상 특성이 거의 사라지게 됨을 알 수 있다. 또한, 위의 축소된 피치 채널 입출력 동특성은 설계 변수인 α_c 와 무관하게 주어지므로, 구동기 동역학이 없을 때와 그 형태가 동일하게 나타나게 된다.

실제 상황에서는 공역학 계수들은 비선형성이 심한 지시표 형태로 주어지게 되므로 $C_y, C_z, C_m, C_n, H_a, H_b$ 사이의 관계식인 식 (2.11)는 정확히 들어맞지 않게 되므로, 앞서 언급한 관계식인 $\dot{\hat{A}}_z = \hat{v}_z$ 는 제어 편각에 따라 매우 빠르게 변화하는 불확실성을 가지게 된다. 이를 해결하기 위하여 식 (2.22)과 같은 1차 필터를 적용하였다. 필터의 설계 변수가 $\lambda_z \gg 1$ 의 값을 가지므로, 식 (2.41)의 $\bar{G}(s)$ 는 아래와 같

은 2차 선형 시스템의 형태로 근사될 수 있다.

$$\bar{G}(s) \simeq \frac{\omega_n^2}{s^2 + a_z \omega_n s + \omega_n^2} \quad (2.42)$$

정리하면, 제안된 자동조종 제어기에 의해 구해진 피치 채널의 입출력 동특성은 1개의 영점(zero)를 갖는 3차 선형 시스템의 형태로 주어지며 이는 영점이 없는 2차 선형 시스템의 형태로 잘 근사된다.

2.4 3차원 추적 기하학

3차원 공간에서의 미사일이 표적을 요격하는 상황을 공간상에서 나타내면 그림 2.2와 같다. 그림으로부터 추적 운동은 다음과 같이 나타난다[36].

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \mathbf{V}_T - \mathbf{V}_M = \dot{r}\mathbf{i}_L + \boldsymbol{\Omega}_L \times \mathbf{L} \\
 \mathbf{A}_T &= a_{yt}\mathbf{j}_T + a_{zt}\mathbf{k}_T = \boldsymbol{\Omega}_L \times \mathbf{V}_T + \boldsymbol{\Omega}_T \times \mathbf{V}_T \\
 \mathbf{A}_M &= a_{ym}\mathbf{j}_M + a_{zm}\mathbf{k}_M = \boldsymbol{\Omega}_L \times \mathbf{V}_M + \boldsymbol{\Omega}_M \times \mathbf{V}_M
 \end{aligned} \tag{2.43}$$

식(2.43)에 나타난 시선 벡터와 목표물 및 미사일의 속도는 각각의 좌표계에서 다음과 같이 주어진다.

$$\mathbf{L} = r\mathbf{i}_L, \quad \mathbf{V}_T = v_t\mathbf{i}_T, \quad \mathbf{V}_M = v_m\mathbf{i}_M \tag{2.44}$$

또한, 식(2.43)의 회전 각속도는 각 좌표계의 오일러각을 이용하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \boldsymbol{\Omega}_L &= \dot{\psi}_L \sin \theta_L \mathbf{i}_L - \dot{\theta}_L \mathbf{j}_L + \dot{\psi}_L \cos \theta_L \mathbf{k}_L \\
 &= \dot{\lambda}_x \mathbf{i}_L + \dot{\lambda}_y \mathbf{j}_L + \dot{\lambda}_z \mathbf{k}_L \\
 \boldsymbol{\Omega}_M &= \dot{\psi}_m \sin \theta_m \mathbf{i}_M - \dot{\theta}_m \mathbf{j}_M + \dot{\psi}_m \cos \theta_m \mathbf{k}_M \\
 \boldsymbol{\Omega}_T &= \dot{\psi}_t \sin \theta_t \mathbf{i}_T - \dot{\theta}_t \mathbf{j}_T + \dot{\psi}_t \cos \theta_t \mathbf{k}_T
 \end{aligned} \tag{2.45}$$

식(2.43)-(2.45)로 나타난 추적 기하학은 다음과 같이 비선형 미분 방정식으로 표현된다.

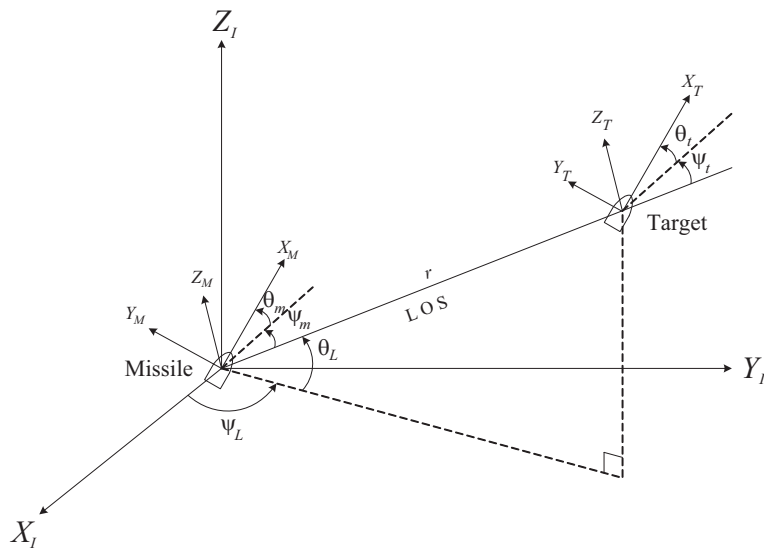


그림 2.2: 3차원 추적 기하학

$$\begin{aligned}
 \dot{r} &= (\rho c\theta_t c\psi_t + c\theta_m c\psi_m)V_m \\
 r\dot{\lambda}_y &= (s\theta_m - \rho s\theta_t)V_m \\
 r\dot{\lambda}_z &= (\rho c\theta_t s\psi_t - c\theta_m s\psi_m)V_m \\
 \dot{\theta}_m &= \frac{A_{zm}}{V_m} + V_m \tan \lambda_y s\psi_m (\rho c\theta_t s\psi_t - c\theta_m s\psi_m)/r \\
 &\quad - V_m c\psi_m (\rho s\theta_t - s\theta_m)/r \\
 \dot{\psi}_m &= \frac{A_{ym}}{V_m c\theta_m} - V_m s\theta_m c\psi_m \tan \lambda_y (\rho c\theta_t s\psi_t - c\theta_m s\psi_m)/(rc\theta_m) \\
 &\quad - V_m s\theta_m s\psi_m (\rho s\theta_t - s\theta_m)/(rc\theta_m) \\
 &\quad - V_m (\rho c\theta_t s\psi_t - c\theta_m s\psi_m)/r \\
 \dot{\theta}_t &= \frac{A_{zt}}{\rho V_m} + V_m s\psi_t \tan \lambda_y (\rho c\theta_t s\psi_t - c\theta_m s\psi_m)/r \\
 &\quad - V_m c\psi_m (\rho s\theta_t - s\theta_m)/r \\
 \dot{\psi}_t &= \frac{A_{yt}}{\rho V_m c\theta_t} - V_m s\theta_t c\psi_t \tan \lambda_y (\rho c\theta_t s\psi_t - c\theta_m s\psi_m)/(rc\theta_t) \\
 &\quad - V_m s\theta_t s\psi_t (\rho s\theta_t - s\theta_m)/(rc\theta_t) \\
 &\quad - V_m (\rho c\theta_t s\psi_t - c\theta_m s\psi_m)/r
 \end{aligned} \tag{2.46}$$

식(2.46)와 같이 미사일과 목표물의 3차원 추적 기하학은 매우 복잡한 고차 비선형 방정식으로 표현되기 때문에 직접 적용이 가능한 비선형 제어 이론이 전무한 실정이다. 또한, 미사일과 목표물의 상대 운동이 빠르게 동작하는 종말 유도 단계에서는 하부 시스템간 간섭 효과가 발생하여 요격 성능을 저하시키는 문제를 발생시킨다. 따라서 미사일 동역학의 채널간 간섭 효과와 전체 유도 미사일 시스템의 비선형성을 동시에 고려한 유도 법칙 설계 기법에 대한 연구가 필요하다.

제 3 장 표적 충돌각과 자동조종장치 동역학을 고려한 최적 유도 법칙 개발

3.1 최적 유도 문제 설정

본 절에서는 표적 충돌각과 자동조종장치의 동역학을 고려한 BTT 미사일의 최적 유도 법칙을 설계한다. 앞서, 2장에서 미사일이 표적을 요격할 때 3차원 공간상에서 이들의 기하학적 관계를 설명하였다. 그러나 이를 나타내는 식 (2.46)은 비선형 함수를 포함하는 복잡한 역학 방정식으로 표현되었다. 이러한 수식의 복잡도로 인해 식 (2.46)를 유도 법칙에 그대로 반영하기에는 무리가 따른다. 따라서 본 논문에서는 상정하고 있는 종말 유도 단계라는 상황에 합당한 가정들을 통해 단순화한 추적 기하학을 구하도록 한다.

(A8) 시선각 θ_L , ψ_L 은 충분히 작다.

(A9) 미사일의 속력 V_M 은 상수이다.

(A10) 미사일의 받음각 α 와, 옆미끄러짐각 β 는 충분히 작다.

(A11) 미사일과 목표물의 접근 속도는 상수이다.

(A12) 표적 충돌각 오차는 충분히 작다.

우선, 처음 미사일이 발사된 순간부터 중간 유도 단계까지 표적을 향한 방향으로 잘 유도 되었다고 보았을 때, 종말 유도 단계가 시작되는 시점에서 가정 (A8)은 타

당하다. 가정 (A9) 또한, 미사일이 중간 유도 단계까지 연료를 다 소진(burn out) 했다고 보았을 때 종말 유도 단계에서는 미사일에 추력이 가해지지 않으므로 타당한 가정이다. 가정 (A10)은 BTT 미사일의 구조적 특성으로 인해 기존 연구에서도 BTT 미사일의 종말 유도 단계에서는 일반적으로 받아들여지는 가정이다. 가정 (A11)은 미사일의 비행 속도가 일정하며 미사일이 목표를 향해 비행하고 있는 경우 타당한 가정으로 마찬가지로 종말 유도 단계에서는 받아들여질 수 있는 가정이다. 끝으로 가정 (A12)는 앞선 가정들과 마찬가지로 종말 유도 단계에서는 이미 중간 유도 단계에서 표적의 취약점과 같은 요격 부위를 파악하여 그 방향으로 유도 되었다고 볼 수 있다. 따라서 종말 유도 단계에서는 미사일이 표적을 요격하기 직전에 갑자기 표적의 정반대 편으로 돌아가 요격하는 등의 미사일의 기동 한계를 넘어서는 요격 상황은 고려하지 않는다고 보았을 때 본 가정 또한 타당하다.

표적 충돌각을 고려하기 위해 탐색기로 부터 미사일과 표적의 자세 정보를 추정하여 표적 충돌각 좌표계를 정의한다. 그림 3.1에서 표적 충돌각 좌표계 (X_T^*, Y_T^*, Z_T^*) 의 X_T^* 는 미사일이 표적을 요격할 때 미사일이 나아가는 방향과 일치하도록 정한다. 따라서, 맞추고자 하는 표적 충돌각은 관성 좌표계와 표적 충돌각 좌표계 사이의 회전 각으로 나타낼 수 있으며, 각각 요 방향을 ψ^* , 피치 방향을 θ^* 로 정의한다. 그림 3.2과 같이 미사일이 나아가는 방향과 관성 좌표계 사이의 자세 관계를 표적 충돌각으로 표시하였을 때, 각각 피치 방향 각을 θ , 요 방향 각을 ψ 로 정의한다. 이후 최적 유도 법칙을 설계할 때, 관성 좌표계와 표적 충돌각 좌표계 사이의 오일러 각인 원하는 표적 충돌각 θ^* , ψ^* 와 현재 표적 충돌각 $\theta(t)$, $\psi(t)$ 의 차이인 표적 충돌각 오차 $\theta_e \triangleq \theta^* - \theta(t)$, $\psi_e \triangleq \psi^* - \psi(t)$ 가 최소가 되도록 함으로써 목표로 하는 표적 충돌각에 맞는 요격 상황을 만들 수 있다. 이 때, 위 가정들을 만족하면서 표적이 충돌경로상에 있으면 등속 운동하는 표적에 대해 식 (2.46)의 추적 기하학을 유도 법칙 설계에 용이하도록 다음과 같이 단순화하여 쓸 수 있다[8, 13].

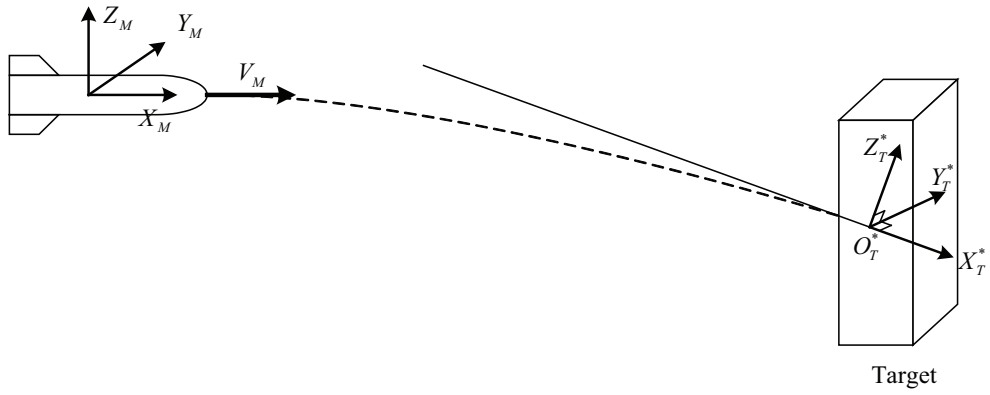


그림 3.1: 표적 충돌각 좌표계

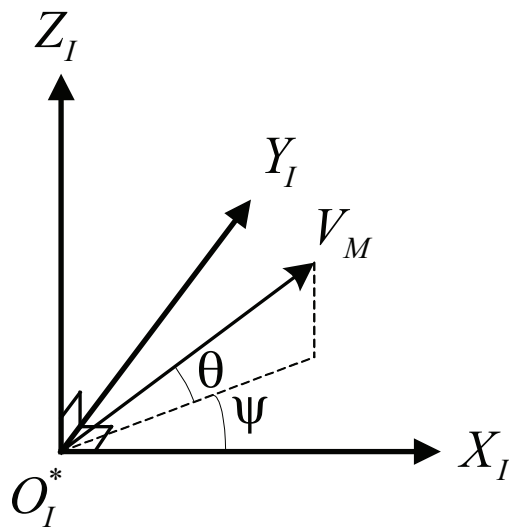


그림 3.2: 표적 충돌각의 정의

$$\begin{aligned}\dot{y} &= V_M \psi_e - V_{T_y} \\ V_M \dot{\psi}_e &= A_z \sin \phi\end{aligned}\tag{3.1}$$

$$\begin{aligned}\dot{z} &= V_M \theta_e - V_{T_z} \\ V_M \dot{\theta}_e &= -A_z \cos \phi + g\end{aligned}\tag{3.2}$$

이 때, y 와 z 는 각각 관성 좌표계에서 Y 축, Z 축에 대해 미사일과 표적의 상대 거리로 $y \triangleq y_T - y_M$, $z \triangleq z_T - z_M$ 로 정의할 수 있으며, V_{T_y} , V_{T_z} 는 각각 관성 좌표계에서 Y 축, Z 축에 대한 표적의 속도 성분이다. 또한, θ_e , ψ_e 는 각각 피치와 요 방향의 표적 충돌각 오차이며 ϕ 는 미사일의 롤 각, A_z 는 미사일의 피치 가속도이고, g 는 중력 가속도이다. 기존의 연구 결과들인 [4] - [12], [16] - [28]에서는 식 (3.1), (3.2)과 같은 3차원 추적 기하학을 고려하지 않은 채 단순히 2차원 평면 상에서의 추적 기하학만을 고려하였다. 이는 Y 혹은 Z 한 축에 대한 추적 기하학만을 고려한 것으로 식 (3.1)만을 고려하여 유도 법칙을 설계한 후, 이를 나머지 다른 축에 까지 확장하여 적용한 연구 결과들이다. 따라서 이는 앞서 언급하였듯이 롤과 피치 채널 간의 커플링이 있는 BTT 미사일에는 적합하지 않다.

이에 [13, 14]에서는 3차원 추적 기하학을 고려한 유도 법칙을 제안하였으나 롤 채널의 동역학이 매우 빠르다는 가정하에 이를 무시한 채 유도 법칙을 설계하였고, [16, 20, 22] 또한, 자동조종장치 동역학을 전혀 고려하지 않은 채 유도 법칙을 설계하였다. 본 논문에서는 유도 법칙 설계에 있어 자동조종장치 동역학을 고려하고자 앞서 2장에서 언급한 [30]에서 개발한 자동조종 제어기를 사용한다. 이를 이용하면 롤과 피치 채널의 입출력 동특성을 식 (2.15), (2.42)과 같이 나타낼 수 있는데 이는 각각 3차와 2차 시스템으로 이를 바로 유도 법칙에 적용하기에는 수식의 복잡도 때문에 용이하지가 않다. 하지만 [30]의 자동조종 제어기를 사용함으로써 롤과 피치

채널간의 커플링 효과를 무시할 수 있고, 선형 전달 함수의 극을 임의로 설정할 수 있으며 식 (2.15), (2.42)과 같이 자동조종장치 동역학의 입출력 동특성이 비행조건과 무관하게 선형 시스템의 형태로 표현이 가능하다. 따라서, 본 논문에서 제안하는 유도 법칙에서 고려하기 용이하도록 자동조종장치 동역학을 다음과 같은 1차 선형 시스템의 특성을 갖도록 근사하여 유도 법칙에 반영하도록 한다.

$$\dot{A}_z = -k_a A_z + k_a A_z^c \quad (3.3)$$

$$\dot{\phi} = -k_\phi \phi + k_\phi \phi^c \quad (3.4)$$

이 때, k_a , k_ϕ 는 각각 피치와 롤 채널의 대역폭을 나타낸다. 앞서, [13, 14]에서는 롤 채널의 동역학이 매우 빠르다는 가정하에 이를 무시하였다고 했는데 이는 위 식에서 (3.3)만을 고려하고 식 (3.4)는 무시한 채 유도 법칙을 도출한 것이다. 또한, 고려한 피치 채널의 동역학에 대해서도 1차 시스템으로 근사하여 적용하였는데 이는 BTT 미사일 시스템의 특성을 고려하지 않은 채 유도 법칙 설계의 편이만을 위해 적용한 것으로 [30]의 자동조종 제어를 쓰지 않고서는 BTT 미사일의 자동조종장치 동역학을 비행함수에 무관하게 선형 시스템 형태로 나타낼 수 없다.

본 유도 법칙의 목표는 표적에 대한 요격 오차와 표적 충돌각 오차를 최소화 하는 것이다.

$$\begin{aligned} y(t_f) &= 0 \\ z(t_f) &= 0 \\ \psi_e(t_f) &= 0 \\ \theta_e(t_f) &= 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

따라서 $t = 0$ 에서 종말 유도 단계가 시작되어 t_f 에서 표적에 대한 요격이 이루어 질 때 다음과 같은 목적 함수(performance index) J 를 정의한다.

$$J \triangleq \frac{1}{2} \left[|y(t_f)|^2 + |z(t_f)|^2 + w (|\psi_e(t_f)|^2 + |\theta_e(t_f)|^2) + \int_0^{t_f} (w_1 |A_z^c(\tau)|^2 + w_2 |\phi^c(\tau) - \bar{\phi}|^2) d\tau \right] \quad (3.6)$$

여기서, w , w_1 , w_2 는 각각의 표적 충돌각 오차와 유도 명령에 해당하는 항에 대한 가중치를 뜻한다. 그리고 $\bar{\phi}$ 는 다음 절에서 설명하도록 한다. 그러므로 본 최적 유도 문제는 식 (3.1),(3.2)의 추적 기하학과 식 (3.3), (3.4)의 자동조종장치 동역학을 이용해 식 (3.6)의 목적 함수 J 를 최소화 하는 문제로 정리할 수 있다.

3.2 준최적 유도 법칙 유도

본 절에서는 앞 절에서 설정한 최적 유도 문제의 해를 구한다. 우선, 식 (3.1)-(3.4)로부터 다음과 같은 상태 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -x_3 \cos x_6 + g_1 \\
 \dot{x}_3 &= -k_a x_3 + k_a u_1 \\
 \dot{x}_4 &= x_5 \\
 \dot{x}_5 &= x_3 \sin x_6 + g_2 \\
 \dot{x}_6 &= -k_\phi x_6 + k_\phi u_2
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

이 때, 각 상태 변수는 다음과 같이 정의할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 x_1 &\triangleq z \cos \bar{\phi} - y \sin \bar{\phi} \\
 x_2 &\triangleq (V_M \theta_e - V_{T_z}) \cos \bar{\phi} - (V_M \psi_e - V_{T_y}) \sin \bar{\phi} \\
 x_3 &\triangleq A_z \\
 x_4 &\triangleq z \sin \bar{\phi} + y \cos \bar{\phi} \\
 x_5 &\triangleq (V_M \theta_e - V_{T_z}) \sin \bar{\phi} + (V_M \psi_e - V_{T_y}) \cos \bar{\phi} \\
 x_6 &\triangleq \phi - \bar{\phi} \\
 u_1 &\triangleq A_z^c \\
 u_2 &\triangleq \phi^c - \bar{\phi} \\
 g_1 &\triangleq g \cos \bar{\phi} \\
 g_2 &\triangleq g \sin \bar{\phi}
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

위 식 (3.8)에서 x_1, x_4 는 각각 피치 축과 요 축에 대한 미사일과 표적의 상대 거리

를 나타내며, x_2, x_5 는 각각 이에 대한 상대 속도를 나타낸다. x_3 는 미사일의 피치 가속도를 뜻하며 x_6 는 미사일의 롤 회전각을 뜻한다. u_1, u_2 는 각각 피치 가속도 명령과 롤 각 명령이며 g 는 중력 가속도이다. 이상의 상태 변수를 이용 해 식 (3.6)의 목적 함수를 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$J = \frac{1}{2} \left[x_1(t_f)^2 + x_4(t_f)^2 + w_a (|x_2(t_f) + V_{G_z}|^2 + |x_5(t_f) + V_{G_y}|^2) + \int_0^{t_f} (w_1 u_1^2 + w_2 u_2^2) d\tau \right] \quad (3.9)$$

이 때,

$$\begin{aligned} w_a &\triangleq \frac{w}{V_M^2} \\ V_{G_z} &\triangleq V_{T_z} \cos \bar{\phi} - V_{T_y} \sin \bar{\phi} \\ V_{G_y} &\triangleq V_{T_z} \sin \bar{\phi} + V_{T_y} \cos \bar{\phi} \end{aligned} \quad (3.10)$$

식 (3.7)의 상태 방정식을 풀기 위해서는 상태 변수 x_6 에 대한 삼각 함수를 근사 하여야 한다. 일반적으로 삼각 함수 근사를 위해서는 상태 변수 x_6 가 매우 작은 값이라는 전제가 필요하다. 하지만 롤 회전을 통해 방향 전환하는 BTT 미사일의 기동 방식의 특성 상 그러한 전제는 성립하지 않는다. 따라서 다음과 같이 $\bar{\phi}$ 를 고안 한다.

상태 변수 x_6 에서 $\bar{\phi}$ 는 종말 유도 단계가 시작되는 시간 $t = 0$ 에서 초기값을 $0(\text{rad})$ 으로 설정한다. 이 후, 미사일이 비행하면서 롤 각이 $\pm n\pi/6(\text{rad})$ ($n = 1, 2, \dots$)를 넘을 때 마다 $\pi/6(\text{rad})$ 씩 증가, 혹은 감소 시킨다. 이처럼 $\bar{\phi}$ 를 설정함으로써 상태 변수 x_6 는 종말 유도 단계 중 항상 $\pm\pi/6(\text{rad})$ 이내의 값을 유지할 수 있다.

따라서 식 (3.7)에서 상태 변수 x_6 에 관한 삼각함수에 대해 본 최적 유도 문제 풀이가 용이하도록 $\pm\pi/6(rad)$ 범위에서 다음과 같이 근사한다.

$$\begin{aligned}\cos x_6 &\cong k_1 \\ \sin x_6 &\cong k_2 x_6\end{aligned}\tag{3.11}$$

식 (3.11)의 근사식을 이용하면 식 (3.7)을 다음과 같이 근사하여 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}\Sigma_p: \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k_1 x_3 + g_1 \\ \dot{x}_3 &= -k_a x_3 + k_a u_1 \\ \Sigma_y: \dot{x}_4 &= x_5 \\ \dot{x}_5 &= k_2 x_3 x_6 + g_2 \\ \dot{x}_6 &= -k_\phi x_6 + k_\phi u_2\end{aligned}\tag{3.12}$$

위의 시스템을 도식화하면 그림 3.3과 같이 나타낼 수 있는데 이처럼 근사한 시스템은 쌍일차 시스템(bilinear and cascaded system)의 형태를 가지는 것을 알 수 있다. 따라서, 이처럼 특수한 형태를 갖는 비선형 시스템의 특성을 이용하면 폰트리 아진의 최소값 정리(Pontryagin's minimum principle)[5]를 적용하여 최적 유도 문제를 풀 수 있다.

우선, 위 시스템의 해밀토니안(Hamiltonian)을 정의하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}H \triangleq & \lambda_1 x_2 + \lambda_2 (-k_1 x_3 + g_1) + \lambda_3 (-k_a x_3 + k_a u_1) \\ & + \lambda_4 x_5 + \lambda_5 (k_2 x_3 x_6 + g_2) + \lambda_6 (-k_\phi x_6 + k_\phi u_2) \\ & + \frac{1}{2} (w_1 \|u_1\|^2 + w_2 \|u_2\|^2)\end{aligned}\tag{3.13}$$

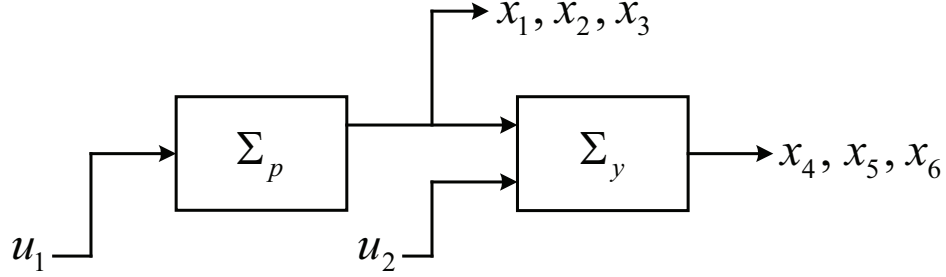


그림 3.3: 쌍일차 시스템의 구성도

또한, 준상태 방정식(costate equations), 경계 조건(boundary conditions), 필요 조건(stationary conditions)은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \Lambda_p: \quad & \dot{\lambda}_1 = 0 \\
 & \dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 \\
 & \dot{\lambda}_3 = k_1\lambda_2 + k_a\lambda_3 - k_2\lambda_5x_6 \\
 \Lambda_y: \quad & \dot{\lambda}_4 = 0 \\
 & \dot{\lambda}_5 = -\lambda_4 \\
 & \dot{\lambda}_6 = -k_2\lambda_5x_3 + k_\phi\lambda_6
 \end{aligned} \tag{3.14}$$

$$\begin{aligned}
 \Lambda'_p: \quad & \lambda_1(t_f) = x_1(t_f) \\
 & \lambda_2(t_f) = w_a x_2(t_f) \\
 & \lambda_3(t_f) = 0 \\
 \Lambda'_y: \quad & \lambda_4(t_f) = x_4(t_f) \\
 & \lambda_5(t_f) = w_a x_5(t_f) \\
 & \lambda_6(t_f) = 0
 \end{aligned} \tag{3.15}$$

$$\begin{aligned}
U_p : \frac{\partial H}{\partial u_1} &= k_a \lambda_3 + w_1 u_1 = 0 \\
U_y : \frac{\partial H}{\partial u_2} &= k_\phi \lambda_6 + w_2 u_2 = 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

준상태 방정식의 해석적 풀이를 위해 식 (3.14)의 $\dot{\lambda}_3$ 에 대해 다음을 가정한다.

$$(A13) \quad k_1 \lambda_2 + k_a \lambda_3 \gg k_2 \lambda_5 x_6$$

먼저, 식(3.11)과 같이 삼각 함수 근사를 위해 상태 변수 x_6 는 항상 $\pm\pi/6(rad)$ 이내의 작은 값을 가진다. 또한, 준상태 변수 λ_5 는 식 (3.14)에서 $\dot{\lambda}_5$ 를 풀어 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\lambda_5 = x_4(t_f)(t_f - t) + w_a x_5(t_f) \tag{3.17}$$

위 식에서 $x_1(t_f)$ 는 표적 요격 시 요격 오차와 관련한 값이며 $x_5(t_f)$ 또한 요격 시 충돌각 오차와 관련한 값으로 이들은 요격 시 0에 가까운 작은 값으로 수렴한다. 또한, 종말 유도 단계이므로 요격 시 시간 t_f 또한 역시 작은 값이다. 따라서 $\dot{\lambda}_5$ 또한 작은 값으로 볼 수 있으며, $\dot{\lambda}_3$ 에서 이들의 곱인 $k_2 \lambda_5 x_6$ 는 나머지 항들에 비해 매우 작은 값이다. 그러므로 식 (3.14)에서 $\dot{\lambda}_3$ 를 다음과 같이 근사한다. 본 근사의 타당성은 근사를 하지 않고 구한 수치해와의 비교를 통해 확인할 수 있는데 이는 뒤에서 다시 다루도록 한다.

$$\dot{\lambda}_3 = k_1 \lambda_2 + k_a \lambda_3 \tag{3.18}$$

이제 식(3.18)을 이용 해 준상태 방정식 (3.14)와 경계 조건 (3.15)를 통해 다음과 같이 준상태 방정식의 해를 구할 수 있다. 여기서, $r_p \triangleq x_1(t_f)$, $v_p \triangleq x_2(t_f)$ 라고 정의한다.

$$\begin{aligned}
 \lambda_1(t) &= x_1(t_f) = r_p \\
 \lambda_2(t) &= r_p(t_f - t) + w_a v_p \\
 \lambda_3(t) &= \frac{1}{k_a^2} \left[-k_1 r_p \left(-1 + e^{-k_a(t_f-t)} + k_a(t_f - t) \right) \right. \\
 &\quad \left. + k_1 k_a w_a v_p (-1 + e^{-k_a(t_f-t)}) \right]
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

필요 조건 (3.16)따라서 최적 제어 입력 u_1^* 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 u_1^*(t) &= -\frac{k_a}{w_1} \lambda_3(t) \\
 &= \frac{1}{k_a w_1} \left[k_1 r_p \left(-1 + e^{-k_a(t_f-t)} + k_a(t_f - t) \right) \right. \\
 &\quad \left. - k_1 k_a w_a v_p (-1 + e^{-k_a(t_f-t)}) \right]
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

이제 이를 식 (3.12)에 대입한 후 적분하면 다음의 상태 변수를 구할 수 있다. 이 때 각 상태 변수의 초기값은 각각 $x_1(t_0) \triangleq x_{10}$, $x_2(t_0) \triangleq x_{20}$, $x_3(t_0) \triangleq x_{30}$ 이라 정의한다.

$$\begin{aligned}
x_1(t) = & \frac{e^{-k_a(t+t_0+2t_f)}}{6k_a^3w_1} \left[k_a e^{k_a(2t_f+t+t_0)} \left(k_1^2 (r_p ((t-t_0)k_a((t-t_0)k_a(-3t_f \right. \right. \\
& + t + 2t_0) + 6t_f - 6t_0) + 6(t_0 - t_f)) - 3w_a v_p ((t-t_0)k_a((t-t_0)k_a \\
& - 2) + 2)) + 3w_1 k_a^2 (g_1(t-t_0)^2 + 2((t-t_0)x_{20} + x_{10})) \\
& + 6k_1 w_1 x_{30} ((t_0 - t)k_a + 1)) + 3k_1 e^{k_a(t_f+t_0)} (k_1 (-2(t-t_0)k_a e^{(t+t_0)k_a} \\
& + e^{2tk_a} - e^{2t_0k_a}) (k_a w_a v_p - r_p) - 2k_a e^{k_a(t_f+t_0)} (k_1 ((t_0 - t_f)r_p - w_a v_p) \\
& \left. \left. + w_1 x_{30})) \right) \right] \tag{3.21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_2(t) = & \frac{e^{-k_a(t+t_0+2t_f)}}{2k_a^2w_1} \left[k_a e^{k_a(2t_f+t+t_0)} \left(k_1^2 ((t-t_0)k_a((-2t_f+t+t_0)r_p \right. \right. \\
& - 2w_a v_p) + 2(t_f - t_0)r_p) + 2w_1 k_a (g_1(t-t_0) + x_{20}) - 2k_1 w_1 x_{30}) \\
& + k_1 e^{k_a(t_f+t_0)} \left(2k_a e^{k_a(t_f+t_0)} (k_1 ((t_0 - t_f)r_p - w_a v_p) + w_1 x_{30}) \right. \\
& \left. \left. + k_1 \left(2k_a w_a v_p e^{k_a(t_f+t)} - (e^{tk_a} - e^{t_0k_a})^2 (r_p - k_a w_a v_p) \right) \right) \right] \tag{3.22}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
x_3(t) = & \frac{e^{-k_a(t_f+t)}}{2w_1 k_a} \left[k_1 \left(r_p \left(2k_a e^{k_a t_f} \left((t_0 - t_f) e^{t_0 k_a} + (t_f - t) e^{t k_a} \right) + e^{2t k_a} \right. \right. \\
& - e^{2t_0 k_a}) - k_a w_a v_p (e^{t k_a} - e^{t_0 k_a}) (-2e^{k_a t_f} + e^{t k_a} + e^{t_0 k_a}) \\
& \left. \left. + 2w_1 x_{30} k_a e^{k_a(t_f+t_0)} \right) \right] \tag{3.23}
\end{aligned}$$

위에서 구한 상태 방정식의 해 식 (3.21), (3.22)를 이용하여 $r_p = x_1(t_f)$, $v_p = x_2(t_f)$ 의 연립 방정식을 풀면 다음과 같이 r_p 와 v_p 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
r_p = & \left[3w_1k_a (k_1^2w_a (-k_a (g_1t_f (k_at_f + 2) + 2 (k_a (x_{20}t_f + x_{10}) + x_{20})) \right. \\
& - 2k_1x_{30} (k_at_f + 2)) + 2k_1e^{k_at_f} (2k_1k_aw_a (t_f (x_{20}k_a + g_1) + 2x_{10}k_a + x_{20}) \\
& - x_{30} (k_1^2w_a (k_at_f (k_at_f + 2) - 4) + 2w_1k_a)) + e^{2k_at_f} (k_a (g_1t_f (k_1^2w_a (k_at_f \\
& - 2) + 2w_1k_a^2t_f) + 2x_{10}k_a (k_1^2w_a (2k_at_f - 3) + 2w_1k_a) \\
& + 2x_{20} (k_1^2w_a (k_at_f (k_at_f - 1) - 1) + 2w_1k_a^2t_f)) - 2k_1x_{30} (k_at_f \\
& \left. - 1) (k_1^2w_a (k_at_f - 2) + 2w_1k_a)) \right] / \\
& [k_1^4w_a (k_at_f (24 (e^{k_at_f} - 1) + k_at_f (-4e^{k_at_f} (k_at_f + 3) - 2 (k_at_f \\
& + 6) + e^{2k_at_f} (k_at_f (k_at_f - 6) + 12))) - 12 (e^{k_at_f} - 1)^2) \\
& + 2k_1^2w_1k_a (12k_ae^{k_at_f} (k_aw_a - t_f) + e^{2k_at_f} (k_a (3k_aw_a (2k_at_f - 3) \\
& + 2t_f (k_at_f (k_at_f - 3) + 3)) + 3) - 3 (k_a^2w_a + 1)) + 12w_1^2k_a^4e^{2k_at_f}] \\
& \tag{3.24}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_p = & \left[w_1 \left(2k_1 e^{k_a t_f} \left(x_{30} \left(k_1^2 \left(k_a^2 t_f^2 (2k_a t_f + 3) + 12 \right) + 6w_1 k_a^3 \right) \right. \right. \right. \\
& - 3k_1 k_a^2 \left(g_1 t_f^2 (k_a t_f + 3) + 2x_{20} t_f (k_a t_f + 1) + 2x_{10} (k_a t_f - 1) \right) \left. \right. \left. \right) \\
& + e^{2k_a t_f} \left(k_a \left(g_1 t_f \left(k_1^2 \left(k_a t_f (k_a t_f - 3) \right)^2 + 6 \right) + 12w_1 k_a^3 \right) \right. \\
& + 2k_1^2 \left(x_{20} \left(-k_a^3 t_f^3 + 3k_a t_f + 3 \right) - 3x_{10} k_a (k_a t_f - 1)^2 \right) + 12w_1 x_{20} k_a^3 \left. \right) \\
& + 2k_1 x_{30} \left(k_1^2 \left(k_a t_f (k_a t_f (k_a t_f - 3) + 3) - 6 \right) - 6w_1 k_a^3 \right) \\
& - 3k_1^2 k_a \left(g_1 t_f (k_a t_f + 2) + 2 \left(k_a (x_{20} t_f + x_{10}) + x_{20} \right) \right) \\
& \left. - 6k_1^3 x_{30} (k_a t_f + 2) \right] / \\
& \left[k_1^4 w_a \left(k_a t_f \left(24 \left(e^{k_a t_f} - 1 \right) + k_a t_f \left(-4e^{k_a t_f} (k_a t_f + 3) - 2 \left(k_a t_f \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 6 \right) + e^{2k_a t_f} \left(k_a t_f (k_a t_f - 6) + 12 \right) \right) \right) - 12 \left(e^{k_a t_f} - 1 \right)^2 \right) \\
& + 2k_1^2 w_1 k_a \left(12k_a e^{k_a t_f} \left(k_a w_a - t_f \right) + e^{2k_a t_f} \left(k_a \left(3k_a w_a \left(2k_a t_f - 3 \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 2t_f \left(k_a t_f (k_a t_f - 3) + 3 \right) \right) + 3 \right) - 3 \left(k_a^2 w_a + 1 \right) \right) + 12w_1^2 k_a^4 e^{2k_a t_f} \left. \right] \quad (3.25)
\end{aligned}$$

그리하여 최적 제어 입력 u_1^* 는 $t = t_0$ 에서 잔여 비행 시간 $t_{go} \triangleq t_f - t$ 의 함수를 계수로 하는 시변 상태 궤환 형태(state-feedback form with time-varying gain)로 정리할 수 있다.

$$u_1^*(t_0) = \frac{1}{k_a w_1} \left[k_1 r_p (-1 + e^{-k_a t_{go}} + k_a t_{go}) - k_1 k_a w_a v_p (-1 + e^{-k_a t_{go}}) \right] \quad (3.26)$$

이제 시스템 Σ_p 에 대한 상태 변수를 모두 구하였다. 앞서 그림 3.3에서 설명한 것과 같이 이들 상태 변수를 다시 계수로 갖는 시스템 Σ_y 의 해를 구한다. 앞서 피치 가속도와 마찬가지로 준상태 방정식 (3.14)과 경계 조건 (3.15)를 통해 다음의 식을 얻을 수 있다. 여기서, $r_y \triangleq x_4(t_f)$, $v_y \triangleq x_5(t_f)$ 라고 정의한다.

$$\begin{aligned}
\lambda_4(t) &= x_4(t_f) = r_y \\
\lambda_5(t) &= r_y(t_f - t) + w_a v_y
\end{aligned} \tag{3.27}$$

위의 식 (3.27)과 앞서 식 (3.23)에서 구한 상태 변수 x_3 를 이용하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{\lambda}_6 &= -k_2(r_y(t_f - t) + w_a v_y)x_3 + k_\phi \lambda_6 \\
&= -\frac{e^{-k_a(t_f+t)}}{2w_1 k_a} (k_2(r_y(t_f - t) + w_a v_y)) \left[k_1 \left(r_p \left(2k_a e^{k_a t_f} \left((t_0 - t_f) e^{t_0 k_a} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \left. + (t_f - t) e^{t k_a} \right) + e^{2t k_a} - e^{2t_0 k_a} \right) - k_a w_a v_p (e^{t k_a} - e^{t_0 k_a}) (-2e^{k_a t_f} \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{t k_a} + e^{t_0 k_a} \right) \right) + 2w_1 x_{30} k_a e^{k_a(t_f+t_0)} \right] + k_\phi \lambda_6
\end{aligned} \tag{3.28}$$

위의 식 (3.28)과 식 (3.15)의 경계 조건을 통해 다음과 같이 λ_6 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\lambda_6 = & \frac{k_2 e^{-k_\phi t_f - k_a(t_f+t)}}{2w_1 k_a k_\phi^3 (k_a^2 - k_\phi^2)^2} \left[k_1 \left(-2e^{k_a(t+t_f)} \left(k_\phi v_p w_a \left(r_y \left(-e^{k_\phi t_f} k_\phi (t_f - t) \right. \right. \right. \right. \right. \\
& - e^{tk_\phi} + e^{k_\phi t_f} \left. \left. \left. \left. + (e^{tk_\phi} - e^{k_\phi t_f}) k_\phi v_y w_a \right) + r_p \left(r_y \left(-e^{k_\phi t_f} k_\phi^2 (t - t_f)^2 \right. \right. \right. \right. \\
& + 2(e^{tk_\phi} - e^{k_\phi t_f}) + 2e^{k_\phi t_f} k_\phi (t_f - t) \left. \left. \left. \left. + k_\phi \left(-e^{k_\phi t_f} k_\phi (t_f - t) \right. \right. \right. \right. \\
& - e^{tk_\phi} + e^{k_\phi t_f} \left. \left. \left. \left. v_y w_a \right) \right) k_a^5 + k_\phi^3 \left(2e^{k_a t_0} r_p (t_0 - t_f) \left(e^{(k_a+k_\phi)t_f} r_y (t_f - t) \right. \right. \right. \\
& - \left(e^{t(k_a+k_\phi)} - e^{(k_a+k_\phi)t_f} \right) v_y w_a \left. \left. \left. \left. + v_p w_a \left(e^{k_\phi t_f} \left(e^{2tk_a} + e^{2k_a t_0} \right. \right. \right. \right. \\
& - 2e^{k_a(t_0+t_f)} \right) r_y (t_f - t) + \left(2e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} - e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} + e^{2tk_a+k_\phi t_f} \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} - e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} - 2e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)} \right) v_y w_a \right) \right) k_a^4 \\
& + k_\phi^2 \left(k_\phi v_p w_a \left(r_y \left(e^{k_\phi t_f} \left(e^{2tk_a} - e^{2k_a t_0} - 4e^{k_a(t+t_f)} \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + 2e^{k_a(t_0+t_f)} \right) k_\phi (t_f - t) - 2e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} + e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} + e^{2tk_a+k_\phi t_f} \right. \right. \\
& - e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} - 5e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} + 4e^{k_\phi t_f+k_a(t+t_f)} + 2e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)} \left. \left. \left. \right. \right. \\
& - \left(2e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} - e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} - e^{2tk_a+k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} \right. \\
& \left. \left. \left. \left. - 3e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} + 4e^{k_\phi t_f+k_a(t+t_f)} - 2e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)} \right) k_\phi v_y w_a \right) \right) \\
& + r_p \left(r_y \left(-2e^{(k_a+k_\phi)t_f} (t_f - t) \left(-2e^{tk_a t} + e^{k_a t_0} t_0 + (2e^{tk_a} - e^{k_a t_0}) t_f \right) k_\phi^2 \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + \left(e^{k_\phi t_f} \left(e^{2tk_a} + e^{2k_a t_0} - 8e^{k_a(t+t_f)} \right) t + 2 \left(e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} \right. \right. \right. \right. \right. \\
& - e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)} \left. \left. \left. \left. \right) t_0 - \left(2e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} + e^{2tk_a+k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} \right. \right. \right. \\
& - 8e^{k_\phi t_f+k_a(t+t_f)} - 2e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)} \left. \left. \left. \right. \right) t_f \right) k_\phi + 8e^{k_a(t+t_f)} \left(e^{tk_\phi} - e^{k_\phi t_f} \right) \left. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + k_\phi \left(-2k_\phi \left(-2e^{k_\phi t_f+k_a(t+t_f)} t + \left(-e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} + e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)} \right) t_0 \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + \left(e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} + 2e^{k_\phi t_f+k_a(t+t_f)} - e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)} \right) t_f \right) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. + e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} - e^{2tk_a+k_\phi t_f} - e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} - 3e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} \right) \right) \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)} v_y w_a \Big) k_a^3 + k_\phi^3 (k_\phi v_p w_a (r_y (2 (2e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} \\
& - e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} + e^{2tk_a + k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} - e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)} \\
& - 2e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) + e^{k_\phi t_f} (e^{2tk_a} + e^{2k_a t_0} - 2e^{k_a(t_0+t_f)}) k_\phi (t - t_f)) \\
& - (2e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} - e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} + e^{2tk_a + k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} - e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)} \\
& - 2e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) k_\phi v_y w_a) + r_p (r_y (2e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)} (t_f - t) (t_f - t_0) k_\phi^2 \\
& + (e^{k_\phi t_f} (e^{2tk_a} - e^{2k_a t_0}) t - 4 (e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} - e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)})) t_0 \\
& + (4e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} - e^{2tk_a + k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} - 4e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) t_f) k_\phi \\
& - e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} - e^{2tk_a + k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} + e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)}) \\
& + k_\phi (2 (e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} - e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) k_\phi (t_0 - t_f) - e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} \\
& - e^{2tk_a + k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} + e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)}) v_y w_a) k_a^2 \\
& + k_\phi^4 (k_\phi v_p w_a (r_y (e^{k_\phi t_f} (e^{tk_a} - e^{k_a t_0}) (e^{tk_a} + e^{k_a t_0} - 2e^{k_a t_f}) k_\phi (t - t_f) \\
& - 2e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} + e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} + e^{2tk_a + k_\phi t_f} - e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} + e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)} \\
& - 2e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)} + 2e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) + (2e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} - e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} \\
& - e^{2tk_a + k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} - e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)} + 2e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)} \\
& - 2e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) k_\phi v_y w_a) + r_p (r_y (2e^{(k_a+k_\phi)t_f} (t_f - t) (-e^{tk_a t} + e^{k_a t_0} t_0 \\
& + (e^{tk_a} - e^{k_a t_0}) t_f) k_\phi^2 + (-e^{k_\phi t_f} (e^{2tk_a} + e^{2k_a t_0} - 4e^{k_a(t+t_f)})) t \\
& + 2 (e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} - e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) t_0 + (-2e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} + e^{2tk_a + k_\phi t_f} \\
& + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} - 4e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)} + 2e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) t_f) k_\phi \\
& + 2 (e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} - e^{2tk_a + k_\phi t_f} - e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} - e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)} \\
& + 2e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)})) - k_\phi (-2k_\phi (-e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)} t + (-e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} \\
& + e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) t_0 + (e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} + e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)} - e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) t_f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} - e^{2tk_a+k_\phi t_f} - e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} - e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} \\
& +2e^{k_\phi t_f+k_a(t+t_f)} v_y w_a \Big) k_a + k_\phi^5 r_p \left(r_y \left(e^{k_\phi t_f} (e^{2tk_a} - e^{2k_a t_0}) k_\phi (t_f - t) \right. \right. \\
& \left. \left. - e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} - e^{2tk_a+k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} + e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} \right) \right. \\
& \left. + \left(e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} + e^{2tk_a+k_\phi t_f} - e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} - e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} \right) k_\phi v_y w_a \right) \\
& -2e^{k_a t_0} k_a (k_a - k_\phi)^2 k_\phi^3 w_1 \left(\left(e^{t(k_a+k_\phi)} - e^{(k_a+k_\phi)t_f} \right) (k_a + k_\phi) v_y w_a \right. \\
& \left. - r_y \left(e^{(k_a+k_\phi)t_f} k_a (t_f - t) + e^{(k_a+k_\phi)t_f} k_\phi (t_f - t) + e^{t(k_a+k_\phi)} \right. \right. \\
& \left. \left. - e^{(k_a+k_\phi)t_f} \right) \right) x_{30} \Big]
\end{aligned} \tag{3.29}$$

위 식 (3.29)에서 구한 준상태 변수 λ_6 와 식 (3.15)의 필요조건에 의해 다음과 같이 최적 제어 입력 u_2^* 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
u_2^*(t) &= -\frac{k_\phi}{w_2} \lambda_6(t) \\
&= -\frac{k_2 e^{-k_\phi t_f - k_a(t_f+t)}}{2w_1 w_2 k_a k_\phi^2 (k_a^2 - k_\phi^2)^2} \left[k_1 \left(-2e^{k_a(t+t_f)} \left(k_\phi v_p w_a \left(r_y \left(-e^{k_\phi t_f} k_\phi (t_f - t) \right. \right. \right. \right. \right. \\
&\quad - e^{tk_\phi} + e^{k_\phi t_f} \left. \left. \left. \left. + (e^{tk_\phi} - e^{k_\phi t_f}) k_\phi v_y w_a \right) + r_p \left(r_y \left(-e^{k_\phi t_f} k_\phi^2 (t - t_f)^2 \right. \right. \right. \right. \\
&\quad + 2(e^{tk_\phi} - e^{k_\phi t_f}) + 2e^{k_\phi t_f} k_\phi (t_f - t) \left. \left. \left. \left. + k_\phi (-e^{k_\phi t_f} k_\phi (t_f - t) \right. \right. \right. \right. \\
&\quad - e^{tk_\phi} + e^{k_\phi t_f}) v_y w_a \left. \left. \left. \left. \right) k_a^5 + k_\phi^3 \left(2e^{k_a t_0} r_p (t_0 - t_f) \left(e^{(k_a+k_\phi)t_f} r_y (t_f - t) \right. \right. \right. \right. \\
&\quad - \left(e^{t(k_a+k_\phi)} - e^{(k_a+k_\phi)t_f} \right) v_y w_a \left. \left. \left. \left. + v_p w_a \left(e^{k_\phi t_f} (e^{2tk_a} + e^{2k_a t_0} \right. \right. \right. \right. \\
&\quad - 2e^{k_a(t_0+t_f)}) r_y (t_f - t) + \left(2e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} - e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} + e^{2tk_a+k_\phi t_f} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} - e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} - 2e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)} \right) v_y w_a \right) \right) k_a^4 \\
&\quad + k_\phi^2 \left(k_\phi v_p w_a \left(r_y \left(e^{k_\phi t_f} (e^{2tk_a} - e^{2k_a t_0} - 4e^{k_a(t+t_f)}) \right. \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + 2e^{k_a(t_0+t_f)} \right) k_\phi (t_f - t) - 2e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} + e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} + e^{2tk_a+k_\phi t_f} \right. \\
&\quad \left. - e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} - 5e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} + 4e^{k_\phi t_f+k_a(t+t_f)} + 2e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)} \right) \\
&\quad - \left(2e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} - e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} - e^{2tk_a+k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} \right. \\
&\quad \left. - 3e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} + 4e^{k_\phi t_f+k_a(t+t_f)} - 2e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)} \right) k_\phi v_y w_a \left. \right) \\
&\quad + r_p \left(r_y \left(-2e^{(k_a+k_\phi)t_f} (t_f - t) (-2e^{tk_a t} + e^{k_a t_0} t_0 + (2e^{tk_a} - e^{k_a t_0}) t_f) k_\phi^2 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(e^{k_\phi t_f} (e^{2tk_a} + e^{2k_a t_0} - 8e^{k_a(t+t_f)}) t + 2(e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} \right. \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)}) t_0 - (2e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} + e^{2tk_a+k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 8e^{k_\phi t_f+k_a(t+t_f)} - 2e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)}) t_f \right) k_\phi + 8e^{k_a(t+t_f)} (e^{tk_\phi} - e^{k_\phi t_f}) \right) \\
&\quad + k_\phi \left(-2k_\phi \left(-2e^{k_\phi t_f+k_a(t+t_f)} t + \left(-e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} + e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)} \right) t_0 \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \left(e^{tk_\phi+k_a(t+t_0)} + 2e^{k_\phi t_f+k_a(t+t_f)} - e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)} \right) t_f \right) \right) \\
&\quad + e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} - e^{2tk_a+k_\phi t_f} - e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} - 3e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)} v_y w_a \Big) k_a^3 + k_\phi^3 (k_\phi v_p w_a (r_y (2 (2e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} \\
& - e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} + e^{2tk_a + k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} - e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)} \\
& - 2e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) + e^{k_\phi t_f} (e^{2tk_a} + e^{2k_a t_0} - 2e^{k_a(t_0+t_f)}) k_\phi (t - t_f)) \\
& - (2e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} - e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} + e^{2tk_a + k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} - e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)} \\
& - 2e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) k_\phi v_y w_a) + r_p (r_y (2e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)} (t_f - t) (t_f - t_0) k_\phi^2 \\
& + (e^{k_\phi t_f} (e^{2tk_a} - e^{2k_a t_0}) t - 4 (e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} - e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)})) t_0 \\
& + (4e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} - e^{2tk_a + k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} - 4e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) t_f) k_\phi \\
& - e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} - e^{2tk_a + k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} + e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)}) \\
& + k_\phi (2 (e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} - e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) k_\phi (t_0 - t_f) - e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} \\
& - e^{2tk_a + k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} + e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)}) v_y w_a) k_a^2 \\
& + k_\phi^4 (k_\phi v_p w_a (r_y (e^{k_\phi t_f} (e^{tk_a} - e^{k_a t_0}) (e^{tk_a} + e^{k_a t_0} - 2e^{k_a t_f}) k_\phi (t - t_f) \\
& - 2e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} + e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} + e^{2tk_a + k_\phi t_f} - e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} + e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)} \\
& - 2e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)} + 2e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) + (2e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} - e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} \\
& - e^{2tk_a + k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} - e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)} + 2e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)} \\
& - 2e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) k_\phi v_y w_a) + r_p (r_y (2e^{(k_a+k_\phi)t_f} (t_f - t) (-e^{tk_a t} + e^{k_a t_0} t_0 \\
& + (e^{tk_a} - e^{k_a t_0}) t_f) k_\phi^2 + (-e^{k_\phi t_f} (e^{2tk_a} + e^{2k_a t_0} - 4e^{k_a(t+t_f)})) t \\
& + 2 (e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} - e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) t_0 + (-2e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} + e^{2tk_a + k_\phi t_f} \\
& + e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} - 4e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)} + 2e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) t_f) k_\phi \\
& + 2 (e^{tk_\phi + k_a(t+2t_0-t_f)} - e^{2tk_a + k_\phi t_f} - e^{2k_a t_0 + k_\phi t_f} - e^{tk_\phi + k_a(t+t_f)} \\
& + 2e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)})) - k_\phi (-2k_\phi (-e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)} t + (-e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} \\
& + e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) t_0 + (e^{tk_\phi + k_a(t+t_0)} + e^{k_\phi t_f + k_a(t+t_f)} - e^{k_\phi t_f + k_a(t_0+t_f)}) t_f)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} - e^{2tk_a+k_\phi t_f} - e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} - e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} \\
& +2e^{k_\phi t_f+k_a(t+t_f)} v_y w_a \Big) k_a + k_\phi^5 r_p \left(r_y \left(e^{k_\phi t_f} (e^{2tk_a} - e^{2k_a t_0}) k_\phi (t_f - t) \right. \right. \\
& \left. \left. - e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} - e^{2tk_a+k_\phi t_f} + e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} + e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} \right) \right. \\
& \left. + \left(e^{tk_\phi+k_a(t+2t_0-t_f)} + e^{2tk_a+k_\phi t_f} - e^{2k_a t_0+k_\phi t_f} - e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} \right) k_\phi v_y w_a \right) \\
& -2e^{k_a t_0} k_a (k_a - k_\phi)^2 k_\phi^3 w_1 \left(\left(e^{t(k_a+k_\phi)} - e^{(k_a+k_\phi)t_f} \right) (k_a + k_\phi) v_y w_a \right. \\
& \left. - r_y \left(e^{(k_a+k_\phi)t_f} k_a (t_f - t) + e^{(k_a+k_\phi)t_f} k_\phi (t_f - t) + e^{t(k_a+k_\phi)} \right. \right. \\
& \left. \left. - e^{(k_a+k_\phi)t_f} \right) \right) x_{30} \Big]
\end{aligned} \tag{3.30}$$

위 식 (3.30)의 최적 제어 입력을 식 (3.12)을 대입한 후, 적분을 통해 상태 변수 x_6 를 구할 수 있다. 이 때 상태 변수 x_6 의 초기값은 $x_6(t_0) \triangleq x_{60}$ 이라 정의한다.

$$\begin{aligned}
x_6(t) = & \frac{e^{-k_a(-2t_f+t+t_0)-(t_f+t)k_\phi}}{4w_1w_2k_a(k_\phi^3 - k_a^2k_\phi)^2} \left[2k_ak_\phi^2w_1 \left(2e^{k_a(t+t_0-2t_f)+k_\phi(t_0+t_f)}w_2x_{60} (k_a^2 \right. \right. \\
& -k_\phi^2) ^2 + k_2k_\phi \left(e^{k_a(t+2t_0-3t_f)} (e^{2tk_\phi} - e^{2k_\phi t_0}) v_yw_ak_a^3 \right. \\
& + \left(r_y \left(e^{k_a(t+2t_0-3t_f)} (-e^{2tk_\phi} + e^{2k_\phi t_0}) \right. \right. \\
& + 2e^{k_a(t_0-2t_f)+k_\phi t_f} k_\phi (-e^{tk_\phi+k_at_0}t + e^{tk_a+k_\phi t_0}t_0 + (e^{tk_\phi+k_at_0} \\
& -e^{tk_a+k_\phi t_0}) t_f) \left. \left. - \left(e^{2tk_\phi+k_a(t+2t_0-3t_f)} - e^{2k_\phi t_0+k_a(t+2t_0-3t_f)} \right. \right. \right. \\
& - 2e^{2k_a(t_0-t_f)+k_\phi(t+t_f)} + 2e^{k_a(t+t_0-2t_f)+k_\phi(t_0+t_f)} \left. \left. \right) k_\phi v_yw_a \right) k_a^2 \\
& - k_\phi \left(e^{k_a(t+2t_0-3t_f)} (e^{2tk_\phi} - e^{2k_\phi t_0}) k_\phi v_yw_a - 2 \left(e^{2tk_\phi+k_a(t+2t_0-3t_f)} \right. \right. \\
& - e^{2k_\phi t_0+k_a(t+2t_0-3t_f)} - 2e^{2k_a(t_0-t_f)+k_\phi(t+t_f)} \\
& + 2e^{k_a(t+t_0-2t_f)+k_\phi(t_0+t_f)} \left. \left. \right) r_y \right) k_a + k_\phi^2 \left(r_y \left(e^{k_a(t+2t_0-3t_f)} (-e^{2tk_\phi} \right. \right. \\
& + e^{2k_\phi t_0}) + 2e^{k_a(t_0-2t_f)+k_\phi t_f} k_\phi (e^{tk_\phi+k_at_0}t - e^{tk_a+k_\phi t_0}t_0 + (-e^{tk_\phi+k_at_0} \\
& + e^{tk_a+k_\phi t_0}) t_f) \left. \left. + \left(e^{2tk_\phi+k_a(t+2t_0-3t_f)} - e^{2k_\phi t_0+k_a(t+2t_0-3t_f)} \right. \right. \right. \\
& - 2e^{2k_a(t_0-t_f)+k_\phi(t+t_f)} + 2e^{k_a(t+t_0-2t_f)+k_\phi(t_0+t_f)} \left. \left. \right) k_\phi v_yw_a \right) \right) x_{30} \\
& - k_1k_2 \left(-2e^{k_a(t+t_0-2t_f)} (k_\phi v_pw_a (r_y (2e^{k_\phi t_f} k_\phi (e^{tk_\phi t} - e^{k_\phi t_0}t_0 \right. \right. \\
& + (-e^{tk_\phi} + e^{k_\phi t_0}) t_f) - e^{2tk_\phi} + e^{2k_\phi t_0}) + (e^{tk_\phi} - e^{k_\phi t_0}) (e^{tk_\phi} + e^{k_\phi t_0} \\
& - 2e^{k_\phi t_f}) k_\phi v_yw_a) + r_p (2r_y (e^{k_\phi t_f} (-e^{tk_\phi t^2} + 2e^{tk_\phi t_f t} + e^{k_\phi t_0}t_0^2 \\
& + (-e^{tk_\phi} + e^{k_\phi t_0}) t_f^2 - 2e^{k_\phi t_0}t_0 t_f) k_\phi^2 + (e^{tk_\phi} - e^{k_\phi t_0}) (e^{tk_\phi} + e^{k_\phi t_0} \\
& - 2e^{k_\phi t_f}) \left. \left. \right) + k_\phi (2e^{k_\phi t_f} k_\phi (e^{tk_\phi t} - e^{k_\phi t_0}t_0 + (-e^{tk_\phi} + e^{k_\phi t_0}) t_f) \right. \right. \\
& \left. \left. - e^{2tk_\phi} + e^{2k_\phi t_0}) v_yw_a) \right) k_a^5 + (-e^{2tk_\phi}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +e^{2k_\phi t_0} k_\phi^3 v_y w_a \left(e^{k_a(t+t_0-4t_f)} v_p w_a (e^{k_a t_0} - e^{k_a t_f})^2 + 2e^{k_a(t+2t_0-3t_f)} r_p (t_0 \right. \\
& -t_f) k_a^4 + e^{-3k_a t_f} k_\phi^2 (k_\phi v_p w_a (r_y ((-e^{2tk_\phi} + e^{2k_\phi t_0}) (2e^{k_a(t+2t_0)} \\
& -e^{k_a(t+3t_0-t_f)} + 5e^{k_a(t+t_0+t_f)})) + 2e^{k_a t_0+k_\phi t_f} k_\phi (-e^{tk_\phi} (e^{2tk_a} - e^{2k_a t_0} \\
& -4e^{k_a(t+t_f)} + 2e^{k_a(t_0+t_f)})) t - 2e^{k_\phi t_0+k_a(t+t_f)} t_0 + (e^{t(2k_a+k_\phi)} - e^{tk_\phi+2k_a t_0} \\
& -4e^{tk_\phi+k_a(t+t_f)} + 2e^{k_\phi t_0+k_a(t+t_f)} + 2e^{tk_\phi+k_a(t_0+t_f)}) t_f \Big) - (2e^{2tk_\phi+k_a(t+2t_0)} \\
& -2e^{2k_\phi t_0+k_a(t+2t_0)} - e^{2tk_\phi+k_a(t+3t_0-t_f)} + e^{2k_\phi t_0+k_a(t+3t_0-t_f)} + 2e^{3k_a t_0+k_\phi(t+t_f)} \\
& -2e^{k_a(2t+t_0)+k_\phi(t+t_f)} - 3e^{2tk_\phi+k_a(t+t_0+t_f)} + 3e^{2k_\phi t_0+k_a(t+t_0+t_f)} \\
& +8e^{k_\phi(t+t_f)+k_a(t+t_0+t_f)} - 4e^{k_\phi(t_0+t_f)+k_a(t+t_0+t_f)} \\
& -4e^{k_\phi(t+t_f)+k_a(2t_0+t_f)}) k_\phi v_y w_a \Big) + r_p \left(2r_y \left(-2e^{k_\phi t_f+k_a(t_0+t_f)} \left(2e^{t(k_a+k_\phi)} t^2 \right. \right. \right. \\
& + \left(-4e^{t(k_a+k_\phi)} + e^{tk_\phi+k_a t_0} \right) t_f t - e^{tk_a+k_\phi t_0} t_0^2 + \left(2e^{t(k_a+k_\phi)} - e^{tk_\phi+k_a t_0} \right. \\
& \left. \left. - e^{tk_a+k_\phi t_0} \right) t_f^2 + t_0 \left((e^{tk_\phi+k_a t_0} + 2e^{tk_a+k_\phi t_0}) t_f - e^{tk_\phi+k_a t_0} t \right) \right) k_\phi^2 \\
& + e^{k_a(t+2t_0)} (e^{2tk_\phi} - e^{2k_\phi t_0}) (t_0 - t_f) k_\phi + 4e^{k_a(t+t_0+t_f)} (e^{tk_\phi} - e^{k_\phi t_0}) (e^{tk_\phi} \\
& + e^{k_\phi t_0} - 2e^{k_\phi t_f}) + k_\phi \left((e^{2tk_\phi} - e^{2k_\phi t_0}) (e^{k_a(t+3t_0-t_f)} - 3e^{k_a(t+t_0+t_f)}) \right) \\
& + 2k_\phi \left(4e^{k_\phi(t+t_f)+k_a(t+t_0+t_f)} t + (e^{2tk_\phi+k_a(t+2t_0)} - e^{2k_\phi t_0+k_a(t+2t_0)} \right. \\
& \left. - 2e^{k_\phi(t_0+t_f)+k_a(t+t_0+t_f)} - 2e^{k_\phi(t+t_f)+k_a(2t_0+t_f)}) t_0 + (-e^{2tk_\phi+k_a(t+2t_0)} \right. \\
& \left. + e^{2k_\phi t_0+k_a(t+2t_0)} - 4e^{k_\phi(t+t_f)+k_a(t+t_0+t_f)} + 2e^{k_\phi(t_0+t_f)+k_a(t+t_0+t_f)} \right. \\
& \left. + 2e^{k_\phi(t+t_f)+k_a(2t_0+t_f)}) t_f \right) v_y w_a \Big) k_a^3 + k_\phi^3 \left(k_\phi v_p w_a \left(e^{k_a(t+t_0-4t_f)} (e^{2tk_\phi} \right. \right. \\
& -e^{2k_\phi t_0}) (e^{k_a t_0} - e^{k_a t_f})^2 k_\phi v_y w_a - 2 \left(e^{2tk_\phi+k_a(t+3t_0-4t_f)} - e^{2k_\phi t_0+k_a(t+3t_0-4t_f)} \right. \\
& \left. \left. - 2e^{2tk_\phi+k_a(t+2t_0-3t_f)} + 2e^{2k_\phi t_0+k_a(t+2t_0-3t_f)} + e^{2tk_\phi+k_a(t+t_0-2t_f)} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -e^{2k_\phi t_0 + k_a(t+t_0-2t_f)} - 2e^{k_a(2t+t_0-3t_f) + k_\phi(t+t_f)} + 4e^{2k_a(t_0-t_f) + k_\phi(t+t_f)} \\
& - 2e^{3k_a(t_0-t_f) + k_\phi(t+t_f)} + 4e^{k_a(t+2t_0-3t_f) + k_\phi(t_0+t_f)} \\
& - 4e^{k_a(t+t_0-2t_f) + k_\phi(t_0+t_f)} r_y) + r_p \left(r_y \left((-e^{2tk_\phi} + e^{2k_\phi t_0}) \left(e^{k_a(t+3t_0-4t_f)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - e^{k_a(t+t_0-2t_f)} \right) + 2e^{k_a(t_0-3t_f)} k_\phi \left(e^{k_\phi(t+t_f)} (e^{2tk_a} - e^{2k_a t_0}) t \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - 2 \left(e^{2tk_\phi + k_a(t+t_0)} - e^{2k_\phi t_0 + k_a(t+t_0)} - 2e^{k_\phi(t+t_f) + k_a(t_0+t_f)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 2e^{k_a(t+t_f) + k_\phi(t_0+t_f)} \right) t_0 + \left(2e^{2tk_\phi + k_a(t+t_0)} - 2e^{2k_\phi t_0 + k_a(t+t_0)} - e^{2tk_a + k_\phi(t+t_f)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + e^{2k_a t_0 + k_\phi(t+t_f)} - 4e^{k_\phi(t+t_f) + k_a(t_0+t_f)} + 4e^{k_a(t+t_f) + k_\phi(t_0+t_f)} \right) t_f \right) \right) \\
& + k_\phi \left(2e^{k_a(t+2t_0-3t_f)} (e^{2tk_\phi} - e^{2k_\phi t_0}) k_\phi(t_0 - t_f) - e^{2tk_\phi + k_a(t+3t_0-4t_f)} \right. \\
& \left. + e^{2k_\phi t_0 + k_a(t+3t_0-4t_f)} + e^{2tk_\phi + k_a(t+t_0-2t_f)} - e^{2k_\phi t_0 + k_a(t+t_0-2t_f)} \right. \\
& \left. - 2e^{k_a(2t+t_0-3t_f) + k_\phi(t+t_f)} + 2e^{3k_a(t_0-t_f) + k_\phi(t+t_f)} \right) v_y w_a \Big) k_a^2 \\
& + k_\phi^4 \left(k_\phi v_p w_a \left(r_y \left(e^{k_a(t+t_0-4t_f)} (e^{2tk_\phi} - e^{2k_\phi t_0}) (e^{k_a t_0} - e^{k_a t_f})^2 \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. + 2e^{k_a(t_0-3t_f) + k_\phi(t+t_f)} (e^{tk_a} - e^{k_a t_0}) (e^{tk_a} + e^{k_a t_0} - 2e^{k_a t_f}) k_\phi(t - t_f) \right) \right) \right. \\
& \left. - \left(e^{2tk_\phi + k_a(t+3t_0-4t_f)} - e^{2k_\phi t_0 + k_a(t+3t_0-4t_f)} - 2e^{2tk_\phi + k_a(t+2t_0-3t_f)} \right. \right. \\
& \left. \left. + 2e^{2k_\phi t_0 + k_a(t+2t_0-3t_f)} + e^{2tk_\phi + k_a(t+t_0-2t_f)} - e^{2k_\phi t_0 + k_a(t+t_0-2t_f)} \right. \right. \\
& \left. \left. + 2e^{k_a(2t+t_0-3t_f) + k_\phi(t+t_f)} - 4e^{k_a(t+t_0-2t_f) + k_\phi(t+t_f)} + 4e^{2k_a(t_0-t_f) + k_\phi(t+t_f)} \right. \right. \\
& \left. \left. - 2e^{3k_a(t_0-t_f) + k_\phi(t+t_f)} \right) k_\phi v_y w_a \right) + r_p \left(2r_y \left(2e^{k_a(t_0-2t_f) + k_\phi(t+t_f)} (t \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - t_f) (e^{tk_a} t - e^{k_a t_0} t_0 + (-e^{tk_a} + e^{k_a t_0}) t_f) k_\phi^2 + e^{k_a(t+2t_0-3t_f)} (e^{2tk_\phi} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - e^{2k_\phi t_0}) (t_0 - t_f) k_\phi + e^{2tk_\phi + k_a(t+3t_0-4t_f)} - e^{2k_\phi t_0 + k_a(t+3t_0-4t_f)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. - e^{2tk_\phi + k_a(t+t_0-2t_f)} + e^{2k_\phi t_0 + k_a(t+t_0-2t_f)} - 2e^{k_a(2t+t_0-3t_f) + k_\phi(t+t_f)} \right) \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +4e^{k_a(t+t_0-2t_f)+k_\phi(t+t_f)} - 2e^{3k_a(t_0-t_f)+k_\phi(t+t_f)} + 4e^{k_a(t+2t_0-3t_f)+k_\phi(t_0+t_f)} \\
& -4e^{k_a(t+t_0-2t_f)+k_\phi(t_0+t_f)} - k_\phi \left((e^{2tk_\phi} - e^{2k_\phi t_0}) \left(e^{k_a(t+3t_0-4t_f)} \right. \right. \\
& \left. \left. - e^{k_a(t+t_0-2t_f)} \right) + 2e^{k_a(t_0-3t_f)} k_\phi \left(2e^{(k_a+k_\phi)(t+t_f)} t + (e^{2k_\phi+k_a(t+t_0)} \right. \right. \\
& \left. \left. - e^{2k_\phi t_0+k_a(t+t_0)} - 2e^{k_\phi(t+t_f)+k_a(t_0+t_f)}) t_0 + (-e^{2k_\phi+k_a(t+t_0)} + e^{2k_\phi t_0+k_a(t+t_0)} \right. \right. \\
& \left. \left. - 2e^{(k_a+k_\phi)(t+t_f)} + 2e^{k_\phi(t+t_f)+k_a(t_0+t_f)}) t_f \right) \right) v_y w_a \Big) k_a + k_\phi^5 r_p \left(r_y \left((-e^{2k_\phi} \right. \right. \\
& \left. \left. + e^{2k_\phi t_0}) \left(e^{k_a(t+3t_0-4t_f)} - e^{k_a(t+t_0-2t_f)} \right) - 2e^{k_\phi(t+t_f)} \left(e^{k_a(2t+t_0-3t_f)} \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - e^{3k_a(t_0-t_f)} \right) k_\phi (t-t_f) \right) + \left(e^{2k_\phi+k_a(t+3t_0-4t_f)} - e^{2k_\phi t_0+k_a(t+3t_0-4t_f)} \right. \\
& \left. - e^{2k_\phi+k_a(t+t_0-2t_f)} + e^{2k_\phi t_0+k_a(t+t_0-2t_f)} + 2e^{k_a(2t+t_0-3t_f)+k_\phi(t+t_f)} \right. \\
& \left. \left. - 2e^{3k_a(t_0-t_f)+k_\phi(t+t_f)} \right) k_\phi v_y w_a \right) \Big]
\end{aligned} \tag{3.31}$$

이와 같은 방법으로 식 (3.12)를 적분하여 나머지 상태 변수 x_4 , x_5 도 구할 수 있다.

그 후, $r_y = x_4(t_f)$, $v_y = x_5(t_f)$ 의 연립 방정식을 풀어 r_y , v_y 를 구할 수 있다.

이상의 방법으로 구한 최적 유도 법칙은 끝으로 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned}
A_z^c &= \frac{1}{a_5(t_{go})} [a_1(t_{go})x_1 + a_2(t_{go})x_2 + a_3(t_{go})x_3 + a_4(t_{go})g_1] \\
\phi^c &= \frac{1}{P_5^T b_5(t_{go})} [P_1^T b_1(t_{go})x_4 + P_2^T b_2(t_{go})x_5 + P_3^T b_3(t_{go})x_6 \\
& \quad + P_4^T b_4(t_{go})g_2] + \bar{\phi}
\end{aligned} \tag{3.32}$$

$$\begin{aligned}
a_1(t_{go}) &= k_1 k_a (6k_1^2 k_a^3 w_a t_{go}^2 e^{k_a t_{go}} + 6k_a^3 t_{go} e^{2k_a t_{go}} (k_1^2 w_a t_{go} + 2w_1) \\
&\quad + 12w_1 k_a^2 e^{k_a t_{go}} - 12w_1 k_a^2 e^{2k_a t_{go}} + 2k_1^2 k_a^2 w_a t_{go} (6e^{k_a t_{go}} - 9e^{2k_a t_{go}} + 3) \\
&\quad + 12k_1^2 k_a w_a (e^{k_a t_{go}} - 1)^2) \\
a_2(t_{go}) &= k_1 k_a (2k_1^2 k_a^3 w_a t_{go}^3 e^{k_a t_{go}} - 12w_1 k_a^3 w_a e^{k_a t_{go}} + 4k_a^3 e^{2k_a t_{go}} (w_a (k_1^2 t_{go}^3 \\
&\quad + 3w_1) + 3w_1 t_{go}^2) + 12w_1 k_a^2 t_{go} e^{k_a t_{go}} - 12w_1 k_a^2 t_{go} e^{2k_a t_{go}} \\
&\quad + 2k_1^2 k_a^2 w_a t_{go}^2 (3e^{k_a t_{go}} - 6e^{2k_a t_{go}} + 3) + 6k_1^2 k_a w_a t_{go} (e^{k_a t_{go}} - 3) (e^{k_a t_{go}} \\
&\quad - 1) + 12k_1^2 w_a (e^{k_a t_{go}} - 1)^2) \\
a_3(t_{go}) &= k_1 k_a (-4k_1^3 k_a^2 w_a t_{go}^3 (e^{k_a t_{go}} + e^{2k_a t_{go}} + 1) + 18k_1^3 k_a w_a t_{go}^2 (e^{k_a t_{go}} \\
&\quad - 1) (e^{k_a t_{go}} + 1) + 24k_1 w_1 k_a t_{go} e^{k_a t_{go}} (e^{k_a t_{go}} - 1) + 24k_1 w_1 k_a^2 w_a e^{k_a t_{go}} \\
&\quad - 12k_1 w_1 k_a^2 e^{2k_a t_{go}} (w_a + t_{go}^2) - 12k_1 (e^{k_a t_{go}} - 1)^2 (2k_1^2 w_a t_{go} + w_1) \\
&\quad - 12k_1 w_1 k_a^2 w_a) \\
a_4(t_{go}) &= k_1 k_a t_{go} (3k_1^2 w_a (k_a t_{go} + 2)^2 + e^{k_a t_{go}} (6w_1 k_a^2 t_{go} - w_a (k_1^2 (k_a^3 t_{go}^3 \\
&\quad + 12k_a t_{go} + 24) + 12w_1 k_a^3)) + e^{2k_a t_{go}} (6w_1 k_a^2 t_{go} (k_a t_{go} - 1) \\
&\quad + w_a (k_1^2 (k_a^2 t_{go}^2 (k_a t_{go} - 3) + 12) + 12w_1 k_a^3))) \\
a_5(t_{go}) &= k_1^4 w_a (k_a t_{go} (24 (e^{k_a t_{go}} - 1) + k_a t_{go} (-4e^{k_a t_{go}} (k_a t_{go} + 3) \\
&\quad - 2 (k_a t_{go} + 6) + e^{2k_a t_{go}} (k_a t_{go} (k_a t_{go} - 6) + 12))) - 12 (e^{k_a t_{go}} - 1)^2) \\
&\quad + 2k_1^2 w_1 k_a (12k_a e^{k_a t_{go}} (k_a w_a - t_{go}) + e^{2k_a t_{go}} (k_a (3k_a w_a (2k_a t_{go} - 3) \\
&\quad + 2t_{go} (k_a t_{go} (k_a t_{go} - 3) + 3)) + 3) - 3 (k_a^2 w_a + 1)) + 12w_1^2 k_a^4 e^{2k_a t_{go}} \\
&\hspace{15em} (3.33)
\end{aligned}$$

여기서, $b_1 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{416}$, $b_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{420}$, $b_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{427}$, $b_4 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{480}$, $b_5 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{580}$ 는 잔여 비행 시간 t_{go} 의 함수이며, 열 벡터 P_i , ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)는 상

태 변수 x_1, x_2, x_3 와 g_1 의 곱으로 이루어져 있다.

3.3 실시간 구현을 위한 준최적 유도 법칙의 단순화

본 논문에서 제안 하는 유도 법칙은 잔여 비행시간에 대한 함수를 계수로 갖는 시변 상태 궤환의 형태를 띠고 있다. 또한, [30]에서 개발한 자동조종 제어기의 동역학을 고려하여 미사일은 비행 환경 변수에 무관하게 일정한 비행 성능을 유지할 수 있다. 한편, 피치와 롤 채널의 대역폭인 k_a , k_ϕ 는 미리 결정되어 주어지는 값이고, 유도 법칙의 목적 함수 역시 설계 시 미리 결정되기 때문에 이에 관한 가중치 w_a , w_1 , w_2 또한 역시 미사일이 발사 되기 전에 정해지는 값이다. 따라서 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙은 단순히 잔여 비행 시간에 따라 이득이 변화하는 형태로 정리할 수 있다.

그러나 그렇게 구현한 최적 유도 법칙은 여러 상태변수와 설계변수, 가중치 등의 곱으로 복잡하게 이루어져 있어 그 양이 매우 방대하다. 그러므로 실제로 구현 시, 기억 소자나 전력 등과 같은 시스템의 자원을 많이 소비할 수 있다는 우려가 있다. 또한, 직접 연산에 있어서도 그 과정에서 소요되는 연산 시간이 길어져 실시간 구현에 있어서도 우려의 소지가 있다. 따라서 본 최적 유도 법칙을 실제 구현함에 있어 용이성을 도모하고자 최적 유도 법칙의 최적 해를 좀 더 간단하게 구현하는 연구를 수행한다.

우선, 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙의 목적 함수인 식 (3.9)을 살펴보자. 앞서 언급한 것 처럼 본 목적 함수에는 w_a , w_1 , w_2 와 같은 총 세 가지의 가중치가 있다. 이 중에서 먼저, w_a 는 표적 충돌각 오차에 관한 가중치이다. 그리고 w_1 , w_2 는 각각 피치 가속도와 롤 각에 대한 제어 입력의 가중치로 에너지 최적화와 관련된 값이다. 다시 한 번 언급하지만 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙은 표적에 대한 요격 오차와 함께 충돌각 오차의 최적화가 그 목표이다. 그러므로 최적 유도 법칙의 목적 함수인 식 (3.9)에서 적분항에 해당하는 에너지 최적화는 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙에서 고려할 대상이 아니다. 따라서 이에 해당하는 가

중치인 w_1, w_2 의 값은 0으로 설정하는 것이 더 바람직하다.

더욱이, 앞 절에서 구한 최적 유도 법칙의 최적 해에서 에너지 최적화에 관련한 가중치 w_1, w_2 에 대한 항들이 전체 해에서 차지하는 부분이 많은 것을 확인할 수 있었다. 앞서 언급한 것 처럼 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙의 목표에 부합하지 않는 에너지 최적화에 관련한 가중치인 w_1, w_2 를 0으로 설정하면 전체 최적 해에서 이들 가중치에 대한 항들을 소거하는 것이 가능해 진다. 이렇게 소거한 항들의 수 만큼 수식의 양이 적어 지는 것은 자명하다. 그러므로 에너지 최적화에 관련한 가중치인 w_1, w_2 를 0으로 설정하는 것으로 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙의 단순화를 수행할 수 있다.

단순화를 거친 최적 유도 법칙은 다음과 같다. 여기에서 단순화 한 피치 가속도 명령을 A_{zs}^c 라고 정의하고 단순화 한 톨 각 명령을 ϕ_s^c 라고 정의한다.

$$\begin{aligned}
 A_{zs}^c &= \frac{1}{\alpha_5(t_{go})} [\alpha_1(t_{go})x_1 + \alpha_2(t_{go})x_2 + \alpha_3(t_{go})x_3 + \alpha_4(t_{go})g_1] \\
 \phi_s^c &= \frac{1}{Q_5^T \beta_5(t_{go})} [Q_1^T \beta_1(t_{go})x_4 + Q_2^T \beta_2(t_{go})x_5 + Q_3^T \beta_3(t_{go})x_6 \\
 &\quad + Q_4^T \beta_4(t_{go})g_2] + \bar{\phi}
 \end{aligned} \tag{3.34}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_1(t_{go}) &= k_a (6k_a^3 t_{go}^2 e^{k_a t_{go}} (e^{k_a t_{go}} + 1) + 2k_a^2 t_{go} (6e^{k_a t_{go}} - 9e^{2k_a t_{go}} + 3) \\
&\quad + 12k_a (e^{k_a t_{go}} - 1)^2) \\
\alpha_2(t_{go}) &= k_a (2k_a^3 t_{go}^3 e^{k_a t_{go}} (2e^{k_a t_{go}} + 1) + 2k_a^2 t_{go}^2 (3e^{k_a t_{go}} - 6e^{2k_a t_{go}} + 3) \\
&\quad + 6k_a t_{go} (e^{k_a t_{go}} - 3) (e^{k_a t_{go}} - 1) + 12 (e^{k_a t_{go}} - 1)^2) \\
\alpha_3(t_{go}) &= k_a (-4k_1 k_a^2 t_{go}^3 (e^{k_a t_{go}} + e^{2k_a t_{go}} + 1) \\
&\quad + 18k_1 k_a t_{go}^2 (e^{k_a t_{go}} - 1) (e^{k_a t_{go}} + 1) - 24k_1 t_{go} (e^{k_a t_{go}} - 1)^2) \\
\alpha_4(t_{go}) &= k_a t_{go} (e^{k_a t_{go}} - 1) (e^{k_a t_{go}} (k_a^2 t_{go}^2 (k_a t_{go} - 3) + 12) - 3 (k_a t_{go} + 2)^2) \\
\alpha_5(t_{go}) &= k_1 (k_a t_{go} (24 (e^{k_a t_{go}} - 1) + k_a t_{go} (-4e^{k_a t_{go}} (k_a t_{go} + 3) \\
&\quad - 2 (k_a t_{go} + 6) + e^{2k_a t_{go}} (k_a t_{go} (k_a t_{go} - 6) + 12))) \\
&\quad - 12 (e^{k_a t_{go}} - 1)^2)
\end{aligned} \tag{3.35}$$

여기서, $\beta_{1,2,4} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{269}$, $\beta_3 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{267}$, $\beta_5 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^{273}$ 는 잔여 비행 시간 t_{go} 의 함수이며, 열 벡터 Q_i , ($i = 1, 2, 3, 4, 5$)는 상태 변수 x_1, x_2, x_3 와 g_1 의 곱으로 이루어져 있다.

단순화 한 최적 유도 법칙 식 (3.34)을 보면 앞서 구한 단순화를 거치지 않은 최적 유도 법칙인 식 (3.32)에 비하여 각 항 마다 계수의 양이 절반 가량 감소한 것을 알 수 있다. 식의 양이 줄어드는 만큼 구현 시 계산량 역시 줄어드는데 이를 단순화 전후로 개괄적으로 비교해 보면 다음의 표 (3.1)과 같다. 이를 통해 본 논문에서 제안한 유도 법칙이 단순화를 통해 계산량을 약 75% 정도 줄일 수 있음을 알 수 있다.

계산량을 줄임으로써 또한 그 만큼 연산 시간 역시 줄일 수가 있다. 표 (3.1)의

결과를 토대로 상용 DSP(digital signal processor)[37, 38, 39]를 대상으로 단순화 한 최적 유도 법칙의 연산 소요 시간을 개괄적으로 계산 해 보면 다음의 표 (3.2)와 같다. 이 때, FLOPS(floating-point operations per second)는 초당 수행할 수 있는 부동소수점 연산 횟수를 뜻한다. 이 처럼 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙은 단순화를 통해 연산량 및 연산 시간을 대폭 줄일 수 있으며 이를 통해 실제 미사일 시스템에서 구현함에 있어 구현의 용이성 및 실용성을 높일 수 있다.

표 3.1: 최적 유도 법칙의 단순화 전후의 계산량 비교

	단순화 전 유도 법칙	단순화 한 유도 법칙 ($w_1, w_2 \rightarrow 0$)
연산 횟수	약 290,000회	약 75,000회

표 3.2: 단순화 한 최적 유도 법칙의 계산 시간 비교

DSP (FLOPS)	연산 시간 (μsec)	비고
TMS320C6727B (2100M)	35	고성능 DSP
TMS320C6713B (1800M)	41	
TMS320F28335 (300M)	251	

3.4 준최적 유도 법칙의 타당성 검증

앞 절까지 최적 유도 법칙의 유도를 마쳤다. 유도 과정에서 식 (3.18)과 같이 준상태 방정식의 근사를 거쳐 최적 유도 법칙을 도출하였는데 본 절에서는 이에 대한 타당성을 검증한다. 검증은 식 (3.18)의 준상태 방정식 근사를 거치지 않은 채 식 (3.12), (3.14)의 수치해(numerical solution)를 구해 앞 절에서 준상태 방정식의 근사를 통해 구한 각 상태 방정식, 준상태 방정식의 해석해(analytic solution)와 비교하는 방식으로 진행한다.

상태 방정식인 식 (3.12)은 종말 유도 단계에서 상태 변수들의 초기치가 정해진다. 또한, 준상태 방정식인 식 (3.14)은 식 (3.15)과 같이 경계 조건이 주어져 있다. 따라서 이들 방정식은 두 점 경계치 문제(two point boundary value problem)로 정리할 수 있다. 그리고 이는 사격법(shooting method)을 통해 풀 수 있다[5, 17].

먼저 식 (3.12)의 상태 방정식을 식 (3.16)의 필요 조건에 따라 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= -k_1 x_3 + g_1 \\
 \dot{x}_3 &= -k_a x_3 - \frac{k_a^2}{w_1} \lambda_3 \\
 \dot{x}_4 &= x_5 \\
 \dot{x}_5 &= k_2 x_3 x_6 + g_2 \\
 \dot{x}_6 &= -k_\phi x_6 - \frac{k_\phi^2}{w_2} \lambda_6
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

이제 식 (3.36)의 상태 방정식과 식 (3.14)의 준상태 방정식은 온전히 상태 변수와 준상태 변수만으로 이루어진 식으로 정리되었다. 한편, 식 (3.15)의 경계 조건에서

$\lambda_1(t_f), \lambda_2(t_f), \lambda_4(t_f), \lambda_5(t_f)$ 는 각각 주어져 있지만 이는 특정한 값이 아니다. 따라서 다음의 준상태 변수를 새로 정의한다.

$$\begin{aligned}
 \bar{\lambda}_1 &\triangleq \lambda_1 - x_1 \\
 \bar{\lambda}_2 &\triangleq \lambda_2 - w_a x_2 \\
 \bar{\lambda}_3 &\triangleq \lambda_3 \\
 \bar{\lambda}_4 &\triangleq \lambda_4 - x_4 \\
 \bar{\lambda}_5 &\triangleq \lambda_5 - w_a x_5 \\
 \bar{\lambda}_6 &\triangleq \lambda_6
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

위 식 (3.37)에 의해 식 (3.14)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다. 이 때, 가중치 w_a 는 사용자가 임의로 설정할 수 있는 값으로 1이라 설정한다.

$$\begin{aligned}
 \dot{\bar{\lambda}}_1 &= -x_2 \\
 \dot{\bar{\lambda}}_2 &= -\bar{\lambda}_1 - x_1 + k_1 x_3 - g_1 \\
 \dot{\bar{\lambda}}_3 &= k_1 \bar{\lambda}_2 + k_1 x_2 + k_a \bar{\lambda}_3 - k_2 \bar{\lambda}_5 x_6 - k_2 x_5 x_6 \\
 \dot{\bar{\lambda}}_4 &= -x_5 \\
 \dot{\bar{\lambda}}_5 &= \bar{\lambda}_4 - x_4 - k_2 x_3 x_6 - g_2 \\
 \dot{\bar{\lambda}}_6 &= -k_2 \bar{\lambda}_5 x_3 - k_2 x_3 x_5 + k_\phi \bar{\lambda}_6
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

따라서 식 (3.15)의 경계 조건은 새로운 준상태 변수 $\bar{\lambda}$ 에 대해 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned}
\bar{\lambda}_1(t_f) &= 0 \\
\bar{\lambda}_2(t_f) &= 0 \\
\bar{\lambda}_3(t_f) &= 0 \\
\bar{\lambda}_4(t_f) &= 0 \\
\bar{\lambda}_5(t_f) &= 0 \\
\bar{\lambda}_6(t_f) &= 0
\end{aligned} \tag{3.39}$$

이제 상태 방정식 (3.36)과 준상태 방정식 (3.14)은 $x_i(0)$ ($i = 1, \dots, 6$)이 주어진 식 (3.36)과 $\bar{\lambda}_i(t_f)$ ($i = 1, \dots, 6$)이 주어진 식 (3.38)의 두 점 경계치 문제로 정리할 수 있으며 이는 사격법을 통해 풀 수 있다[5, 17].

먼저, 적절한 $\bar{\lambda}_i(0)$ ($i = 1, \dots, 6$)을 선정 해 주어진 $x_i(0)$ ($i = 1, \dots, 6$)과 함께 두고 식 (3.36)과 식 (3.38)의 미분 방정식을 시간 0부터 t_f 까지 적분한다. 그렇게 구한 $\bar{\lambda}_i(t_f)$ ($i = 1, \dots, 6$)을 본래 경계 조건인 식 (3.39)과 비교 해 가며 경계 조건을 만족하는 $\bar{\lambda}_i(0)$ ($i = 1, \dots, 6$)을 찾아 수치해를 구하는 것이다. 상태 변수 $x_i(t)$ ($i = 1, \dots, 6$)와 준상태 변수 $\bar{\lambda}_i(t)$ ($i = 1, \dots, 6$)를 묶어 다음의 $\mu(t)$ 를 정의한다.

$$\mu(t) \triangleq [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_6(t) \ \bar{\lambda}_1(t) \ \dots \ \bar{\lambda}_6(t)]^T \tag{3.40}$$

그러면 식 (3.36)과 식 (3.38)에 의해 다음의 $\dot{\mu}(t)$ 를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\dot{\mu}(t) &\triangleq F(\mu, t) \\
&= \begin{bmatrix}
\mu_2 \\
-k_1\mu_3 + g_1 \\
-k_a\mu_3 - \frac{k_a^2}{w_1}\mu_9 \\
\mu_5 \\
k_2\mu_3\mu_6 + g_2 \\
-k_\phi\mu_6 - \frac{k_\phi^2}{w_2}\mu_{12} \\
-\mu_2 \\
-\mu_7 - \mu_1 + k_1\mu_3 - g_1 \\
k_1\mu_2 + k_1\mu_8 + k_a\mu_9 - k_2\mu_6\mu_{11} - k_2\mu_5\mu_6 \\
-\mu_5 \\
-\mu_{10} - \mu_4 - k_2\mu_3\mu_6 - g_2 \\
-k_2\mu_3\mu_{11} - k_2\mu_3\mu_5 + k_\phi\mu_{12}
\end{bmatrix} \tag{3.41}
\end{aligned}$$

여기에서, $\Gamma(t) \triangleq \partial F / \partial \mu$, $\mu_0 \triangleq \mu(t_0)$ 라고 할 때, 식 (3.41)에 의해 다음이 성립한다.

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mu}{\partial \mu_0} \right] = \Gamma(t) \left[\frac{\partial \mu}{\partial \mu_0} \right], \quad \frac{\partial \mu}{\partial \mu_0}(t_0) = I_{12} \tag{3.42}$$

이 때, $\Gamma(t)$ 는 다음과 같다.

$$\Gamma(t) = [\gamma_1 \dots \gamma_{12}]^T \tag{3.43}$$

$$\begin{aligned}
\gamma_1(t) &\triangleq [0 \ 1 \ 0_{1 \times 10}] \\
\gamma_2(t) &\triangleq [0_{1 \times 2} \ -k_1 \ 0_{1 \times 9}] \\
\gamma_3(t) &\triangleq \left[0_{1 \times 2} \ -k_a \ 0_{1 \times 5} \ -\frac{k_a^2}{w_1} \ 0_{1 \times 3} \right] \\
\gamma_4(t) &\triangleq [0_{1 \times 5} \ 1 \ 0_{1 \times 7}] \\
\gamma_5(t) &\triangleq [0_{1 \times 2} \ k_2\mu_6 \ 0_{1 \times 2} \ k_2\mu_3 \ 0_{1 \times 6}] \\
\gamma_6(t) &\triangleq \left[0_{1 \times 5} \ -k_\phi \ 0_{1 \times 5} \ -\frac{k_\phi^2}{w_2} \right] \\
\gamma_7(t) &\triangleq [0 \ -1 \ 0_{1 \times 10}] \\
\gamma_8(t) &\triangleq [-1 \ 0 \ k_1 \ 0_{1 \times 3} \ -1 \ 0_{1 \times 5}] \\
\gamma_9(t) &\triangleq [0 \ k_1 \ 0_{1 \times 2} \ -k_2\mu_6 \ -k_2(\mu_5 + \mu_{11}) \ k_1 \ k_a \ 0 \ -k_2\mu_6 \ 0] \\
\gamma_{10}(t) &\triangleq [0_{1 \times 4} \ -1 \ 0_{1 \times 7}] \\
\gamma_{11}(t) &\triangleq [0_{1 \times 2} \ -k_2\mu_6 \ -1 \ 0 \ -k_2\mu_3 \ 0_{1 \times 3} \ -1 \ 0_{1 \times 2}] \\
\gamma_{12}(t) &\triangleq [0_{1 \times 2} \ -k_2(\mu_5 + \mu_{11}) \ 0 \ -k_2\mu_3 \ 0_{1 \times 5} \ -k_2\mu_3 \ k_\phi]
\end{aligned} \tag{3.44}$$

이제 식 (3.42)를 풀면 $\frac{\partial \mu(t_f)}{\partial \mu_0}$ 을 구할 수 있고 그러면 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned}
\delta \mu(t_f) &\cong \frac{\partial \mu(t_f)}{\partial \mu_0} \delta \mu_0 \\
&= \begin{bmatrix} \frac{\partial \mu(t_f)}{\partial x_0} & \frac{\partial \mu(t_f)}{\partial \lambda_0} \end{bmatrix} [0 \ \delta \bar{\lambda}_0]^T \\
&= \frac{\partial \mu(t_f)}{\partial \lambda_0} \delta \bar{\lambda}_0
\end{aligned} \tag{3.45}$$

위 식 (3.45)에 의해 다음을 구할 수 있다.

$$\delta\bar{\lambda}_0 = \left[\frac{\partial\mu(t_f)}{\partial\lambda_0} \right]^\dagger \delta\mu(t_f) \quad (3.46)$$

이제 $(\bar{\lambda}_0)_{new} = (\bar{\lambda}_0)_{old} + \delta\bar{\lambda}(t_0)$ 를 통해 새로운 초기값 $(\bar{\lambda}_0)_{new}$ 를 구할 수 있고 이러한 과정을 반복하여 식 (3.39)의 경계조건을 만족하는 $\bar{\lambda}_0$ 를 구한다. 그 후, 식 (3.37)를 통해 본래의 준상태 변수 λ 에 대한 초기값 λ_0 를 구할 수 있다. 이러한 과정을 통해 구한 λ_0 는 다음과 같다. 이 때, 상태 방정식과 준상태 방정식에 있는 상수들은 후에 언급할 모의 실험에서의 값들과 동일하게 설정하였다. $k_a = 0.25$, $k_\phi = 0.75$, $k_1 = 0.9282$, $k_2 = 0.9769$ 로 두었고, 요격 상황은 각각 초기 위치 $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [1600, 5, -10](m)$, $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [4000, 20, -40](m)$ 에 정지 해 있는 표적에 대해 ($\psi^* = 0^\circ$, $\theta^* = 0^\circ$)의 충돌각으로 요격하는 상황을 상정하였다. 이 때, 에너지 최적화 관련 가중치는 $w_1 = 1 \times 10^{-2}$, $w_2 = 1 \times 10^{-2}$, $w_1 = 1 \times 10^{-6}$, $w_2 = 1 \times 10^{-6}$ 의 경우로 나누어 수치 해를 구해 보았다.

이 때의 상태 변수, 준상태 변수의 궤적과 앞 절에서 구한 해석해의 궤적을 그려 보면 다음의 그림 3.4-3.13과 같다. 이를 통해 식 (3.18)의 준상태 방정식 근사를 통해 구한 상태 방정식, 준상태 방정식의 해석해와 근사를 하지 않고 구한 수치해의 궤적이 일치함을 확인할 수 있다. 특히, 식 (3.18)의 근사를 한 경우와 하지 않은 경우의 준상태 변수 λ_3 의 궤적이 일치함을 확인할 수 있는데 이를 통해, 해석해를 구하기 위한 식 (3.18)의 근사는 타당하다 볼 수 있다. 또한, 그림 3.8, 3.13에서 에너지 최적화 관련 가중치 w_1 , w_2 를 작게할 수록 λ_3 에 관한 식에서의 $k_2\lambda_5x_6$ 의 비중이 작아지는 것을 확인할 수 있는데 이를 통해, 앞 절에서 설명한 것과 같이 본 유도 법칙의 목적에 따라 에너지 최적화 관련 가중치를 0으로 설정하는 것이 식 (3.18)의 근사의 타당성을 보다 높이는데도 효과를 준 것이다.

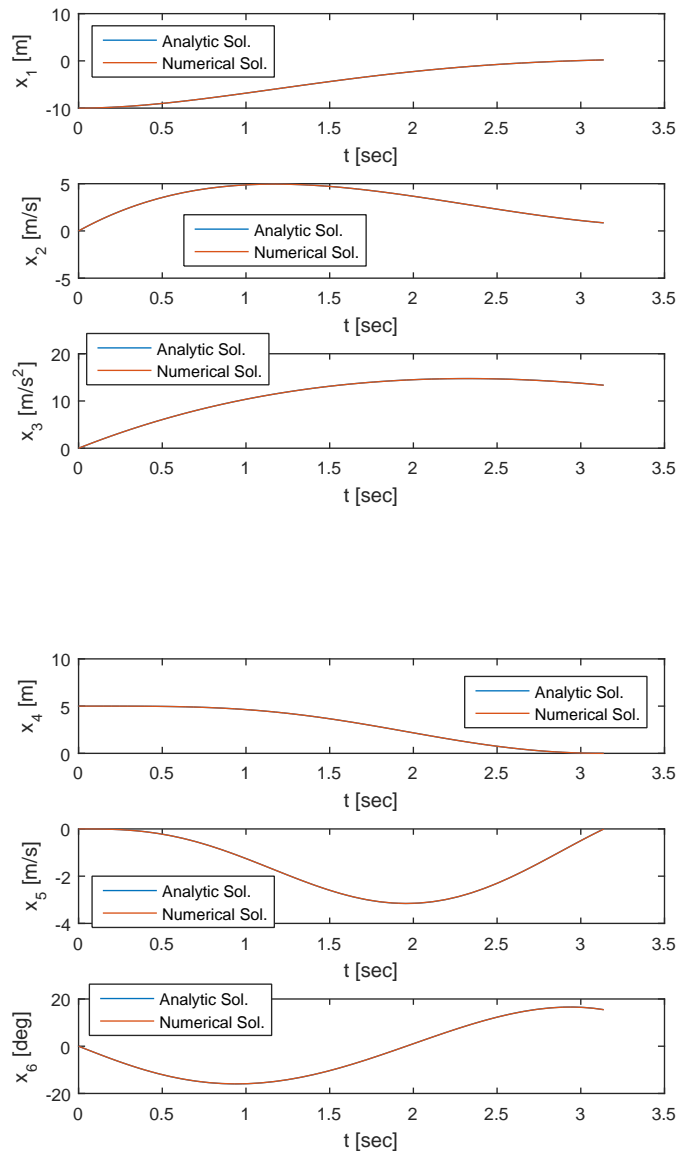


그림 3.4: 상태 변수의 궤적 (Case 1) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-2}$

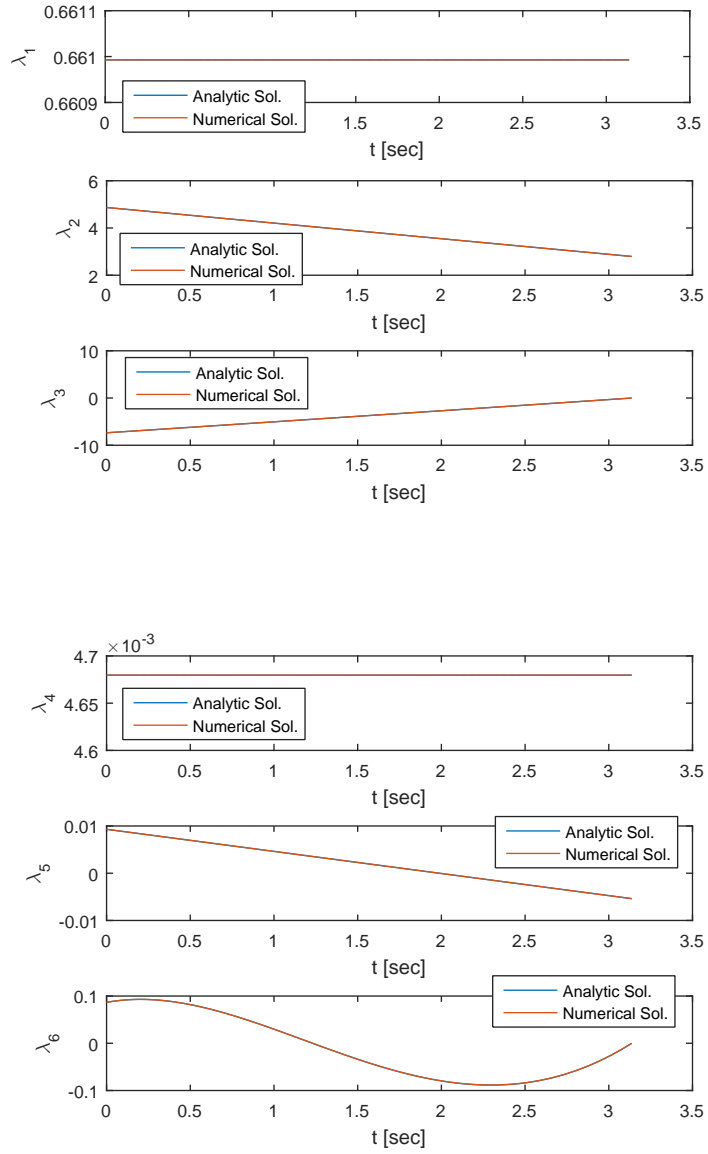


그림 3.5: 준상태 변수의 궤적 (Case 1) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-2}$

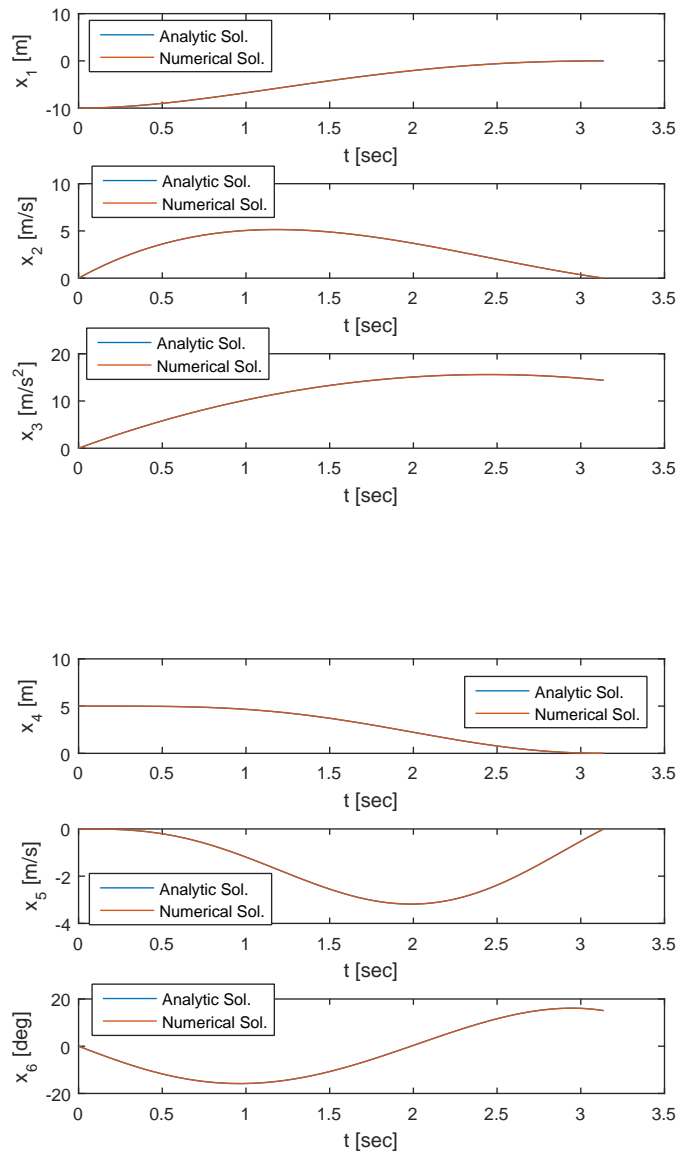


그림 3.6: 상태 변수의 궤적 (Case 1) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-6}$

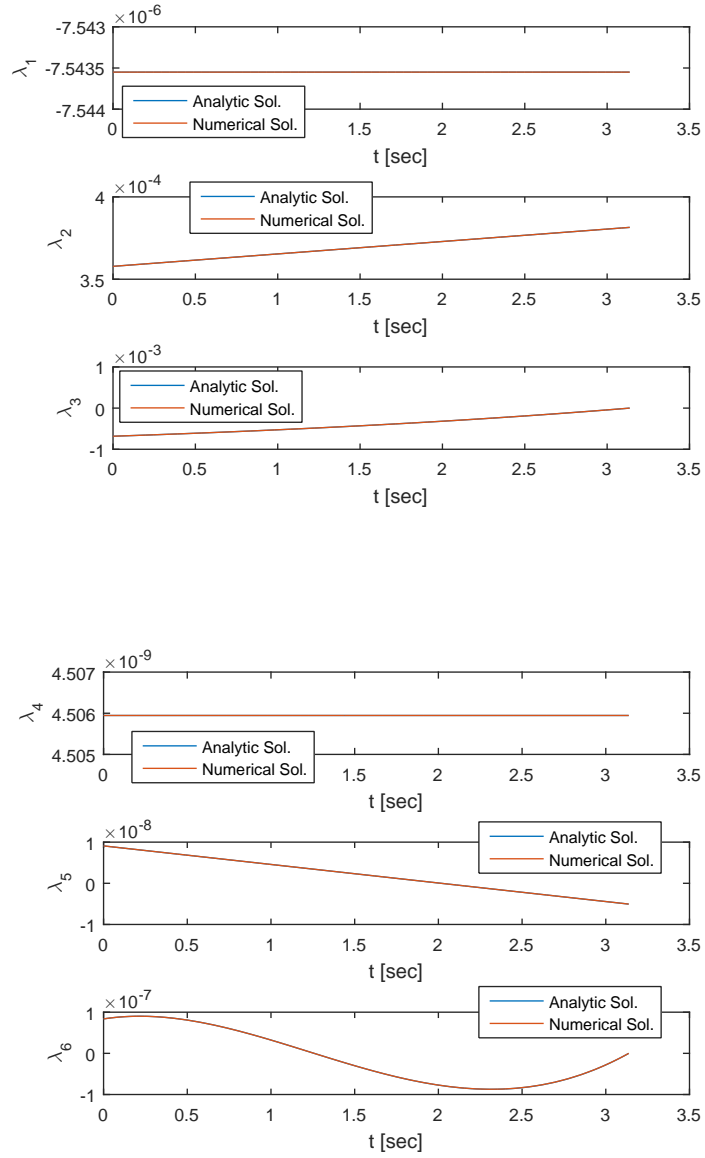
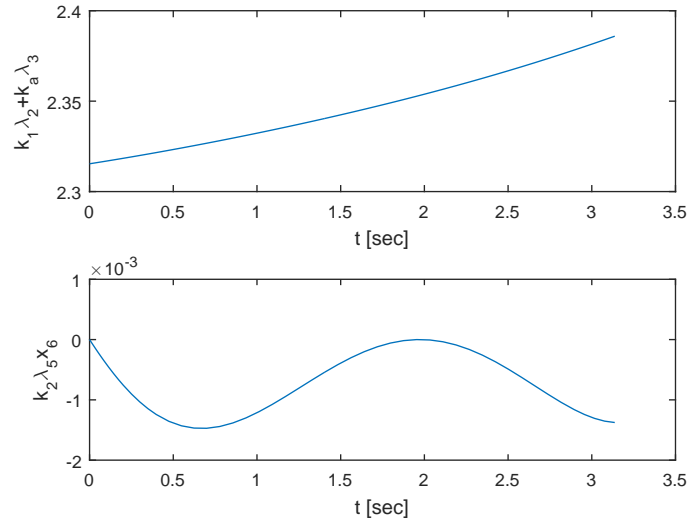
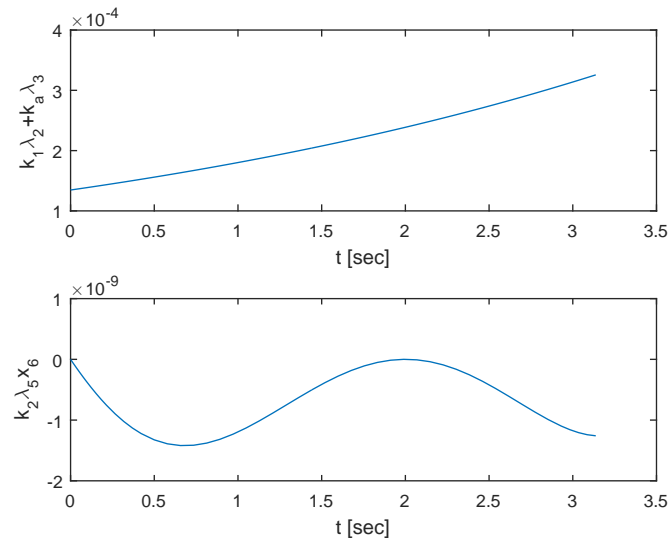


그림 3.7: 준상태 변수의 궤적 (Case 1) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-6}$



(a) $w_{1,2} = 1 \times 10^{-2}$



(b) $w_{1,2} = 1 \times 10^{-6}$

그림 3.8: $k_1 \lambda_2 + k_a \lambda_3$ 와 $k_2 \lambda_5 x_6$ 의 비교 (Case 1)

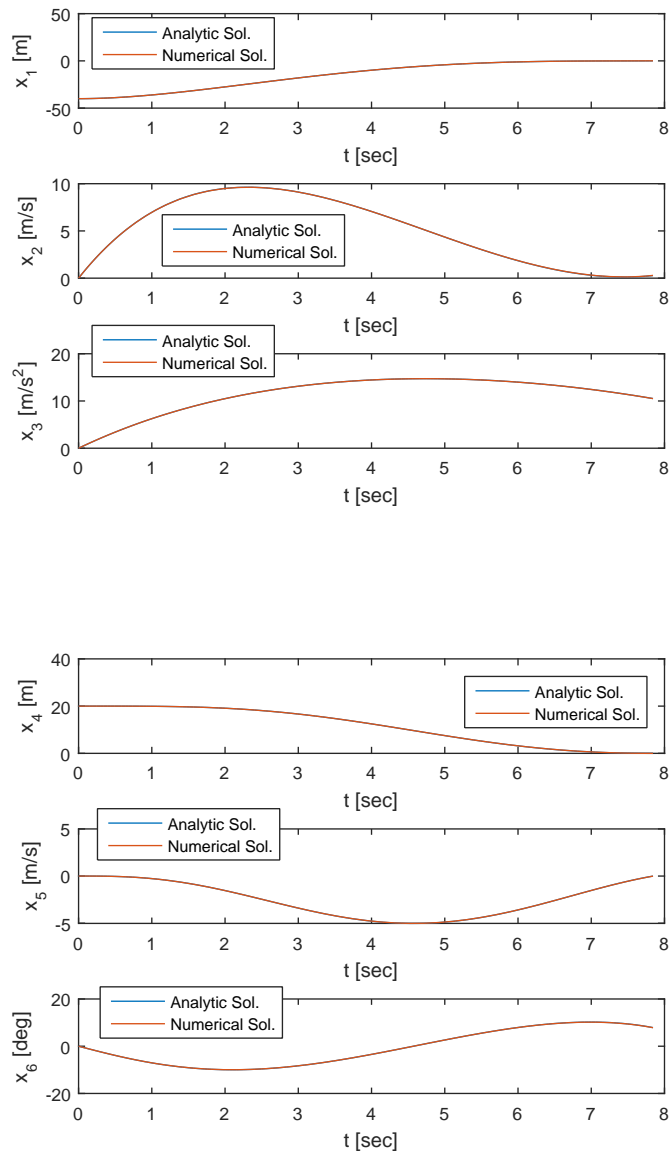


그림 3.9: 상태 변수의 궤적 (Case 2) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-2}$

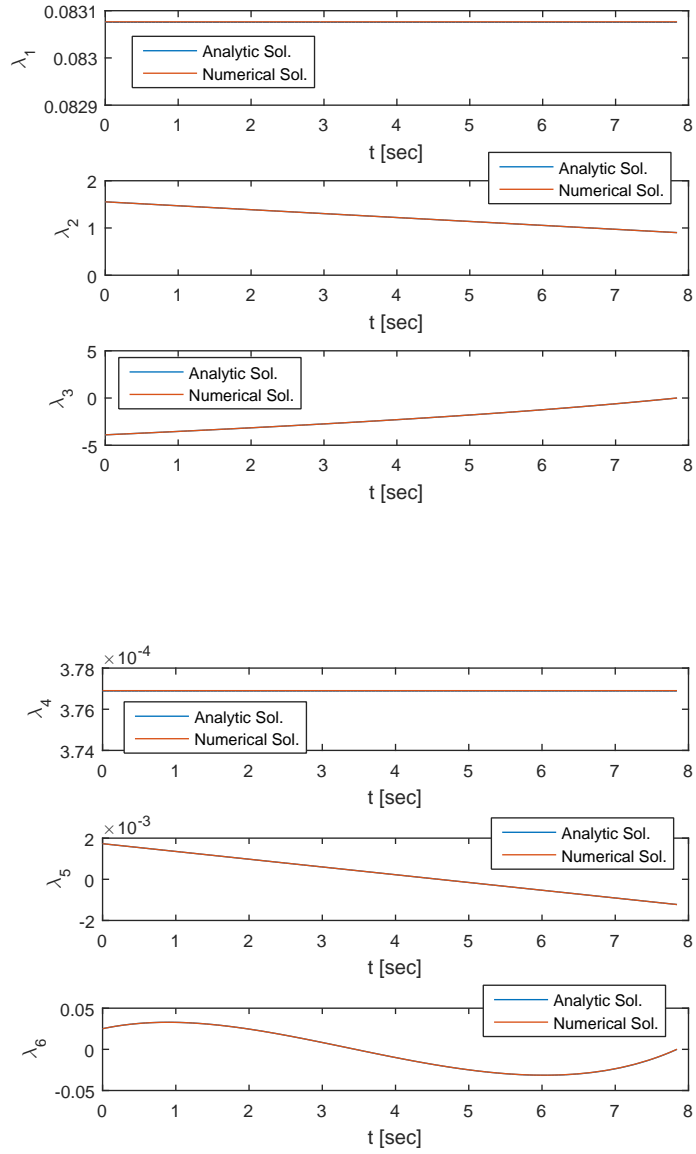


그림 3.10: 준상태 변수의 궤적 (Case 2) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-2}$

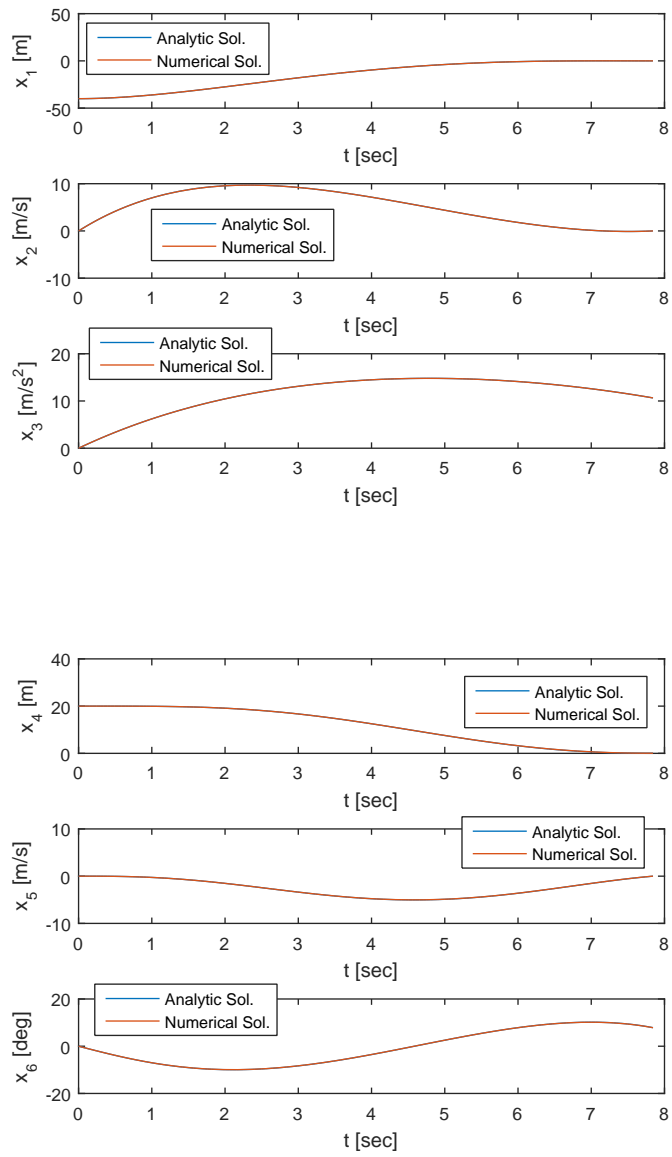


그림 3.11: 상태 변수의 궤적 (Case 2) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-6}$

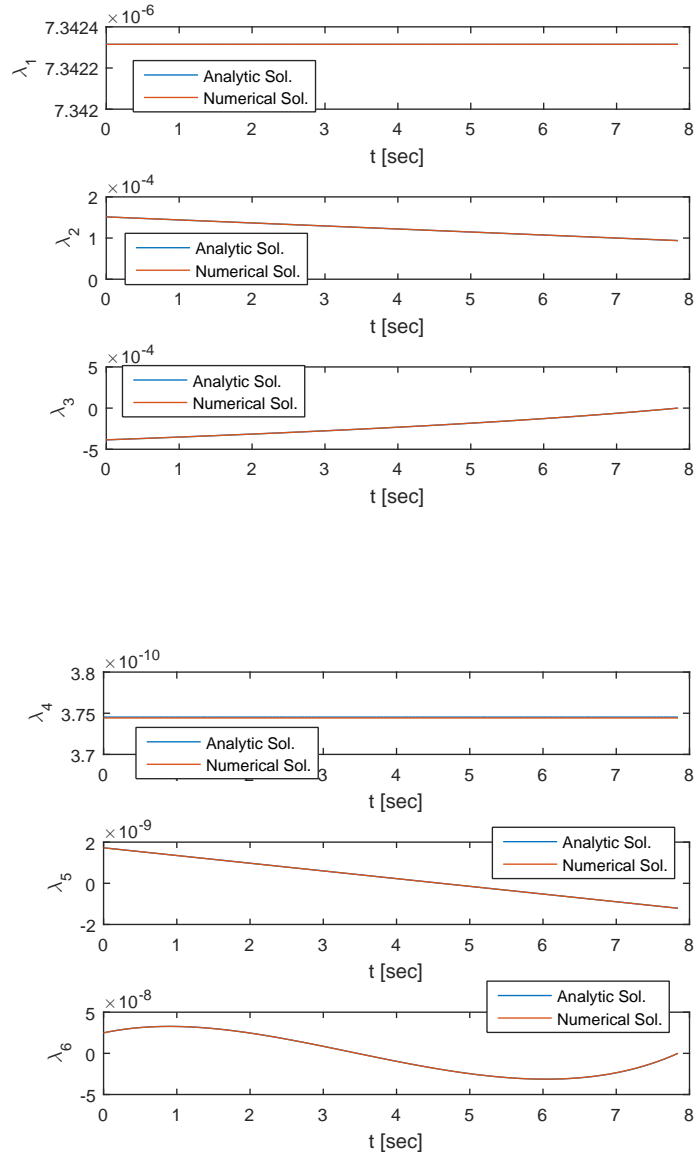
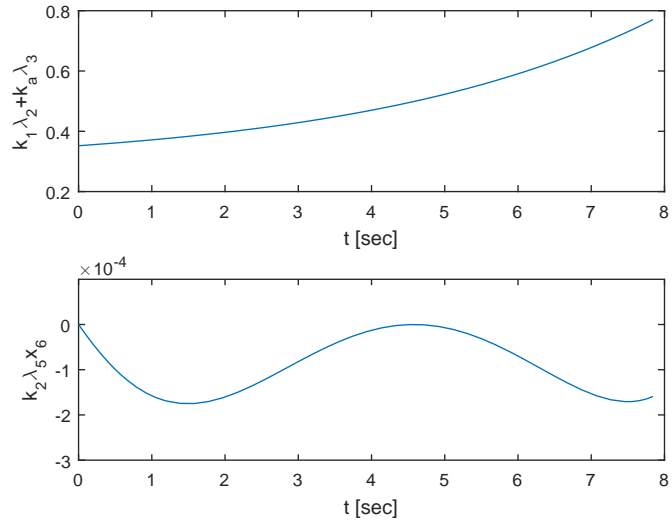
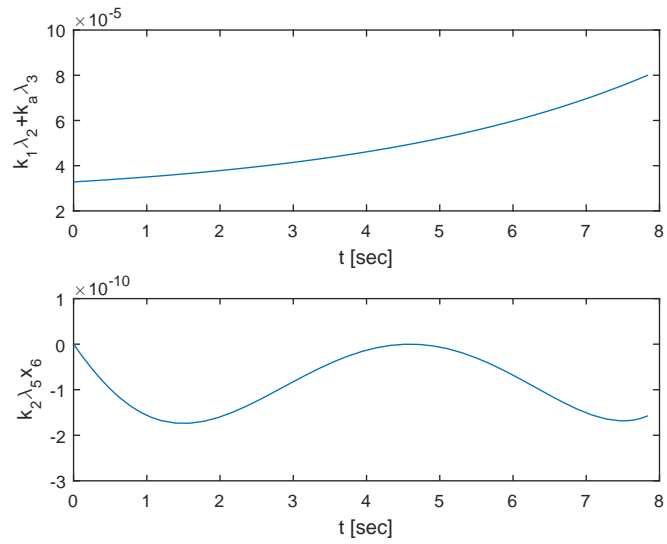


그림 3.12: 준상태 변수의 궤적 (Case 2) - $w_{1,2} = 1 \times 10^{-6}$



(a) $w_{1,2} = 1 \times 10^{-2}$



(b) $w_{1,2} = 1 \times 10^{-6}$

그림 3.13: $k_1 \lambda_2 + k_a \lambda_3$ 와 $k_2 \lambda_5 x_6$ 의 비교 (Case 2)

제 4 장 모의 실험을 통한 성능 분석

4.1 모의 실험 환경

본 논문에서 제안한 최적 유도 법칙의 성능을 모의 실험을 통해 평가한다. 이를 위해서 BTT 미사일의 통합 시뮬레이터를 제작하였다. 시뮬레이터의 구현은 미사일 시스템의 각 하부 시스템을 소프트웨어적으로 모듈화하는 방식으로 매트랩의 시뮬링크 환경을 기반으로 제작되었으며 그림 4.1와 같다.

먼저, 유도 모듈에서는 표적을 원하는 충돌각으로 요격하기 위해 BTT 미사일의 롤 각과 피치 가속도 명령을 생성한다. 이를 위해 본 논문의 3장에서 제안하는 최적 유도 법칙이 구현되어 있으며 탐색기 모듈로 부터 획득한 표적의 정보를 이용하여 유도 명령을 산출한다. 본 모의 실험에서는 이 때 탐색기 모듈로 부터 정확한 표적의 정보가 제공된다는 가정하에 이루어 졌다. 자동조종장치 모듈에서는 유도 모듈에서 산출된 유도 명령을 잘 추종하도록 실제 미사일을 제어하는 핀 각 명령을 계산하는 모듈로 2장 3절에서 소개한 [30]에서 개발한 자동조종 제어를 적용하였다.

동역학 모듈은 다시 핀 구동기, 공역학 모듈, 미사일 동역학 모듈로 이루어져 있는데 핀 구동기 모듈은 자동조종장치 모듈에서 산출되는 핀 각 명령을 추종하도록 구동기 동역학이 구현되어 있다. 공역학 모듈은 미사일에 작용하는 힘과 모멘트 등을 구하는데 여기에는 ILAAT(inter-laboratory air-to-air missile technology) 미사일의 공역학 자료[40]를 참고하여 구현되어 있으며 자세한 제원은 부록에 첨부하였다. 끝으로 미사일 동역학 모듈은 공역학 모듈에서 구한 값들을 이용하여 미사일의 속도, 각속도 변화율, 표적 충돌각, 옆미끄럼 각, 롤 각, 피치 가속도 등을 산출한다.

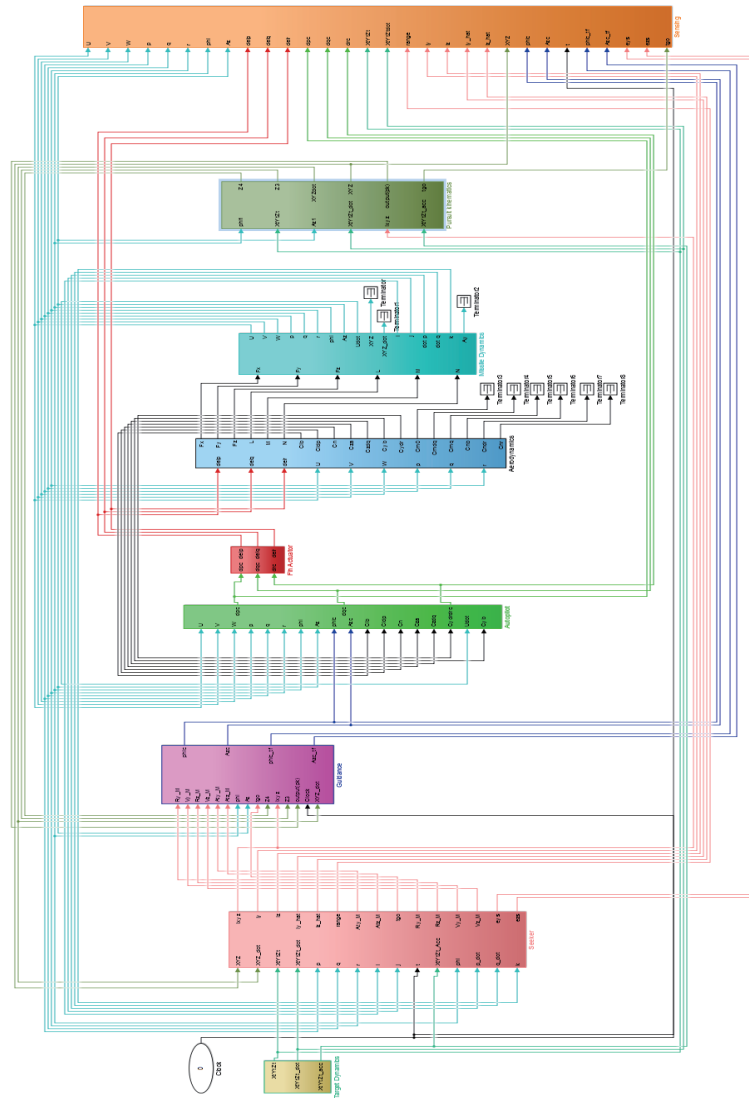


그림 4.1: BTT 미사일 통합 시뮬레이터

추적 기하학 모듈은 3차원 추적 기하학을 바탕으로 미사일과 표적의 상대 위치, 속도 등을 구한다. 이 때, 추적 기하학은 최적 유도 법칙을 유도 하기 위해 세웠던 가정하에 근사한 식이 아닌 본래의 2장 4절에서 소개한 추적 기하학 식 (2.46)을 구현하였다. 끝으로 계측 모듈은 이상의 통합 시뮬레이터에서 산출한 값들을 맷플랩 상에서 처리 가능하도록 데이터 화하여 저장하는 모듈이다. 이 처럼 본 통합 시뮬레이터는 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙의 도출을 위해 사용하였던 가정들을 모두 적용하지 않은채 실제 상황에 최대한 근접하도록 모든 공역학 모델 및 비선형성을 고려하여 구현하였다.

목적 함수 식 (3.9)의 가중치는 각각 $w_a = 1$, $w_1 = 0.01$, $w_2 = 0.01$ 로 설정하였다. 이는 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙의 목표가 표적에 대한 요격 오차와 충돌각 오차를 최소화 하는 것이기 때문이다. 앞서 언급한 것 처럼 단순화 한 유도 법칙에서는 위 가중치 중 에너지 최적화와 관련된 w_1 , w_2 를 0로 간주한다. 피치와 롤 채널의 대역폭은 [30]에서 언급한 실제 비행 환경에 의거해서 정했으며, 통상적으로 롤 채널이 피치 채널 보다 3배가 빠르므로 각각 $k_a = 0.25$, $k_\phi = 0.75$ 로 설정하였다. 식(3.11)에서 삼각함수의 근사를 위해 정의한 상수는 각각 $k_1 = 0.9282$, $k_2 = 0.9769$ 로 설정하였는데 이는 롤 각이 $\pm 30(deg)$ 의 범위 내에서 최소최대값(minimax)의 오차를 갖도록 근사한 것이다[41],[42]. 미사일과 표적의 위치, 속도, 가속도 정보는 탐색기를 통해서 모두 정확히 알고 있다고 가정하였으며, 피치 가속도는 $10g$, 제어 편각과 그 각속도는 각각 $\pm 20(deg)$, $\pm 250(deg/s)$ 로 제한하였다. 또한 잔여 비행 시간은 $t_{go} = [(x^2 + y^2 + z^2)/(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)]^{1/2}$ 로 계산 하였다. 관성 좌표계에서 미사일의 초기 위치와 속도는 각각 $[x_M(0), y_M(0), z_M(0)] = [0, 0, 0](m)$, $[U(0), V(0), W(0)] = [510, 0, 0](m/s)$ 로 설정하였다.

4.2 표적 요격 성능 평가

앞서 설명한 모의 실험 환경 하에 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙에 대한 모의 실험을 실시하였다. 먼저, 삼각 함수 근사와 관련하여 $\bar{\phi}$ 의 유무에 따른 유도 성능의 차이를 확인하는 모의 실험을 실시했다. 표적이 $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [5000, 80, -100](m)$ 에서 정지 해 있으며 원하는 표적 충돌각은 ($\psi^* = -5^\circ$, $\theta^* = -2^\circ$)인 경우이다. 본 모의 실험의 결과는 표 4.2와 그림 4.2 - 4.3에서 확인 할 수 있다.

결과를 통해 알 수 있듯이 $\bar{\phi}$ 가 있는 경우에는 표적 요격에 성공하나 없는 경우에는 요격에 실패하는 것을 볼 수 있다. 그림 4.2의 (a)에서 확인할 수 있듯이 본 요격 상황은 미사일의 롤 각이 약 $30^\circ \sim -50^\circ$ 의 범위에서 회전하는 경우이다. 이러한 경우, 롤 각의 회전 범위가 앞서 최적 유도 법칙을 도출 할 때 세웠던 삼각함수의 근사 조건 보다 크다. 그러므로 삼각함수의 근사 조건을 벗어나 근사가 성립하지 않는다. 이에 $\bar{\phi}$ 를 두면 항상 롤 각의 회전 범위를 $\pm 30^\circ$ 이내로 유지 시킬 수 있다. 그러므로 근사 범위를 벗어나는 롤 각 회전에도 요격 성능의 하락 없이 요격을 성공할 수 있다. 이에 반해, $\bar{\phi}$ 가 없는 경우에는 삼각함수 근사에서 큰 오차가 생겨 요격 성능의 하락을 가져와 요격에 실패한 것이다.

한 편, 그림 4.2의 (a)의 경우, 표적 요격에 성공했으나 요격 직전에 롤 각 명령이 매우 큰 값으로 진동하는 것을 볼 수 있다. 이는 요격 직전에 최소화 하고자 하는 상태 변수인 x_1, x_2, x_4, x_5 가 0에 가까워 지거나 또는 0를 지나기 때문이다. 이로 인해 식 (3.32)의 ϕ^c 의 분모 부분이 0에 가까워져 매우 큰 명령을 생성하는 것이다. 그러나 이 때 전체 미사일 동역학의 대역폭이 상대적으로 느리기 때문에 과도한 명령의 흔들림을 추종하지 못하므로 실제 명중 성능에는 지장을 주지 않는다. 이를 보완하기 위해 요격 직전에 롤 각 명령에 제한 값을 두는 등의 방법으로 롤 각 명령을 안정적으로 만들 수는 있으나 표적에 대한 요격 성능에 직접적인 영향을 미치지

않으므로 본 논문에서는 더 이상 다루지 않도록 한다.

다음은 표적이 단거리 위치에서 정지한 경우에 대한 모의 실험을 실시했다. 표적의 초기 위치는 $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [3000, 50, -200](m)$ 이며 각각 $(\psi^* = 0^\circ, \theta^* = 0^\circ)$, $(\psi^* = 0^\circ, \theta^* = -20^\circ)$, $(\psi^* = -10^\circ, \theta^* = -10^\circ)$ 의 표적 충돌각을 목표로 하는 경우로 나누어 실시하였다. 이는 각각 표적의 정면, 혹은 측면을 요격해야 하는 상황, 그리고 표적의 상단을 요격해야 하는 상황, 끝으로 임의의 충돌각으로 요격해야 하는 상황을 가정한 것으로 실제 전장에서 빈번히 발생하는 요격 상황이다. 또한, 매 번의 모의 실험마다 본 논문에서 제안한 최적 유도 법칙과 이를 단순화 한 것을 비교하여 실시하였다. 본 모의 실험의 결과는 표 4.3와 그림 4.4 - 4.6을 통해 확인 할 수 있다.

표 4.3에서 확인할 수 있듯이 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙은 그것의 단순화 과정을 거쳐도 요격 성능의 하락이 없이 표적 요격에 성공하는 것을 확인할 수 있다. 오히려, 단순화 이전 보다 근소한 차이로 표적 요격 오차 및 충돌각 오차가 줄어든 것을 확인할 수 있는데 이는 에너지 최적화 관련 가중치 w_1, w_2 를 0으로 설정함으로써 에너지 최적화 효과를 배제했기 때문이다. 이로 인한 영향은 그림 4.4의 (b)에서도 확인할 수 있는데 단순화를 한 경우, 피치 가속도 명령과 롤 각 명령이 요격 직전에 매우 커져 포화 상태가 되는 것을 확인할 수 있다. 이는 단순화 이전에는 에너지 최적화 관련 가중치인 w_1, w_2 의 영향으로 명령이 포화하는 것을 억제할 수 있었는데 단순화를 통해 이들의 영향이 사라졌기 때문이다. 하지만 앞서 언급하였듯이 요격 직전에 큰 값의 유도 명령은 실제 요격 성능에 아무런 영향을 주지 않는다.

표적이 단거리에 위치한 경우의 모의 실험에서 첫번째와 세번째 경우에는 작은 요격 오차와 충돌각 오차를 가지며 표적 요격에 성공하는 것을 볼 수 있으나 두번째의 경우에는 상대적으로 큰 요격 오차를 가지는 것을 확인할 수 있다. 이는 주

어진 충돌각 조건이 단거리에 위치한 표적에 대해서는 다소 무리한 조건이기 때문이다. 하지만 실제 상황에서는 이 보다 더 먼 거리에서 부터 종말 유도 단계에 진입하므로 다음의 장거리 표적에 대한 모의 실험에서는 좋은 요격 성능을 기대할 수 있다.

다음은 표적이 장거리 위치에서 정지한 경우에 대한 모의 실험을 실시했다. 표적의 초기 위치는 $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [6000, 100, -300](m)$ 이며 각각 $(\psi^* = 0^\circ, \theta^* = 0^\circ)$, $(\psi^* = 0^\circ, \theta^* = -20^\circ)$, $(\psi^* = -10^\circ, \theta^* = -20^\circ)$ 의 표적 충돌각을 목표로 하는 경우로 나누어 실시하였다. 본 모의 실험의 결과는 표 4.4와 그림 4.7 - 4.9을 통해 확인 할 수 있다. 단거리에 표적이 존재할 경우와 마찬가지로 장거리 표적을 목표로 하는 경우에서도 작은 요격 오차와 충돌각 오차를 가지며 표적 요격에 성공하는 것을 확인할 수 있다. 또한, 단거리에서 상대적으로 요격 오차가 컸던 충돌각 조건에 대해서도 작은 요격 오차를 가지며 요격에 성공하였다.

다음은 등속 운동하는 표적에 대한 모의 실험을 실시했다. 표적의 초기 위치는 $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] = [6000, 100, -300](m)$ 이며 각각 $[V_{T_x}, V_{T_y}, V_{T_z}] = [0, -17, 0](m/s)$, $(\psi^* = 0^\circ, \theta^* = 0^\circ)$, $[V_{T_x}, V_{T_y}, V_{T_z}] = [5, 10, 0](m/s)$, $(\psi^* = -10^\circ, \theta^* = -12^\circ)$, $[V_{T_x}, V_{T_y}, V_{T_z}] = [8, 3, 0](m/s)$, $(\psi^* = 5^\circ, \theta^* = -10^\circ)$ 의 속도로 움직이며 표적 충돌각을 목표로 하는 경우로 나누어 실시하였다. 본 모의 실험의 결과는 표 4.5와 그림 4.10 - 4.12을 통해 확인 할 수 있다. 모의 실험 결과에서도 알 수 있듯이 표적이 등속 운동하는 경우에도 작은 요격 오차 및 충돌각 오차를 가지며 표적 요격을 성공하는 것을 확인할 수 있는데 이는 식 (3.1), (3.2)의 추적 기하학에서 표적의 속도를 고려하였기 때문이다.

본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙의 실용성을 확인하기 위한 모의 실험도 실시하였다. 먼저, 동일한 표적에 대해 다양한 충돌각 조건이 주어졌을 때의 요격 성능을 확인하는 모의 실험을 실시하였다. 표적의 초기 위치는 $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)] =$

$[6000, 100, -300](m)$ 이며 목표로 하는 표적 충돌각은 표 4.6에서 확인할 수 있다. 표 4.6와 그림 4.16에서 확인한 결과처럼 모든 경우에 대해서도 작은 요격 오차와 충돌각 오차를 가지며 표적 요격에 성공하는데 이는 실제 전장에 있어서도 다양한 요격 상황에 대처가 가능함을 뜻한다.

또한, 실제 전장에서는 요격 상황 시 탐색기로 부터 얻는 표적의 정보에 오차 및 잡음이 존재하거나 미사일의 공역학 계수 등의 오차로 인한 요격 성능 저하가 생길 수 있다. 따라서 이러한 상황에서의 요격 성능을 확인하기 위해 탐색기에서 유도 장치로 표적 정보가 전달 될 때에 잡음이 있으며 공역학 계수 오차로 인해 유도 명령에 오차가 있는 상황을 가정하고 몬테칼로(Monte-Carlo) 모의 실험을 실시하였다.

먼저, 탐색기로 부터 얻는 표적 정보에 잡음으로 인한 오차가 있다고 가정하여 식 (3.34)의 각 상태 변수에 5%이내의 잡음을 인가시켰다. 또한, 공역학 계수의 오차 등으로 인한 자동조종장치의 성능 하락을 가정하여 유도 명령에 3% 이내의 잡음을 인가시켰다. 요격 상황은 앞서 언급한 모의 실험 중 단거리와 장거리에 표적이 존재할 때, 표적이 등속 운동 할 때의 각각 세번째 경우를 상정하였으며 각각 100회의 몬테칼로 모의 실험을 실시하였다. 그 결과는 표 4.7에서 확인할 수 있다. 결과에 의하면 표적과의 거리가 멀 수록, 그리고 표적이 이동할 경우에 요격 오차 및 충돌각 오차의 큰 것을 확인할 수 있다. 이는 표적과의 거리가 멀 수록 잡음으로 인한 오차가 누적되었기 때문이며 표적이 등속 운동하면서 표적의 속도 성분까지 잡음의 영향이 미쳤기 때문이다. 그러나 이상의 잡음 및 오차가 존재함에도 1m 안팎의 요격 오차를 보이며 요격 성능의 하락이 크지 않음을 확인할 수 있다.

표 4.1: 모의 실험 별 표적의 정보

모의 실험	표적 위치 (m) $[x_T(0), y_T(0), z_T(0)]$	ψ^* (deg)	θ^* (deg)	표적 속도 (m/s) $[V_{T_x}(0), V_{T_y}(0), V_{T_z}(0)]$
$\bar{\phi}$ 유무	[5000, 80, -100]	-5	-2	.
단거리 1	[3000, 50, -200]	0	0	.
단거리 2	[3000, 50, -200]	0	-20	.
단거리 3	[3000, 50, -200]	-10	-10	.
장거리 1	[6000, 100, -300]	0	0	.
장거리 2	[6000, 100, -300]	0	-20	.
장거리 3	[6000, 100, -300]	-10	-20	.
등속운동 1	[6000, 100, -300]	0	0	[0, -17, 0]
등속운동 2	[6000, 100, -300]	-10	-12	[5, 10, 0]
등속운동 3	[6000, 100, -300]	5	-10	[8, 3, 0]

표 4.2: $\bar{\phi}$ 유무에 따른 유도 성능 차이

$\bar{\phi}$	요격 오차 (m)	$\psi_e(t_f)$ (deg)	$\theta_e(t_f)$ (deg)
있는 경우	0.42	-0.04	-0.14
없는 경우	8.55	-0.42	-3.32

표 4.3: 단거리 정지 표적에 대한 요격 오차 및 총돌각 오차

	요격 오차 (m)	$\psi_e(t_f)$ (deg)	$\theta_e(t_f)$ (deg)
Case 1	0.28	0.16	0.43
Case 1 단순화	0.25	0.06	0.37
Case 2	0.99	-0.09	0.31
Case 2 단순화	0.78	0.17	0.08
Case 3	0.25	0.10	0.37
Case 3 단순화	0.25	0.06	0.02

표 4.4: 장거리 정지 표적에 대한 요격 오차 및 충돌각 오차

	요격 오차 (m)	$\psi_e(t_f)$ (deg)	$\theta_e(t_f)$ (deg)
Case 1	0.45	0.04	-0.05
Case 1 단순화	0.06	-0.04	0.06
Case 2	0.32	-0.03	0.08
Case 2 단순화	0.09	0.03	-0.22
Case 3	0.29	-0.37	0.32
Case 3 단순화	0.23	-0.20	-0.44

표 4.5: 등속 운동하는 표적에 대한 요격 오차 및 충돌각 오차

	요격 오차 (m)	$\psi_e(t_f)$ (deg)	$\theta_e(t_f)$ (deg)
Case 1	0.34	0.15	-0.14
Case 1 단순화	0.14	-0.17	0.18
Case 2	0.36	-0.23	0.34
Case 2 단순화	0.39	-0.28	0.46
Case 3	0.26	-0.25	-0.01
Case 3 단순화	0.28	-0.04	0.33

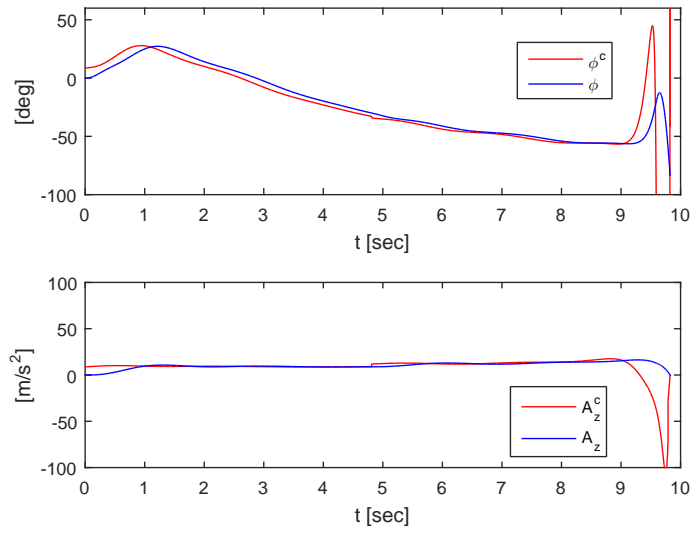
표 4.6: 장거리 정지 표적에 대한 다양한 요격 시나리오

ψ^*	0°	0°	0°	0°	8°
θ^*	0°	-10°	-20°	-35°	-20°
요격오차(m)	0.06	0.07	0.09	0.99	0.22
$\psi_e(t_f)$ (deg)	-0.04	-0.06	0.03	-0.02	-0.12
$\theta_e(t_f)$ (deg)	0.06	0.02	-0.22	-0.32	-0.42

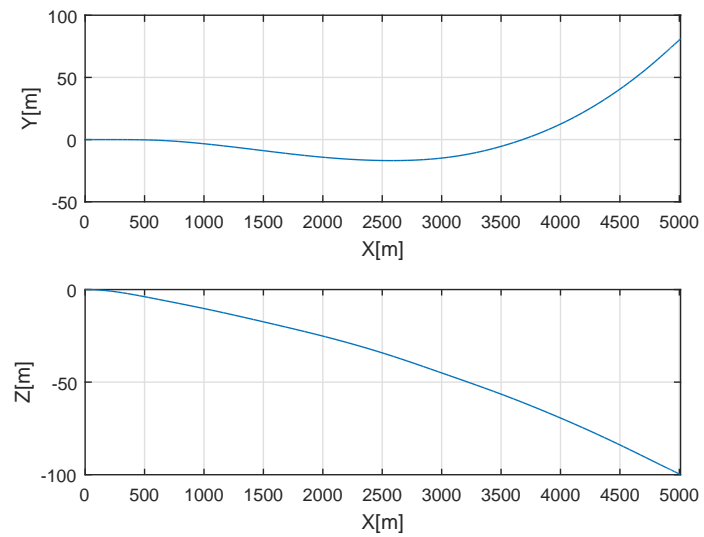
ψ^*	15°	22°	-10°	-14°	-20°
θ^*	-20°	-20°	-20°	-20°	-20°
요격오차(m)	0.74	1.12	0.44	0.97	0.96
$\psi_e(t_f)$ (deg)	-0.23	0.38	-0.20	0.25	1.01
$\theta_e(t_f)$ (deg)	0.33	-0.69	-0.44	0.37	0.54

표 4.7: 오차 및 잡음 존재 시 요격 오차와 충돌각 오차의 평균 및 표준 편차

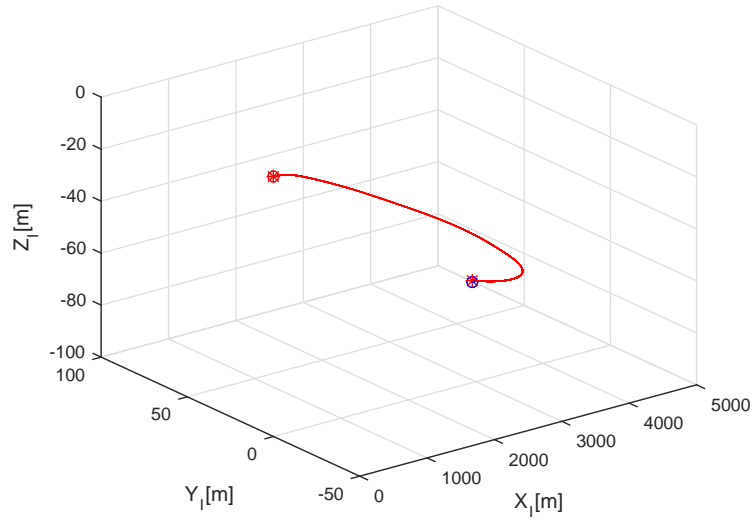
	요격 오차 (m)	$\psi_e(t_f)$ (deg)	$\theta_e(t_f)$ (deg)
단거리 3	0.72 (0.31)	0.33 (0.11)	0.58 (0.12)
장거리 3	0.91 (0.45)	-0.41 (0.19)	0.57 (0.18)
등속운동 3	1.05 (0.49)	-0.38 (0.22)	0.41 (0.19)



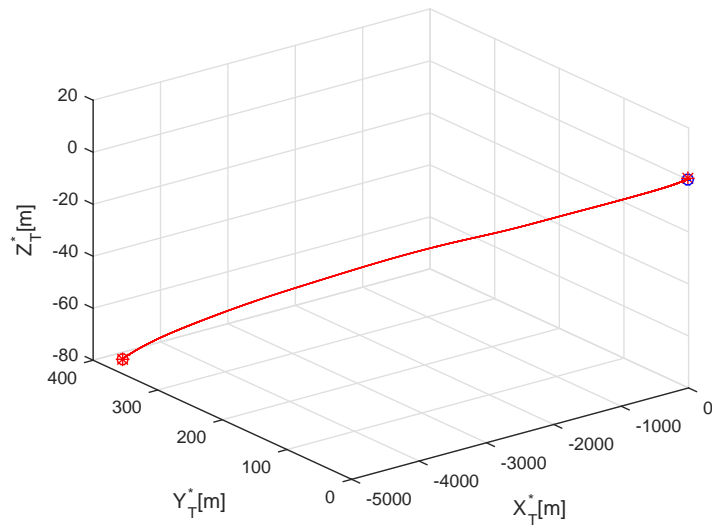
(a) 롤 각 및 피치 가속도



(b) 2D로 표현한 미사일 궤적

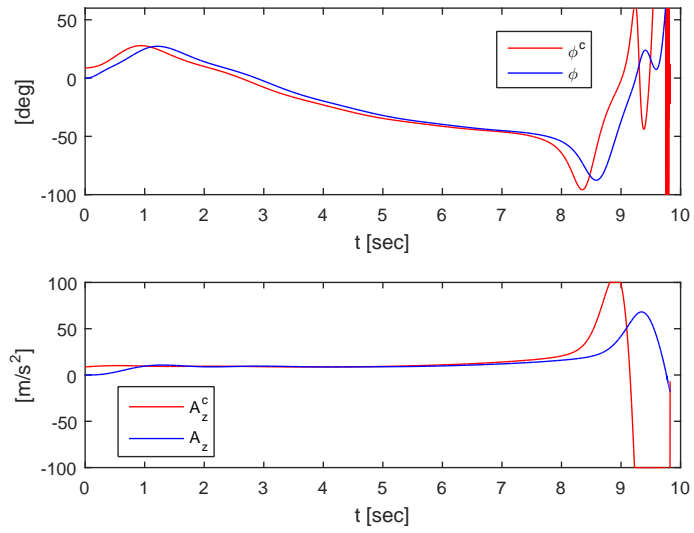


(c) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

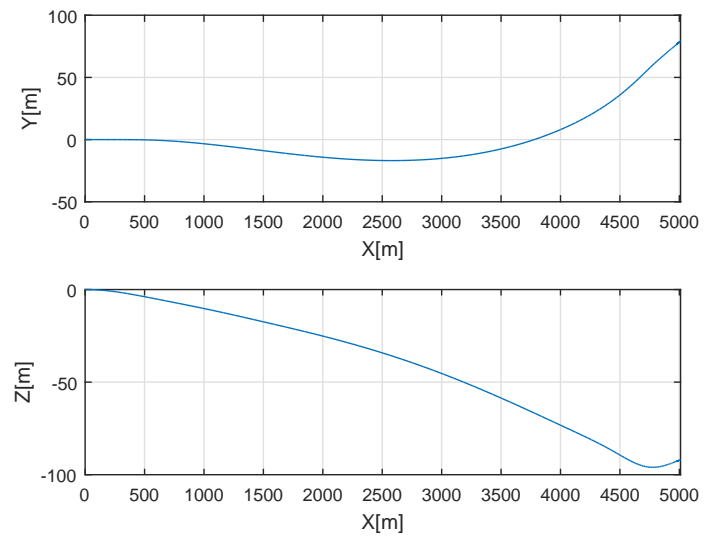


(d) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

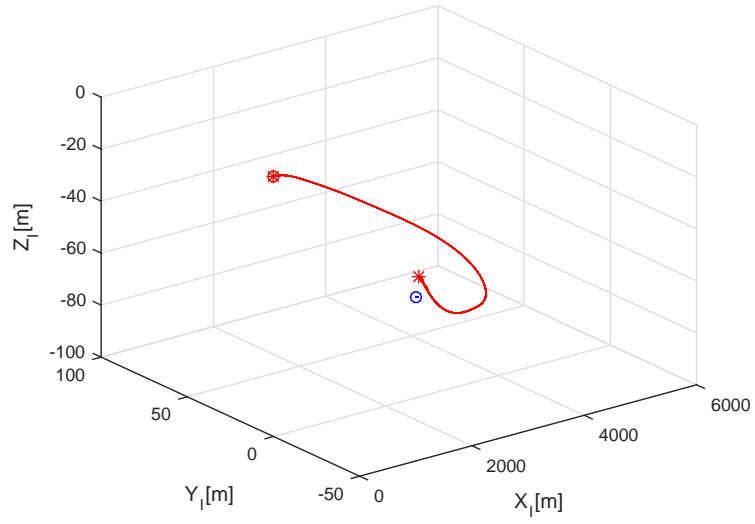
그림 4.2: 모의 실험 결과 ($\bar{\phi}$ 가 있는 경우)



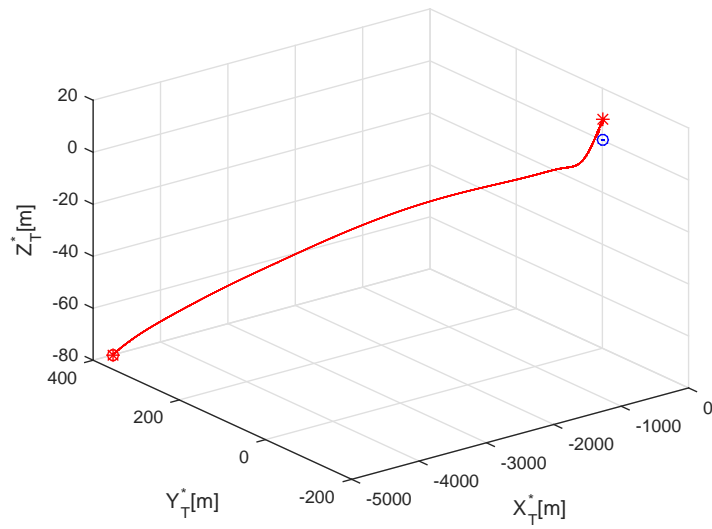
(a) 롤 각 및 피치 가속도



(b) 2D로 표현한 미사일 궤적

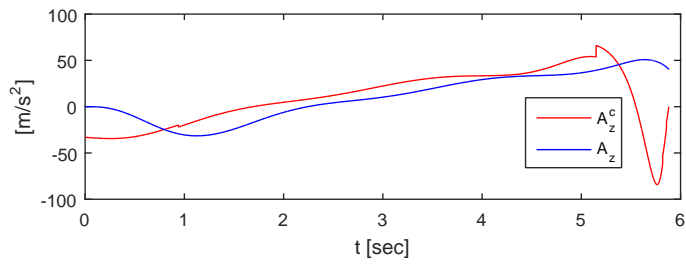
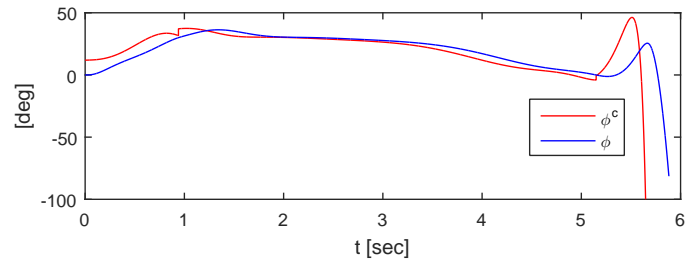


(c) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

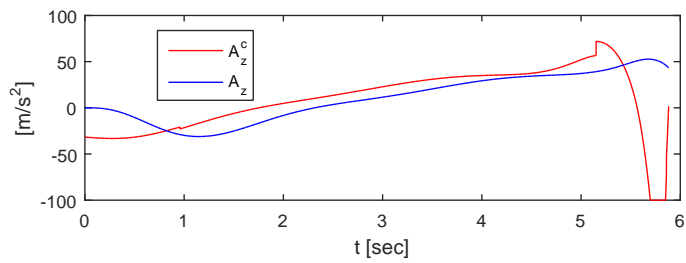
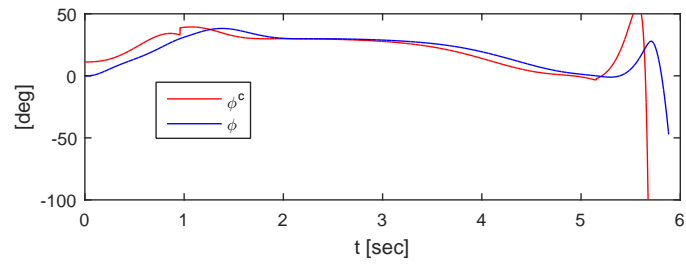


(d) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

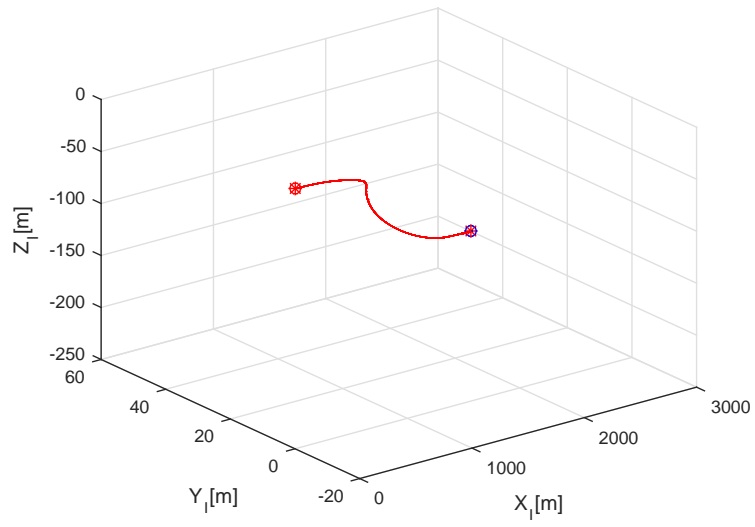
그림 4.3: 모의 실험 결과 ($\bar{\phi}$ 가 없는 경우)



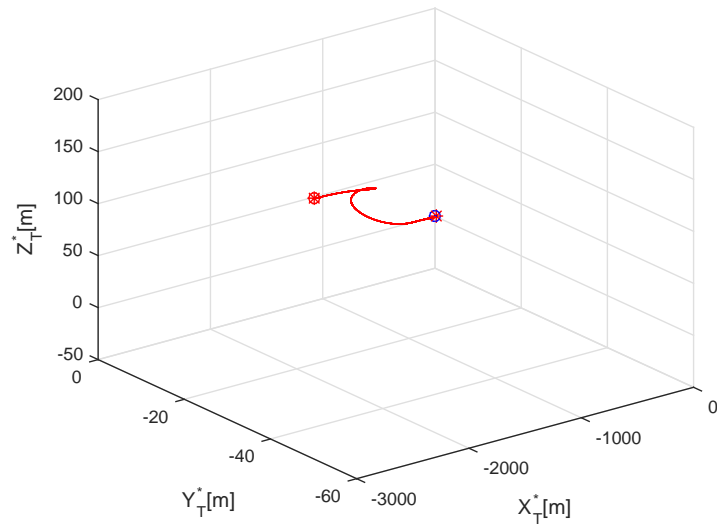
(a) 롤 각 및 피치 가속도



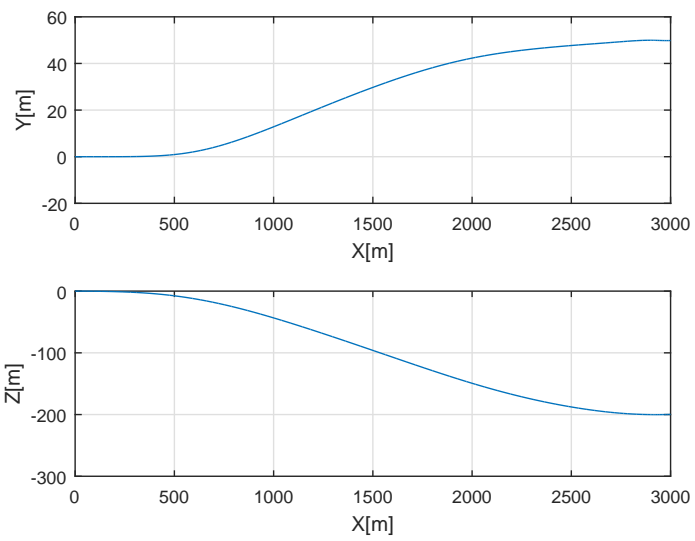
(b) 롤 각 및 피치 가속도(단순화)



(c) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

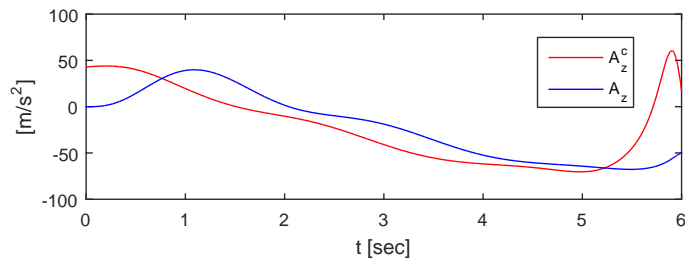
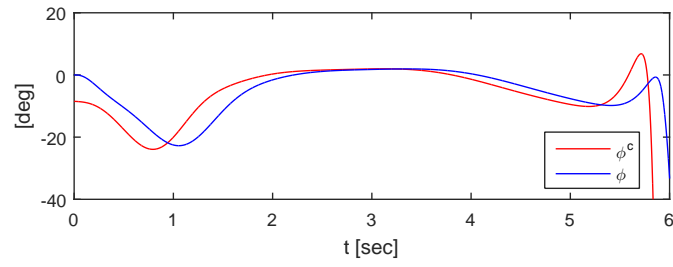


(d) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

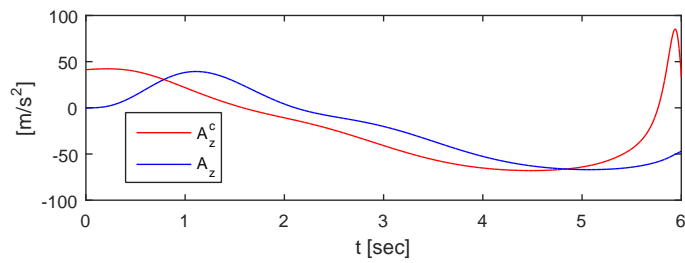
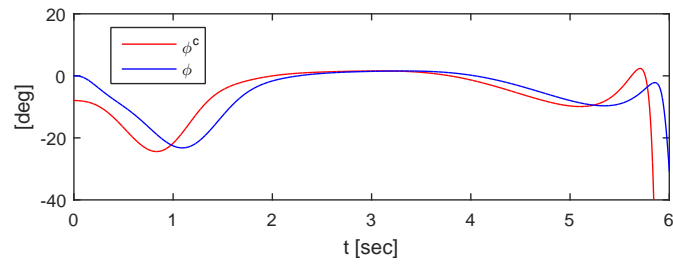


(e) 2D로 표현한 미사일 궤적

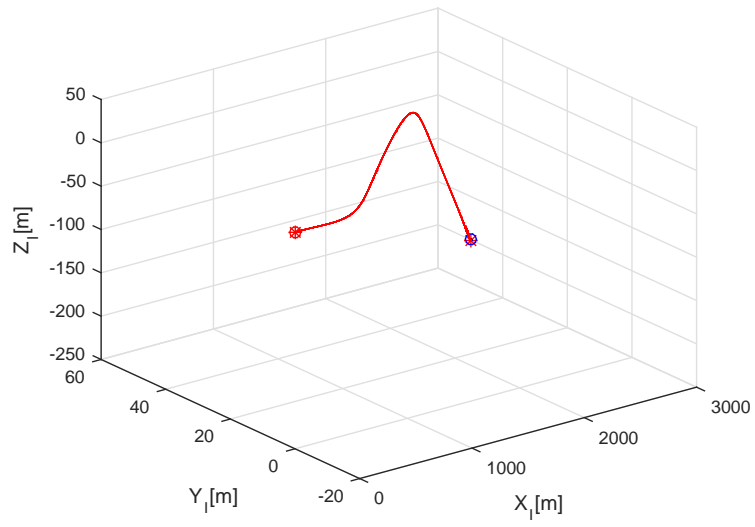
그림 4.4: 단거리 정지 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 1)



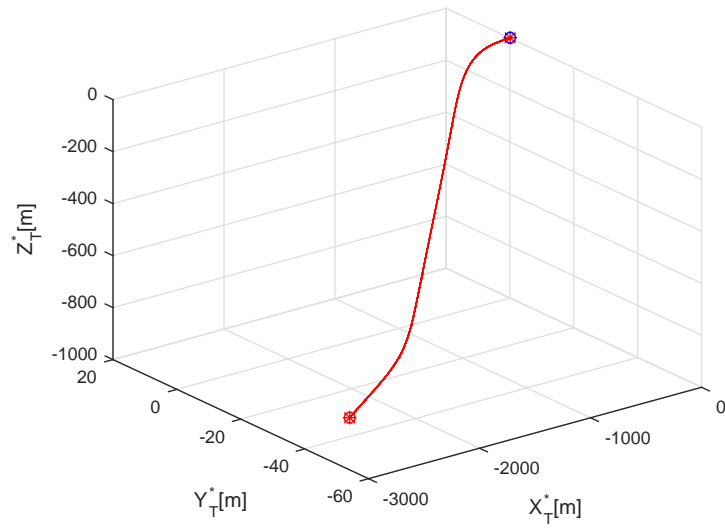
(a) 롤 각 및 피치 가속도



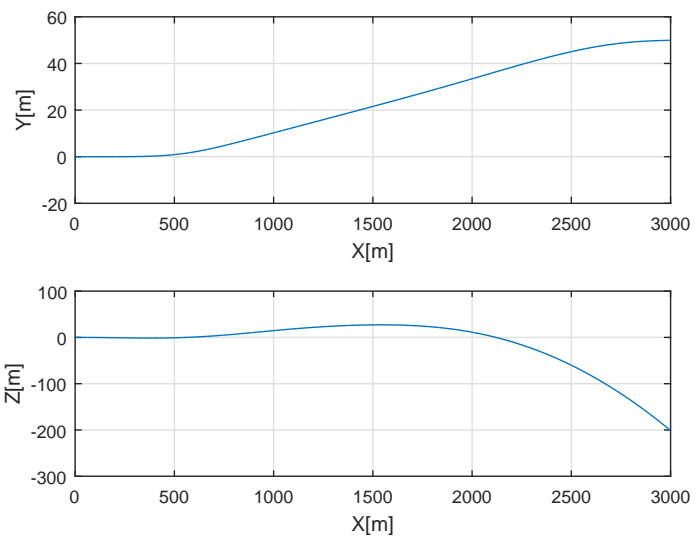
(b) 롤 각 및 피치 가속도(단순화)



(c) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

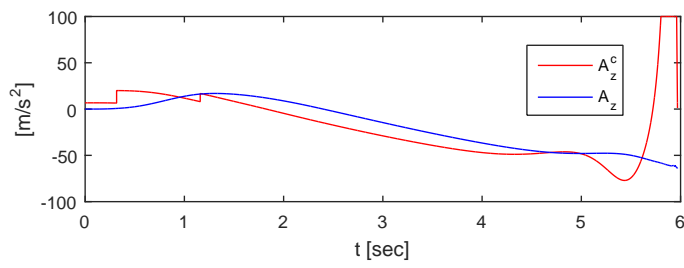
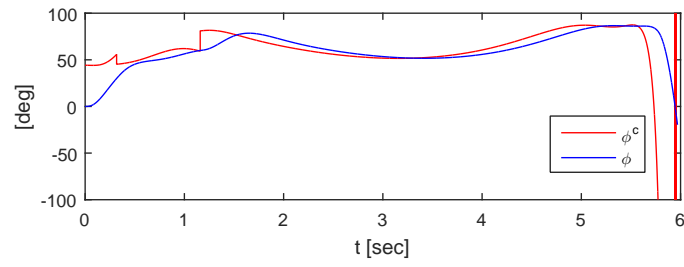


(d) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

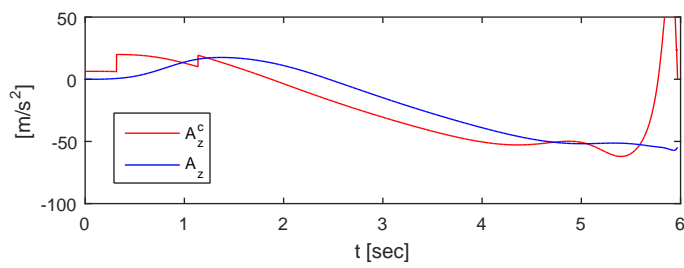
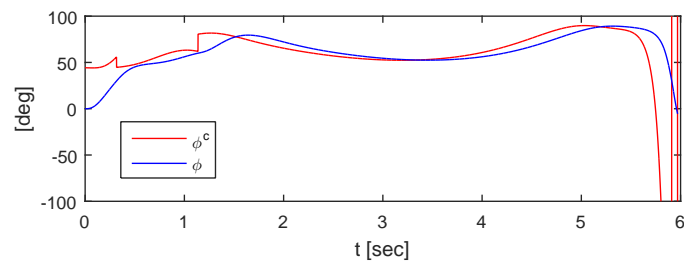


(e) 2D로 표현한 미사일 궤적

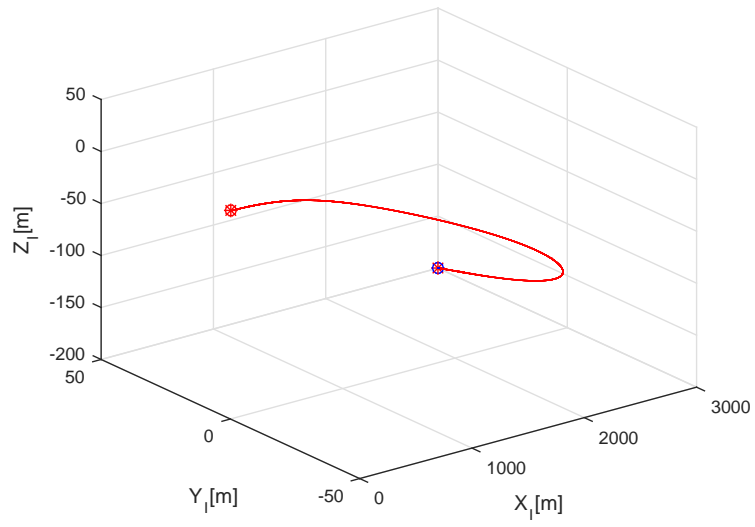
그림 4.5: 단거리 정지 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 2)



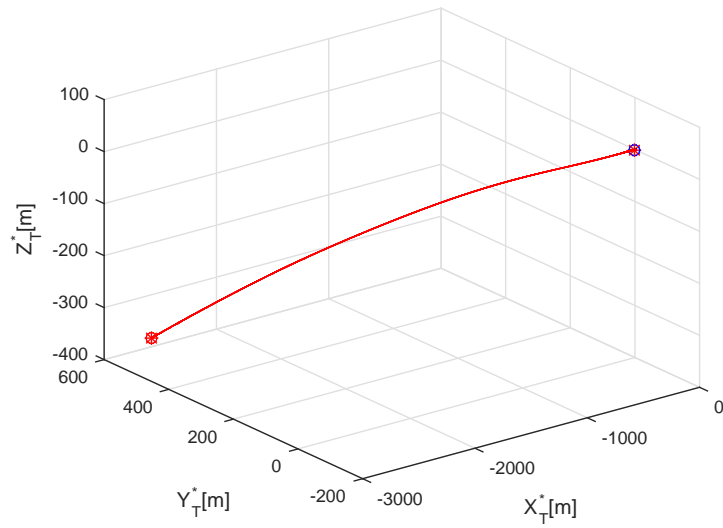
(a) 롤 각 및 피치 가속도



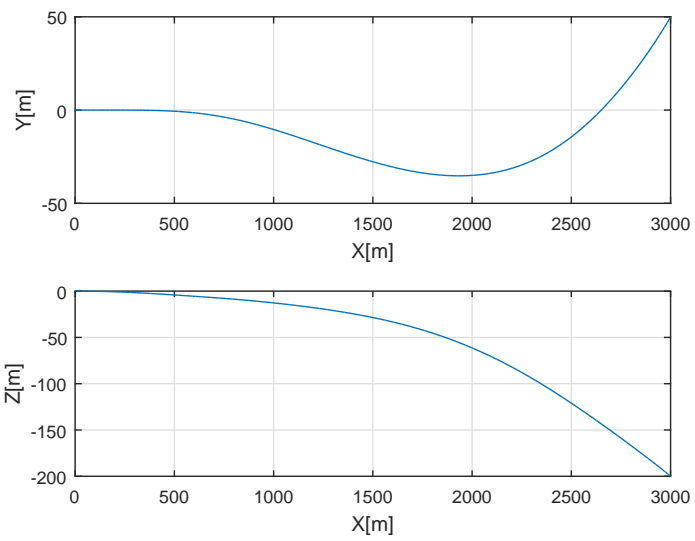
(b) 롤 각 및 피치 가속도(단순화)



(c) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

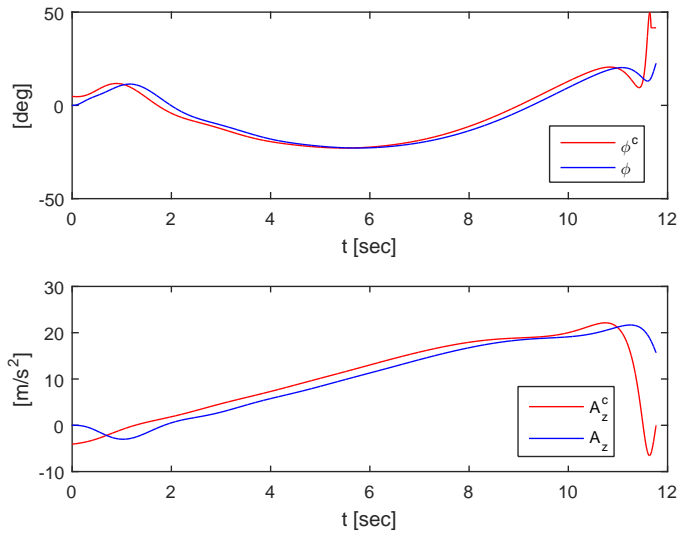


(d) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

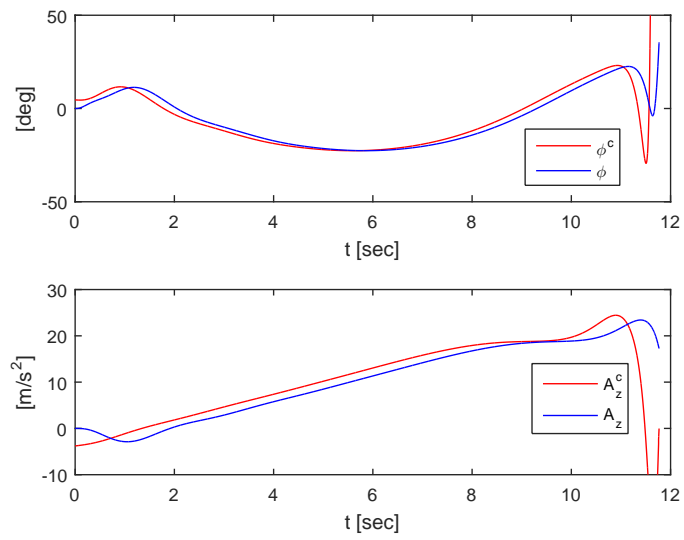


(e) 2D로 표현한 미사일 궤적

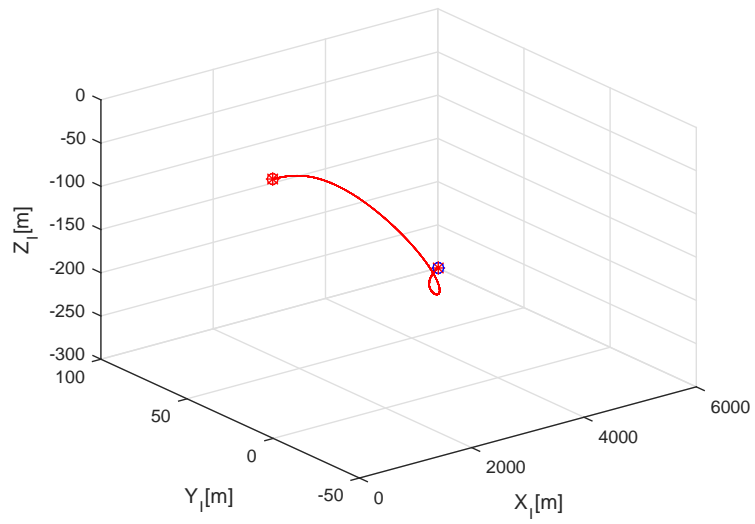
그림 4.6: 단거리 정지 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 3)



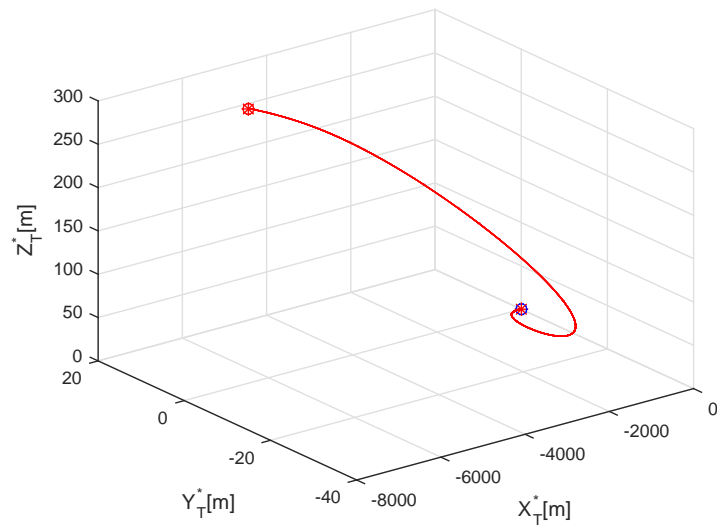
(a) 롤 각 및 피치 가속도



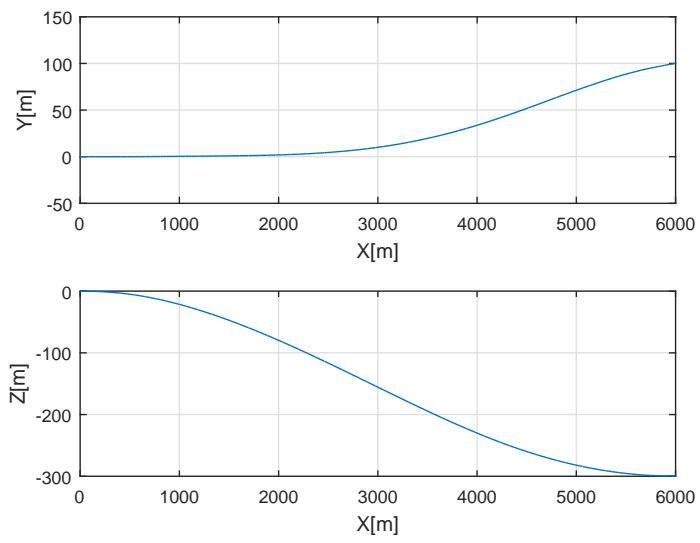
(b) 롤 각 및 피치 가속도(단순화)



(c) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

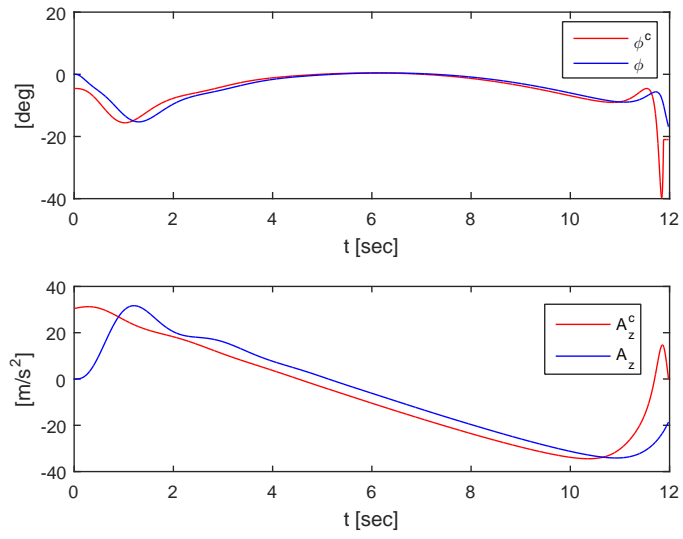


(d) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

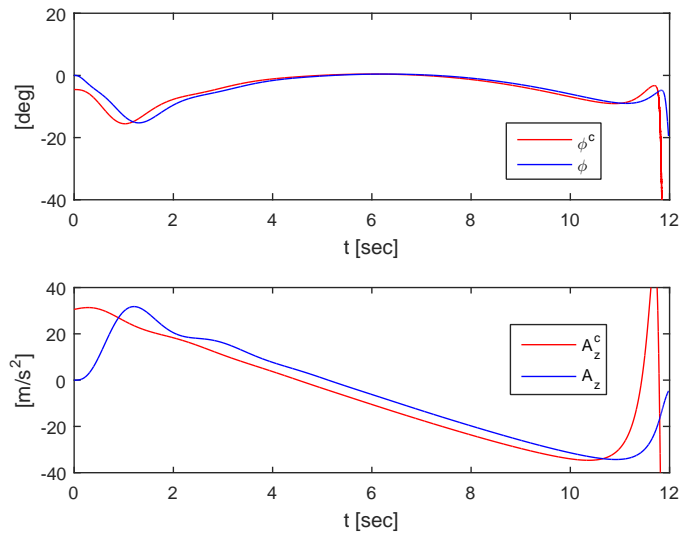


(e) 2D로 표현한 미사일 궤적

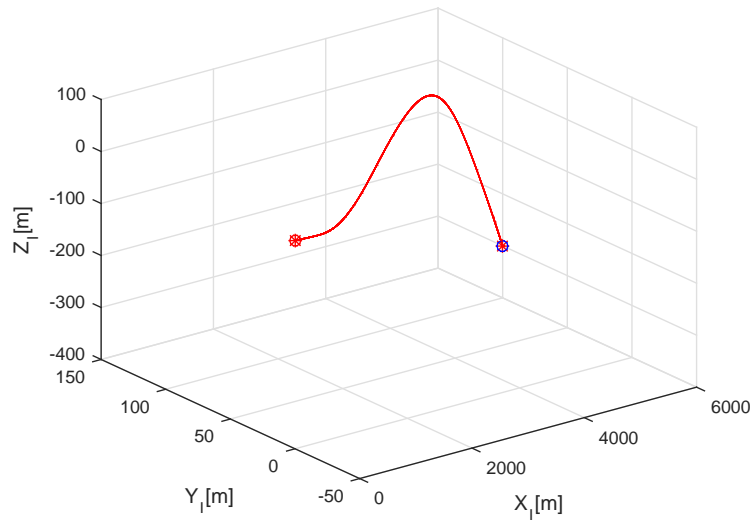
그림 4.7: 장거리 정지 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 1)



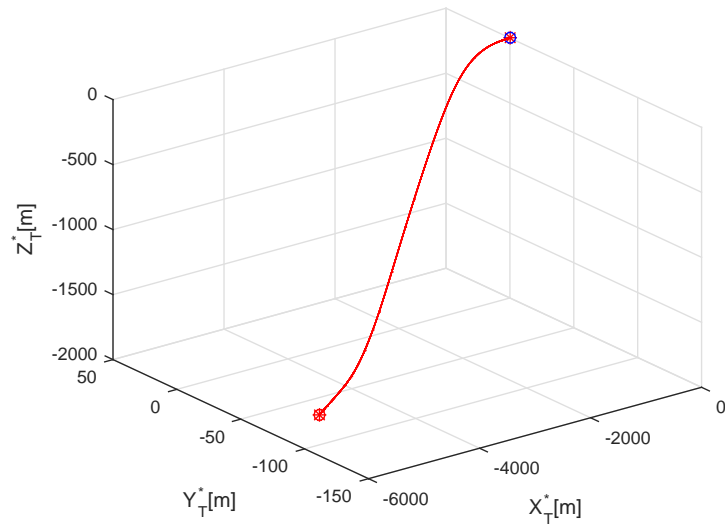
(a) 롤 각 및 피치 가속도



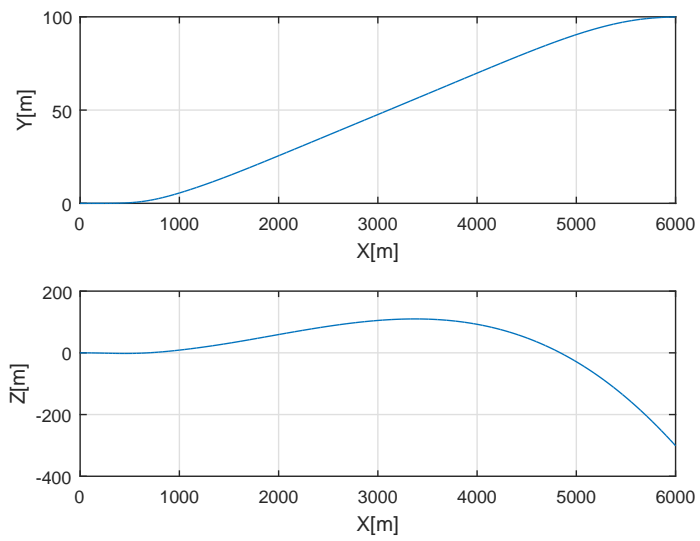
(b) 롤 각 및 피치 가속도(단순화)



(c) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

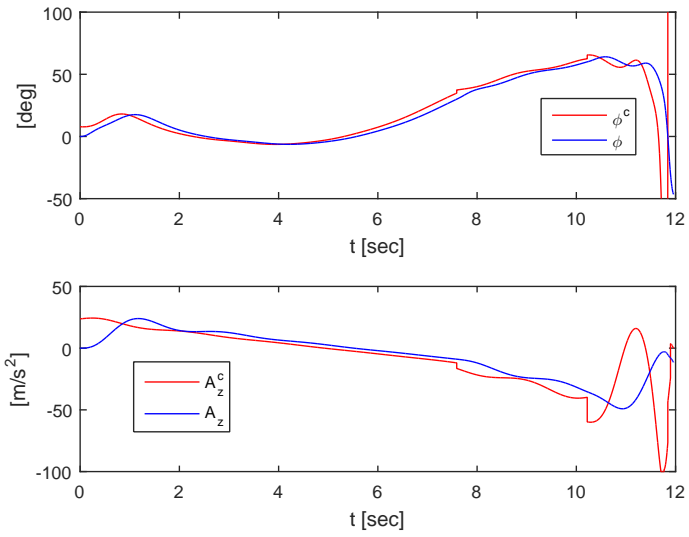


(d) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

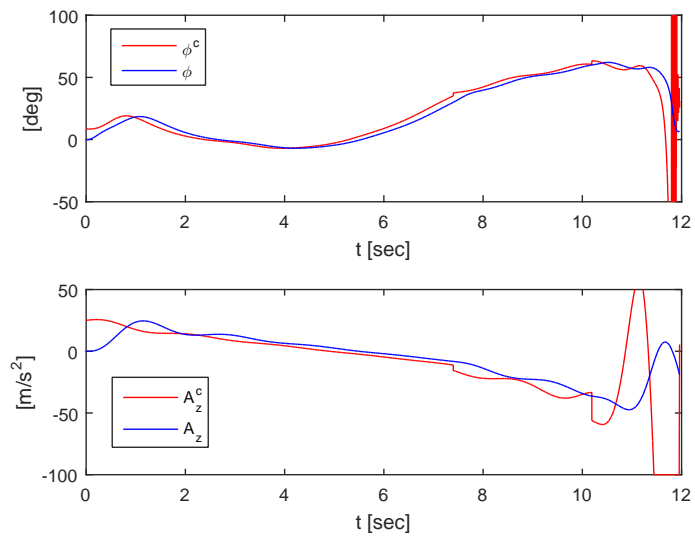


(e) 2D로 표현한 미사일 궤적

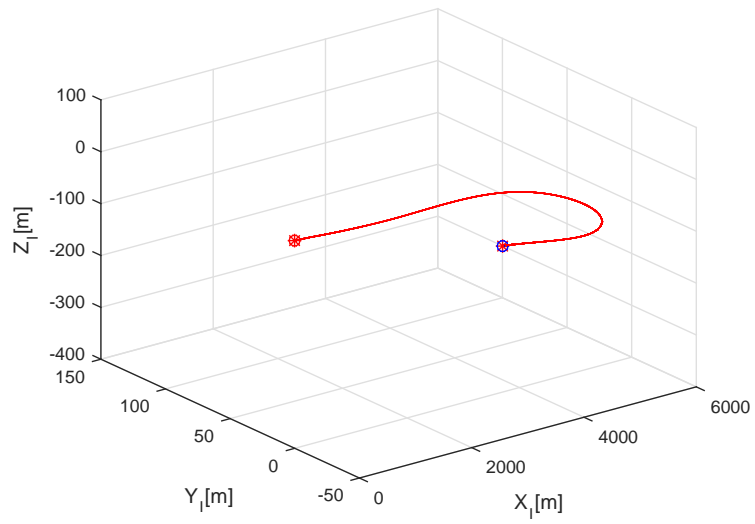
그림 4.8: 장거리 정지 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 2)



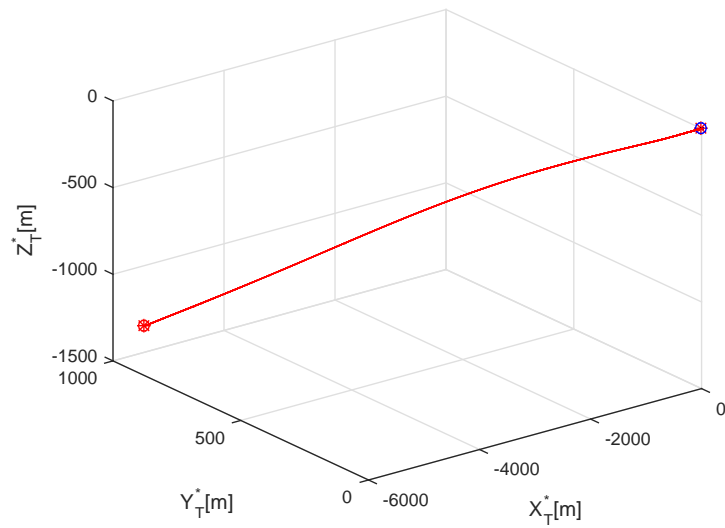
(a) 롤 각 및 피치 가속도



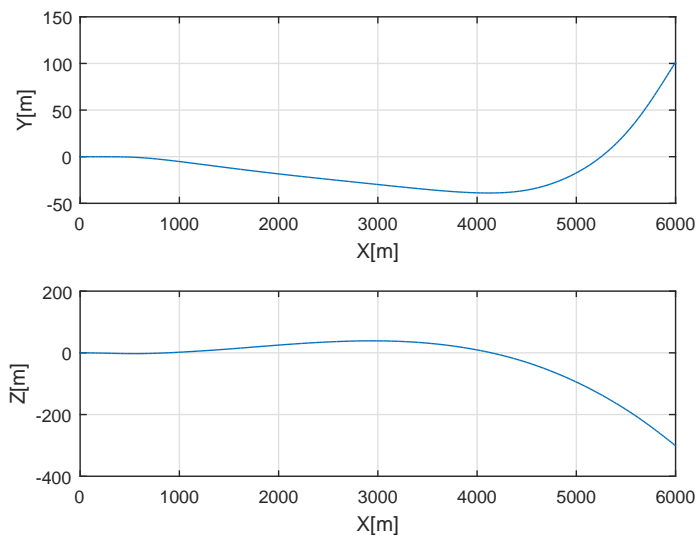
(b) 롤 각 및 피치 가속도(단순화)



(c) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

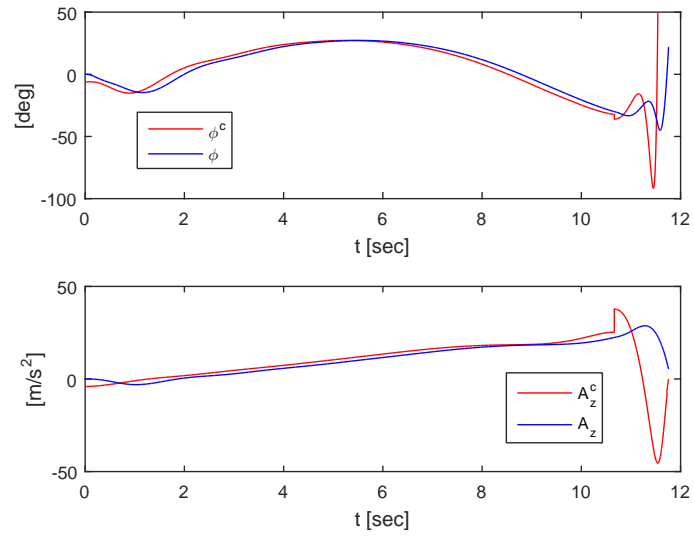


(d) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

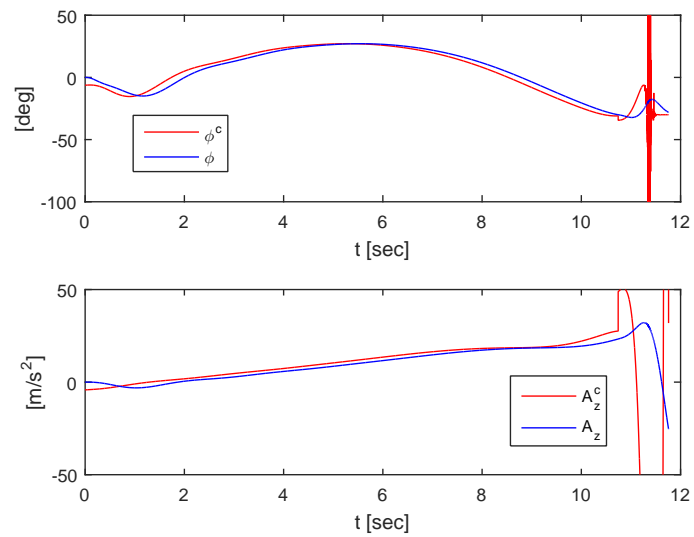


(e) 2D로 표현한 미사일 궤적

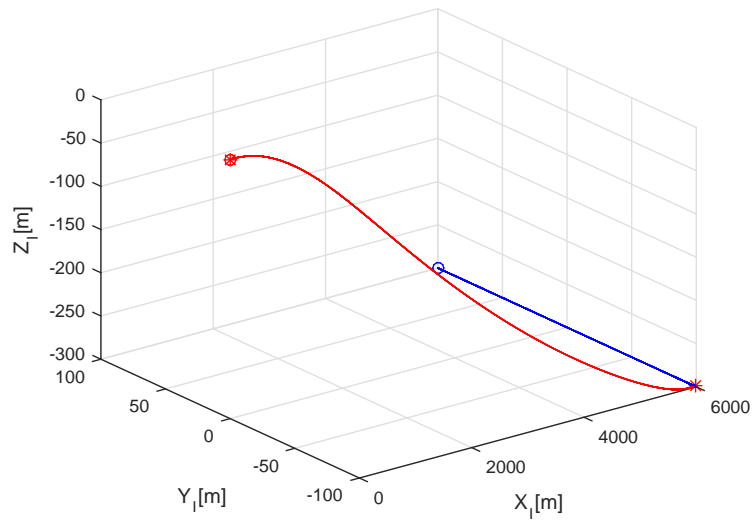
그림 4.9: 장거리 정지 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 3)



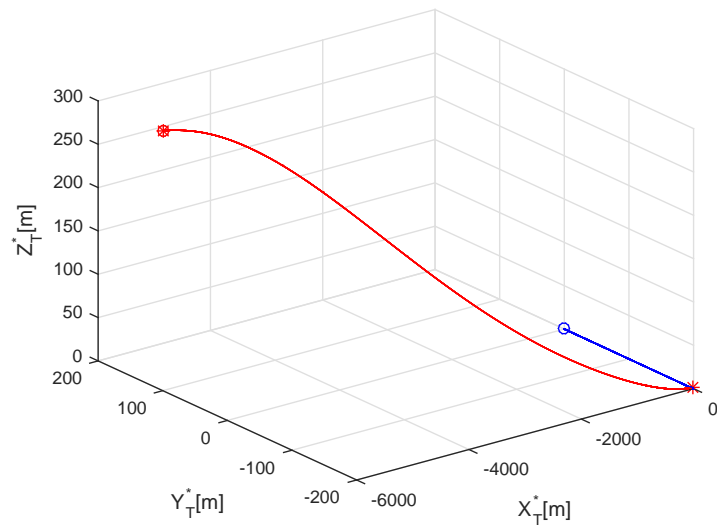
(a) 롤 각 및 피치 가속도



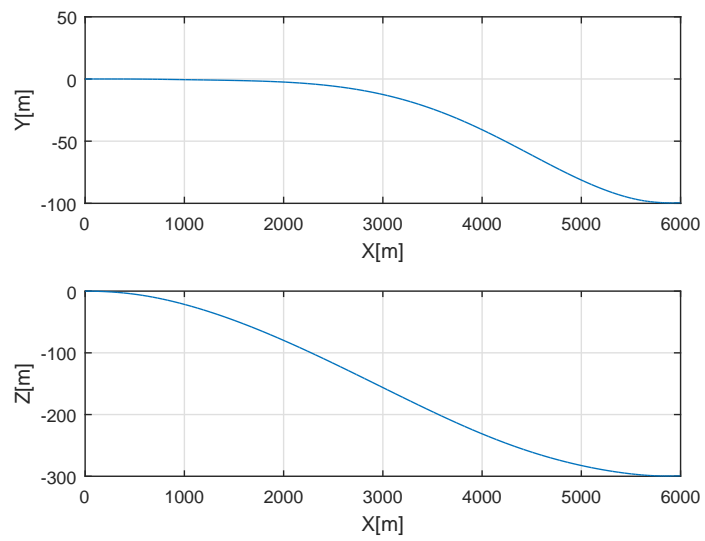
(b) 롤 각 및 피치 가속도(단순화)



(c) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

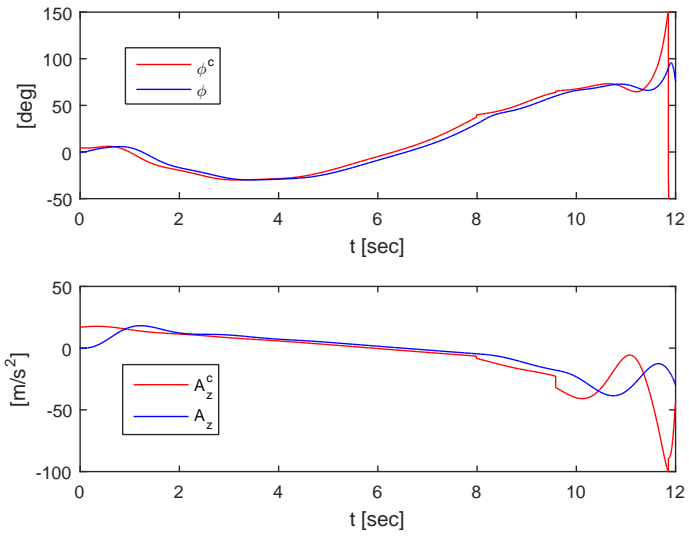


(d) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

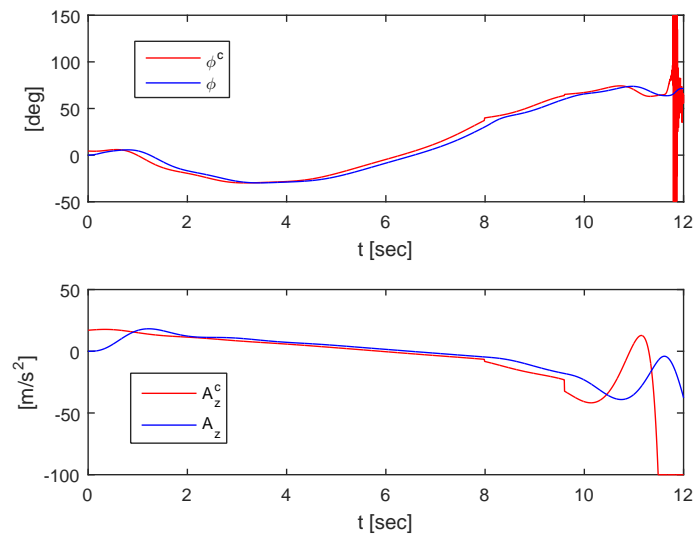


(e) 2D로 표현한 미사일 궤적

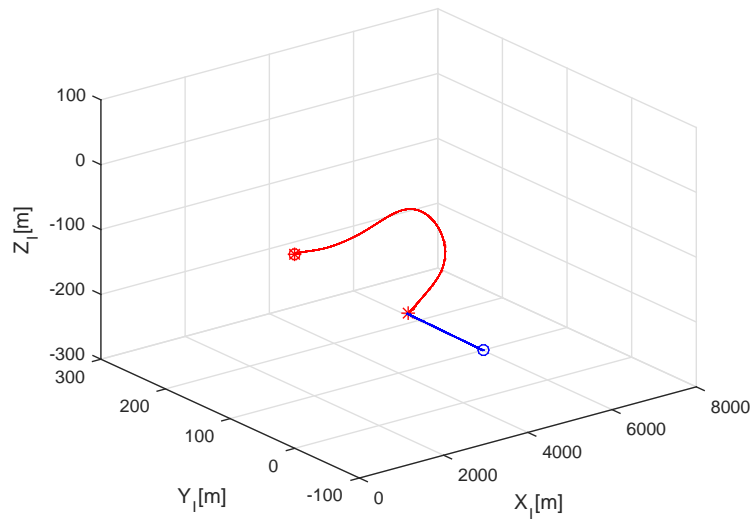
그림 4.10: 등속 운동하는 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 1)



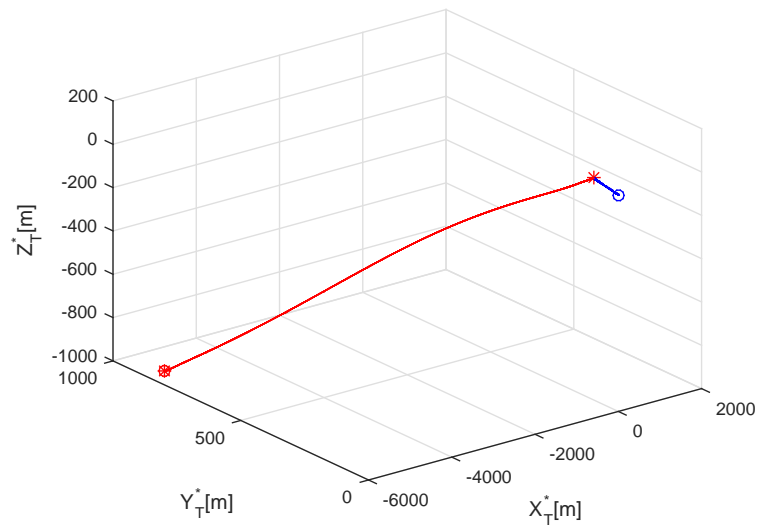
(a) 롤 각 및 피치 가속도



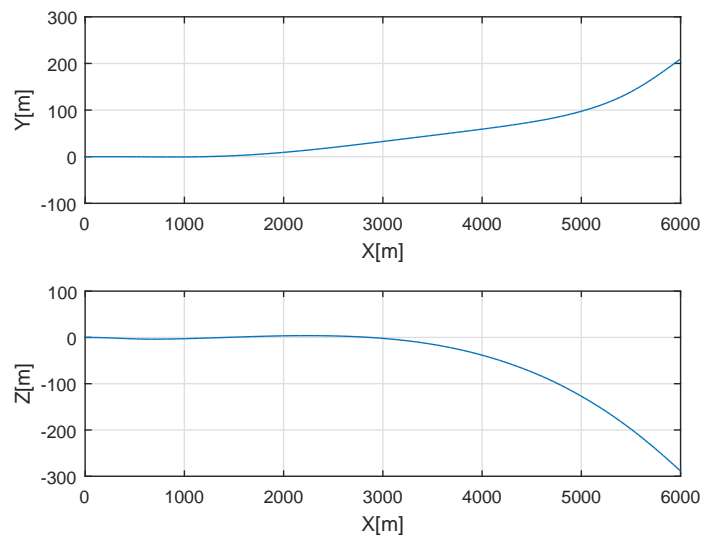
(b) 롤 각 및 피치 가속도(단순화)



(c) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

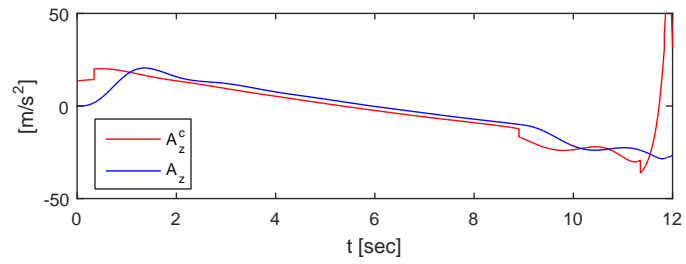
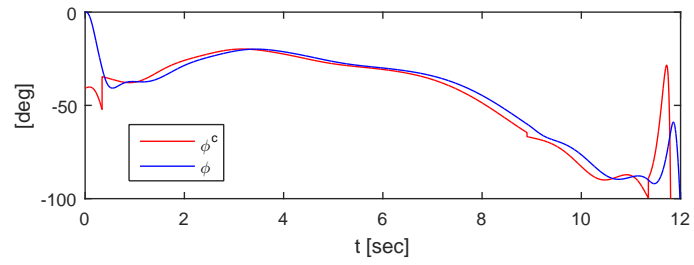


(d) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

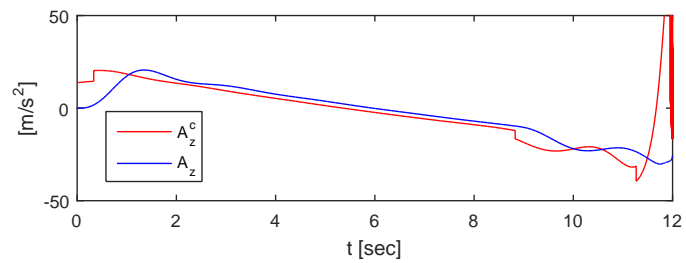
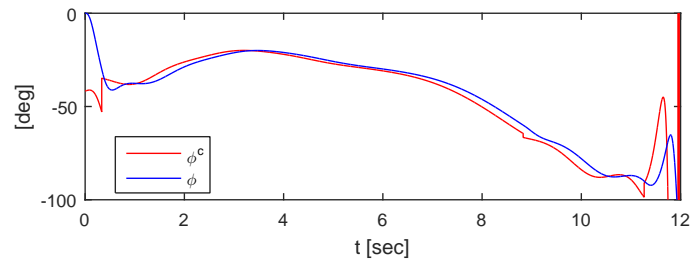


(e) 2D로 표현한 미사일 궤적

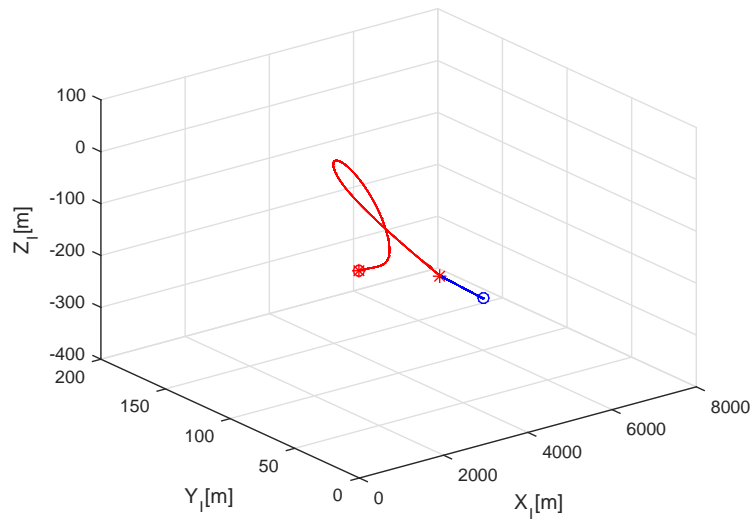
그림 4.11: 등속 운동하는 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 2)



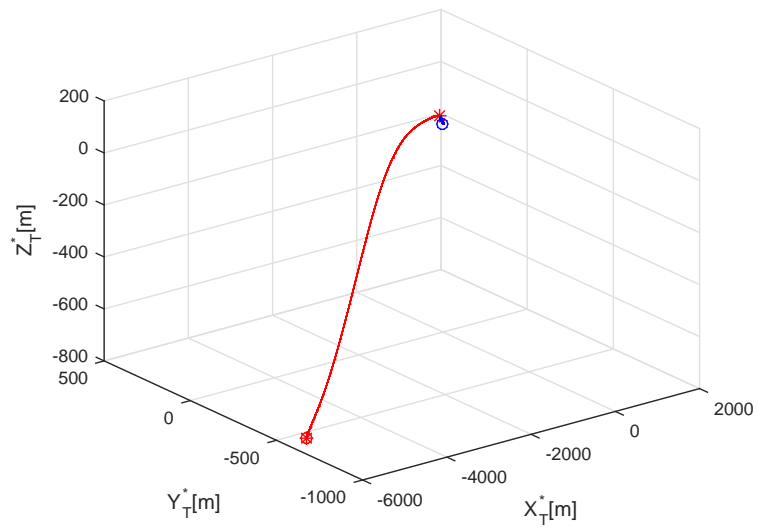
(a) 롤 각 및 피치 가속도



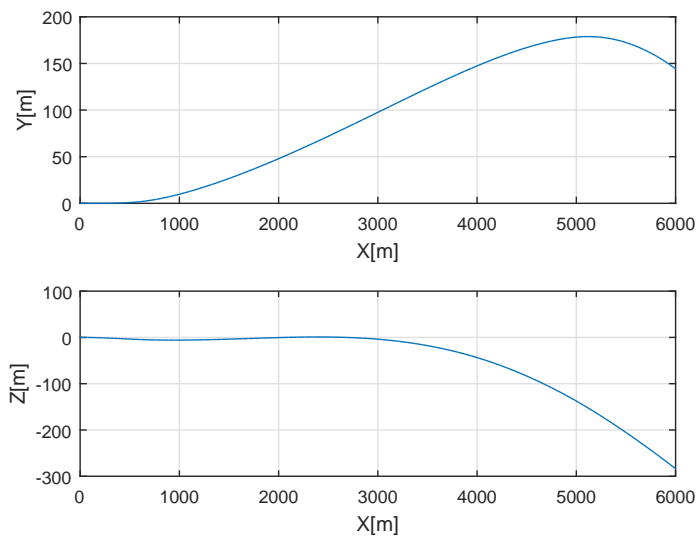
(b) 롤 각 및 피치 가속도(단순화)



(c) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

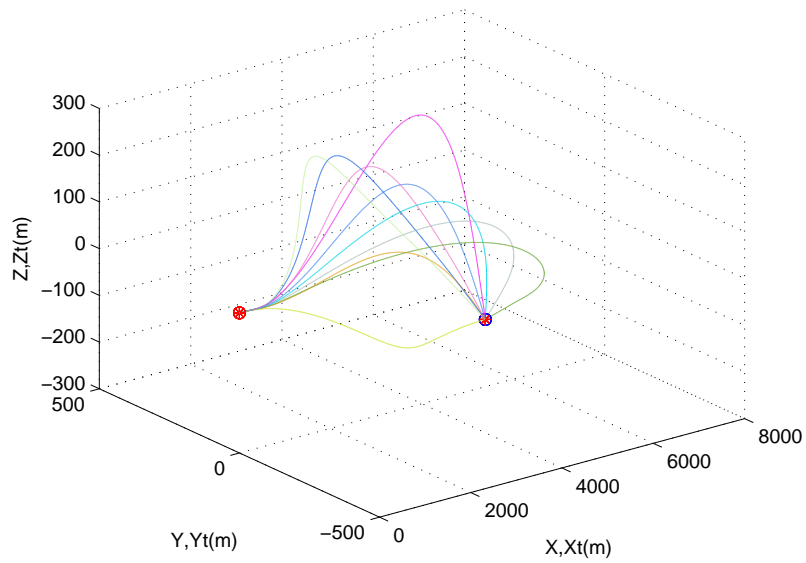


(d) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

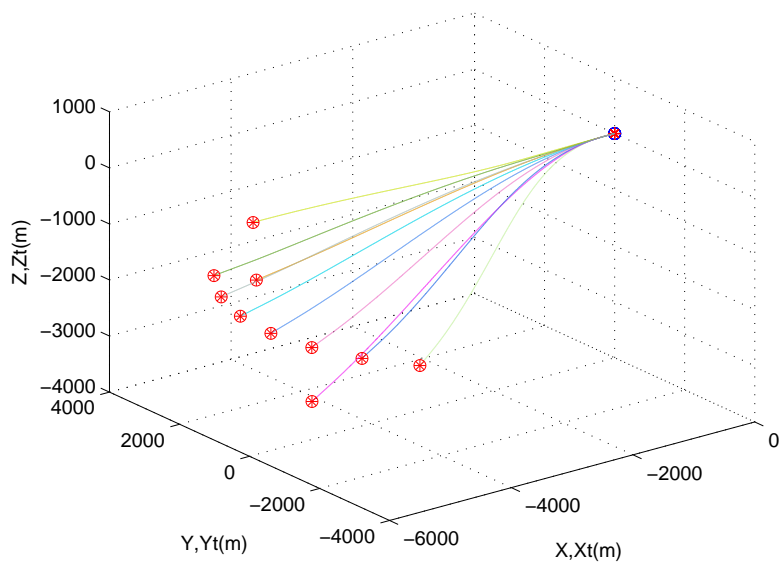


(e) 2D로 표현한 미사일 궤적

그림 4.12: 등속 운동하는 표적에 대한 모의 실험 결과 (Case 3)

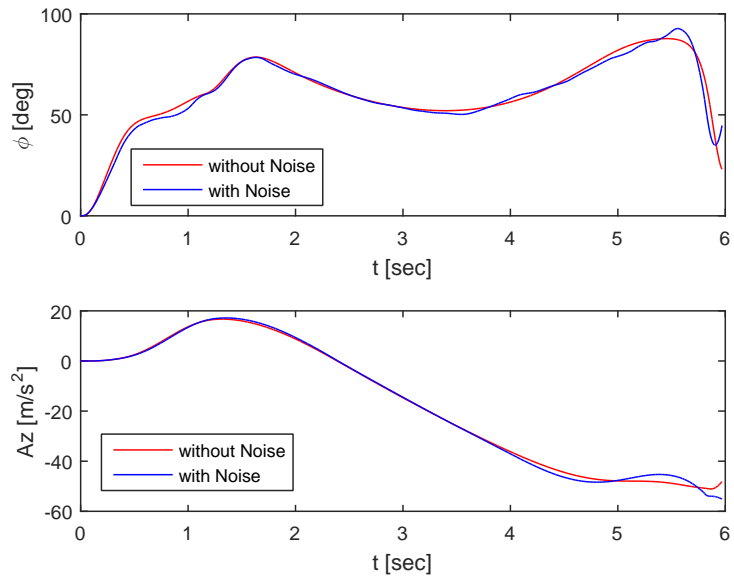


(a) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

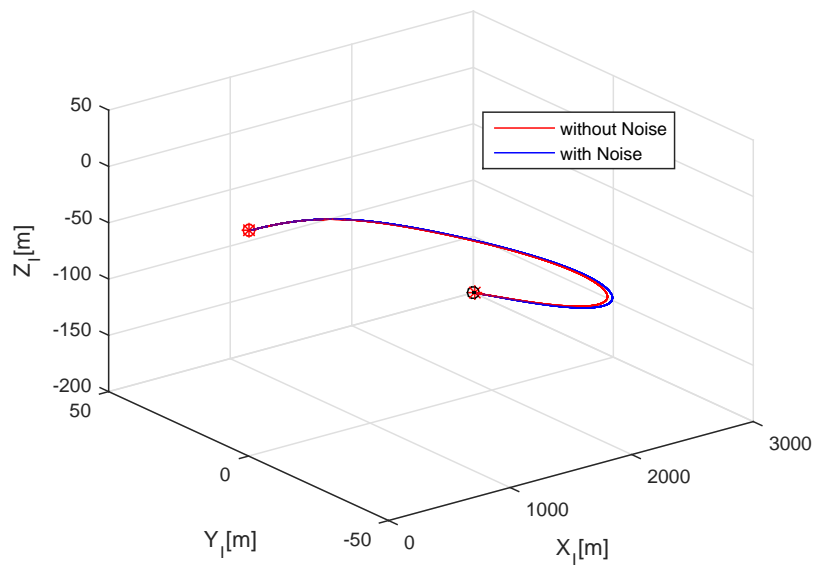


(b) 표적 충돌각 좌표계에서의 미사일 궤적

그림 4.13: 다양한 표적 충돌각에 대한 모의 실험 결과

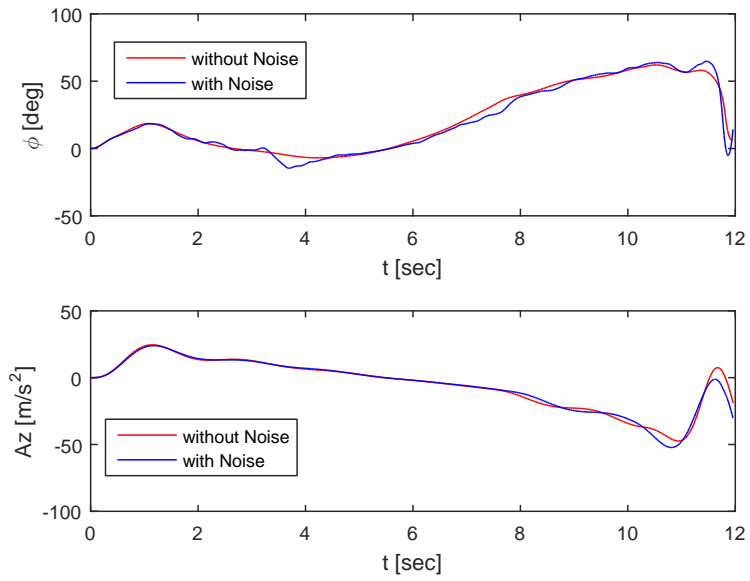


(a) 롤 각 및 피치 가속도

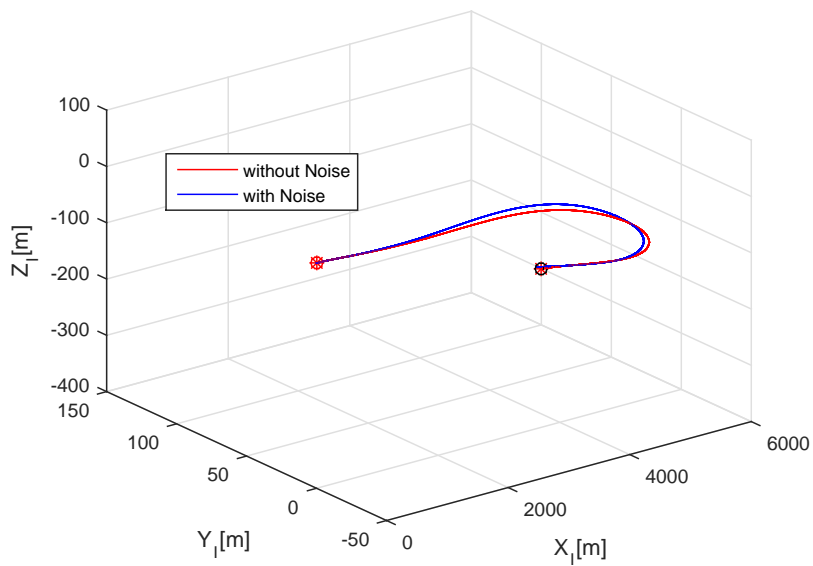


(b) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

그림 4.14: 오차 및 잡음 유무에 대한 모의 실험 결과 (Case 1)

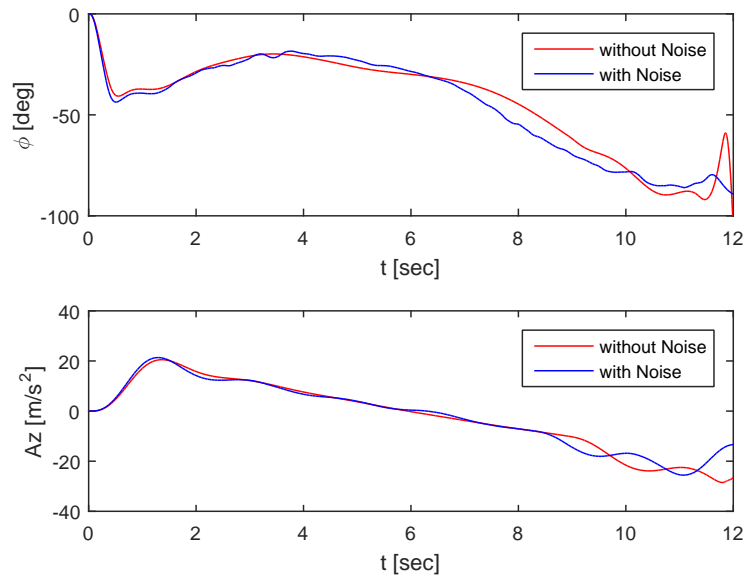


(a) 롤 각 및 피치 가속도

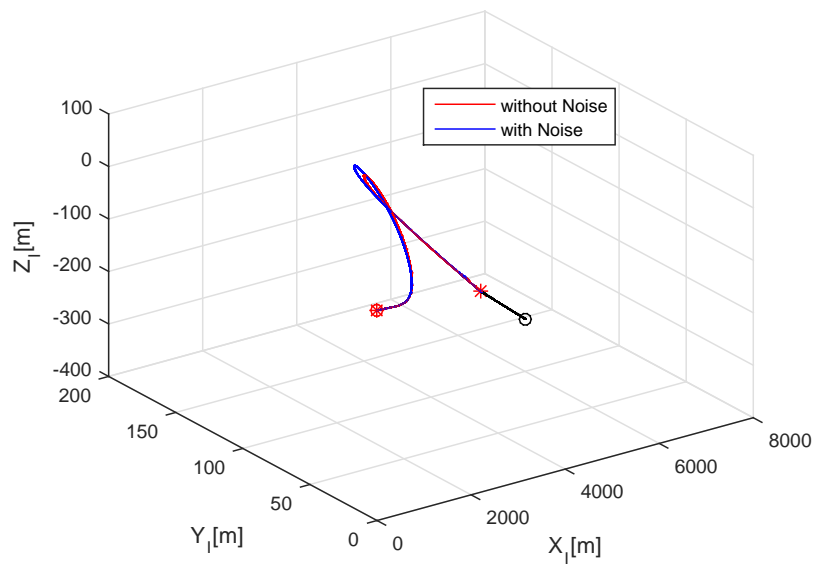


(b) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

그림 4.15: 오차 및 잡음 유무에 대한 모의 실험 결과 (Case 2)



(a) 롤 각 및 피치 가속도



(b) 관성 좌표계에서의 미사일 궤적

그림 4.16: 오차 및 잡음 유무에 대한 모의 실험 결과 (Case 3)

제 5 장 결 론

지금까지 살펴 본 논문의 연구 결과를 요약하면 다음과 같다. 본 논문에서는 BTT 미사일의 표적 충돌각과 자동조종장치 동역학을 고려한 최적 유도 법칙을 제안하였다. 기존의 연구 결과들은 자동조종장치 동역학을 완전히 무시하거나 혹은, 롤, 피치 채널 중 일부분만을 고려하여 설계하였다. 그러나 본 논문에서는 구동기 동역학을 고려한 자동조종 제어기를 채택, 이를 기반으로 자동조종장치 동역학을 고려한 최적 유도 법칙을 설계하였다.

또한, 기존의 표적 충돌각을 고려한 유도 법칙 연구 결과들은 2차원 평면상의 추적 기하학만을 고려하였는데 반해 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙은 3차원 추적 기하학을 고려한 유도 기법으로 롤과 피치 가속도 명령의 최적해를 닫힌 형태로 구하였다. 이 때, 최적 유도 법칙을 유도함에 있어 준상태 방정식을 근사하였는데 이를 통해 구한 해석해와 근사를 하지 않은 채 구한 수치해와의 비교를 통해 근사의 타당성을 확인해 보았다. 또한, 최적 유도 문제의 해는 그 수식의 형태가 매우 복잡하고 방대한 양으로 구성되어 있으나 이를 단순화 하여 실제 구현에 있어 용이함을 도모해 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙의 실용성도 제고하였다.

끝으로 본 논문에서 제안한 최적 유도 법칙의 성능을 입증하고자 모의 실험을 실시하였다. 이를 위해 미사일의 공역학, 자동조종장치 동역학, 추적 기하학 등을 근사 없이 모두 반영 해 최대한 실제 요격 상황과 유사한 모의 실험 환경을 구성하였으며, 실제 전장에서 일어나는 여러 가지 요격 상황을 가정하고 다양한 모의 실험을 수행하여 그 성능을 검증하였다.

유감스럽게도, 본 논문에서 제안하는 최적 유도 법칙은 상태변수에 $\bar{\phi}$ 를 도입하고 삼각함수를 근사하여 구한 일종의 준 최적 유도 법칙이다. 하지만, BTT 미사일

에 대해 자동조종장치 동역학과 3차원 추적 기하학을 모두 고려하며 원하는 표적 충돌각으로 요격 가능한 유도 법칙을 설계하여 이를 닫힌 해 형태로 구하고 그 요격 성능을 입증했다는 점에 본 논문의 의의를 둔다. 향후에는 2점 경계치 문제를 풀어 구한 수치해와의 비교, 분석을 통해 보다 개선된 삼각 함수의 근사 및 $\bar{\phi}$ 의 설정 방법에 대한 연구가 필요할 것이며 나아가 가변하는 $\bar{\phi}$ 를 설정한 준최적 유도 법칙이 아닌 넓은 롤 회전 범위에 대해 최적 유도 법칙을 설계하는 연구가 필요하다. 또한, 유도 법칙의 수식 정리를 통해 유도 명령의 보다 간결한 표기 및 정성적 분석에 대한 연구도 필요하다.

부록 A. 기호의 정의

(X_I, Y_I, Z_I)	관성 좌표계
(X_M, Y_M, Z_M)	미사일 동체 좌표계
i, j, k	X_{M-}, Y_{M-}, Z_{M-} -축의 단위 벡터
U, V, W	미사일 선속도의 X_{M-}, Y_{M-}, Z_{M-} -축 성분
p, q, r	미사일 각속도의 X_{M-}, Y_{M-}, Z_{M-} -축 성분
I_x, I_y, I_z	미사일 관성 모멘트의 X_{M-}, Y_{M-}, Z_{M-} -축 성분
I_{xy}, I_{yz}, I_{zx}	관성 곱
m	미사일의 질량
S	미사일의 공역학적 기준 면적
d	미사일의 길이
l_b	미사일의 기수로부터 미사일 동체의 압력 중심까지의 거리
l_f	미사일의 기수로부터 제어 편각의 압력 중심까지의 거리
l_g	미사일의 기수로부터 미사일 동체의 질량 중심까지의 거리
V_M	미사일의 속력 ($\triangleq \sqrt{ U ^2 + V ^2 + W ^2}$)
V_S	음속
ρ	공기 밀도
M	마하 수
Q	동압 ($\triangleq \rho V_M ^2 / 2$)
g	중력 가속도

α_T	총 공격각 ($\triangleq \sin^{-1}(\sqrt{ V ^2 + W ^2}/V_M)$)
α	받음각 ($\alpha \triangleq \tan^{-1}(W/U)$)
β	옆미끄러짐각 ($\beta \triangleq \tan^{-1}(V/U)$)
ϕ, ϕ^c	실제 롤 각 및 롤 각 명령
A_z, A_z^c	실제 피치 가속도 및 피치 가속도 명령
$\delta_p, \delta_q, \delta_r$	롤, 피치, 요 제어 편각
$\delta_p^c, \delta_q^c, \delta_r^c$	롤, 피치, 요 제어 편각 명령
F_x, F_y, F_z	미사일에 작용하는 공역학적 힘의 X_M-, Y_M-, Z_M- 축 성분
M_x, M_y, M_z	미사일에 작용하는 공역학적 모멘트의 X_M-, Y_M-, Z_M- 축 성분
$D_i f$	함수 f 의 i -번째 변수에 대한 편미분
(X_T^*, Y_T^*, Z_T^*)	표적 충돌각 좌표계
(X_G, Y_G, Z_G)	유도 좌표계
ψ, ψ^*	요 방향 오일러 각 및 맞추고자 하는 표적 충돌각
θ, θ^*	피치 방향 오일러 각 및 맞추고자 하는 표적 충돌각
x_M, y_M, z_M	관성 좌표계에서의 미사일의 위치
x_T, y_T, z_T	관성 좌표계에서의 표적의 위치
$V_{T_x}, V_{T_y}, V_{T_z}$	관성 좌표계에서의 표적의 속도

부록 B. ILAAT 미사일의 제원

본 논문에서 제안한 최적 유도 법칙의 성능 검증을 위해 모의 실험에서 사용된 ILAAT(Inter-Laboratory Air-to-Air Missile Technology) 미사일의 제원은 연료가 소모된 이후의 상태(burnout)에 대해서 다음의 표 1와 같다[40].

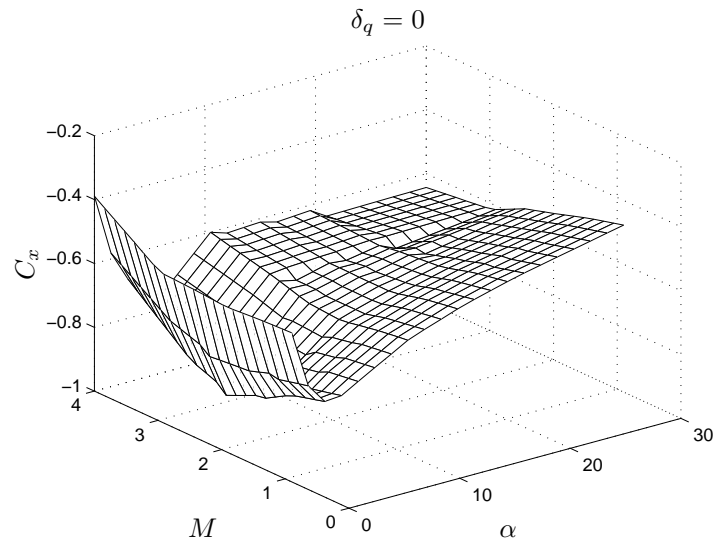
한 편, ILAAT 미사일의 공역학 모델은 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned}
 C_y(\alpha, \beta, M, \delta_r) &= C_{y\beta}(\alpha, M)\beta + C_{y\delta_r}(\beta, M)\delta_r \\
 C_z(\alpha, M, \delta_q) &= C_{z\alpha}(M)\alpha + C_{z\delta_q}(\alpha, M)\delta_q \\
 C_l(\alpha, \beta, M, \delta_p) &= C_{l\beta}(\alpha, M)\beta + C_{l\delta_p}(\alpha, M)\delta_p + C_{lp}(\alpha, M)\frac{pD}{2V_M} \\
 C_m(\alpha, M, \delta_q) &= C_{m0}(\alpha, M) + C_{m\delta_q}(\alpha, M)\delta_q + C_{mq}(\alpha, M)\frac{qD}{2V_M} \\
 C_n(\alpha, \beta, M, \delta_r) &= C_{n\beta}(\alpha, M)\beta + C_{n\delta_r}(\beta, M)\delta_r + C_{nr}(\alpha, M)\frac{rD}{2V_M}
 \end{aligned} \tag{1}$$

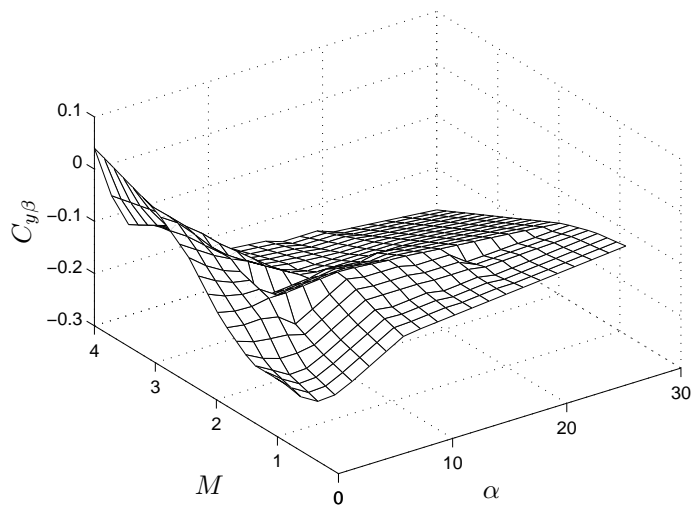
식 (1) 모델의 공력 계수는 지시표 형태로 주어지며 그림 1에 나타내었다. 단, $C_x(\alpha, M, \delta_q)$ 의 형태는 $\delta_q = 0$ 인 경우에 대해서만 나타내었다.

표 1: ILAAT 미사일의 제원

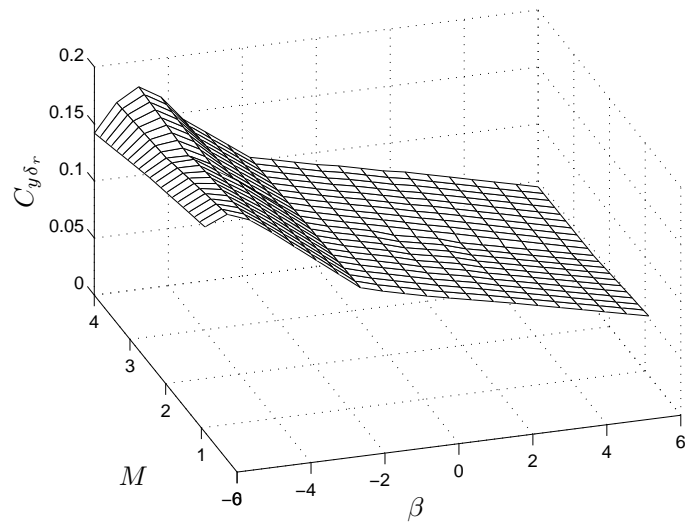
항목	Burnout	단위
l_g	54.6	<i>inch</i>
m	3.48	<i>slug</i>
I_x	0.23	<i>slug/ft²</i>
I_y	27.16	<i>slug/ft²</i>
I_z	27.2	<i>slug/ft²</i>
S	0.307	<i>ft²</i>
d	0.625	<i>ft</i>



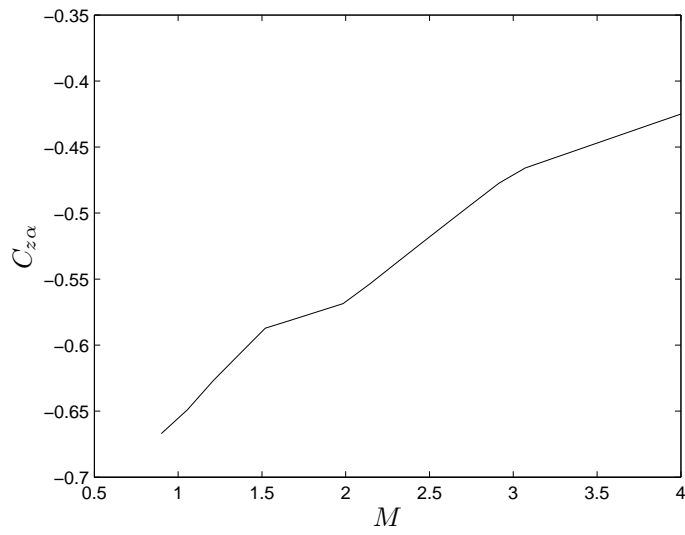
(a) C_x 의 3차원 그래프



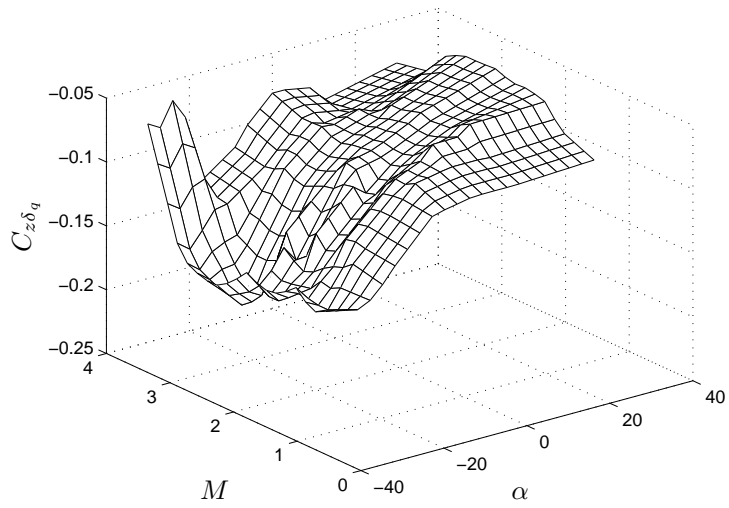
(b) $C_{y\beta}$ 의 3차원 그래프



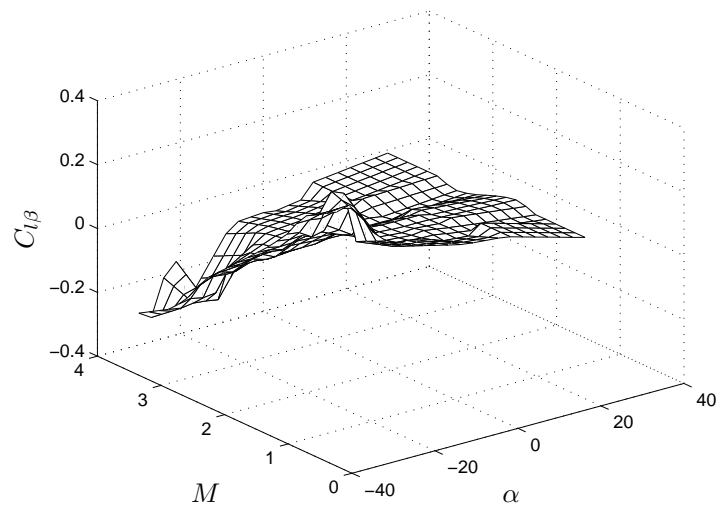
(c) $C_{y\delta_r}$ 의 3차원 그래프



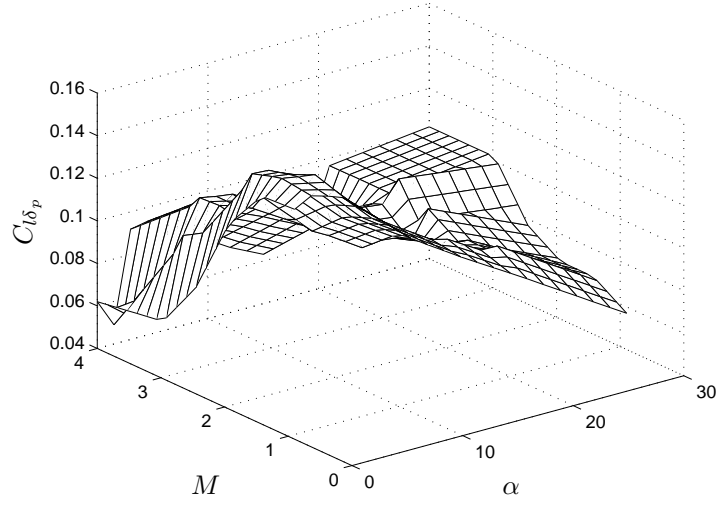
(d) $C_{z\alpha}$ 의 2차원 그래프



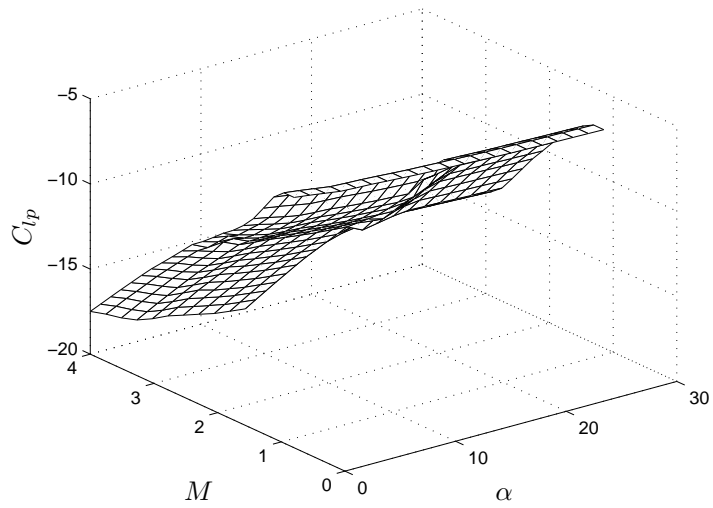
(e) $C_{z\delta_q}$ 의 3차원 그래프



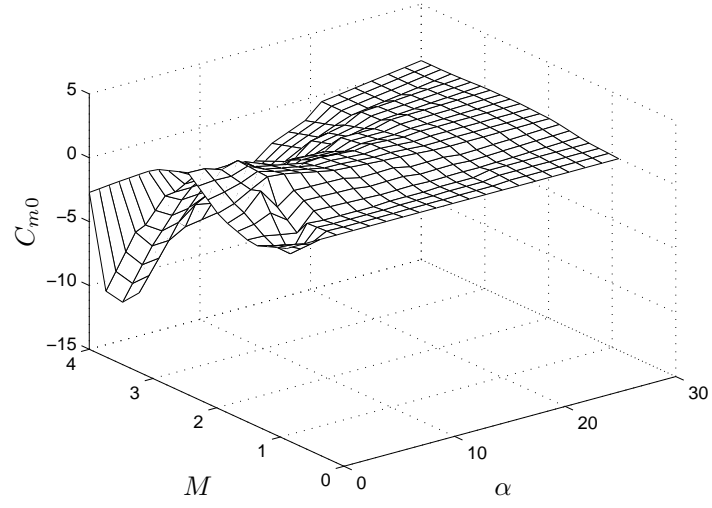
(f) $C_{l\beta}$ 의 3차원 그래프



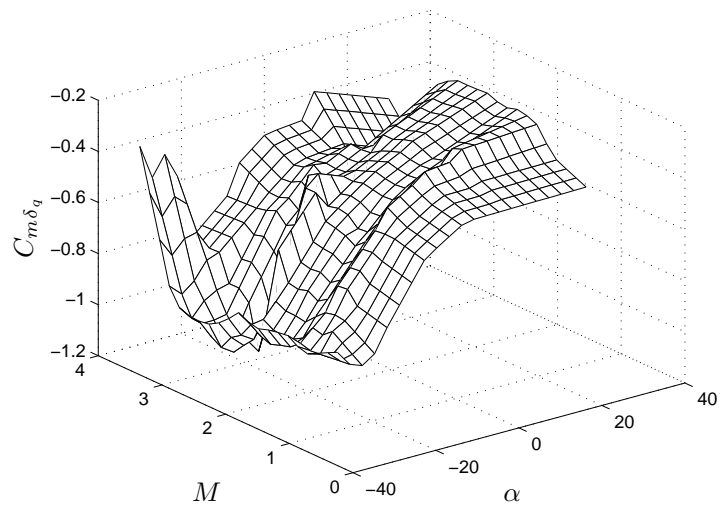
(g) $C_{l\delta_p}$ 의 3차원 그래프



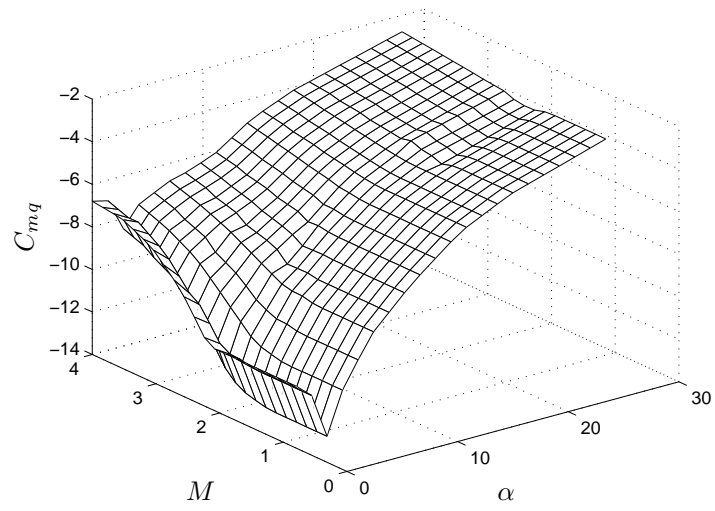
(h) C_{lp} 의 3차원 그래프



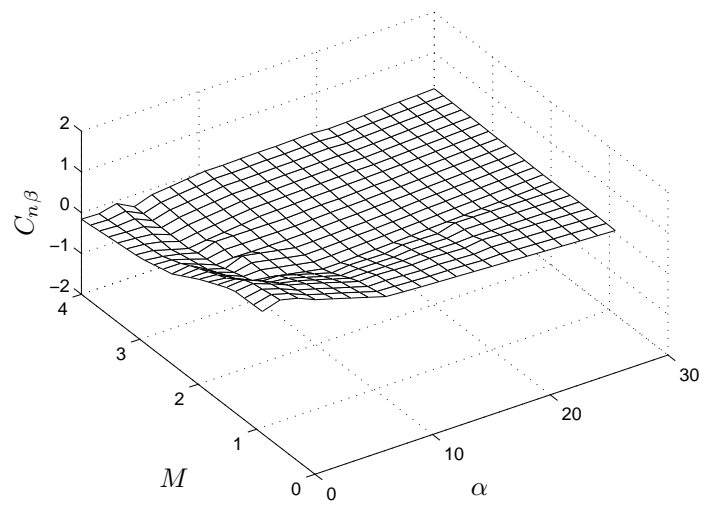
(i) C_{m0} 의 3차원 그래프



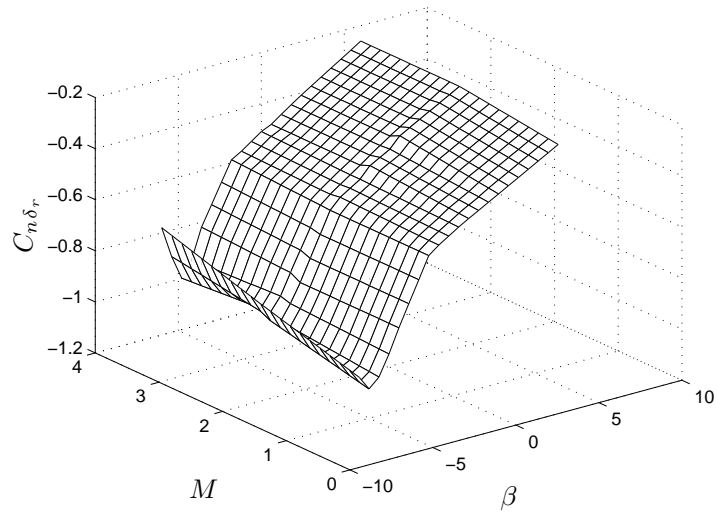
(j) $C_{m\delta_q}$ 의 3차원 그래프



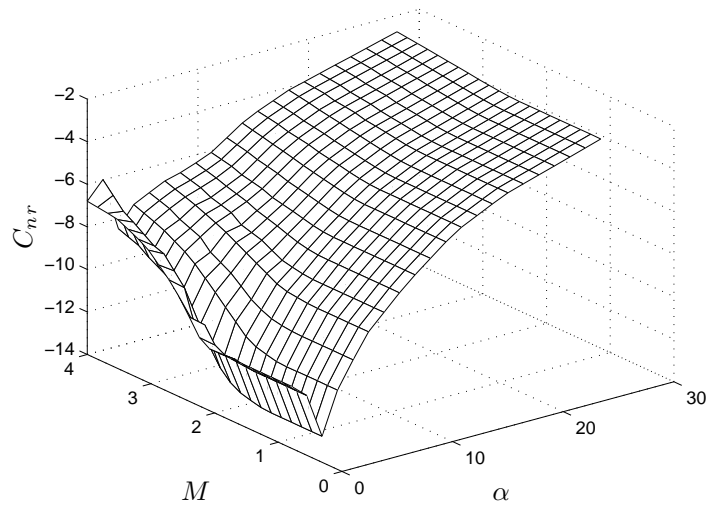
(k) C_{mq} 의 3차원 그래프



(l) $C_{n\beta}$ 의 3차원 그래프



(m) $C_{n\delta_r}$ 의 3차원 그래프



(n) C_{nr} 의 3차원 그래프

그림 1: ILAAT 미사일의 공력 계수

참 고 문 헌

- [1] P. Garnell and D. J. East, *Guided Weapon Control Systems*, Pergamon Press, 1977.
- [2] J. H. Blakelock, *Automatic Control of Aircraft and Missile*, New York: John Wiley & Sons, Inc., 1991.
- [3] M. J. Stephens and D. B. Ridgely, "Autopilot Design for a Tail-Controlled Missile Using Two Degree of Freedom Controllers", *AIAA-95-3264-CP*, pp. 834-844, 1995.
- [4] Y. C. Ho, A. E. Bryson, and S. Baron, "Differential Games and Optimal Pursuit-Evasion Strategies", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.10, No.4, pp. 385-389, Oct. 1965.
- [5] F. L. Lewis, and V. L. Syrmos, *Optimal Control 2nd Ed.*, John Wiley & Sons, INC., 1995.
- [6] F. P. Alder, "Missile guidance by three-dimensional proportional navigation", *Journal of Applied Physics*, Vol. 27, No. 3, pp. 500-507, Jun. 1956.
- [7] G. M. Siouris, "Comparison between Proportional and Augmented Proportional Navigation", *Nachrichtentechnische Zeitschrift*, pp. 278-280, 1974.
- [8] J. G. Lee, H. S. Han, and Y. J. Kim, "Guidance Performance Analysis of Bank-To-Turn(BTT) Missiles", *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 991-996, Hawaii, USA, Aug. 1999.
- [9] P. Zarchan, *Tactical and strategic missile guidance*, Vol.124, Progress in Astronautics and Aeronautics, AIAA, Wshington, D.C., 1997, pp. 135-154.
- [10] Chen, R. H., Speyer, J. L., and Lianos, D., "Optimal Intercept Missile Guidance Strategies with Autopilot Lag", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 33, No. 4, pp. 1264-1272, Aug. 2010.

- [11] Shima, T., Idan M., and Golan O. M., “Sliding-Mode Control for Integrated Missile Autopilot Guidance”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 29, No. 2, pp. 250-260, Mar. 2006.
- [12] Hexner, G., and Pila, A. W., “Practical Stochastic Optimal Guidance Law for Bounded Acceleration Missiles”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 34, No. 2, pp. 437-445, Mar. 2011.
- [13] R. K. Aggarwal and C. R. Moore, “A Bank-to-Turn Guidance Law”, *Guidance and Control Information Analysis Center*, GACIAC PR-85-01, pp. 300-306, Sep. 1984.
- [14] R. K. Aggarwal and C. R. Moore, “Terminal guidance algorithm for ramjet-powered missiles”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 21, No. 6, pp. 862-866, Nov. 1998.
- [15] J.H. Yeom, S. J. Yoo, J. W. Hong, and I. J. Ha, “Terminal-Phase Optimal Guidance Law for BTT Missiles Considering Significant Autopilot Dynamics”, *AIAA Guidance, Navigation, and Control Conference*, Aug. 2011.
- [16] M. Kim, and K.B. Grider, “Terminal Guidance for Impact Attitude Angle Constrained Flight Trajectories.”, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 9, No. 6, pp. 852-859, Dec. 1973.
- [17] A. E. Bryson and Y. C. Ho, *Applied Optimal Control*, Washington, DC: Hemisphere, 1975.
- [18] T. L. Song, S. J. Shin, and H. Cho, “Impact Angle Control for Planar Engagements”, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 35, No. 4, pp. 1439-1444, Oct. 1999.
- [19] B. S. Kim, J. G. Lee, and H. S. Han, “Biasd PNG Law for Impact with Angular Constraint”, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 34, No. 1, pp. 277-288, Jan. 1998.

- [20] C. K. Ryoo, H. Cho, and M. J. Tahk, "Closed-Form Solutions of Optimal Guidance with Terminal Impact Angle Constraint", *IEEE Conference on Control Applications*, Vol. 1, pp. 504-509, Jun. 2003.
- [21] C. K. Ryoo, H. Cho, and M. J. Tahk, "Time-to-Go Weighted Optimal Guidance with Impact Angle Constraints", *IEEE Trans. on Control Systems Technology*, Vol. 14, No. 3, pp. 483-492, May 2006.
- [22] C. H. Lee, M. J. Tahk, and J. I. Lee, "Generalized Formulation of Weighted Optimal Guidance Laws with Impact Angle Constraint", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 49, No. 2, pp. 1317-1322, Apr. 2013.
- [23] Vitaly Shaferman and Tal Shima, "Linear Quadratic Guidance Laws for Imposing a Terminal Intercept Angle", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 31, No. 5, pp. 1400-1412, Sep. 2008.
- [24] Ilan Taub and Tal Shima, "Intercept Angle Missile Guidance Under Time Varying Acceleration Bounds", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 36, No. 3, pp. 686-699, May 2013.
- [25] Ilan Rusnak, Haim Weiss, Rei Eliav, and Tal Shima "Missile Guidance With Constrained Intercept Body Angle", *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 50, No. 2, pp. 1445-1453, Apr. 2014.
- [26] Tal Shima, "Intercept-Angle Guidance", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 34, No. 2, pp. 484-492, Mar. 2011.
- [27] Shashi Ranjan Kumar, Sachit Rao, and Debasish Ghose, "Sliding-Mode Guidance and Control for All-Aspect Interceptors with Terminal Angle Constraints", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 35, No. 4, pp. 1230-1246, Jul. 2012.
- [28] Shashi Ranjan Kumar, Sachit Rao, and Debasish Ghose, "Nonsingular Terminal Sliding Mode Guidance with Impact Angle Constraints", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 37, No. 4, pp. 1114-1130, Jul. 2014.

- [29] Asif Farooq and David J. N. Limebeer, “Bank-to-Turn Missile Guidance with Radar Imaging Constraints”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 28, No. 6, pp. 1157-1170, Nov. 2005.
- [30] J. H. Yeom, S. H. Song, J. W. Hong, and I. J. Ha, “Singular Perturbationlike Approach to Compensation of Actuator Dynamics Effect in Missile Control”, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol.50, No.4, pp. 2417-2439, Oct. 2014.
- [31] J. I. Lee and I. J. Ha, “Autopilot design for highly maneuvering STT missiles via singular perturbation-like technique”, *IEEE trans. on Control Systems Technology*, vol. 7, no. 5, pp. 527-541, Sep. 1999.
- [32] S. Y. Lee, J. I. Lee, and I. J. Ha, “Nonlinear autopilot for high maneuverability of bank-to-turn missiles”, *IEEE trans. on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 37, no. 4, pp. 1236-1253, Oct. 2001.
- [33] L. H. Carter and J. S. Shamma, “Gain-scheduled bank-to-turn autopilot design using linear parameter varying transformation”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 19, no. 5. pp. 1056-1063, 1996.
- [34] D. Chwa, J. Y. Choi, and J. H. Seo, “Compensation of actuator dynamics in nonlinear missile control”, *IEEE trans. on Control Systems Technology*, vol. 12, no. 4, pp. 620-626, Jul. 2004.
- [35] B. Morton, “A Dynamic Inversion Control Approach for High-Mach Trajectory tracking,” *Proceedings of the American Control Conference*, Chicago, Illinois, pp. 1332-1336, 1992.
- [36] S. H. Song and I. J. Ha, “A Lyapunov-Like Approach to Performance Analysis of 3-Dimensional Pure PNG Laws”, *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, Vol. 30, No. 1, 1994, pp. 238-248.
- [37] TEXAS INSTRUMENTS, “TMS320C6727B, TMS320C6726B, TMS320C6722B, TMS320C6720 Floating-Point DSPs (Rev. E)”, Last modified July 2008, <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/tms320c6727b.pdf>.

- [38] TEXAS INSTRUMENTS, “TMS320C6713B Floating-Point Digital Signal Processor (Rev. B)”, Last modified June 2006, <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/tms320c6713b.pdf>.
- [39] TEXAS INSTRUMENTS, “TMS320F28335/F28334/F28332/F28235/F28234/F28232 Digital Signal Controllers (Rev. M)”, Last modified August 2012, <http://www.ti.com/lit/ds/symlink/tms320f28335.pdf>.
- [40] D. E. Williams, A. N. Madiwale, and B. Friedland, *Modern control theory for autopilots*, Air Force Armament Laboratory, 1984.
- [41] A. Ralston and H. S. Wilf, *Mathematical Method for Digital Computers*, Vol. 2, John Wiley & Son, INC., 1967.
- [42] E. W. Cheney, *Introduction to Approximation Theory*, 2nd ed., Chelsea, 2000.

Abstract

In contrast with STT missiles, the guidance law design for BTT missiles should be based on 3-dimensional pursuit kinematics, since the pitch and roll channels of BTT missiles are coupled dynamically. More generally than the prior works, the dynamics of pitch and roll channels, as well as 3-dimensional pursuit kinematics are considered in the design of terminal-phase optimal guidance law for BTT missiles proposed in this dissertation. Thereby, the proposed optimal guidance law guarantees high capturability with small miss distance without significant performance degradation due to time-lag effect even in case of relatively slow autopilot dynamics. Furthermore, since impact angle constraint is also considered, proposed optimal guidance law can make a BTT missile intercept a target with the desired impact angle. Moreover, the resulting optimal guidance law is expressed explicitly in feedback-form with the coefficients given as the functions of time-to-go. Finally, the effectiveness and practicality of proposed optimal guidance law is demonstrated through various simulation results.

Keywords : BTT Missile Control, Optimal Guidance Law, Autopilot Dynamics, Terminal-Phase Guidance Law, Impact Angle Constraint

Student Number : 2009-30197