creative commons
COMMONS DEED

저작자표시 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.
- 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

교육학석사학위논문

대입 수리논술에서
교육과정 외의 소재 활용 방안 연구

2013년 2월

서울대학교 대학원

수학교육과

허 지 희

대입 수리논술에서
교육과정 외의 소재 활용 방안 연구

지도교수 김 서 령

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함

2012년 10월

서울대학교 대학원

수학교육과

허 지 희

허지희의 석사 학위논문을 인준함

2012년 12월

위 원 장 _____ (인)

부위원장 _____ (인)

위 원 _____ (인)

국문초록

대입 수리논술에서 교육과정 외의 소재 활용 방안 연구

2005년 교육부에서 제시한 논술고사의 기준에 따르면, 논술고사는 '제시된 주제에 관하여 필자의 의견이나 생각을 논리적으로 서술하도록 하는 시험'이다. 따라서 논술고사는 단순한 암기 능력이 아닌 이해력, 사고력, 표현력, 창의력 등의 종합적인 문제해결 능력을 평가할 수 있어야 할 것이다. 이런 맥락에서 수학 관련 주제를 다루는 수리논술은 수학적 추론과 수학적 문제해결 능력과 수학적 서술을 통한 수학적 의사소통 능력을 판별하도록 출제되어야 할 것이다. 암기된 사고력이 아닌 이러한 고등사고능력을 수학적 과정에 중점을 두어 평가하기 위해서는 학생들에게 새로운 문제 상황을 제시해주어야 하기 때문에, 다양한 소재를 활용할 수밖에 없다. 본 논문에서는 소재의 다양화의 방안을 제시하고자 교육과정 외의 소재를, 고등사고능력을 수학적 과정에 중점을 두어 평가하는 동시에 선행학습의 여부가 영향을 미치지 않도록, 적절히 활용하여 수리논술문항을 만들고 그 문항을 실험에 참여한 학생들이 풀어보도록 한 다음 수집된 답안들을 분석하였다.

먼저 교육과정 외의 소재를 사용한 수리논술 기출 문항 중 두 문항을 선정하여, 학생의 수학적 과정을 평가할 수 있고 선행여부가 영향을 미치지 않도록 문항을 적절히 수정하였다.

수정된 수리논술 문항을 갖고 실험한 결과는 다음과 같다.

첫째, 수정된 수리논술 문항은 교육과정 외의 소재를 사용하고 있지만, 학생들의 과정 중심의 고등사고능력을 평가할 수 있음을 확인하였다. 각 논제에 대한 상당수의 답안은 제시문과 교육과정 내의 수학지식을 바탕으로 작성되었으며, 학생들의 수학적 과정 전개를 봄으로써 수학적 문제해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통 등을 측정할 수 있었다.

둘째, 수정된 수리논술 문항은 교육과정 외의 소재를 사용하고 있지만, 그 소재에 대한 선행학습 여부가 미치는 영향은 유의미하지 않음을 확인하였다. 두 독립표본 t검정을 통하여 선행학습 집단과 비선행학습 집단의 평균에 유의미한 차이가 없음을 확인하였으며, 답안의 질적 분석을 통하여 두 집단 학생 모두 제시문과 교육과정 내의 수학지식을 바탕으로 답안을 작성하였음을 관찰할 수 있었다. 오히려 일부 선행학습 집단 학생의 답안에서 문제점들이 발견되었는데, 대부분의 사례는 제시문과 논제를 충실히 읽지 않고, 자신이 암기한 선행지식을 적어내는 경우였다.

본 연구를 통하여, 고등사고능력을 수학적 과정에 중점을 두어 평가하는 동시에 선행학습의 여부가 영향을 미치지 않는 교육과정 외의 소재를 활용한 문항개발이 가능함을 확인할 수 있었다.

주요어 : 수리논술, 교육과정 외의 소재, 고등사고능력의 수학적 과정에 중점을 둔 평가, 선행학습

학 번 : 2011-21568

목 차

국문초록 ····· i
목차 ····· iii
표 목차 ····· v
그림 목차 ····· viii

Ⅰ. 서론 ····· 1

1. 연구의 목적 및 필요성 ····· 1
2. 연구문제 ····· 7

Ⅱ. 이론적 배경 ····· 9

1. 수학적 과정과 수학적 과정 중심 평가 ····· 9
2. 수리논술 ····· 17
3. 선행학습의 영향 ····· 25

Ⅲ. 연구방법 및 절차 ····· 28

1. 연구 설계 ····· 28
2. 연구 참여자 및 표집방법 ····· 30
   2.1 연구 참여자 ····· 30
   2.2 표집방법 ····· 30
3. 조사도구 ····· 31
   3.1 수리논술 문항 ····· 31
   3.2 문항 수정 배경 ····· 35
   3.3 수학적 과정 중심 평가 원리와 수리논술 문항 ····· 44

4. 자료수집 방법 ····· 45
4.1 예비 실험 ····· 45
4.2 본 실험 ····· 45

Ⅳ. 연구결과 ····· 48
1. 암호 문제 ····· 48
1.1 수학적 과정 하위 요소로 분석한 암호 문제 ····· 48
1.2 채점기준표 ····· 60
1.3 채점 결과 및 두 독립표본 t검정 결과 ····· 62
1.4 선행학생의 답안과 비선행학생의 답안 분석 ····· 66
2. 나무 심기 문제 ····· 71
2.1 수학적 과정 하위 요소로 분석한 나무 심기 문제 ····· 71
2.2 채점기준표 ····· 81
2.3 채점 결과 및 두 독립표본 t검정 결과 ····· 84
2.4 선행학생의 답안과 비선행학생의 답안 분석 ····· 86
3. 기타 논의 사항 : 선행학습으로 인해 방해를 받은 사례 ····· 94

Ⅴ. 요약 및 결론 ····· 102
1. 요약 ····· 102
2. 결론 및 제언 ····· 104

참고문헌 ····· 107
부록 ····· 113
Abstract ····· 117

표 목 차

<표 Ⅰ-1> 2005년 교육부 고시 논술고사 기준 ····· 2
<표 Ⅰ-2> 2012학년도 서울대학교 정시모집 자연계 논술고사 출제의도 ····· 3
<표 Ⅰ-3> 2012년 8월 사교육 걱정 없는 세상 보도자료 ····· 4
<표 Ⅱ-1> 수학적 과정의 의미와 성취기준(황선욱 외, 2011) ····· 12
<표 Ⅱ-2> 수학적 과정의 하위 능력(정상권 외, 2012) ····· 16
<표 Ⅱ-3> 수리논술의 의미 ····· 20
<표 Ⅱ-4> 수리논술의 행동영역 평가요소(김원중, 황우형, 2010) ····· 22
<표 Ⅱ-5> 수리논술의 행동영역 평가요소(박제남, 2011) ····· 24
<표 Ⅲ-1> 암호 문제 수정 1 ····· 35
<표 Ⅲ-2> 암호 문제 수정 2 ····· 36
<표 Ⅲ-3> 암호 문제 수정 3 ····· 36
<표 Ⅲ-4> 암호 문제 수정 4 ····· 37
<표 Ⅲ-5> 암호 문제 수정 5 ····· 38
<표 Ⅲ-6> 암호 문제 수정 6 ····· 38
<표 Ⅲ-7> 암호 문제 수정 7 ····· 39
<표 Ⅲ-8> 암호 문제 수정 정리 ····· 39
<표 Ⅲ-9> 나무심기 문제 수정 1 ····· 40
<표 Ⅲ-10> 나무심기 문제 수정 2 ····· 41
<표 Ⅲ-11> 나무심기 문제 수정 3 ····· 42
<표 Ⅲ-12> 나무심기 문제 수정 4 ····· 43
<표 Ⅲ-13> 나무심기 문제 수정 정리 ····· 43
<표 Ⅳ-1> 암호 문제 논제1의 해결과정과 수학적 과정 하위요소 ····· 50

<표 Ⅳ-2> 암호 문제 논제1의 하위요소 ····· 51
<표 Ⅳ-3> 암호 문제 논제2(1)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소 ····· 52
<표 Ⅳ-4> 암호 문제 논제2(1)의 하위요소 ····· 53
<표 Ⅳ-5> 암호 문제 논제2(2)(b)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소 ····· 54
<표 Ⅳ-6> 암호 문제 논제2(2)(b)의 하위요소 ····· 55
<표 Ⅳ-7> 암호 문제 논제2(2)(c)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소 ····· 56
<표 Ⅳ-8> 암호 문제 논제2(2)(c)의 하위요소 ····· 57
<표 Ⅳ-9> 암호 문제 논제2(3)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소 ····· 58
<표 Ⅳ-10> 암호 문제 논제2(3)의 하위요소 ····· 59
<표 Ⅳ-11> 암호 문제 논제1의 채점기준표 ····· 60
<표 Ⅳ-12> 암호 문제 논제2(1)의 채점기준표 ····· 60
<표 Ⅳ-13> 암호 문제 논제2(2)(b)의 채점기준표 ····· 61
<표 Ⅳ-14> 암호 문제 논제2(2)(c)의 채점기준표 ····· 61
<표 Ⅳ-15> 암호 문제 논제2(3)의 채점기준표 ····· 62
<표 Ⅳ-16> 암호 문제 채점 결과 ····· 63
<표 Ⅳ-17> 암호 문제 두 독립표본 t 검정 결과 ····· 64
<표 Ⅳ-18> 암호 문제 논제별 두 독립표본 t 검정 결과 ····· 65
<표 Ⅳ-19> 암호 문제 질적 분석 대상 학생 점수 ····· 66
<표 Ⅳ-20> 나무심기 문제 논제1(1)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소 ····· 72
<표 Ⅳ-21> 나무심기 문제 논제1(1)의 하위요소 ····· 73
<표 Ⅳ-22> 나무심기 문제 논제1(2)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소 ····· 73
<표 Ⅳ-23> 나무심기 문제 논제1(2)의 하위요소 ····· 75
<표 Ⅳ-24> 나무심기 문제 논제1(3)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소 ····· 76
<표 Ⅳ-25> 나무심기 문제 논제1(3)의 하위요소 ····· 76
<표 Ⅳ-26> 나무심기 문제 논제2의 해결과정과 수학적 과정 하위요소 ····· 77

<표 Ⅳ-27> 나무심기 문제 논제2의 하위요소 ····· 78
<표 Ⅳ-28> 나무심기 문제 논제3의 해결과정과 수학적 과정 하위요소 ····· 79
<표 Ⅳ-29> 나무심기 문제 논제3의 하위요소 ····· 81
<표 Ⅳ-30> 나무심기 문제 논제1(1)의 채점기준표 ····· 82
<표 Ⅳ-31> 나무심기 문제 논제1(2)의 채점기준표 ····· 82
<표 Ⅳ-32> 나무심기 문제 논제1(3)의 채점기준표 ····· 83
<표 Ⅳ-33> 나무심기 문제 논제2의 채점기준표 ····· 83
<표 Ⅳ-34> 나무심기 문제 논제3의 채점기준표 ····· 83
<표 Ⅳ-35> 나무심기 문제 채점 결과 ····· 84
<표 Ⅳ-36> 나무심기 문제 두 독립표본 t 검정 결과 ····· 85
<표 Ⅳ-37> 나무심기 문제 논제별 두 독립표본 t 검정 결과 ····· 86
<표 Ⅳ-38> 나무심기 문제 질적 분석 대상 학생 점수 ····· 87

그 림 목 차

[그림 Ⅳ-1] 암호 문제 채점코드 01 학생답안 ① ····· 67
[그림 Ⅳ-2] 암호 문제 채점코드 01 학생답안 ② ····· 68
[그림 Ⅳ-3] 암호 문제 채점코드 02, 03 학생답안 ····· 69
[그림 Ⅳ-4] 암호 문제 채점코드 04 학생답안 ····· 70
[그림 Ⅳ-5] 암호 문제 채점코드 05, 06 학생답안 ····· 71
[그림 Ⅳ-6] 나무심기 문제 채점코드 01 학생답안 ····· 88
[그림 Ⅳ-7] 나무심기 문제 채점코드 02 학생답안 ····· 89
[그림 Ⅳ-8] 나무심기 문제 채점코드 03 학생답안 ····· 90
[그림 Ⅳ-9] 나무심기 문제 채점코드 04 학생답안 ····· 91
[그림 Ⅳ-10] 나무심기 문제 채점코드 05 학생답안 ····· 92
[그림 Ⅳ-11] 나무심기 문제 채점코드 06 학생답안 ····· 93
[그림 Ⅳ-12] P01의 틀린 답안 ····· 95
[그림 Ⅳ-13] P01의 설문지 결과 ····· 95
[그림 Ⅳ-14] P06의 틀린 답안 ····· 96
[그림 Ⅳ-15] P07의 틀린 답안 ····· 98
[그림 Ⅳ-16] N11의 설문지 결과 ····· 100
[그림 Ⅳ-17] N04의 설문지 결과 ····· 100
[그림 Ⅳ-18] N06의 설문지 결과 ① ····· 100
[그림 Ⅳ-19] N06의 설문지 결과 ② ····· 101

Ⅰ. 서론

1. 연구의 목적 및 필요성

최근의 수학교육에서는 단편적인 수학지식의 암기보다는 주어진 정보를 기반으로 자신의 생각을 논리적으로 조직하는 논리적 사고력과 비판적 사고력, 문제해결력 등을 강조하고 있다. 제7차 개정교육과정에서는 창의적 사고 능력, 문제해결 능력, 정보처리 능력, 의사소통 능력 등이 미래사회 구성원에게 필요한 핵심역량이며, 이 핵심역량은 수학적 문제해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통과 같은 수학적 과정의 교수·학습을 통하여 증진될 수 있다는 것을 수학과 학습 목표에서 밝히고 있다(교육과학기술부, 2011). 수학적 과정에 대한 강조는 개정교육과정에서 새롭게 만들어낸 것이 아니며, 이전부터 강조되어 왔던 수학적 문제해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통을 수학적 과정의 측면에서 주목한 것이라 볼 수 있다(정상권 외, 2012).

대학수학능력 시험의 수리영역 평가 목표 역시 '수리영역 시험은 고등학교까지의 수학 학습을 통해 습득한 수학의 기본 개념·원리·법칙을 이해하고, 이를 적용하여 계산하고 추론하며 문제를 해결하는 능력을 평가함으로써 대학 교육을 받는 데 필요한 수학적 사고력을 측정하는 시험(한국교육과정 평가원, 2012)'이라며 수학적 과정을 평가하고자 함을 밝히고 있다. 그러나 대학수학능력 시험만으로는 수학적 과정을 평가하는 것이 충분하다고 할 수 없다. 성태제(1999)에 따르면, 선택형 문항은 미시적 평가를 하게 되고, 정답 여부에만 관심이 있으므로 문제 해결과정을 측정하지 못하는 단점이 있다. 또한 증명 능력과 관련하여 수능에서

선택형으로 출제된 증명 문제를 모두 해결했다 하더라도, 같은 문항이 서술형으로 출제되었을 때에는 그것을 해결할 수 없는 경우가 많다는 연구 결과도 있다(함예진, 2007). 이와 같이 선택형이나 단답형으로는 학생의 수학적 과정을 평가하기에 충분하지 못하다.

반면, 수리논술은 수학적 문제해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통 등의 수학적 과정을 평가하는 것과 밀접하다. 다음은 2005년 교육부에서 제시한 논술고사에 대한 기준이다.

<표 Ⅰ-1> 2005년 교육부 고시 논술고사 기준

3. 논술고사 기준 설정 □ 논술고사의 개념 · “제시된 주제에 관하여 필자의 의견이나 생각을 논리적으로 서술하도록 하는 시험” □ 논술고사 여부의 판단기준 · 답안 유형이 서술형으로 되어 있는가? · 이해력, 사고력, 표현력, 창의력 등 종합적인 문제해결 능력을 측정하는 것인가? · 논리 추론 등 과정을 중심으로 하고 있는가? · 질문을 해결해가는 과정을 중시하는 것으로 다양한 답이 가능한 것인가? · 주제에 대한 주장, 의견 진술의 전개과정을 평가하는 것인가? · 고교 교육과정을 정상적으로 이수하고 이해한 학생들이 풀 수 있는 수준의 것인가?

각 대학에서도 수리논술의 출제의도로서 단순히 암기된 지식의 평가보다는 수학적 문제해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통 등의 수학적 과정의 평가를 제시하고 있다. 다음은 2012학년도 서울대학교 정시모집 자연계 논술 고사의 출제의도이다.

<표 Ⅰ-2> 2012학년도 서울대학교 정시모집 자연계 논술고사 출제의도

이번 논술고사에서는 (1) 교과서에서 다루고 있는 주요 개념에 대한 충실한 이해 정도와 (2) 이를 바탕으로 한 논리적 사고력, 추론 능력, 나아가 창의적 사고력을 평가할 수 있는 문항을 출제하기 위해 노력하였다. 자연계열에서는 자연 현상에 숨어있는 다양한 과학적 개념 및 원리에 대한 정보를 제공하고, 이러한 정보를 이해, 분석, 적용하여 통합적인 사고를 할 수 있는지의 여부를 평가하는 데 주안점을 두었다.

표성수(2011)가 중고등학교 수학교사들을 대상으로 실시한 설문조사에 따르면 수리논술이 수학 평가 도구로써 긍정적이며, 대입선발도구로써도 긍정적이다.

그러나 최근 수리논술과 관련된 문제점이 지속적으로 제기되고 있다. 수리논술의 난도가 지나치게 높기 때문에 정상적인 교육과정을 이수한 학생이라도 문제 풀이에 어려움을 느끼며, 학교 현장에서 지도가 불가능하여 사교육을 조장하고 있다는 것이다. 다음은 2012년 8월에 사교육 걱정 없는 세상이 보도한 수리논술 관련 내용의 일부로 기출 수리논술 문항을 분석한 기준과 그 평가 결과이다.

<표 Ⅰ-3> 2012년 8월 사교육 걱정 없는 세상 보도자료

제1기준 : 대학 교과 수준의 내용이 출제되고 있지는 않은가? -평가1 :분석한 총 84문항 중 54.8%의 문항이 대학 교과 수준의 내용에서 출제됨 -평가2 :대학수준의 교과 내용이 출제되어 2012년 세계 수학 교육 대회 교사 연수에 참가한 고등학교 수학 교사 162명을 대상으로 한 설문조사 결과 94%의 교사가 학교 수업만으로는 수리 논술 시험을 대비할 수 없다고 응답함 제3기준 : 고등학교 교육과정을 충실히 하더라도 도저히 풀 수 없는 고난이도의 문항이 출제되고 있지는 않은가? -평가: 난이도를 정확히 파악하기 위해서는 각 문항별 정답률을 알아야 하지만 각 대학에서 문항별 정답률을 공개하지 않아 현직 교사의 수리논술 관련 설문으로 파악함. 그 결과 국제 수학교육대회 연수에 참가한 전국 고등학교 수학교사의 80%가 최근 출제되고 있는 수리 논술 문제가 매우 어렵다고 응답함

보도자료의 제2기준에 대한 결론과 같이, 수리논술의 난도가 지나치게 높아서 정상적인 교육과정을 이수한 학생도 풀지 못하는 것은 문제이다. 대입 수리논술을 통하여 평가해야 하는 것은 제시문과 논제에 제시된 정보와 교육과정 내에서 학습한 것을 바탕으로 논리적으로 추론하여 자신의 의견을 남에게 설득할 수 있는 능력인데, 지나치게 높은 난도로 인하여 학생들이 답안을 적어내지 못한다면 수학적 과정을 평가할 수 없기 때문이다. 그러나 위의 보도자료의 제1기준에 대한 평가2에 대해서는 재고해 볼 필요가 있다. 이에 의하면, 대학 교과 수준의 내용이 출제가 된 것이 학교 수업만으로는 대입 수리논술을 대비할 수 없다는 것의 원인이 되는 것처럼 표현되어 있다. 그러나 수리논술의 소재가 교육과정 외라는 것과 수리논술이 대학 수준이라는 것은 서로 분리하여 검토해볼 필요성이 있다. 김성우(2008)는 대입 논술고사가 고등학교 교육과정에

토대를 두지 않아 타당한 평가가 아니라는 주장은 선언적인 수준이며 실증적 연구를 통해 뒷받침되지 않았다고 말하고 있다. 김원중·황우형(2010)은 2008학년도부터 2010학년도까지의 서울 소재 7개 대학의 수시/정시 모집 수리논술 문항을 분석한 결과를 바탕으로 교육과정의 범위를 벗어난다고 해도 난도가 높지 않거나 충분한 제시문이 주어져 문제를 해결하는 데에 어려움은 없을 것이며, 문항의 난이도는 교육과정 범위 포함 여부와 별개로 판단된다고 서술했다. 이와 같은 선행연구 결과는 수리논술의 소재를 교육과정 내의 것으로 제한하는 것을 넘어서 보다 다양화시킬 수 있다는 가능성을 시사한다.

실제로, 우리나라 학생들은 한 번 제시된 문제에 대해서는 엄청난 반복 훈련을 거쳐 그 문제를 알고리즘적으로 접근해버리는 경향이 있다. 예시된 계산법과 알고리즘의 틀에 박힌 적용 훈련은 수학적 사고의 특징인 유연성과 발전적 적용 가능성은커녕 학생들의 지적 발달을 해치고 있음을 류희찬(1999)은 언급했다. 김신영(2009)도 새로운 유형의 고갈로 수능 시험 역시 암기된 사고력을 측정하는 데에 그치고 있다고 하며 고등사고능력을 측정할 수 있도록 수능 시험이 혁신되어야 함을 말하고 있다. 따라서 암기된 사고력이 아닌 진정한 의미에서의 수학적 과정을 평가하기 위해서는 학생들이 낯선 문제 상황에 놓여야 하며, 이 관점에서 소재의 다양화는 반드시 필요하다고 할 수 있다.

대입 수리논술 소재의 다양화를 위하여 교육과정 외의 소재를 활용하게 되면, 선행학습 여부가 성취도에 어떤 영향을 미칠 것인가의 문제가 생겨나게 된다. 선행학습이 수학성취도에 미치는 영향을 다룬 국내 다른 연구에 따르면 수학의 단순한 암기나 계산과 같은 낮은 수준의 단계에서는 선행학습 여부가 영향을 미칠 수 있지만 창의적 문제해결력 등과 같은 높은 수준의 단계에서는 유의미한 영향이 있다고 볼 수 없다(김선희,

2006; 홍진곤, 2008; 이세숙, 2011). 수리논술은 단순한 암기나 계산 능력이 아닌 문제해결 능력, 추론 능력, 의사소통 능력 등의 수학적 과정을 평가하기 때문에 선행학습 여부가 미치는 영향이 유의미하지 않을 것이라고 예상해볼 수 있다.

본 연구에서는 수리논술이 수학적 과정을 평가할 수 있는 적절한 평가 방법이며, 암기된 사고력이 아닌 진정한 의미의 수학적 과정을 평가하기 위해서는 학생들에게 새로운 문제 상황을 제시해야 한다는 점을 바탕으로, 대입 수리논술에서 교육과정 외의 소재를 활용할 수 있는 방안을 제안하고자 한다. 단, 연구에서 사용할 수리논술 문항은 교육과정 외의 소재를 활용하였지만, 교육과정을 이수한 고등학생에게 적정한 난이도로 제시되어야 하며, 수학적 과정을 평가할 수 있어야 하고, 선행학습 여부가 영향을 미치지 않도록 조심스럽게 설계된 것이어야 한다. 본 연구에서는 이와 같이 조심스럽게 설계된 문항에 대한 결과에 대해서만 논의했음을 분명히 한다.

구체적으로 각 장과 절에서 다룰 내용은 다음과 같다.

서론에 이어, Ⅱ장에서는 이론적 배경을 살펴본다. 1절에서는 수학적 과정 중심 평가에 대한 연구를 통하여 결과 뿐 아니라 과정에 대한 평가를 중요하게 생각하는 최근의 수학 평가 경향에 대해 살펴보고자 한다. 2절에서는 수리논술에 관한 연구들을 정리하여 수리논술의 개념과 수리논술의 평가 요소에 대해 알아볼 것이다. 3절에서는 선행학습이 수학 성취도에 미치는 영향에 대한 선행연구를 분석해보고자 한다.

Ⅲ장에서는 본 연구에서 진행할 연구 방법 및 절차를 살펴본다. 1절에서는 전체적인 연구 설계를, 2절에서는 연구 참여자 및 표집방법을, 3절에서는 본 연구의 조사도구를, 4절에서는 자료 수집 방법에 대하여 각

각 살펴본다. 특히 3절에서는 수학적 과정을 평가할 수 있고, 선행학습 여부가 영향을 미치지 않을 수 있도록 수리논술 문항을 수정하는 과정을 자세히 다루었다.

Ⅳ장에서는 본 연구의 결과를 살펴본다. 첫 번째 연구문제에 대한 결과로서 각 문항의 예시 답안을 토대로 각 문항이 어떤 수학적 과정 요소를 평가할 수 있는지 살펴볼 것이다. 또한 두 번째 연구문제에 대한 결과로서 학생들의 답안을 채점기준표에 따라 채점한 후에 그 결과를 독립표본 t-검정과 답안의 질적 분석을 통해 선행집단과 비선행집단을 비교해볼 것이다. 1절에서는 암호 문제에 대한 것을, 2절에서는 나무심기 문제에 대한 것을 다룬다. 3절에서는 본 연구에서 의도한 것은 아니지만 선행학습이 학생의 답안 작성에 부정적 영향을 미친 사례가 있어서 이것을 보고하였다.

Ⅴ장에서는 본 연구의 결론을 제시하고 향후 연구를 위한 제언을 한 후 논문을 마무리하고자 한다.

2. 연구문제

연구의 목적과 필요성에서 밝힌 바와 같이 수리논술은 수학적 문제해결 능력, 수학적 추론 능력, 수학적 의사소통 능력과 같은 수학적 과정을 평가할 수 있는 평가방법인데도 불구하고, 여러 가지 문제점이 제기되어 오고 있다. 특히 수리논술 문항에서 교육과정 외의 소재를 활용하는 것, 지나치게 높은 난도, 그로 인한 학업부담의 가중 등이 수리논술의 가장 큰 문제점으로 지적되고 있다. 교육과정 외의 소재를 활용하는 것과 지나치게 높은 난도의 문제가 서로 인과관계를 형성하면서 반드시 교육과정 내의 요소만을 소재로 해야 한다는 주장이 있다. 그러나 이 주장을

뒷받침할만한 실증적 연구는 아직 이루어지지 않았으며, 모든 주장은 선언적으로 되풀이되고 있는 실정이다. 이에 교육과정 외의 소재를 활용한 수리논술 문항이라 할지라도 학생들의 수학적 과정을 평가할 수 있도록 적절히 수정될 수 있는 가능성이 있는지, 또 적절히 수정한 문항에 대하여 선행학습 여부가 어떤 영향을 미치는지에 대해 살펴보고자 한다.

따라서 본 연구에서는 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

연구문제 1. 교육과정 외의 소재를 활용한 수리논술 문항이라도 학생들의 수학적 과정을 평가할 수 있도록 적절히 수정될 수 있는가?

연구문제 2. 적절히 수정된 문항에 대하여 선행학습 여부가 학생들의 답안에 어떤 영향을 미치는가?

Ⅱ. 이론적 배경

본 연구를 설계하고 실험을 분석하는 데에 필요한 이론적 배경으로서 첫째, 수학적 과정 중심 평가에 대한 연구를 살펴보았다. 이 연구들로부터 최근 수학교육에서 평가하고자 하는 것은 무엇이며, 그것을 평가하기 위한 문항의 형태는 무엇인가에 대해 파악하였으며, 이는 수리논술 문항을 수정하는 바탕이 되었다. 둘째, 수리논술의 개념과 의의, 수리논술에서 평가 요소를 다룬 기존의 연구들에 대하여 살펴보았다. 이것은 수리논술을 수정하고 분석할 때의 바탕이 되었다. 셋째, 선행학습의 실태와 그 효과를 다룬 기존의 연구들을 살펴보았다.

위의 모든 선행연구들은 본 연구의 연구문제 1, 2의 분석을 위한 바탕이 되었다.

1. 수학적 과정과 수학적 과정 중심 평가

우리나라 수학과 교육과정에서는 오래전부터 수학적 문제해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통 등의 수학적 과정을 강조해왔다. 이 절에서는 김도한 외(2009)의 2009년 창의 중심의 미래형 수학과 교육과정 모형 연구, 황선욱 외(2011)의 창의 중심의 미래형 수학과 교과내용 개선 및 교육과정 개정 시안 연구, 정상권 외(2012)의 2011년 과정 중심의 수학교과 평가 방안 연구를 바탕으로 하여, 수학적 과정 평가의 목적과 의의, 평가의 원리와 평가 요소 등을 살펴보았다. 이를 바탕으로 연구 도구인 수리논술 문항을 선정하고 수정했다.

1.1 수학적 과정과 수학적 과정 평가를 강조하는 배경

이미경 외(2004)에서는 PISA-2003 및 PISA-2006의 결과를 바탕으로 우리나라 학생들이 수학적 능력 중 답을 쓰고 그 답에 대한 근거나 풀이 과정을 함께 제시해야 하는 문항에서 매우 취약한 결과를 나타냈음을 제시하고 있다(김도한 외, 2009 재인용). 이에 김도한 외(2009)는 학생들이 학교에서 수학적 사고 과정을 의미충실하게 다루기 위해서는 수학적 사고 과정을 의미충실하게 경험할 수 있는 상황, 과제 등이 교과서에 수록되어야 하며, 그렇게 되기 위하여 수학과 교육과정을 개선할 필요성이 있다고 말한다. 이 방안으로서 수학과 교육과정에 '수학적 과정'을 신설하고 구체적인 성취기준을 제시할 것을 제안한다.

구체적으로 수학적 과정은 다양한 현상을 수학과 연결하고 다양한 상황에서 발생하는 문제를 해결할 때 활성화되어야 하는 수학적 능력을 의미하며, 수학적 문제해결력, 수학적 추론, 수학적 의사소통 등을 구성요소로 포함하는 개념이다(김도한 외, 2009, p.63). 교육과정 개정에 참여한 연구자들에게 실시한 설문조사 결과, 활성화 되어야 하는 수학적 능력은 PISA평가에서 강조하는 수학적 소양 또는 역량[1]과 관련이 있다(정상권 외, 2012, p.15).

1) PISA에서 제시한 수학적 소양의 정의(정상권 외, 2012, p.30 재인용)

	수학적 소양
PISA 2000	개인이 건설적이고 사려 깊고 반성적인 시민으로 현재와 미래의 삶을 살아가는 데 있어, 실세계에서 수학이 담당하는 역할을 인식하고 이해하며, 수학적으로 근거가 충분한 판단을 하고, 실세계와 수학을 관련짓는 능력(노국향 외, 2001)
PISA 2003	수학이 세계에서 담당하는 역할을 인식하고 이해하는 능력, 수학적으로 근거가 충분한 판단을 하는 능력, 건설적이고 사려 깊고 반성적인 시민으로서의 개인의 생활의 필요성을 만족시키는 방식으로 수학을 관련짓고 이용하는 능력(OECD, 2009)
PISA 2012	세계에서 수학이 하는 역할을 인식하고, 건설적이고 몰두하고,반성적인 시민으로서 필요한 근거가 충분한 판단과 결정을 만들 수 있도록 도와주는 능력으로, 다양한 맥락에서 수학을 구성하고, 사용하고, 해석하는 능력, 현상을 서술하고, 설명하고, 그리고 예측하기 위해 수학적으로 추론하고 수학적 개념, 절차, 사실, 그리고 도구를 사용하는 능력(OECD, 2011)

1.2 수학적 과정과 수학적 과정 중심 평가에 대한 국내 연구

수학적 문제해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통은 우리나라 수학교육에서 오래전부터 강조되어 오던 것이다. 우정호(2011)는 수학교육의 목적은 수학적 사고력과 논리적 사고력의 함양, 문제해결력의 함양이라고 보았다(p.3). 그 중 문제해결은 수학을 가르치고 배우는 방법이 되는 동시에 그 자체가 수학적 사고의 본질이고 수학을 배우고 가르치는 목적이며 학교 수학의 초점이다(p.6). 자신의 사고를 설명하고 정당화하며 논리적으로 추론하고 비판적으로 사고하는 것이 중요하며, 추론하는 능력이 바로 수학에 의미를 주고 수학하는 힘의 근원이 된다고 말한다(p.10). 수학적 의사소통에 대해서는 수학적인 사고를 구체적으로 그림, 표, 그래프, 말로 다양하게 표현하는 것은 수학적 사고를 의미 있게 형성시키는 데 중요하며, 언어적 표현, 의사 교환, 토론은 반성적 사고를 유발시키고 수학적 사고를 명확히 하는 데 커다란 기여를 한다고 보았다(p.9). 우리나라 수학과 교육과정에서도 수학과의 목표를 '수학적 지식과 기능을 습득하고 수학적으로 사고하고 의사소통하는 능력을 길러, 여러 가지 현상과 문제를 수학적으로 고찰하고 합리적으로 해결하는 능력을 기르며, 수학에 대한 긍정적 태도를 기른다'로 하며 수학적 과정에 대해 강조하고 있다(교육과학 기술부, 2011).

문제해결 교육을 강조하는 다양한 연구들이 이루어졌으며(김부윤, 김영숙, 2003; 김은혜, 박만구, 2011; 김우현, 송상헌, 2009; 김영숙, 방정숙, 2009; 조주연, 백석윤, 2008; 고상숙, 전성훈, 2009; 백대현, 이진희, 2010), 추론 능력을 강조하는 다양한 연구들이 이루어져왔으며(이종희, 김선희, 2002; 전평국, 김은희, 김원경, 2002; 서동엽, 2003; 송상헌, 강은희, 박은정, 허지연, 2004), 다른 요소에 비해 역사가 길지는 않지만 의사소통 능

력 역시 다양한 연구들이 이루어져 왔다(이종희, 김선희, 채미애, 2001; 이종희, 김선희, 2003; 김상화, 방정숙, 2010; 김연주, 나귀수, 2009; 박미혜, 방정숙, 2009; 홍우주, 방정숙, 2008).

이와 같이 수학적 과정이 수학과 교육과정 및 수학교육 연구에서 다양하게 이루어졌음에도 불구하고, 교육과정, 교과서, 수업에서는 수학적 문제해결, 추론, 의사소통이 실질적으로 다루어지지 못하고 있다는 비판이 계속 제기되어 오고 있다(정상권 외, 2012, p.6). 김도한 외(2009)는 교육과정 상의 목표와 교수·학습방법에서 선언적으로만 강조될 뿐, 학생들에게 적극적으로 그리고 명확하게 지도되지 않는 한계가 있음을 지적하였다. 이종희, 김선희(2002) 는 수학적 추론 교육이 같은 맥락에서 실효성을 거두지 못하고 있으며, 김상화, 방정숙(2010)은 수학적 의사소통 교육이 같은 맥락에서 실효성을 거두지 못하고 있음을 지적하였다(정상권 외, 2012, p.6 재인용).

이에 따라 김도한 외(2009)에서는 교육과정 내에 수학적 과정을 포함시킬 것을 제안함으로써 수학적 과정을 강조해야 함을 견고하게 하였다. 황선욱 외(2011)는 이의 후속 연구로 선행 연구를 기반으로 하여 몇몇 사안을 발전적으로 수정·보완하여 다음과 같이 수학적 문제해결, 수학적 추론, 수학적 의사소통의 의미와 각각의 성취기준을 제시하였다.

<표 Ⅱ-1> 수학적 과정의 의미와 성취기준(황선욱 외, 2011)

1) 수학적 문제해결
가. 주어진 문제의 해결에 필요한 정보를 확인 또는 보완하고 적절한 전략이나 사고과정을 활용하여 문제를 해결할 수 있다.
나. 수학적인 방법으로 문제해결의 과정과 결과의 타당성을 설명할 수 있다.
다. 문제해결 과정이나 완결 후 문제제기를 통하여 문제해결을 발전적으로 이끌 수 있다.

라. 문제해결에서 얻은 결과와 사용된 전략을 일반화하여 새로운 문제 상황에 적용할 수 있다.

2) 수학적 추론
가. 수학적 추측이나 주장을 만들고, 수학적 지식에 근거하여 정당화할 수 있다.
나. 수학적 아이디어나 사고 과정을 수학적으로 검증할 수 있다.
다. 다양하고 독창적인 아이디어를 통하여 수학적으로 추론할 수 있다.

3) 수학적 의사소통
가. 수학적인 방법을 활용하여 자신의 생각을 논리적으로 정확하게 표현하고, 다른 사람을 이해시킬 수 있다.
나. 자신의 수학적인 생각을 다른 사람과 주고받는 활동의 중요성을 인식하고, 이를 통하여 자신의 생각을 개선시킬 수 있다.
다. 다른 사람의 수학적 아이디어나 사고과정을 이해하고 평가할 수 있다.

정상권 외(2012)는 2011 개정 수학과 교육과정에서 제시하고 있는 수학적 과정의 목적과 의미, 수학적 과정 평가 원리, 수학적 과정 평가 기준을 제시함으로써, 수학적 과정의 평가 방안을 구체화하였다. 다음 절에서는 구체적으로 정상권 외(2012)에서 제시한 수학적 과정의 목적과 의미, 수학적 과정 평가 원리, 수학적 과정 평가 기준에 대하여 살펴본다.

1.3 수학적 과정 중심 평가의 관점

정상권 외(2012)에서는 다음과 같이 수학적 과정 평가의 의미를 제시하고 있다(pp.40-41).

교사와 학생의 내적인 동기를 강화하여 수학 교수-학습을 촉진하는 것을 목적으로 하는 평가로서, 문제해결, 추론, 의사소통에 관련된 하위 능력 요소에 대한 세부적인 정보를 서술형 또는 수행 평가 형태의 문항을 사용하여 파악하는 것

기존의 수학과의 평가가 '서열화'나 '선발'에 목적으로 하고 있어서 평가의 또 다른 목적인 바람직한 의미에서의 수학 교수-학습을 촉진하는 것이 어려웠음을 지적하며 평가 과정과 결과를 통하여 교사와 학생의 내적 동기를 강화해야 함을 강조하고 있다. 또한 수학적 과정을 '문제해결, 추론, 의사소통'의 세 요소로 제시하면서, 수학적 창의성과 수학의 정의적 영역은 제외시켰음을 명시하고 있다. 또한 수학적 과정의 구성 요소에 대한 하위 능력요소는 문항마다 독립적으로 평가될 수 없기 때문에, 하나의 문항을 통해 통합된 형태로 평가하기 위하여 선다형과 단답형이 아닌 서술형 또는 수행평가의 형태로 문항의 유형을 정하였다.

또한 수학적 과정 중심 평가를 계획하고 실행함에 있어 고려해야할 원리로 다음과 같이 네 가지를 제시한다(pp.42-43).

첫째, 진정성의 원리(principle of authenticity)는 수학적 과정 평가의 궁극적인 목적은 교수-학습의 내적 동기 강화가 되어야 한다는 것이다. 따라서 수학적 과정의 세 요소인 문제해결, 추론, 의사소통에 근거한 수학 교수-학습이 반영되어야 하고 다시 평가 결과를 토대로 문제해결, 추론, 의사소통에 근거한 수학 교수-학습이 촉진되도록 해야 한다.

둘째, 배경화의 원리(principle of contextualization)는 고립된 내용 지식을 단순히 재생하는 것이 아니라 배경화된 문제를 해결하기 위해 관련된 내용과 행동을 적절하게 통합할 수 있는가에 초점을 두는 것이다. 이 때 배경화는 실생활이나 타 교과와의 연결을 시도하는 수학 외적 연

결에 따른 배경화와 수학 영역 사이의 관련성을 기반으로 하는 수학 내적 연결에 따른 배경화를 모두 의미한다.

셋째, 구성의 원리(principle of construction)는 학습자 스스로 문제해결, 추론, 의사소통에 관련된 학습자 나름의 해석과 표현을 구성하도록 하고, 그 내용과 결과를 평가하는 것이다. 따라서 비표준적인 해석이나 표현일지라도 공유된 수학적인 의미가 있다면 인정하는 방식으로 평가 문항을 설계하고 적용한다.

넷째, 기본의 원리(principle of fundamenatal)는 교수-학습 과정 중 기본적인 것 또는 핵심적인 것을 대상으로 한다는 것이다. 따라서 어렵기만하고 기본을 벗어난 응용문제가 아니라 기본 개념과 절차를 그 본래 의미에 맞게 학습했는지 여부를 가늠하기 위한 문제로 평가를 실행해야 한다.

문제해결, 추론, 의사소통 각각에 대하여 학생들이 드러낼 것으로 가정하는 세부적인 구성 요소는 다음과 같으며, 이는 국내외 연구와 교육과정 개정팀의 입장을 고려하여 도출한 것이며, 이후 실행을 통해 수정될 가능성이 있음을 언급하고 있다(pp.43-44).

<표 Ⅱ-2> 수학적 과정의 하위 능력(정상권 외, 2012)

수학적 과정	수학적 과정의 하위 능력	약어
문제해결	실세계에서 수학적 문제를 찾고 구성하는 능력	P1
	다른 교과 관련 상황에서 수학적 문제를 찾고 구성하는 능력	P2
	문제를 수학적 기호, 그림을 사용하여 표현하는 능력	P3
	문제해결에 필요한 조건의 확인 또는 보완 능력	P4
	문제해결에 적절한 형태로 표현을 변환하는 능력	P5
	문제해결에서 사용되는 개념들 간의 연결성을 인식하고 활용하는 능력	P6
	문제해결에서 적절한 전략을 활용하여 문제를 해결하는 능력	P7
	문제해결 과정과 결과의 타당성을 수학적인 방법으로 점검하는 능력	P8
	문제해결을 위한 다양한 방법을 찾는 능력	P9
	관련된 문제를 만드는 능력	P10
	문제해결 전략 또는 결과를 새로운 문제에 적용하는 능력	P11
	실세계 상황에서 주어진 문제를 해결하는 능력	P12
	다른 교과 상황에서 주어진 문제를 해결하는 능력	P13
추론	수학적 관계를 파악하는 능력	R1
	수학적 관계를 찾아 표현하는 능력	R2
	수학적으로 추측하는 능력	R3
	수학적 추론에 근거한 정당화 능력	R4
	수학적 추론 과정을 점검하는 능력	R5
	추론 과정과 결과를 해석하거나 평가하는 능력	R6
	추론 과정과 결과를 변환하거나 확장하는 능력	R7
의사소통	수학적 표현을 이해하고 사용하는 능력	C1
	자신의 문제해결 또는 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력	C2
	자신의 문제해결 또는 추론 과정을 반성적으로 점검하여 표현하는 능력	C3
	다른 사람의 문제해결 또는 추론 과정에 대한 설명을 해석하거나 평가하여 표현하는 능력	C4
	문제해결 또는 추론 과정을 수학적인 언어로 표현하는 능력	C5
	문제해결 또는 추론 과정의 표현을 다른 방식으로 변환하는 능력	C6
	문제해결 또는 추론 과정의 표현을 확장 또는 일반화하는 능력	C7

2. 수리논술

2005년 교육부 고시 《논술고사 기준 및 심의 계획》에 따르면 논술고사란 제시된 주제에 관하여 필자의 의견이나 생각을 논리적으로 서술하도록 하는 시험으로서, 주어진 지문 등에 대한 이해력, 분석력, 비판적 사고력, 사고내용에 대한 논리적 서술력 등 종합적인 문제해결 능력을 평가하는 것이다. 대학 수학능력 시험 역시 고등학교까지의 수학 학습을 통해 습득한 수학의 기본 개념·원리·법칙을 이해하고, 이를 적용하여 계산하고 추론하며 문제를 해결하는 능력을 평가함으로써 대학 교육을 받는 데 필요한 수학적 사고력을 측정하는 시험이지만, 추론능력이나 문제해결 능력은 선다형, 단답형의 형태로는 평가하기가 어렵다[2]. 성태제(1999)에 따르면 산업사회로 진입하면서 평가결과의 타당도보다는 신뢰도를 강조하게 되고, 신뢰도를 높이기 위하여 선택형 문항에 의하여 지적 능력을 측정하게 되는데, 이러한 경우 인간 능력의 거시적인 평가보다는 미시적인 평가를 하게 되고, 선택형 문항에 의한 미시적 평가는 개인의 특성을 전체적으로 조망하기 어렵고 정답 여부에 관심이 있으므로 문제해결 과정을 측정하지 못하는 단점이 있다. 수리논술은 이와 같은 점을 보완하기 위한 평가 방법으로 주목받았으며 이에 대한 연구도 다수 이루어졌다.

기존의 수리 논술에 관한 연구들은 크게 두 가지로 나누어 볼 수 있다. 첫 번째는 수리논술의 정체성에 관한 연구로 김정빈(2012)은 프랑스

2) 2013학년도 대학수학능력시험 대비 학습방법안내(한국교육과정평가원, 2012)에는 다음과 같이 명시되어 있다.

> 추론 능력에 대한 평가는 문제 풀이 과정에 대한 직접적인 관찰이 필요하고 5지선다형이나 단답형 문항으로는 평가하기 어려우므로, 문제해결에서 추론적 사고가 결정적인 요인이 되는 문제를 통해 간접적으로 추론능력을 평가한다. 증명 능력은 증명과정을 응시자가 직접 제시할 수 없으므로 증명과정을 이해하는 능력으로 대체하여 평가한다.

의 바깔로레아와 우리나라 논술 시험을 비교함으로서 우리나라 논술 시험의 정체성에 대해 파악하려 하였고, 표성수(2011)는 논란의 원인을 수리논술의 정체성이 모호하기 때문으로 보고, 문항 분석, 채점기준에 대한 고찰을 통해 수리논술의 정체성을 밝히려고 시도하였으며, 백지연(2010)은 대학수학능력 시험과 수리논술을, 김원중, 황우형(2011)은 학교내신시험, 대학수학능력시험과 수리논술을 비교함으로써 수리논술의 정체성을 파악하려 하였다. 두 번째는 수리논술의 지도법에 관련한 연구로 이영주(2010)는 폴야의 문제해결방법론과 연계하여 수리논술을 지도할 수 있다고 하였고, 박정호(2009)는 통합형 교과서와 연계한 수리논술의 지도를 제안하였다. 이외에도 많은 연구들이 수리논술의 지도 방안에 대하여 다루었다(김성호, 2009; 최인숙, 2007; 이햇님, 2011; 양성기, 2009; 손상원, 2010; 박현호, 2007; 송인숙, 2009, 서광윤, 2012; 이휘인, 2010; 이인영, 2007; 이현영, 2011; 고영희, 2008; 서상조, 2009; 박병용, 2008; 엄태희, 2011; 심집중, 2009; 김영화, 2010; 박주영, 2008).

이와 같은 기존연구를 통하여 이 절에서는 수리논술의 정체성에 대한 연구를 바탕으로 수리논술의 개념에 대하여 정리하고, 수리논술의 정체성과 지도에 대한 연구를 바탕으로 학교 내신 시험과 대학 수학 능력시험에서와 차별화되는 수리논술만의 평가요소가 무엇인지에 대하여 살펴볼 것이다. 이를 통해 문항 수정과 답안 분석에의 시사점을 얻을 수 있을 것이다.

2.1 수리 논술의 개념

2005년 교육부 고시 《논술고사 기준 및 심의 계획》에 따르면 논술고사란 제시된 주제에 관하여 필자의 의견이나 생각을 논리적으로 서술

하도록 하는 시험으로서, 주어진 지문 등에 대한 이해력, 분석력, 비판적 사고력, 사고내용에 대한 논리적 서술력 등 종합적인 문제해결 능력을 평가하는 것이다. 박제남(2011)은 학교 수학에서 배운 지식을 바탕으로 자신의 주장을 정당화하는 글쓰기로 정의하였다. 그에 의하면 수리논술에는 교과내용을 바탕으로 한 정리를 증명 또는 계산하기, 실험이나 활동지를 통하여 패턴을 예측하고 증명하기, 사회적 합의의 규칙을 설명하기, 자연현상이나 사회현상을 설명하고 예측하기, 수학・과학을 인문학적으로 이해하기 등이 있다. 김영숙, 방정숙(2009)은 서술형, 논술형 평가를 학생으로 하여금 출제자가 제시한 답을 선택하도록 하는 평가 방식이 아니라, 학생의 생각이나 의견을 직접 서술하도록 하여 학생의 창의력, 문제해결력, 비판력, 판단력, 통합력, 정보 수집력 및 분석력 등 고등 사고능력을 평가하기 위한 평가 방식으로 정의하였다. 김원중, 황우형(2010)은 수리논술을 대학입학시험의 하나인 논술고사로 이해하였으며, 논술고사란 대학입학을 희망하는 응시자들의 고차적인 사고능력(표현력, 조직력, 종합력, 추리력, 창의력 등)을 평가하고자 특정 교과목의 내용에 구애받지 않는 소재(탈교과적, 범교과적) 중에서 주제를 선정하여 논문형 형태로 출제, 채점되는 고사로 보았다.

이를 간단히 표로 정리해보면 다음과 같다.

<표 Ⅱ-3> 수리논술의 의미

교육부(2005)	제시된 주제에 관하여 필자의 의견이나 생각을 논리적으로 서술하도록 하는 시험
박제남(2011)	학교 수학에서 배운 지식을 바탕으로 자신의 주장을 정당화하는 글쓰기
김영숙, 방정숙(2009)	학생으로 하여금 출제자가 제시한 답을 선택하도록 하는 평가 방식이 아니라, 학생의 생각이나 의견을 직접 서술하도록 하여 학생의 창의력, 문제해결력, 비판력, 판단력, 통합력, 정보수집력 및 분석력 등 고등 사고 능력을 평가하기 위한 평가 방식
김원중, 황우형(2010)	대학입학시험의 하나인 논술고사, 대학입학을 희망하는 응시자들의 고차적인 사고능력(표현력, 조직력, 종합력, 추리력, 창의력 등)을 평가하고자 특정 교과목의 내용에 구애받지 않는 소재(탈교과적, 범교과적) 중에서 주제를 선정하여 논문형 형태로 출제, 채점되는 고사

이를 종합해보면 수리논술은 학생이 직접, 제시된 주제에 관한 자신의 의견이나 생각을, 학교 수학에서 배운 지식을 바탕으로 적어내는 것이며, 고차적인 사고 능력(표현력, 조직력, 종합력, 추리력, 창의력, 비판력, 판단력, 통합력, 정보수집력 및 분석력)을 평가하기 위한 시험이라고 할 수 있다.

수리논술은 선발을 위한 평가라는 발생적 문제점을 갖고 있다. 그러나 박정호, 권혁진(2009)에 따르면 대학입시에 치우진 수리논술 교육은 답안 작성 요령에 초점이 맞추어져 수동적인 교육 형태를 가져오며, 입

시 정책에 따라 방향이 크게 변동되기 때문에 교육적 의미를 상실할 수도 있다. 따라서 수리논술의 개념은 수학교육의 본질적 목적과 관련지어 논의되어야 한다.

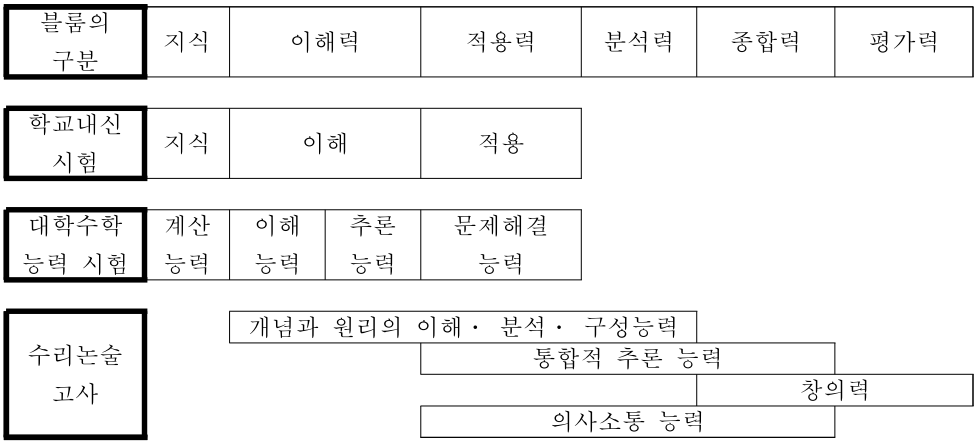
1.2 수리논술의 평가 요소

수리논술에서 어떤 요소를 평가해야 하는가에 대한 것은 문항을 출제할 때, 그리고 학생의 답안을 분석할 때 가장 중요한 요소이다. 이 절에서는 기존의 연구를 바탕으로 내신시험, 대학 수학능력 시험과 구분되는 수리논술의 평가 요소를 '수학적 추론 능력, 주어진 정보를 활용한 새로운 정보의 창출 능력, 정당화를 위한 글쓰기 능력'으로 뽑아낼 수 있으며, 이것을 더 세분화한 것이 앞에서 살펴 본 수학적 과정 중심 평가의 하위요소임을 정당화할 것이다.

김원중, 황우형(2010)은 블룸의 이원목적분류표를 갖고 수리논술의 평가 요소를 분석하였다. 내용요소는 기존의 평가에서처럼 교육과정이나 교과서에 제시되어 있는 단원구성을 기준으로 하였다. 행동목표는 블룸의 교육 목표의 3가지 영역인 인지적 영역(cognitive domain), 정의적 영역(affective domain), 운동기능적 영역(psychomotor domain) 중 인지적 영역에 대한 하위 범주인 지식(knowledge), 이해력(comprehension), 적용력(application), 분석력(analysis), 종합력(synthesis), 평가력(evaluation)을 서울대학교 채점기준표의 평가항목을 참고하여 블룸의 것과 비교하여 제시하였다. 학교 내신 시험과 대학수학능력 시험의 경우에는 블룸의 것과 비교하여 분류를 따로 할 필요가 없었지만 수리논술 문항의 범주는 서로 일치하지 않음을 보고 다음과 같이 학교 내신 시험, 대학수학능력시험과 함께 제시한 수리논술고사의 행동영역 평가요소를

제시하였다.

<표 Ⅱ-4> 수리논술의 행동영역 평가요소(김원중, 황우형, 2010)



이를 통하여 보았을 때, 학교 내신시험, 대학수학능력시험과 비교하여 수리논술고사는 기존의 평가 요소로는 평가하기 곤란한 부분이 존재하며, 특히 다른 두 시험에 비하여 적용력, 분석력, 종합력, 평가력 등의 보다 고차원적인 사고를 평가할 수 있다. 이 중 창의력 항목은 정상권 외(2012)에서와 같은 입장[3]에서 문제해결 능력, 수학적 추론능력, 의사소통 능력 등의 수학적 과정요소의 상위요소라고 생각하고 그것을 직접 평가하는 것은 지양할 것이다. 그렇게 되면 김원중, 황우형(2010)의 평가요소는 '개념과 원리의 이해· 분석· 구성 능력, 통합적 추론 능력, 의사소통 능력'이다. 첫 번째 평가 요소인 개념의 원리의 이해·분석·구성능력은 제시문에 드러나 있는 정보들과 학생이 교과 과정을 통해 습득한 정보를 바탕으로 그들의 연결성을 인식하여 문제해결에 필요한 새로운 정

3) 정상권 외(2012)에서는 수학적 창의성과 관련하여 수학적 창의성은 전혀 새로운 수학교육의 목표가 아니려 김도한 외(2009)는 수학적 창의성이 수학적 과정요소를 포괄하는 개념인 동시에 상위개념임을, 황선욱 외(2011)에서는 수학적 과정의 능력이 종합적으로 형성하는 상위 수준의 능력으로 설명된 점을 바탕으로 하여 수학적 창의성을 평가에 반영하기 어렵다고 판단하였다. 따라서 정상권 외(2012)에서는 '새로운 지식의 창안'이나 '새로운 표현 방법의 창안'등 수학적 창의성을 직접적으로 평가하는 것에는 신중한 입장을 취할 것이라고 밝히고 있다(p.37-38).

보를 창출하는 능력으로 볼 수 있다. 이는 '주어진 정보를 활용한 새로운 정보의 창출 능력'으로 다시 쓸 수 있다. 이는 특히 수학적 과정 중심 평가 하위요소 중 문제해결에서 사용되는 개념들간의 연결성을 인식하고 활용하는 능력(P6), 수학적 관계를 파악하는 능력(R1), 수학적 관계를 찾아 표현하는 능력(R2) 등 연결성, 관계를 중시하는 하위요소들에 해당된다. 두 번째 평가 요소인 통합적 추론 능력은 '수학적 추론 능력'으로 다시 쓸 수 있으며 한국교육과정평가원(2012)의 평가 목표에서 말하는 추론능력과 같은 개념으로서, 발견적 추론능력, 연역적 추론 능력을 포함하는 개념이다. 특히 추론능력과 증명능력은 5지선다형, 단답형의 형식에서는 평가할 수 없으므로 수학능력시험에서는 간접적으로 평가하였는데, 수리논술에서는 이를 직접 평가할 수 있다[4]. 이것은 수학적 과정 중심 평가의 하위 요소 중 수학적 추론 능력의 세부 항목들에 해당한다. 세 번째 평가 요소인 의사소통 능력 역시 대학수학능력시험에서와는 달리 수리논술에서는 직접 평가할 수 있으며, 수학적 표현을 이해하고 올바르게 사용하는 능력(C1), 자신의 문제 해결 또는 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력(C2), 문제해결 또는 추론 과정을 수학적인 언어로 표현하는 능력(C5) 등을 의미한다. 이는 '정당화를 위한 글쓰기 능력'으로 바꾸

4) 한국교육과정평가원(2012)에는 이것을 다음과 같이 설명하고 있다.

추론능력은 발견적 추론 능력과 연역적 추론 능력으로 구분된다. 발견적 추론 능력은 나열하기, 세어보기, 관찰 등을 통해 문제해결의 핵심원리를 발견하는 능력, 유추를 통해 문제해결의 핵심 원리를 발견하는 능력을 의미한다. 연역적 추론 능력은 수학의 개념・원리 ・ 법칙을 이용하여 참인 성질을 이끌어 내거나 주어진 명제의 참・ 거짓을 판별하는 능력, 주어진 정의를 이해하고 참인 성질을 이끌어내는 능력, 반례를 들어 주어진 명제가 거짓임을 판단하는 능력 등을 의미한다. 연역적 추론 능력의 대표적인 것이 증명능력으로 조건 명제의 증명, 삼단논법에 의한 논리적 추론, 반례에 의한 증명, 모순법, 동치명제의 증명, 수학적 귀납법에 의한 증명 등을 이해하는 능력과 주어진 증명을 읽고 결론을 도출하는 능력 등이 이에 해당한다. 추론능력에 대한 평가는 문제풀이 과정에 대한 직접적인 관찰이 필요하고 5지선다형이나 단답형 문항으로는 평가하기 어려우므로, 문제해결에서 추론적 사고가 결정적인 요인이 되는 문제를 통해 간접적으로 추론능력을 평가한다. 증명 능력은 증명과정을 응시자가 직접 제시하도록 할 수 없으므로 증명과정을 이해하는 능력으로 대체하여 평가한다.

어 표현할 수 있다.

박제남(2011) 역시 블룸의 분류에 근거하여 다음과 같이 수리논술 문항의 평가목표를 분류하고 있다.

<표 Ⅱ-5> 수리논술의 행동영역 평가요소(박제남, 2011)

하위 영역	설명	목표예시
지식 (knowledge)	제시문에서 다루는 이미 배운 내용에 대한 기억	지문과 논제에서 사용되는 용어의 정의를 알고 있다.
이해 (comprehensive)	제시문의 의미를 파악하고 해석	지문과 논제에서 다루는 내용을 이해하고 있다.
적용 (application)	논제가 요구하는 방향으로 제시문을 활용하는 능력	논제를 해결하는데 필요한 내용을 제시문에서 찾아 활용할 수 있다.
분석 (analysis)	제시문에서 제공된 내용을 이해하고 재결합하는 능력	학교수학에서 배운 지식과 제시문에서 제공한 내용들을 재결합하여 적용하고 새로운 결과를 도출할 수 있다.
종합 (synthesis)	논제가 요구하는 내용을 해결하고 수식과 문장으로 완성하는 능력	논제에서 요구하는 내용을 논리적으로 서술하고 증명한다.
평가 (evaluation)	완성된 논제풀이에 대한 가치판단 능력	논제에서 요구한 내용의 가치를 판단할 수 있다.

이 중 지식은 제시문과 논제에서 다루는 내용을 기억하는 능력으로 수리논술 평가의 가장 낮은 수준의 행동이며, 이해, 적용, 분석은 각각 제시문에 주어진 내용의 의미의 연결성을 파악하고, 그것을 재결합하는 것으로 보고 있으며, 종합은 이를 논리적으로 서술하는 것을 의미한다. 이해, 적용, 분석은 주어진 정보를 갖고 새로운 정보를 창출하는 능력을 말하고 있으며, 종합은 수학적 추론 능력을 의미한다. 위의 평가 요소 분

류에는 수학적 표현을 사용하는지 등에 관한 '정당화를 위한 글쓰기 능력'은 따로 서술되어 있지 않다.

수리논술의 평가 요소를 다룬 기존의 연구를 살펴봄으로써 다음과 같은 점에 이를 수 있다. 첫째, 수리논술은 블룸의 교육목표에서 학교내신 시험이나 대학수학능력 시험보다는 더 높은 수준의 사고를 평가하는 시험이다. 둘째, 수리논술의 평가 요소는 '수학적 추론 능력, 주어진 정보를 바탕으로 한 새로운 정보의 창출 능력, 정당화를 위한 글쓰기 능력'으로 요약하여 정리할 수 있다. 셋째, 위의 세 가지 평가 요소는 모두 수학적 과정을 평가하는 것으로 정상권 외(2012)의 수학적 과정 중심 평가 하위 요소의 것들로 세분화하여 생각할 수 있다.

3. 선행학습의 영향

최근 교육 경쟁이 심화되면서 과잉교육열에 의해 사교육비가 증가하고 있다. 사교육의 실태를 다룬 이종태(2002)의 연구에 따르면 서울특별시의 경우 2001년 당시 수학이 74.2%, 영어가 67.9%, 국어가 52.9%로 수학과목의 사교육 비율이 가장 높음을 알 수 있다. 사교육의 주된 흐름은 학교에서 가르치는 진도보다 앞서 배우는 '선행학습'이며, 선행학습의 효과 및 문제점에 대한 연구들이 많이 이루어져 있다.

지금까지 이루어진 수학 선행학습에 대한 선행연구는 대부분이 선행학습의 실태를 다루고 있거나(김혜영,2009; 김선희, 2006; 김은정,2011), 학습흥미도, 수학학습태도, 학습동기, 자아개념 등 수학 학습의 정의적 측면에 미치는 영향을 다룬(김혜영, 2009; 권애영,2009; 박준일,2011; 정기자, 2002) 연구들이었다. 이들 연구에 따르면, 수학에서의 선행학습은 많이 이루어지고 있으며, 그것이 수학학습의 정의적 측면에 미치는 영향은

선행학습 후 학교수업 내용에 대해 친근감을 느끼게 되는 장점이 있지만(김선희, 2006), 그 반면 수학에 대한 흥미가 떨어져 수학 시간에 다른 공부를 하게 되고(김선희, 2006), 능동적 학습태도가 낮아지게(김혜영, 2009)되는 단점이 있다.

선행학습이 수학 성취도에 미치는 영향을 살펴본 연구는 김선희(2006), 홍진곤 외(2008), 이세숙(2011)등이 있다. 김선희(2006)에 따르면 중학교 1학년 학생들 중 선행학습 집단과 비선행학습 집단 사이의 수학 성취도의 영향은 하위권의 경우에는 선행학습 집단의 성적이 향상되는 결과를 냈는데, 이는 단기 선행학습을 통해 반복학습을 하게 되고 많은 문제를 다루었기 때문이다. 그러나 중, 상위권 학생의 경우에는 선행학습 집단과 비선행학습 집단의 성적의 차이가 거의 없었음을 관찰할 수 있었다. 초등학교 수학영재를 대상으로 수학교과 선행학습 정도와 수학 창의적 문제해결력의 관계를 다룬 홍진곤(2008)의 연구에서도, 두 집단의 정규교육과정에 근거한 학업 성취도는 모두 높게 나와서 선행학습 유무가 별다른 변별력을 보여주지는 못했으며, 수학 창의적 문제해결력 검사에서도 역시 유의미한 영향을 주지는 못했다. 이세숙(2011)의 연구에서는 수학영재의 경우 선행학습 유무가 별다른 영향을 주지 못했고, 일반학생의 경우에는 초등학교 중학교까지는 선행학습을 한 학생의 성적이 조금 더 상승하는 것 같았지만 학년이 올라갈수록 오히려 뒤처지는 결과를 낳았다고 말하고 있다.

타교과에서는 이를 주제친숙도(topic familiarity)로 보고, 그것이 성취도에 어떤 영향을 주는가에 대한 연구가 다수 이루어졌다. 지슬기(2012)는 영어 독해에서 주제 친숙도와 영어 능력과의 관계에 대해 다루었다. 학습자들은 친숙하지 않은 주제를 접할 때 글의 난이도가 더 높다고 생각하는 경향이 있었지만, 학습자의 체감 난이도가 글에 대한 이해도와

항상 일치하지는 않았음을 Perez와 Shoham(1990), 조은숙(2002), 오성록과 정순영(2009)의 연구로부터 결론 내렸으며, 실제 실험 연구를 통해서도 같은 결론을 내렸다.

선행 지식이 유의미한 영향이 없음을 보이는 연구 뿐 아니라 부정적인 영향을 미친다는 연구결과도 있다. 성인학습자를 대상으로 선행지식이 성취도에 미치는 영향에 대한 연구를 한 Jarvis(2001)의 결과에 따르면 성인학습자들은 축적된 경험과 새로운 학습 경험의 불일치한 상황에서 혼란과 불안을 겪고, 이 때 자신에게 익숙한 것을 선택함으로써 새로운 것을 학습할 수 있는 기회를 버리는 경향이 있다(Jarvis, 2001;전신영, 유기웅, 2011 재인용). 이는 선행학습이 후행학습을 방해하는 것으로 순행간섭(Proactive Interhibition)으로 해석될 수 있다.

위와 같은 선행연구를 기반으로 할 때, 선행학습 여부가 수학 학습에 미치는 영향은 장단점이 있으며, 수학 성취도에 있어서 수학의 낮은 단계에서는 영향을 미칠 수 있지만 일반학교 상위권이나 영재학생의 문제해결력 등에는 유의미한 영향을 미치지 못한다는 것을 확인할 수 있었다. 수리논술에서 평가하고자 하는 항목은 단순한 이해력, 암기력이 아니라 수학적 추론능력, 주어진 정보를 바탕으로 새로운 정보를 창출하는 능력, 정당화를 위한 글쓰기 능력 등의 보다 고차적 사고능력이므로 수리논술에 선행학습 여부가 미치는 영향을 유의미하지 않을 수 있을 것이라 생각해볼 수 있다. 이와 관련하여 본 연구에서는 교육과정 외의 소재를 활용한 수리논술 문항을 수학적 과정을 평가할 수 있고, 선행여부가 영향을 미치지 않을 수 있도록 수정한 경우, 문항 관련 선행학습 여부가 학생의 수리논술 답안에 어떤 영향을 미치는지에 대해 살펴보고자 한다.

Ⅲ. 연구방법 및 절차

1. 연구 설계

본 연구는 고등학교 교육과정 외의 소재를 사용하였지만 수학적 과정을 평가할 수 있고 선행학습 여부가 영향을 미치지 않도록 수정한 수리논술 문항을 도구로 하여, 선행학습을 한 학생과 그렇지 않은 학생의 답안을 분석할 것이다. 분석을 통하여 첫째, 수정된 문항이 학생의 수학적 과정을 평가할 수 있는가, 둘째, 수정된 문항에 대하여 선행학습을 한 학생과 그렇지 않은 학생의 답안에서 성취도의 차이가 나타나는가를 살펴보고자 한다.

수리논술은 중상위권 대학에서 대입 평가 방법으로 활용되고 있으며, 실제로 단순한 계산 능력, 이해능력이 아닌 수학적 문제해결력, 수학적 추론 능력, 수학적 의사소통 능력 등의 높은 수준의 사고능력을 평가하고자 하므로 중상위권 학생들을 대상으로 실험을 설계하였다. 또한 수학적 과정을 평가하기 위해서는 일단 학생이 작성한 답안이 있어야 하는데, 몇몇 기출 문제들은 난도가 고등학생이 해결하기에는 지나치게 높아 학생들이 답안을 작성하지 못하는 문제점이 있어서 이를 적절한 난도로 학생들에게 제시하고자 하였다. 또한 선행학습을 한 적이 없는 학생의 경우 대학 소재를 활용한 논술 문항임을 미리 알려주었을 때 자신이 선행한 학생에 비해 불리한 위치에 있다는 막연한 두려움이 들 수 있기 때문에 연구 목적은 답안 작성이 끝난 후 제시하였다. 이를 정리하면 다음과 같다.

첫째, 수리논술이 대입 평가 요소로 사용되고 있는 중상위권 대학을 지원할 수 있는 중상위권 학생을 연구 참여자로 선정하였다. 본 연구에서 선정한 학생은 일반 고등학교 2학년 자연계의 학생 중 수학 성적이 3등급 이내인 학생들이다.

둘째, 연구에 사용된 문항은 기존에 수리논술로 출제된 적이 있는 문항 중에서 교육과정 외의 요소를 소재로 한 것으로 선정하였다. 그러나 기존 문항이 통합형으로 제시되어 학생들이 답하지 못한 부분이 존재하여, 이를 단계형으로 제시하여 각 소논제에 대하여 답할 수 있도록 수정하였다[5]. 문항을 단계형으로 수정하는 과정을 통해 난도를 적절하게 조정할 수 있었으며 구체적인 내용은 3절에서 다루었다. 기출 수리논술 문항 중 교육과정 외의 소재를 사용한 문항 중에서, 서로소, 약수, 배수 등의 고등학교 교육과정과 관계되며 논리적 사고력을 요하는 문제로 암호 문제와 나무심기 문제를 최종 선정하였다[6]. 암호 문제는 2008학년도 한양대학교 수시 2학기 기출문제이고, 나무심기 문제는 2011학년도 홍익대학교 수시 기출문제이다. 이 두 문항을 단계형으로 수정한 후에 예비 검사를 진행하였다. 예비 검사 결과 학생들이 공통적으로 어려움을 겪는 논리적 비약 단계를 파악할 수 있었고, 이것을 이용하여 기존 논제를 더 작은 논제로 분할하여 질문함으로써 난도를 낮추었다. 단계형으로 낮추는 것 외에도 기존의 제시문 중 명확치 않은 부분이 있다면 제시문의 일부를 수정하기도 하였으며, 선행학습 여부의 효과를 낮추기 위하여 기존 문제에 사용한 기호를 바꾸었다. 보다 구체적인 내용은 3장에서 다루었다.

셋째, 대학 소재를 다룬 논술 문항이라는 점이 선행학습을 하지 않은

5) 정상권 외(2012), p.84

통합형 문항	전형적인 상황 문제로 문제를 해석하고 적절한 수학적 표현이나 관계를 이용하여 해결하고, 추론하고, 명확하게 설명하는 등 수학적 과정을 종합적으로 드러내는 형태
단계형 문항	문제 상황을 몇 개의 단계로 나누어 제시하는 형태로, 문제를 이해하지 못하거나 적절한 해결 전략을 선택하지 못하는 학생들에게 어느 정도의 방향을 제공하되, 각 단계 내에서는 수학적 과정에 관련된 능력을 발휘하도록 하기 위한 것

6) 문항 선정 및 수정은 연구자가 참여한 정책과제인 2012년 창의적 평가의 대학입시 적용 기반 조성 연구팀의 수리논술 분과에서 함께 작업하였다. 최종 선정된 두 문항은 원래 수학적 과정 평가의 적용 과제에서 적용 및 분석에 사용될 계획이었으나 교육과정 외의 요소를 포함하고 있다는 이유로 제외되었다. 본 연구에서는 이 두 문항을 사용하였으므로 문항의 선정 및 초기 수정 과정은 연구팀에서 함께 작업하였음을 밝혀둔다.

학생에게 막연한 두려움을 줄 수 있으므로, 학생의 답안 작성이 끝난 후에 연구 목적을 공개하였다. 이와 같은 이유 때문에 연구 대상 학생 집단에서 선행학습 집단과 비선행학습 집단 비율은 동일하지 않았다.

2. 연구 참여자 및 표집방법

2.1 연구 참여자

앞서 밝힌 바와 같이 일반계 고등학교 중상위권 학생을 연구 참여자로 선정하였으며, 본 연구에서는 그 기준을 학교 내신 성적 3등급 이내의 학생들로 정하였다.

2.2 표집방법

위의 기준에 따라 일반계 고등학교 두 곳을 섭외하여 자연계 2학년 학생 중 학교 내신 수학 성적이 3등급 이내인 학생 중 희망하는 학생으로 총 32명의 연구 참여자를 모집했다.

32명의 연구 참여자를 대상으로 암호 문제, 나무심기 문제를 제시하고 답안을 받았으며, 답안을 받은 후에 각 문항에 쓰인 소재(암호 문제는 정수론의 합동식, 나무심기 문제는 정수론의 오일러 ϕ함수)를 본 적이 있는가에 대한 설문을 실시하였다[7]. 검사 문항이 대학 교재에 나온 소재를 사용했다는 점이, 그 소재를 접하지 못한 학생에게 불안 요소로 작용할 가능성을 감안하여 답안 작성이 모두 끝난 후에 설문조사를 실시하였다. 이 때 32명 중 5명은 두 문항 중 하나의 문항에 대한 답안만을 작성하였기 때문에 답안 분석은 32명 중 두 문항에 대한 답안을 모두 작성한 27명을 대상으로 하였다.

---

7) 부록 참고

3. 조사도구

3.1 수리논술 문항

본 연구에서 사용한 수리논술 문항은 총 두 가지로 다음과 같다.

다음 제시문을 읽고 논제에 답하여라.

(가) 암호란 통신문의 내용을 제삼자가 판독할 수 없도록 글자, 숫자, 부호 등으로 변형시킨 것인데 주로 군사적 목적이나 외교 통신, 전자상거래 등에 많이 이용된다. 다음과 같은 방식으로 만들어지는 암호를 생각해 보자. 먼저 알파벳 A부터 Z와 !,?에 다음과 같이 숫자를 대응시킨다.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	!	?
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

이제 key를 고정된 양의 정수 k라 하고, 다음과 같은 변환 규칙에 의해 암호화한다.

변환 규칙 : 숫자 n에 대응하는 문자 $\rightarrow$ n^k을 29로 나눈 나머지에 대응하는 문자

예를 들어 key가 3인 경우, D에 대응하는 숫자가 4이므로 4^3을 29로 나눈 나머지는 6이 된다. 따라서 D는 6에 대응하는 문자 F로 변환된다.

(나) 두 정수 a,b에 대해, $a-b$가 29의 배수(즉, $a-b=29q$인 정수 q가 존재)일 때, $a \sim b$라고 나타내자. 그러면, 다음의 법칙들이 성립한다.

(ⅰ) $a \sim a$이다.

(ⅱ) $a \sim b$이면 $b \sim a$이다.

(ⅲ) $a \sim b$이고 $b \sim c$이면, $a \sim c$이다.

(ⅳ) $a \sim b$이고 $c \sim d$이면, $(a+c) \sim (b+d)$이고 $ac \sim bd$이다.

(ⅴ) $ac \sim bc$이고 c와 29가 서로소이면, $a \sim b$이다.

(예를 들어 $a-a=29\times 0$ 이므로, $a \sim a$이다. $a-b=29q$이면 $b-a=29(-q)$이므로, $a \sim b$이면 $b \sim a$이다.)

[논제 1] key가 2일 때와 3일 때, 각각 'HUNT'라는 단어를 제시문 (가)의 변환 규칙에 따라 암호문으로 바꾸어보시오. 그리고 그 결과를 바탕으로 2와 3 가운데 어떤 수가 key로 적절한지 고르고 그 근거를 논리적으로 서술하시오.

[논제 2] (1) 아래 표는 $4\times1, 4\times2, 4\times3, \cdots 4\times28$을 각각 29로 나눈 나머지를 나타낸 것이다.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
$4x$를 29로 나눈 나머지	4	8	12	16	20	24	28	3	7	11	15	19	23	27
x	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$4x$를 29로 나눈 나머지	2	6	10	14	18	22	26	1	5	9	13	17	21	25

이 표로부터 $4\times1, 4\times2, 4\times3, \cdots 4\times28$을 29로 나눈 나머지가 모두 다름을 관찰할 수 있다. 이 표와 제시문(나)의 법칙들을 이용하여 $(4\times1)\times(4\times2)\times(4\times3)\times\cdots\times(4\times28)$을 29로 나눈 나머지를 구하는 과정에서 4^{28}을 29로 나눈 나머지가 1임을 논리적으로 서술하시오.

[논제 2] (2)

(a) a가 29의 배수가 아닌 정수일 때, $a, 2a, 3a, \cdots, 28a$ 는 29와 각각 서로소임을 보이시오.

(b) $a, 2a, 3a, \cdots, 28a$ 를 29로 나눈 나머지들의 집합과 $\{1, 2, \cdots, 28\}$ 사이에 일대일 대응이 있음을 보이시오.

(c) 임의의 정수 a가 29의 배수가 아닐 때, a^{28}을 29로 나눈 나머지를 구하고 그 과정을 논리적으로 서술하시오.

[논제 3] [논제 1]과 [논제 2]를 바탕으로 암호문을 정확하게 해독하기 위해서 짝수와 7의 배수는 key로 적절하지 않음을 논리적으로 서술하시오.

<암호 문제>

다음 제시문을 읽고 논제에 답하여라.

(가) 임의의 자연수 n이 주어졌을 때, 1부터 n 까지의 (1과 n을 포함한) 자연수 중 n과 서로 소인 자연수의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, 1부터 10 까지의 자연수 중 10과 서로 소인 수는 1, 3, 7, 9 이므로 $f(10)=4$ 이다. 함수 f는 다음과 같은 성질을 만족한다.

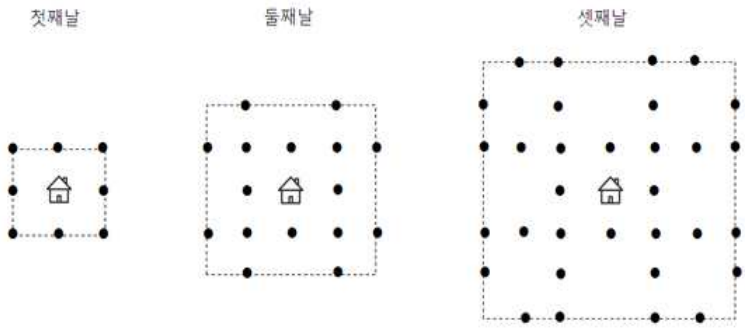
(1) 임의의 서로 소인 두 자연수 m, n에 대하여,

$$f(mn)=f(m)f(n)$$

(2) 임의의 소수 p와 자연수 n에 대하여,

$$f(p^n)=p^{n-1}(p-1)$$

(나) 아래 그림과 같이 중심에 원두막이 있고 가로 세로 1미터 간격으로 나무를 심을 수 있는 과수원이 있다. 이곳에 매일 다음과 같은 방법으로 나무를 심는다.



첫째 날에는 위의 그림과 같이, 원두막이 중심이고 한 변의 길이가 2미터인 정사각형의 변 위의 점 중에서, 중심으로부터 가로, 세로 방향 각각에 대하여 정수만큼 떨어진 점에만 나무를 심는다. 둘째 날에는 원두막이 중심이고 한 변의 길이가 4미터인 정사각형의 변 위의 점 중에서, 중심으로부터 가로, 세로 방향 각각에 대하여 정수만큼 떨어진 점에만 나무를 심되, 중심의 위치에서 바라볼 때 첫째 날 심은 나무에 의

해 가려지지 않는 위치에 한하여 나무를 심는다. 즉, n번째 날에는 두 대각선이 만나는 지점이 원두막의 중심이고 한 변의 길이가 $2n$미터인 정사각형의 변 위의 점 중에서, 중심으로부터 가로, 세로 방향 각각에 대하여 정수만큼 떨어진 점에만 나무를 심되, 정사각형의 중심에 사람이 위치해서 바라볼 때 이전에 심은 나무에 의해 가려지지 않는 위치에만 나무를 심는다. 이때 나무의 굵기는 무시할 수 있을 만큼 작다고 가정한다.

[논제1]

(1) 2 이상인 서로 소인 자연수 k, l과 $(k,l) \neq (k',l')$ 이면서 2 이상인 서로 소인 자연수 k', l'에 대하여 직선 $y = \frac{k}{l}x$와 $y = \frac{k'}{l'}x$은 일치할 수 없음을 보이시오.

(2) $k \geq 2$일 때, k번째 날의 나무를 심을 수 있는 점의 좌표는 k와 서로소인 양의 정수 l(단, $l \leq k$)에 대하여 정확하게

$(k, l), (k, -l), (-k, l), (-k, -l), (l, k), (l, -k), (-l, k), (-l, -k)$

임을 보이시오.

(3) 위의 논의를 바탕으로 n번째 심는 나무의 수를 f를 이용하여 표현하고, 그 근거를 논리적으로 서술하시오.

[논제2] [논제1]의 결과를 이용하여 열흘 동안 심은 나무의 총 개수를 구하시오. 자신의 풀이방법과 그 근거를 논리적으로 서술하시오.

[논제3] 나무를 매일 계속 심어나간다고 할 때, 하루에 48그루의 나무를 심게 되는 날을 모두 구하시오. 자신의 풀이과정과 그 근거를 논리적으로 서술하시오.

<나무심기 문제>

3. 2 문항 수정 배경

<암호 문제>는 한양대학교 2008학년도 수시2학기 기출문제를 일부 수정한 것이다[8]. 이 문항은 정수론의 '합동식'을 바탕으로 하고 있으며, 따라서 고등학교 교육과정 외의 요소를 소재로 하고 있다. 원문항을 학생의 수학적 과정을 평가할 수 있고, 선행 여부가 영향을 미치지 않도록 수정하였으며, 구체적인 수정 내용과 그 이유는 각각 다음과 같다.

첫째, 기존 문항이 $a \equiv b \pmod{m}$로 정수론의 합동식에서 사용하는 표기를 그대로 사용하고 있어서 정수론의 합동식을 경험한 학생에게 더 친숙하게 보일 수 있기 때문에 이를 수정하였다. 이 문항에서는 양의 정수 m이 고정된 수 29이므로 $a \equiv b \pmod{29}$를 $a \sim b$로 바꾸어 더 간단히 표현함으로써, 합동식을 경험한 학생과 그렇지 않은 학생 사이의 출발점의 차이를 최소화하고자 하였다.

<표 Ⅲ-1> 암호 문제 수정 1

수정 전	<나> 두 정수 a, b와 양의 정수 m에 대해, $a-b$가 m의 배수(즉, $a-b=mq$인 정수 q가 존재)일 때, a와 b는 법 m에 대해 합동이라고 하고 $a \equiv b \pmod{m}$으로 표기한다. 일반 등식에서와 같이 합동식에서도 다음의 법칙들이 성립한다.
수정 후	(나) 두 정수 a, b에 대하여 $a-b$가 29의 배수(즉, $a-b=29q$인 정수 q가 존재)일 때, $a \sim b$라고 나타내자. 그러면 다음의 법칙들이 성립한다.

둘째, 예비 검사 결과 학생들이 제시문(나)에 나온 법칙들의 의미를 스스로 이끌어내는 데에 어려움을 겪고 있고, 그 결과 이 문항에서 측정하고자 하는 논리적 사고력을 측정할 수 없었다. 따라서 제시문(나)의 법

8) 기출문제 원문은 부록 참고

칙에 대한 설명을 일부 적어 학생들의 이해를 돕고자 했다.

<표 Ⅲ-2> 암호 문제 수정 2

수정 전	설명 없음
수정 후	(예를 들어, $a-a=29\times 0$이므로 $a\sim a$이다. $a-b=29q$이면 $b-a=29(-q)$이므로, $a\sim b$이면 $b\sim a$이다.)

셋째, [논제 2](1)에 대한 이해를 돕기 위하여 $4x(\mathrm{mod}\ 29)$를 말로 풀어 '$4x$를 29로 나눈 나머지'로 표현하였다. 새로운 기호의 도입은 학생의 체감난도를 높일 수 있으며, $4x(\mathrm{mod}\ 29)$은 단 한번 등장하는 기호이기 때문에 굳이 정의하여 사용할 필요가 없다고 판단되었기 때문이다.

<표 Ⅲ-3> 암호 문제 수정 3

<table>
<tr><td>수정 전</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>…</td></tr>
<tr><td>$4x\ (\mathrm{mod}\ 29)$</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td>…</td></tr>
</table>
[여기서 $4x\ (\mathrm{mod}\ 29)$는 $4x$를 29로 나눈 나머지를 뜻함.]
</td></tr>
<tr><td>수정 후</td><td>
<table>
<tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>…</td></tr>
<tr><td>$4x$를 29로 나눈 나머지</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td>…</td></tr>
</table>
</td></tr>
</table>

넷째, 기존 문항의 논제(2)가 4^{28}을 29로 나눈 나머지를 구하는 문제와 29의 배수가 아닌 임의의 정수 a에 대하여 a^{28}을 29로 나머지를 구하는 문제의 두 가지를 구하도록 만들어져 있어서 이를 서로 다른 논제인 [논제2](1), [논제2](2)로 분리하였다.

<표 Ⅲ-4> 암호 문제 수정 4

<table>
<tr><td>수정 전</td><td>(2) 아래 표와 <나>의 법칙들을 이용하여 4^{28}을 29로 나눈 나머지가 1임을 설명하고, 임의의 정수 a가 29의 배수가 아닐 때 a^{28}을 29로 나눈 나머지에 대하여 설명하시오.</td></tr>
<tr><td>수정 후</td><td>[논제 2] (1) 아래 표는 $4\times1, 4\times2, 4\times3, \cdots, 4\times28$을 각각 29로 나눈 나머지를 나타낸 것이다.
<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>…</td></tr><tr><td>$4x$를 29로 나눈 나머지</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td>…</td></tr></table>(중간 생략)
이 표와 제시문(나)의 법칙들을 이용하여 $(4\times1)\times(4\times2)\times(4\times3)\times\cdots\times(4\times28)$을 29로 나눈 나머지를 구하는 과정에서 4^{28}을 29로 나눈 너머지가 1임을 논리적으로 서술하시오.
[논제 2] (2) (c) 임의의 정수 a가 29의 배수가 아닐 때, a^{28}을 29로 나눈 나머지를 구하고 그 과정을 논리적으로 서술하시오.</td></tr>
</table>

다섯째, 수정된 [논제2](1)에서 학생들이 주어진 표에 1부터 28까지의 숫자가 단 한 번씩 있다는 점에 착안하지 못하여 문제를 해결하지 못하는 점을 보고, 이를 문항 속에 넣어 기술하였다.

<표 Ⅲ-5> 암호 문제 수정 5

<table>
<tr><td>수정 전</td><td>(2) 아래 표와 <나>의 법칙들을 이용하여 4^{28}을 29로 나눈 나머지가 1임을 설명하고, 임의의 정수 a가 29의 배수가 아닐 때 a^{28}을 29로 나눈 나머지에 대하여 설명하시오.</td></tr>
<tr><td>수정 후</td><td>[논제 2] (1) 아래 표는 $4\times1, 4\times2, 4\times3, \cdots, 4\times28$을 각각 29로 나눈 나머지를 나타낸 것이다.
<table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>…</td></tr><tr><td>$4x$를 29로 나눈 나머지</td><td>4</td><td>8</td><td>12</td><td>16</td><td>…</td></tr></table>(중간 생략)
이 표와 제시문(나)의 법칙들을 이용하여 $(4\times1)\times(4\times2)\times(4\times3)\times\cdots\times(4\times28)$을 29로 나눈 나머지를 구하는 과정에서 4^{28}을 29로 나눈 너머지가 1임을 논리적으로 서술하시오.</td></tr>
</table>

여섯째, 수정된 [논제2](2)에서 a^{28}을 29로 나눈 나머지가 1임을 보이기 위하여 $a, 2a, \cdots, 28a$을 29로 나눈 나머지에 1부터 28까지가 단 한 번씩 있음을 반드시 보여야 하는데 그것을 명확히 보이지 못하는 학생들이 많아 소논제로 제시하였다.

<표 Ⅲ-6> 암호 문제 수정 6

<table>
<tr><td>수정 전</td><td>(2) 아래 표와 <나>의 법칙들을 이용하여 4^{28}을 29로 나눈 나머지가 1임을 설명하고, 임의의 정수 a가 29의 배수가 아닐 때 a^{28}을 29로 나눈 나머지에 대하여 설명하시오.</td></tr>
<tr><td>수정 후</td><td>[논제 2] (2) (중간 생략)
(b) $a, 2a, 3a, \cdots, 28a$를 29로 나눈 나머지들의 집합과 $\{1, 2, \cdots, 28\}$ 사이에 일대일 대응이 있음을 보이시오.
(c) 임의의 정수 a가 29의 배수가 아닐 때, a^{28}을 29로 나눈 나머지를 구하고 그 과정을 논리적으로 서술하시오.</td></tr>
</table>

일곱째, 기존의 논제(3)에서 짝수와 7의 배수가 키로서 적당하지 않음

을 학생들이 찾아내어 정당화해야 했는데, 수정된 문항에서는 짝수와 7의 배수가 키로서 적당하지 않음을 제시해주고 학생에게는 그것을 정당화하는 것을 요구했다.

<표 Ⅲ-7> 암호 문제 수정 7

수정 전	(3) 암호문을 정확하게 해독하기 위해 key가 가져야 할 조건을 논하시오.
수정 후	[논제 3] [논제 1]과 [논제 2]를 바탕으로 암호문을 정확하게 해독하기 위해서 짝수와 7의 배수는 key로서 적절하지 않음을 논리적으로 서술하시오.

이를 간단히 표로 정리하면 다음과 같다.

<표 Ⅲ-8> 암호 문제 수정 정리

수정 번호	수정 내용
1	정수론의 합동식에서 사용되던 기호인 $a \equiv b \pmod{29}$를 $a \sim b$으로 수정
2	제시문(나)의 법칙에 대한 설명을 추가
3	$4x \pmod{29}$를 $4x$를 29로 나눈 나머지로 풀어서 설명함
4	기존의 논제(2)를 [논제2](1), [논제2](2)로 분리함
5	수정된 [논제2](1)에서 표에 나오는 숫자의 의미를 명시함
6	수정된 [논제2](2)에서 소논제로 분리하여 각 과정을 명확히 쓰도록 함
7	키로서 적절하지 않은 숫자를 제시하고 학생에게는 정당화만을 요구함

<나무심기 문제>는 홍익대학교 2011학년도 수시 기출 문제를 일부 수정한 것이다[9]. 이 문항은 정수론의 '오일러의 ϕ함수'를 바탕으로 하고

9) 기출문제 원문은 부록 참고

있으며, 따라서 고등학교 교육과정 외의 요소를 소재로 하고 있다. 원문항을 학생의 수학적 과정을 평가할 수 있고, 선행학습 여부가 영향을 미치지 않도록 수정하였으며, 구체적인 수정 내용과 그 이유는 각각 다음과 같다.

첫째, 기존 문항이 ϕ로 정수론의 오일러 ϕ함수에서 사용하는 표기를 그대로 사용하고 있어서 정수론을 경험한 학생에게 더 친숙하게 보일 수 있기 때문에 수정해야 할 필요성이 있었다. 이와 같은 이유로 고등학생 모두에게 친숙한 기호인 f로 수정하여 정수론을 경험한 학생과 그렇지 않은 학생 사이의 출발점의 차이를 최소화하고자 하였다.

<표 Ⅲ-9> 나무심기 문제 수정 1

수정 전	(가) 임의의 자연수 n이 주어졌을 때, 1부터 n까지의 (1과 n을 포함한) 자연수 중 n과 서로소인 자연수의 개수를 $\phi(n)$이라 하자. 이렇게 정의한 함수를 오일러의 ϕ함수라 한다. 예를 들어 1부터 10까지의 자연수 중 10과 서로소인 수는 $1, 3, 7, 9$이므로 $\phi(10)=4$이다. 또한 오일러의 ϕ함수는 다음 성질을 만족함이 알려져 있다.
수정 후	(가) 임의의 자연수 n이 주어졌을 때, 1부터 n까지의 (1과 n을 포함한) 자연수 중 n과 서로소인 자연수의 개수를 $f(n)$이라 하자. 예를 들어, 1부터 10까지의 자연수 중 10과 서로소인 수는 $1, 3, 7, 9$이므로 $f(10)=4$이다. 함수 f는 다음과 같은 성질을 만족한다.

둘째, 제시문 (나)의 내용 중 원두막의 중심의 위치에 대한 표현이 명확치 않아서 제시문 일부를 수정하였다.

<표 Ⅲ-10> 나무심기 문제 수정 2

수정 전	위 그림과 같이 n번째 날에는 원두막을 중심으로 갖고 변의 길이가 $2n$미터인 정사각형의 변 위에 나무를 심되 중심에서 보았을 때 이전에 심은 나무에 의해 가려지지 않는 위치에만 심는다. 이 때 나무의 굵기는 무시할 수 있을 만큼 작다고 가정한다.
수정 후	첫째 날에는 위의 그림과 같이, 원두막이 중심이고 한 변의 길이가 2미터인 정사각형의 변 위의 점 중에서, 중심으로부터 가로, 세로 방향 각각에 대하여 정수만큼 떨어진 점에만 나무를 심는다. 둘째 날에는 원두막이 중심이고 한 변의 길이가 4미터인 정사각형의 변 위의 점 중에서, 중심으로부터 가로, 세로 방향 각각에 대하여 정수만큼 떨어진 점에만 나무를 심되, 중심의 위치에서 바라볼 때 첫째 날 심은 나무에 의해 가려지지 않는 위치에 한하여 나무를 심는다. 즉, n번째 날에는 두 대각선이 만나는 지점이 원두막의 중심이고 한 변의 길이가 $2n$미터인 정사각형의 변 위의 점 중에서, 중심으로부터 가로, 세로 방향 각각에 대하여 정수만큼 떨어진 점에만 나무를 심되, 정사각형의 중심에 사람이 위치해서 바라볼 때 이전에 심은 나무에 의해 가려지지 않는 위치에만 나무를 심는다. 이때 나무의 굵기는 무시할 수 있을 만큼 작다고 가정한다.

셋째, 기존 문항의 논제(a)가 n번째 심은 날의 나무의 수를 ϕ를 이용하여 표현하는 문제와 열흘 동안 심은 나무의 수를 구하는 두 문제의 두 가지를 구하도록 만들어져 있어서 이를 서로 다른 논제인 [논제1]과 [논제2]로 분리하였다.

<표 Ⅲ-11> 나무심기 문제 수정 3

수정 전	(a) 임의의 자연수 n이 주어졌을 때, n번째의 날에 심은 나무의 개수를 오일러의 ϕ함수를 사용하여 나타내는 방법을 설명하고, 이를 이용하여 열흘 동안 심은 나무의 총 개수를 구하시오.
수정 후	[논제 1] (중간 생략) (3) 위의 논의를 바탕으로 n번째 날에 심는 나무의 수를 f를 이용하여 표현하고, 그 근거를 논리적으로 서술하시오. [논제 2] [논제 1]의 결과를 이용하여 열흘 동안 심은 나무의 총 개수를 구하시오. 자신의 풀이 방법과 그 근거를 논리적으로 서술하시오.

넷째, 수정된 [논제1]에 대한 예비 검사 결과 n번째 날에 심은 나무의 수가 $8f(n)$이 된다는 것은 잘 서술하지만, 그 근거로는 '서로소이기 때문에'로 쓰는 등 왜 k와 l이 서로소이면 (k, l)에 나무를 심을 수 있고, 서로소가 아니면 나무를 심을 수 없는지에 대한 근거를 명확히 제시하지 못함을 관찰했다. 따라서 [논제1]을 다음과 같이 3개의 소논제로 나누어 제시함으로써 명확히 서술하도록 했다.

<표 Ⅲ-12> 나무심기 문제 수정 4

수정 전	(a) 임의의 자연수 n이 주어졌을 때, n번째의 날에 심은 나무의 개수를 오일러의 ϕ함수를 사용하여 나타내는 방법을 설명하고, 이를 이용하여 열흘 동안 심은 나무의 총 개수를 구하시오.
수정 후	[논제 1] (1) 2 이상인 서로소인 자연수 k, l과 $(k, l) \neq (k', l')$이면서 2 이상인 서로소인 자연수 k', l'에 대하여 직선 $y = \frac{k}{l}x$와 $y = \frac{k'}{l'}x$는 일치할 수 없음을 보이시오. (2) $k \geq 2$일 때, k번째 날의 나무를 심을 수 있는 점의 좌표는 k와 서로소인 양의 정수 l(단, $l \leq k$)에 대하여 정확하게 $(k, l), (k, -l), (-k, l), (-k, -l), (l, k), (l, -k), (-l, k), (-l, -k)$ 임을 보이시오. (3) 위의 논의를 바탕으로 n번째 심는 나무의 수를 f를 이용하여 표현하고, 그 근거를 논리적으로 서술하시오.

이를 간단히 표로 정리하면 다음과 같다.

<표 Ⅲ-13> 나무심기 문제 수정 정리

수정 번호	수정 내용
1	정수론에서 사용되던 기호인 ϕ를 f로 수정
2	제시문에서 모호한 부분을 보다 명확히 서술함
3	기존의 논제(a)를 [논제1], [논제2]로 분리함
4	수정된 [논제1]을 소논제로 분리하여 각 과정을 명확히 쓰도록 함

3.3 수학적 과정 중심 평가 원리와 수리논술 문항

이 문항은 정상권 외(2012)에서 제시한 수학적 과정 중심 평가의 원리인 진정성의 원리, 배경화의 원리, 구성의 원리, 기본의 원리를 고려하여 선정되고 수정되었다. 특히 두 번째 원리인 배경화의 원리에 따라 아는 것을 단순 재생하는 것이 아니라 제시문에 주어진 정보를 적절히 조직하여 논리적으로 자신의 주장을 정당화할 수 있는 문항으로 선정하고 수정하였다. 이 부분에서 제시문에 주어진 정보가 정수론에 포함되어 있는 것이지만, 그것을 직접 증명하도록 요구한 것이 아니라 학생이 답안을 적는 과정에서 공리처럼 이용하도록 하였다. 또한 네 번째 원리인 기본의 원리에 따라 서로소, 약수, 배수 등과 같은 고등학교 교육과정 내의 개념에 대하여 명확히 학습하였는지를 볼 수 있는 문제로서 복잡한 지식 또는 고도로 훈련된 기능에 의해 해결되는 특수한 문제가 아니라 기본적인 개념에 대해 명확히 파악하고 있는지를 평가할 수 있는 문항으로 선정하였다. 세 번째 원리인 구성의 원리에 따라 학생의 답안에서 학습자의 표현 형태나 추론 양식을 최대한 허용하되, 학생 스스로 자신의 답을 정당화할 수 있는가를 확인하였다. 또한 일부 학생에게 이와 같은 유형의 문항이 수리논술로 나온다면 어떤 식으로 학습할 것인지를 질문하여, 이와 같은 형태의 문항이 바람직한 의미에서 교수-학습의 내적 동기를 강화할 수 있는지를 살펴보았다.

4. 자료수집 방법

4.1 예비 실험

본 실험을 하기 전에 문항의 오류 여부와 문항의 난도의 적절성 여부를 알아보기 위해 예비 실험을 먼저 진행하였다. 예비 실험은 본 실험과 마찬가지로 일반 고등학교 자연계 2학년 학생 중 3등급 이내의 학생을 대상으로 진행되었다. 예비 실험 과정에서 나타난 문제점을 바탕으로 문항을 수정하여 본 실험에서 이용했다. 두 문항 모두 문항 자체의 오류는 없었으며 다만 학생들이 논리적인 비약이 있는 경우 이 부분을 스스로 해결하는데 큰 어려움을 겪음을 관찰하였다. 학생들이 겪은 어려움과 그것을 수정한 형태는 3.2절에 제시하였다.

예비 실험 결과 두 문항 모두 내용의 측면에서는 정수론을 경험한 학생과 그렇지 않은 학생 사이에 의미 있는 차이점이 발견되지 않았다. 다만, 표현의 측면에서는 흥미로울만한 사실이 발견되었는데, 합동식을 경험한 학생들 중 일부가 제시문에 정의된 '~'라는 기호 대신 자신이 알고 있던 표기인 $a \equiv b \pmod{29}$을 정의 없이 사용하였다, 이 점은 수학적 과정의 하위 능력 중 '수학적 표현을 이해하고 사용하는 능력(C1)'요소 측면에서 평가할 때, 선행학습이 부정적 영향을 미쳤다고 생각할 수도 있다.

4.2 본 실험

4.2.1 수학적 과정 중심 하위 요소로 수리논술 문항 분석

예비검사 결과를 바탕으로 수정된 수리 논술 문항을 수학적 과정 중

심 하위 요소로 분석하였다. 이를 통하여 각 문항이 학생의 수학적 과정 중 어떤 요소를 평가할 수 있는지를 판단할 수 있었다. 또한 이것은 채점기준을 만들 때 유용하게 활용되었다.

4.2.2 수리논술 문항 투입

예비검사 결과를 바탕으로 수정된 수리 논술 문항을 32명의 학생에게 투입하였다. 연구 목적은 논술 문항에 대한 학생들의 답을 모두 받은 후에 공개하였는데, 이는 정수론을 경험하지 않은 학생이 문항을 푸는 과정에서 배우지 못했기 때문에 잘 할 수 없을 것이라는 생각을 갖게 될 수 있기 때문이다. 연구 목적 공개와 함께 풀고 있는 주제를 다른 곳에서 경험한 적이 있는지를 설문지를 통해 확인했다.

4.2.3 학생들의 답안 분석

수학적 과정 중심 평가 하위 요소를 바탕으로 만든 채점기준표를 갖고 학생들의 답안을 분석하였다. 처음 수리논술 답안을 작성했던 32명 중 두 문제에 대한 답안을 모두 작성한 학생인 27명에 대해서만 답안 분석을 할 수 있었다. 분석은 두 가지 방법으로 하였는데 첫 번째는 두 독립표본 t 검정(two-independent sample t test)으로, 선행학습 집단과 비선행학습 집단을 서로 다른 두 모집단으로 보고, 두 집단의 평균을 비교하였다. 그러나 이 분석의 경우, 표본 수가 27로 적기 때문에 두 집단 사이에 유의미한 차이가 없다는 결론이 나기에 유리하다는 제한점이 있다. 그러나 평균을 비교해보고 두 집단의 차이가 있는지 살펴보는 것은 의미 있다고 생각하여 각 문항에서의 유의확률 값을 제시하였다. 두 번째는

질적 분석으로 선행학생과 비선행학생의 답안을 비교분석함으로써 두 집단 학생의 답안 작성에서 선행학습으로 인한 차이가 있는가를 살펴보았다. 이 과정에서 연구에서 의도하지 않았지만 선행학습으로 인하여 방해를 받은 사례를 발견할 수 있었다.

Ⅳ. 연구결과

1. 암호 문제

1.1 수학적 과정 하위 요소로 분석한 암호문제

첫 번째 연구문제를 해결하기 위하여 수정된 암호문제를 수학적 과정 하위 요소로 분석하였다. 수리논술 문항은 서술형 평가와는 다르게 여러 단계가 복잡하게 얽혀 있으므로 하나의 해결과정이 아니라 두 개 이상의 해결 과정으로 나누어야 했다. 분석은 정상권 외(2012)를 참고하였다. 각 논제를 세부 해결과정으로 나누고, 각 해결과정마다 드러날 수 있는 수학적 과정 하위 요소를 나열하였다. 그 과정요소가 드러난 예시답안을 함께 제시하였으며, 어떤 이유로 그 과정 요소가 드러날 수 있는지에 대한 분석 결과를 각 표의 아래쪽에 제시하였다. 암호 문제를 해결하는 과정에서 드러날 수 있는 수학적 과정 요소는 다음과 같다.

- 실세계 상황에서 수학적 문제를 구성하는 능력(P1)
- 문제해결에 적절한 형태로 표현을 변환하는 능력(P5)
- 문제해결에서 사용되는 개념들 간의 연결성을 인식하고 활용하는 능력(P6)
- 문제해결에서 적절한 전략을 활용하여 문제를 해결하는 능력(P7)
- 실세계 상황에서 주어진 문제를 해결하는 능력(P12)
- 수학적 관계를 파악하는 능력(R1)
- 수학적 관계를 찾아 표현하는 능력(R2)

- 수학적으로 추측하는 능력(R3)
- 수학적 추론에 근거한 정당화 능력(R4)
- 추론과정과 결과를 해석하거나 평가하는 능력(R6)
- 수학적 표현을 이해하고 사용하는 능력(C1)
- 자신의 문제해결 또는 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력(C2)
- 자신의 문제해결 또는 추론 과정을 반성적으로 점검하여 표현하는 능력(C3)
- 문제해결 또는 추론 과정을 수학적인 언어로 표현하는 능력(C5)

이를 해결 과정에 따라 제시하면 다음 표와 같다.

[논제 1]

<표 Ⅳ-1> 암호 문제 논제1의 해결과정과 수학적 과정 하위요소

번호	해결과정	예시답안에서의 표현	하위요소
01	키가 2일 때 정의를 변환 규칙을 바탕으로 변환하기	key가 2일 때 제시문의 변환 규칙에 의해 변환해보면, $8^2 = 64 = 29 \times 2 + 6$ $21^2 = 441 = 29 \times 15 + 6$ $14^2 = 196 = 29 \times 6 + 22$ $20^2 = 400 = 29 \times 13 + 23$ 이므로 통신문 'HUNT'는 숫자 6, 6, 22, 23에 대응하는 'FFVW'로 변환된다.	P 12 R 1 C 1, 5
02	키가 7일 때 정의를 변환 규칙을 바탕으로 변환하기	key가 3일 때 제시문의 변환 규칙에 의해 변환해보면, $8^3 = 8(29 \times 2 + 6) = 29 \times 16 + 48 = 29 \times 17 + 19$ $21^3 = 21(29 \times 15 + 6) = 29 \times 315 + 126 = 29 \times 319 + 10$ $14^3 = 14(29 \times 6 + 22) = 29 \times 84 + 308 = 29 \times 94 + 18$ $20^3 = 20(29 \times 13 + 23) = 29 \times 260 + 460 = 29 \times 275 + 25$ 이므로 통신문 'HUNT'는 숫자 19, 10, 18, 25에 대응하는 'SJRY'로 변환된다.	P 12 R 1 C 1, 5
03	두 변환 과정을 정확히 계산하기		R 5
04	'키로서 적절하다'의 정의를 바탕으로 2가 키로서 적절하지 않음을 정당화하기	이 때, 문제는 key가 2일 때 발생한다. 수신자는 변환된 통신문에서 F를 해독할 때 이 문자가 H인지 U인지 알 수 없기 때문이다. 즉 올바른 해독을 위해 통신문의 서로 다른 문자 H와 U는 다른 문자로 변환되어야 하는데 F로 동일하게 변환되기 때문이다.	P 1, 6 R 4 C 2

해결과정 01, 02에서는 실세계 문제인 암호 변환 문제를 해결하는 능력을 보고 있으므로 P12, 제시문에 나온 키, 변환 규칙을 파악하는 능력

을 보고 있으므로 R1, 수학적으로 바른 표현을 사용했는가를 평가할 수 있으므로 C1, 암호 변환 규칙을 식으로 잘 표현했는가를 볼 수 있으므로 C5가 드러날 수 있다. 해결과정 03에서는 자신의 문제해결 과정을 점검했는가가 드러나므로 R5를 측정할 수 있다. 해결과정 04에서는 키로서 적절하다라는 실세계 상황에서의 문제를 일대일대응이라는 수학적 문제로 구성하여야 하므로 P1, 이 두 개념 사이의 연결성을 인식하여야 하므로 P6, 정당화하는 능력을 보고 있으므로 R4, 논리적으로 잘 설명하였는가를 평가할 수 있으므로 C2를 측정할 수 있다. 이를 표로 정리해보면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-2> 암호 문제 논제1의 하위요소

번호	하위 요소	하위 요소를 구체적으로 제시
01	P 12	실세계 문제인 암호 변환을 해결하는 능력
	R 1	제시문에 나온 키, 변환규칙을 파악하는 능력
	C 1	수학적으로 바른 표현을 사용했는가?
	C 5	암호 변환 규칙을 식으로 잘 표현했는가?
02	P 12	실세계 문제인 암호 변환을 해결하는 능력
	R 1	제시문에 나온 키, 변환규칙을 파악하는 능력
	C 1	수학적으로 바른 표현을 사용했는가?
	C 5	암호 변환 규칙을 식으로 잘 표현했는가?
03	R 5	계산 과정을 점검하는 능력
04	P 1	'키로서 적절하다'라는 실세계 상황에서의 문제를 일대일대응이라는 수학적문제로 구성하는 능력
	P 6	위의 두 개념 사이의 연결성을 인식하는 능력
	R 4	정당화 능력
	C 2	논리적으로 설명하는 능력

[논제 2] (1)

<표 Ⅳ-3> 암호 문제 논제2(1)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소

번호	해결과정	예시답안에서의 표현	하위요소
05	$4\times8\times\cdots\times(4\times28)$을 29로 나눈 나머지가 $1\times2\times\cdots\times28$을 29로 나눈 나머지와 같음을 서술하고 그것을 식으로 표현하기 (제시문의 법칙(ⅳ) 이용)	제시문 (나)의 법칙 (ⅳ)과 주어진 표에 의해 $4\times8\times12\times\cdots\times(4\times28)$를 29로 나눈 나머지는 $1\times2\times3\times\cdots\times28$을 29로 나눈 나머지와 같다. 그것을 식으로 표현하면, $4\times8\times12\times\cdots\times(4\times28)\sim1\times2\times3\times\cdots\times28$ 이다.	P 6 R 1, 2 C 1, 2
06	$4\times8\times\cdots\times(4\times28)$을 $4^{28}(1\times2\times\cdots\times28)$로 정리하기	왼쪽의 식을 정리하여 다시 쓰면, $4^{28}(1\times2\times3\times\cdots\times28)\sim(1\times2\times3\times\cdots\times28)$ 이다.	P 5
07	$1\times2\times\cdots\times28$을 소거하기 ($1, 2, \cdots, 28$이 29와 서로소임과 제시문의 법칙(ⅴ)를 이용)	$1, 2, \cdots, 28$은 각각 29와 서로소이므로 $1\times2\times3\times\cdots\times28$도 29와 서로소이다. 제시문 (나)의 법칙(ⅴ)에 의해 $4^{28}\sim1$이다.	P 6 R 4 C 1, 2
08	4^{28}을 29로 나눈 나머지가 1임을 정당화하기	따라서 4^{28}을 29로 나눈 나머지는 1이다.	P 5

해결과정 05에서는 제시문의 법칙(ⅳ)과 문제해결 과정의 연결성을 볼 수 있으므로 P6, $4\times8\times\cdots\times(4\times28)$을 29로 나눈 나머지와 $1\times2\times\cdots\times28$을 29로 나눈 나머지와의 관계를 파악하는 능력을 볼 수 있으므로 R1, 그 관계를 식으로 표현할 수 있는지를 볼 수 있으므로 R2, 수학적 표현, 특히 제시문에 나온 ~을 이해하고 사용하는 능력을 볼 수 있으므로 C1, 자신의 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력을 볼 수 있으므로 C2가 드러난다. 해결과정 06에서는 문제해결에 적합한 형태로 식을 변형할 수 있는가를 보기 때문에 P5가 드러난다. 해결과정 07은 제

시문의 법칙(ⅴ)과 문제해결 과정의 연결성을 볼 수 있으므로 P6, 정당화 능력을 볼 수 있으므로 R4, 수학적 표현을 이해하고 사용하는 능력을 볼 수 있으므로 C1, 자신의 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력인 C2가 드러난다. 해결과정 08에서는 $4^{28}-1$이라는 표현을 4^{28}을 29로 나눈 나머지로 변환하여 표현하므로 P5가 드러난다. 이를 표로 정리해보면 다음과 같다.

<표Ⅳ-4> 암호 문제 논제2(1)의 하위요소

번호	하위 요소	하위 요소를 구체적으로 제시
05	P 6	제시문의 법칙(ⅳ)이 문제해결에 어떻게 연결이 되는지 파악하는 능력
	R 1	$4\times8\times\cdots\times(4\times28)$을 29로 나눈 나머지와 $1\times2\times\cdots\times28$을 29로 나눈 나머지와의 관계를 파악하는 능력
	R 2	그것을 식으로 표현하는 능력
	C 1	수학적 표현을 사용하는 능력, 특히 제시문에 나온 ~
	C 2	자신의 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력
06	P 5	문제해결에 적합한 형태로 식을 변형하는 능력
07	P 6	제시문의 법칙(ⅴ)이 문제해결에 어떻게 연결이 되는지 파악하는 능력, 제시문의 법칙(ⅴ)과 서로소와의 관계 파악하는 능력
	R 4	정당화 능력
	C 1	수학적 표현을 사용하는 능력
	C 2	자신의 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력
08	P 5	$4^{28}-1$과 4^{28}을 29로 나눈 나머지로 변환하는 능력

[논제 2] (2) (b)

<표 Ⅳ-5> 암호 문제 논제2(2)(b)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소

번호	해결과정	예시답안에서의 표현	하위요소
09	$1 \le k \le 28$인 정수 k에 대하여 ka를 29로 나눈 나머지가 $\{1, 2, \cdots, 28\}$의 원소임을 서술하기	먼저 $a, 2a, \cdots, 28a$를 29로 나눈 나머지는 $\{1, 2, \cdots, 28\}$의 원소이다.	R 4 C 1, 2
10	두 집합이 같지 않다고 가정하기	이제 $a, 2a, \cdots, 28a$을 29로 나눈 나머지의 집합과 $\{1, 2, \cdots, 28\}$이 같지 않다고 가정하자.	P 7
11	그러면 $1 \le i < j \le 28$인 자연수 i, j에 대하여 $ia \sim ja$임	그러면 $1 \le i < j \le 28$인 정수 i, j에 대하여 $ia \sim ja$이다.	P 5
12	제시문의 법칙(ⅴ)에 의해 $i \sim j$가 되어 모순임	그러면 a는 29와 서로소이므로 제시문 (나)의 법칙 (ⅴ)에 의해 $i \sim j$이다. $i \sim j$이다. 하지만 1부터 28까지 중에 29로 나눈 나머지가 같은 서로 다른 정수는 없으므로 모순이다.	P 6 R 1, 2
13	두 집합이 같음을 정당화함	따라서 $a, 2a, \cdots, 28a$를 29로 나눈 나머지의 집합은 $\{1, 2, \cdots, 28\}$이다.	C 3

해결과정 09에서는 수학적 추론에 의한 정당화 능력을 볼 수 있으므로 R4, 새로운 문자인 k를 사용할 때 정의하는 것 등 수학적 표현을 이해하고 사용하는 능력을 보는 C1, 추론 과정을 논리적으로 설명하여야 하므로 C2가 드러난다. 해결과정 10에서는 귀류법의 문제해결 전략을 사용하는 것을 볼 수 있으므로 P7이 드러난다. 해결과정 11에서는 해결과정 10에서의 부정을 식으로 다시 표현하는 능력을 볼 수 있으므로 P5가 드러난다. 해결과정 12에서는 제시문의 법칙(ⅴ)과 문제해결 과정의 연

결성을 볼 수 있으므로 P6, 이 법칙과 서로소의 관계 등을 파악하는 능력을 볼 수 있으므로 R1, 그 관계를 식으로 표현하는 능력을 볼 수 있으므로 R2 등이 드러난다. 해결과정 13에서는 자신의 문제해결 과정을 점검하여 종합적으로 표현할 수 있는지를 볼 수 있으므로 C3가 드러난다. 이를 표로 정리해보면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-6> 암호 문제 논제2(2)(b)의 하위요소

번호	하위 요소	하위 요소를 구체적으로 제시
09	R 4	수학적 추론에 의한 정당화 능력
	C 1	새로운 문자 사용할 때 정의하는 것 등 수학적 표현을 정확히 쓰는 능력
	C 2	추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력
10	P 7	귀류법이라는 문제해결 전략을 활용하여 문제를 해결하는 능력
11	P 5	부정한 것을 다시 표현하여 식으로 변환하는 능력
12	P 6	제시문의 법칙(∨)이 문제해결에 어떻게 연결이 되는지 파악하는 능력
	R 1	법칙과 서로소의 관계 등을 파악하는 능력
	R 2	그 관계를 식으로 표현하는 능력
13	C 3	자신의 문제 해결 과정을 점검하여 표현하는 능력

[논제 2] (2) (c)

<표 Ⅳ-7> 암호 문제 논제2(c)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소

번호	해결과정	예시답안에서의 표현	하위요소
14	$a\times 2a\times\cdots\times 28a$을 29로 나눈 나머지가 $1\times 2\times\cdots\times 28$을 29로 나눈 나머지와 같음을 서술하기 (제시문의 법칙(ⅳ) 과 [논제2](2)(b)이용)	제시문 (나)의 법칙 (ⅳ)과 [논제2](a)의 결과에 의해 $a\times 2a\times\cdots\times 28a$를 29로 나눈 나머지는 $1\times 2\times\cdots\times 28$을 29로 나눈 나머지와 같다. 그것을 식으로 표현하면, $a\times 2a\times\cdots\times 28a \sim 1\times 2\times 3\times\cdots\times 28$ 이다.	P 6 R 1, 2 C 1, 2
15	$a\times 2a\times\cdots\times 28a$을 $a^{28}(1\times 2\times\cdots\times 28)$로 정리하기	왼쪽의 식을 정리하여 다시 쓰면, $a^{28}(1\times 2\times 3\times\cdots\times 28)$ 이다. $\sim (1\times 2\times 3\times\cdots\times 28)$	P 5
16	$1\times 2\times\cdots\times 28$을 소거하기 ($1, 2, \cdots, 28$이 29와 서로소임과 제시문의 법칙(ⅴ)를 이용)	$1, 2, \cdots, 28$은 각각 29와 서로소이므로 $1\times 2\times 3\times\cdots\times 28$도 29와 서로소이다. 제시문(나)의 법칙(ⅴ)에 의해 $a^{28}\sim 1$이다.	P 6 R 4 C 1, 2
17	a^{28}을 29로 나눈 나머지가 1임을 정당화하기	따라서 a^{28}을 29로 나눈 나머지는 1이다.	P 5

해결과정 14, 15, 16, 17은 각각 해결과정 05, 06, 07, 08과 같은 능력을 평가할 수 있다. 이를 표로 정리하면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-8> 암호 문제 논제2(2)(c)의 하위요소

번호	하위 요소	하위 요소를 구체적으로 제시
14	P 6	제시문의 법칙(ⅳ)이 문제해결에 어떻게 연결이 되는지 파악하는 능력
	R 1	$a\times 2a\times\cdots\times 28a$ 을 29로 나눈 나머지와 $1\times 2\times\cdots\times 28$ 을 29로 나눈 나머지와의 관계를 파악하는 능력
	R 2	그것을 식으로 표현하는 능력
	C 1	수학적 표현을 사용하는 능력, 특히 제시문에 나온 ~
	C 2	자신의 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력
15	P 5	문제해결에 적합한 형태로 식을 변형하는 능력
16	P 6	제시문의 법칙(ⅴ)이 문제해결에 어떻게 연결이 되는지 파악하는 능력, 제시문의 법칙(ⅴ)과 서로소와의 관계 파악하는 능력
	R 4	정당화 능력
	C 1	수학적 표현을 사용하는 능력
	C 2	자신의 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력
17	P 5	$a^{28}\sim 1$ 과 a^{28} 을 29로 나눈 나머지로 변환하는 능력

[논제 2] (3)

<표 Ⅳ-9> 암호 문제 논제2(3)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소

번호	해결과정	예시답안에서의 표현	하위 요소
18	2의 배수가 키로서 적절하지 않음을 보이기 위해 변환규칙에 따라 변환했을 때 같은 문자로 대응되는 서로 다른 문자 둘이 있음을 추측하기	k를 2의 배수라고 하자. 1과 28에 대하여 $1^k \sim 28^k$임을 보일 것이다.	P 6 R 3
19	이를 정당화하기	$28-(-1)=29\times 1$이므로 $28 \sim (-1)$이다. 제시문(나)의 법칙(ⅳ)에 의해 $28^k \sim (-1)^k$이다. 그런데 k는 2의 배수이므로 $(-1)^k \sim 1$이 된다. 따라서 $1^k \sim 28^k$가 되어 'A'와 '?'이 모두 'A'로 변환되므로 2의 배수는 키로서 적절하지 않다.	P 6 R 4, 6 C 1, 2
20	7의 배수가 키로서 적절하지 않음을 보이기 위해 변환규칙에 따라 변환했을 때 같은 문자로 대응되는 서로 다른 문자 둘이 있음을 추측하기	k를 7의 배수라고 하자. 그러면 자연수 l에 대하여 $k=7l$이다. 1과 16에 대하여 $1^k \sim 16^k$임을 보일 것이다.	P 6 R 3
21	이를 정당화하기 ([논제2](2)의 결과를 이용)	$16^k=16^{7l}=(2^4)^{7l}=2^{28l}=(2^l)^{28}$이고, 2^l은 29의 배수가 아니기 때문에 [논제2](2)의 결과에 의해 $(2^l)^{28} \sim 1$이다. 따라서 $1^k \sim 16^k$이 되어 'A'와 'P'가 모두 'A'로 변환되므로 7의 배수는 키로서 적절하지 않다.	P 6 R 4, 6 C 1, 2

해결과정 18, 20에서는 키로서 적절하지 않음의 정의와 같은 문자로 변환되는 서로 다른 두 문자가 있다는 개념 간의 연결성을 파악하는 능력을 볼 수 있으므로 P6, 구체적으로 어떤 두 숫자가 그럴 것인지 추측하는 능력을 볼 수 있으므로 R3가 드러난다. 해결과정 19, 21에서는 각각 앞의 해결과정을 정당화하는 과정으로서 제시문의 법칙(ⅳ)과 문제해

결 과정의 연결성을 볼 수 있으므로 P6, 수학적 추론에 근거하여 정당화하는 능력을 볼 수 있으므로 R4, 식으로 표현한 문제해결을 '어떤 두 문자가 어떤 문자로 변환된다'라고 해석하여 표현하는 능력을 볼 수 있으므로 R6, ~ 등의 수학적 표현을 이해하고 사용하는 능력을 볼 수 있으므로 C1, 문제 해결 과정을 논리적으로 설명하는지 볼 수 있으므로 C2가 드러난다. 이를 표로 정리하면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-10> 암호 문제 논제2(3)의 하위요소

번호	하위 요소	하위 요소를 구체적으로 제시
18	P 6	키로서 적절하지 않음의 정의와 같은 문자로 변환되는 다른 문자가 있다 개념의 연결성을 파악하는 능력
	R 3	구체적으로 어떤 두 숫자가 그럴 것이라고 추측하는 능력
19	P 6	제시문의 법칙(ⅳ)이 문제해결에 어떻게 연결이 되는지 파악하는 능력
	R 4	앞 단계에서의 추측을 수학적 추론에 근거하여 정당화하는 능력
	R 6	식의 결과를 어떤 문자가 어떤 문자로 변환되는지 해석하여 표현하는 능력
	C 1	~ 등의 수학적 표현을 이해하고 사용하는 능력
	C 2	문제해결 과정을 논리적으로 설명하는 능력
20	P 6	키로서 적절하지 않음의 정의와 같은 문자로 변환되는 다른 문자가 있다 개념의 연결성을 파악하는 능력
	R 3	구체적으로 어떤 두 숫자가 그럴 것이라고 추측하는 능력
21	P 6	제시문의 법칙(ⅳ)이 문제해결에 어떻게 연결이 되는지 파악하는 능력
	R 4	앞 단계에서의 추측을 수학적 추론에 근거하여 정당화하는 능력
	R 6	식의 결과를 어떤 문자가 어떤 문자로 변환되는지 해석하여 표현하는 능력
	C 1	~ 등의 수학적 표현을 이해하고 사용하는 능력
	C 2	문제해결 과정을 논리적으로 설명하는 능력

1.2 채점 기준표

1.1에서의 분석을 반영한 채점 기준표를 작성하였다. 21개의 해결과정을 적절히 조직하여 다음과 같이 8개의 채점코드를 만들었다.

<표 Ⅳ-11> 암호 문제 논제1의 채점기준표

채점 코드	배점	응답내용
01	3	암호의 변환 규칙을 잘 이해하고, 정확히 변환하였으며, 2가 키로서 적당하지 않음을 잘 정당화한 경우
	2	암호의 변환 규칙을 잘 이해하고 2가 키로서 적당하지 않음을 잘 정당화였지만, 정확히 변환하지는 못한 경우
	1	암호의 변환 규칙을 잘 이해하고, 정확히 변환하였지만, 2가 키로서 적당하지 않음을 정당화하지 못한 경우
	0	기타 오답, 무응답

<표 Ⅳ-12> 암호 문제 논제2(1)의 채점기준표

채점 코드	배점	응답내용
02	3	제시문의 법칙 (ⅳ)과 표를 이용하여 다음의 식을 잘 구하고 그 과정을 잘 정당화한 경우 $4\times8\times12\times\cdots\times(4\times28)\sim1\times2\times3\times\cdots\times28$
	2	제시문의 법칙 (ⅳ)과 표를 이용하여 다음의 식을 구하려고 하였고, 그 과정을 잘 정당화했으나 했으나 표현상 오류가 있는 경우 $4\times8\times12\times\cdots\times(4\times28)\sim1\times2\times3\times\cdots\times28$
	1	$4\times8\times12\times\cdots\times(4\times28)$, $1\times2\times3\times\cdots\times28$를 각각 29로 나눈 나머지가 같다고 언급하였으나 정당화는 하지 않은 경우
	0	기타 오답, 무응답
03	3	제시문의 법칙 (ⅴ)과 위의 식을 이용하여 28!을 소거하고 그 과정을 잘 정당화한 경우
	1	위의 식을 이용하여 28!을 소거했지만, 그 과정을 정당화하지 않은 경우
	0	기타 오답, 무응답

<표 Ⅳ-13> 암호 문제 논제2(2)(b)의 채점기준표

채점 코드	배점	응답내용
04	3	두 집합이 같음을 귀류법을 이용하여 잘 정당화한 경우
	1	정당화하지는 못하였지만 $4\times1, 4\times2, \cdots, 4\times28$을 29로 나눈 나머지가 모두 달라야 함은 인식하고 있는 경우
	0	기타 오답, 무응답

<표 Ⅳ-14> 암호 문제 논제2(2)(c)의 채점기준표

채점 코드	배점	응답내용
05	3	제시문의 법칙 (ⅳ)과 [논제2](2)(b)를 이용하여 다음의 식을 잘 구하고 그 과정을 잘 정당화한 경우 $a\times2a\times3a\times\cdots\times28a \sim 1\times2\times3\times\cdots\times28$
	2	제시문의 법칙 (ⅳ)과 [논제2](2)(b)를 이용하여 다음의 식을 구하려고 하였고, 그 과정을 잘 정당화했으나 했으나 표현상 오류가 있는 경우 $a\times2a\times3a\times\cdots\times28a \sim 1\times2\times3\times\cdots\times28$
	1	$a\times2a\times3a\times\cdots\times28a$, $1\times2\times3\times\cdots\times28$를 각각 29로 나눈 나머지가 같다고 언급하였으나 정당화는 하지 않은 경우
	0	기타 오답, 무응답
06	3	제시문의 법칙 (ⅴ)과 위의 식을 이용하여 $28!$을 소거하고 그 과정을 잘 정당화한 경우
	1	위의 식을 이용하여 $28!$을 소거했지만, 그 과정을 정당화하지 않은 경우
	0	기타 오답, 무응답

<표 Ⅳ-15> 암호 문제 논제2(3)의 채점기준표

채점 코드	배점	응답내용
07	2	키가 2의 배수일 때, 같은 문자로 변환되는 서로 다른 두 문자를 잘 제시하고 정당화한 경우
	1	키가 2의 배수일 때, 같은 문자로 변환되는 서로 다른 두 문자를 잘 제시하였으나 정당화하지 않은 경우
	0	기타 오답, 무응답
08	2	키가 7의 배수일 때, 같은 문자로 변환되는 서로 다른 두 문자를 잘 제시하고 정당화한 경우
	1	키가 7의 배수일 때, 같은 문자로 변환되는 서로 다른 두 문자를 잘 제시하였으나 정당화하지 않은 경우
	0	기타 오답, 무응답

1.3 채점 결과 및 두 독립표본 t검정 결과

32명의 학생을 대상으로 수리논술 답안지를 받았지만, 두 번의 시험에 모두 응시한 학생은 27명이었다. 27명의 답안에 대하여 위의 채점 기준표를 갖고 채점한 결과는 다음과 같다. P로 시작되는 학생은 선행학습을 한 학생이며, N으로 시작되는 학생은 선행학습을 하지 않은 학생이다.

<표 Ⅳ-16> 암호 문제 채점 결과

학생	01	02	03	04	05	06	07	08	총점
P01	2	1	0	0	1	0	1	1	6
P02	3	3	3	1	3	3	0	0	16
P03	2	1	1	0	1	3	1	1	10
P04	3	1	1	0	1	0	0	0	6
P05	2	0	0	0	0	0	1	0	3
P06	0	0	0	0	0	0	0	1	1
P07	1	0	0	0	0	0	0	0	1
N01	3	0	0	0	0	0	0	0	3
N02	3	1	3	0	3	3	0	0	13
N03	2	3	3	0	3	1	1	2	15
N04	3	3	0	0	0	0	0	0	6
N05	1	0	0	0	0	0	0	0	1
N06	3	3	3	0	3	3	0	0	15
N07	3	3	0	0	0	0	1	1	8
N08	1	0	0	0	0	0	0	0	1
N09	3	0	0	0	1	1	0	0	5
N10	3	3	0	3	0	0	0	0	9
N11	3	3	1	1	3	1	2	1	15
N12	3	0	0	0	0	0	0	0	3
N13	2	0	0	0	0	0	0	0	2
N14	0	0	0	0	0	0	0	0	0
N15	3	3	1	1	3	1	0	2	14
N16	3	3	3	0	3	3	1	1	17
N17	3	3	3	1	3	3	0	0	16
N18	3	3	3	0	0	0	0	0	9
N19	3	3	3	1	3	3	0	0	16
N20	3	0	0	0	0	0	1	1	5

선행학습 여부에 따라 수정된 암호 문제에 대한 학생들의 성적에 차이가 있는가를 확인하기 위하여 두 독립표본 t검정(two- independent sample t test)을 실시하였다. 앞서 언급한 것과 같이 표본의 수가 적기 때문에 결론을 일반화시키기에는 한계가 있다는 점을 다시 한 번 밝혀둔다. 27명 학생들의 선행학습 여부에 따른 암호 문제 총점의 차이를 알아보기 위하여 두 독립표본 t검정을 실시한 결과는 다음 표와 같다.

<표 Ⅳ-17> 암호 문제 두 독립표본 t검정 결과

선행학습 여부	선행집단	비선행집단
평균	6.29	8.75
표준편차	5.407	6.112
사례수	7	20
t 통계값	-.943	
유의확률	.355	

선행집단의 암호문제 평균은 6.29, 표준편차는 5.407이고, 비선행집단의 암호문제 평균은 8.75, 표준편차는 6.112이다. 선행학습 여부의 암호문제 성적 차이가 있는가에 대한 t통계값은 -.943, 유의확률은 .355으로서 유의수준 .05에서 선행학습 여부에 따라 암호문제 성적은 유의한 차이가 없는 것으로 분석되었다.

각각의 문항에 대한 t검정 결과는 다음과 같다. 사례수는 동일하므로 생략하였다.

<표 Ⅳ-18> 암호 문제 논제별 두 독립표본 t검정 결과

채점 코드	t검정 결과			채점 코드	t검정 결과		
01	선행학습 여부	선행집단	비선행집단	05	선행학습 여부	선행집단	비선행집단
	평균	1.86	2.55		평균	0.86	1.25
	표준편차	1.069	0.887		표준편차	1.069	1.482
	t 통계값	-1689			t 통계값	-.642	
	유의확률	.104			유의확률	.527	
02	선행학습 여부	선행집단	비선행집단	06	선행학습 여부	선행집단	비선행집단
	평균	0.86	1.70		평균	0.86	0.95
	표준편차	1.069	1.490		표준편차	1.464	1.276
	t 통계값	-1.370			t 통계값	-.160	
	유의확률	.183			유의확률	.874	
03	선행학습 여부	선행집단	비선행집단	07	선행학습 여부	선행집단	비선행집단
	평균	0.71	1.15		평균	0.57	0.35
	표준편차	1.113	1.424		표준편차	0.787	0.671
	t 통계값	-.732			t 통계값	.720	
	유의확률	.472			유의확률	.478	
04	선행학습 여부	선행집단	비선행집단	08	선행학습 여부	선행집단	비선행집단
	평균	0.14	0.40		평균	0.43	0.40
	표준편차	0.378	0.745		표준편차	0.535	0.681
	t 통계값	-.792			t 통계값	-.100	
	유의확률	.436			유의확률	.921	

각 문항에 대한 유의확률 역시 유의수준 .05에서 유의한 차이가 없는 것으로 분석되었다. 앞서 언급한 것과 같이 표본의 수가 적어서 이 결과는 큰 의미를 갖지 않을 수 있다. 이를 보완하기 위하여 다음 절에서는 질적 분석을 통해 선행학생의 답안과 비선행학생의 답안을 분석해보도록 할 것이다.

1.4 선행학생의 답안과 비선행학생의 답안 분석

4절에서는 선행학습을 한 학생의 답안과 그렇지 않은 학생의 답안을 분석함으로써 선행학습 여부가 어떤 영향을 미쳤는지를 알아보고자 한다. 암호문제는 Ⅲ장에서 설명한 것처럼 선행학습 여부가 영향을 미치지 않도록 수정하였기 때문에, 여기에서는 실제 학생 답안에서도 선행학습이 미친 영향이 없었는지를 확인하였다. 선행학습 집단에서 가장 높은 점수를 얻은 P02를 선정하였고, 비선행학습 집단에서는 P02와 수리논술 성적이 비슷한 학생인 N11을 선정하였다. 다음은 두 학생의 점수이다.

<표 Ⅳ-19> 암호 문제 질적 분석 대상 학생 점수

학생	01	02	03	04	05	06	07	08	총점
P02	3	3	3	1	3	3	0	0	16
N11	3	3	1	1	3	1	2	1	15

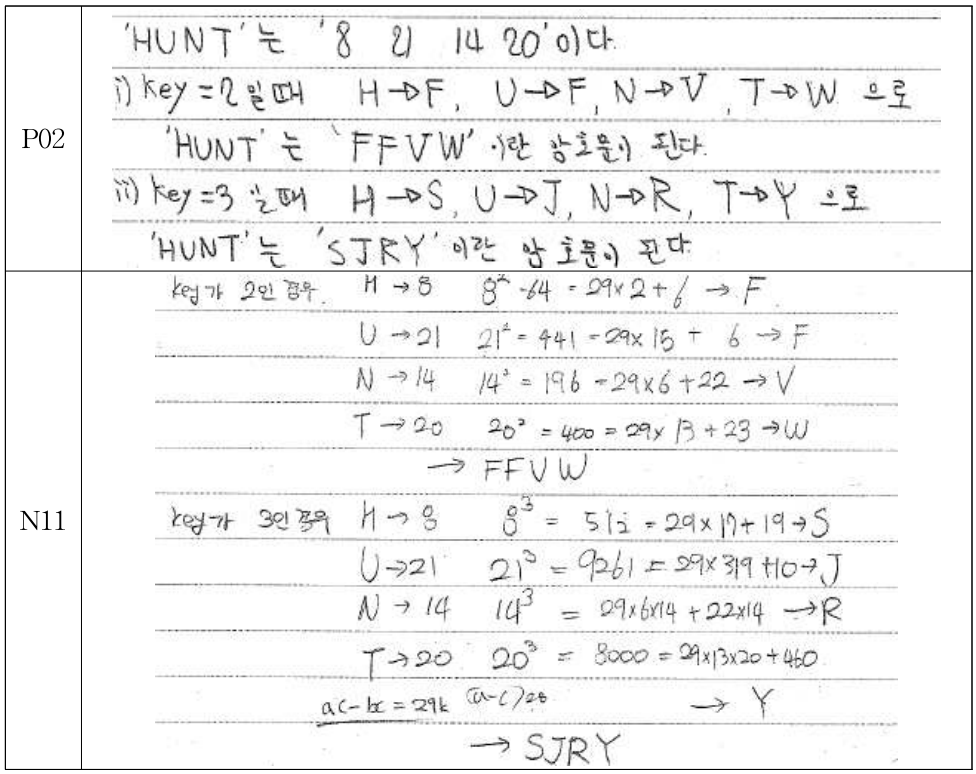
두 학생은 총점은 비슷하지만 세부 내용을 살펴보면 차이점이 있다. P02는 [논제1]과 [논제2]에서는 거의 만점에 가까운 점수를 받았지만, [논제3]은 해결하지 못했다. N11은 [논제1]부터 [논제3]까지 골고루 점수를 받았지만, 채점코드03, 06에서 논리적 정당화를 제대로 하지 못하여 감점이 있었다. 이제는 각 채점코드별로 두 학생의 답안에 있어서 차이점을 분석해보겠다.

1.4.1 채점코드 01

채점코드 01에서는, 키가 2와 3일 때 제시문에 주어진 규칙에 따라 'HUNT'를 정확히 암호로 변환할 수 있는지와 왜 2가 키로서 적당하지 않은지를 정당화해야 한다.

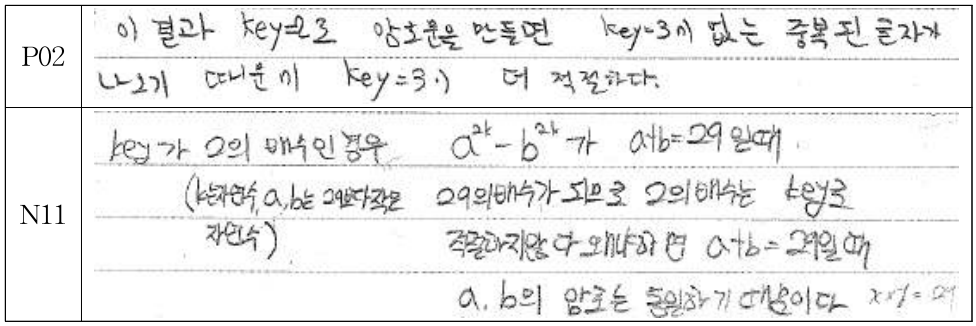
두 학생은 모두 각각의 키에 대하여 제시문에 주어진 규칙대로 'HUNT'

를 변환해내었고, 자신의 답이 맞았는지 검검하였다. 이 과정에서는 제시문에 나온 규칙을 잘 이해하는 것과 정확히 계산해내는 능력이 필요하고 이것은 선행학습 여부와 관련된 것이 아니라고 생각할 수 있다. 다음은 두 학생의 답안이다.



[그림 Ⅳ-1] 암호 문제 채점코드 01 학생답안 ①

왜 2는 키로서 적당하지 않은지에 대하여 P02는 중복된 글자가 나오기 때문에, N11은 $a+b=29$인 a, b의 암호는 동일하기 때문이라고 표현하는 등 표현은 다르지만 정확하게 설명하였다. 이 부분에 선행학습 여부는 영향을 미치지 않았다. 다음은 두 학생의 답안이다.

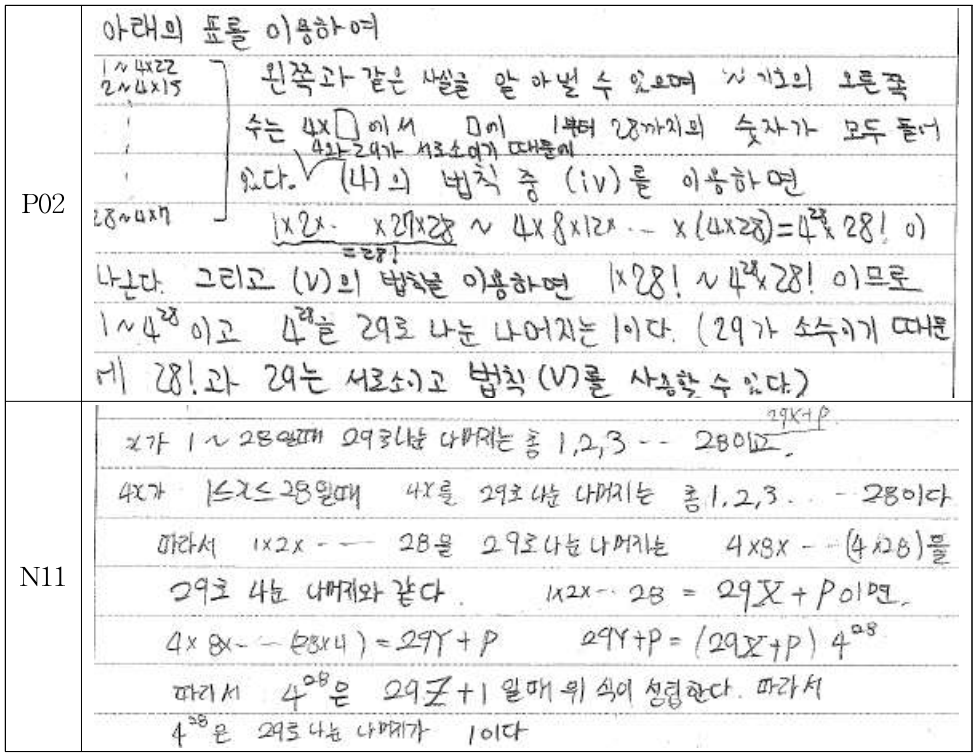


[그림 Ⅳ-2] 암호 문제 채점코드 01 학생답안 ②

이와 같이 채점코드 01에 대한 두 학생의 설명은 모두 제시문에 근거한 것으로, 선행 여부에 따른 차이점은 발견되지 않았다.

1.4.2 채점코드 02, 03

채점코드 02, 03에서는 4^{28}을 29로 나눈 나머지가 1임을 제시문에 주어진 합동식의 법칙 (ⅳ), (ⅴ)와 논제에 주어진 표를 이용하여 정당화해야 하는 문제이다. 두 채점코드에서 P02는 모두 만점을 받았다. 그러나 이미 알고 있는 선행지식에 근거하여 설명하는 것이 아니라 다음과 같이 '아래의 표를 이용하여', '(제시문)(나)의 법칙 중 (ⅳ)를 이용하면', '(ⅴ)의 법칙을 이용하면' 등으로 정당화의 근거를 찾고 있으며 이는 모두 제시문에 주어져 있는 것이다. 따라서 P02가 이 문항을 해결하는 데에 중요한 역할을 한 것은 제시문과 논제임을 알 수 있다. N11은 교과과정 내에서 학습한 형태인 $A=BQ+R$(단, Q는 몫, R은 나머지)를 이용하여 정당화하는 것을 시도하였다. N11은 P02에 비하여 제시문의 성질을 명확하게 인용한다고 적지는 않았기 때문에 채점코드 03에서 2점이 감점되었다. 둘 모두 제시문 또는 교육과정 내의 형태를 이용하여 정당화한 것으로 이 역시 선행학습 여부가 영향을 미치지 않았다. 다음은 두 학생의 답안이다.

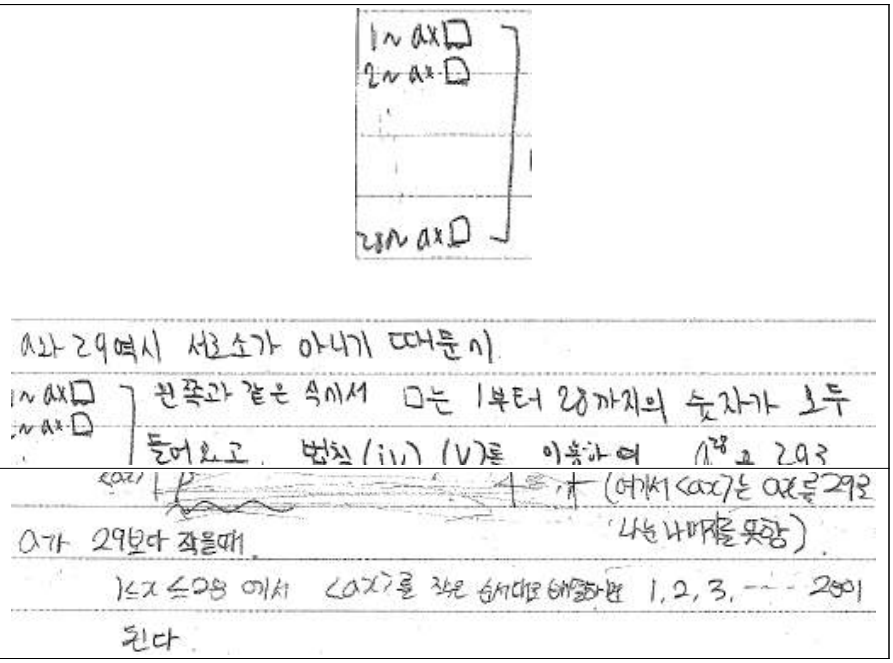


[그림 Ⅳ-3] 암호 문제 채점코드 02, 03 학생답안

1.4.3 채점코드 04

채점코드 04는 29의 배수가 아닌 자연수 a에 대하여 $a, 2a, \cdots, 28a$를 29로 나눈 나머지의 집합이 $\{1, 2, \cdots, 28\}$와 같음을 정당화하는 것이다. 여기에서 두 학생은 모두 두 집합이 같을 것이라는 추측은 하였으나, 그것을 명확히 정당화하지는 못했다. [논제1]이나 [논제2](1)처럼 숫자로 증명을 하는 것이 아니라 문자를 이용하여 증명해야 하는 문항이라 학생들에게 어렵게 다가왔을 수 있을 것이라 예상한다. 27명의 학생 중 단 한명만이 이 부분에서 만점을 받았다는 것은 거의 모든 학생들이 이 증명을 어렵게 생각하며, 특히 그 학생이 비선행학습 집단의 학생이라는

것은 선행학습이 답안 작성에 긍정적인 영향을 미치지는 않았음을 보여준다. 다음은 두 학생의 답안이다.

P02	
N11	

[그림 Ⅳ-4] 암호 문제 채점코드 04 학생답안

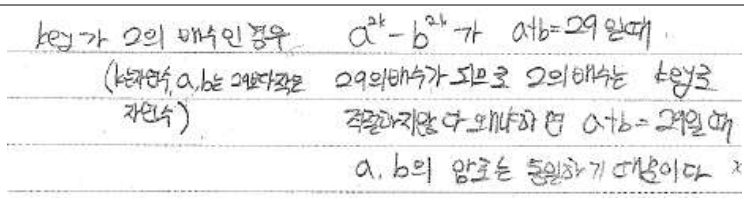
1.4.4 채점코드 05, 06

채점코드 05, 06은 채점코드 02, 03과 평행한 것으로 두 학생은 채점코드 02, 03에서와 같이 P02는 만점, N11은 3점, 1점을 받았다.

1.4.5 채점코드 07, 08

채점코드 07, 08은 각각 2의 배수, 7의 배수가 키로서 적당하지 않음을 정당화하는 것으로, P02는 응답하지 못하여 0점을 받았고, N11은 2의

배수는 다음과 같이 정당화하였기 때문에 2점, 7의 배수는 제시는 하였으나 정당화는 하지 못했기 때문에 1점을 받았다. 이것은 수학적으로 추측하는 능력과 그것을 정당화하는 능력을 평가하는 것으로 이 부분 역시 선행 학습의 영향이 없었다. 다음은 두 학생의 답안이다.

P02	무응답
N11	

[그림 Ⅳ-5] 암호 문제 채점코드 05, 06 학생답안

2. 나무 심기 문제

2.1 수학적 과정 하위 요소로 분석한 나무심기 문제

첫 번째 연구문제를 해결하기 위하여 나무 심기문제를 수학적 과정 하위 요소로 분석하였다. 암호문제와 마찬가지로 여러 단계의 해결과정으로 나누었고, 정상권 외(2012)를 참고하였다. 나무 심기문제를 해결하는 과정에서 드러날 수 있는 수학적 과정 요소는 다음과 같다.

- 문제해결에 필요한 조건의 확인 또는 보완 능력(P4)
- 문제해결에 적절한 형태로 표현을 변환하는 능력(P5)
- 문제해결에서 사용되는 개념들 간의 연결성을 인식하고 활용하는 능력(P6)
- 문제해결에서 적절한 전략을 활용하여 문제를 해결하는 능력(P7)
- 수학적으로 추측하는 능력(R3)

- 수학적 추론에 근거한 정당화 능력(R4)
- 추론과정과 결과를 해석하거나 평가하는 능력(R6)
- 수학적 표현을 이해하고 사용하는 능력(C1)
- 자신의 문제해결 또는 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력(C2)
- 문제해결 또는 추론 과정을 수학적인 언어로 표현하는 능력(C5)

이를 해결 과정에 따라 제시하면 다음 표와 같다.

[논제 1] (1)

<표 Ⅳ-20> 나무심기 문제 논제1(1)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소

번호	해결과정	예시답안에서의 표현	하위요소
01	두 직선이 일치한다고 가정하여 모순을 이끌어내는 방법으로 증명하려고 하기	논제의 조건을 만족하는 k, l, k', l'에 대하여 두 직선 $y=\frac{k}{l}x$와 $y=\frac{k'}{l'}x$이 일치한다고 가정하자.	P 7
02	k, l과 k', l'이 서로소임을 이용하여 모순을 이끌어내기	그러면 $\frac{k}{l}=\frac{k'}{l'}$ 이므로 $kl'=k'l$이다. 따라서 $k'l$은 k의 배수이다. 그런데 가정에 의해 k와 l은 서로소이므로 k'이 k의 배수가 된다. 가정에 의해 $k\neq k'$이므로 1보다 큰 자연수 a에 대하여 $k'=ak$가 성립한다. 이것을 $kl'=k'l$에 대입하여 정리하면 $kl'=k'l=(ak)l$이므로 $l'=al$이다. 가정에 의해 k', l'은 서로소인데, 1보다 큰 자연수 a에 대하여 $k'=ak$, $l'=al$이므로 모순이다.	P 5, 6 R 4 C 1, 2
03	두 직선이 일치할 수 없음을 정당화함	따라서 논제의 조건을 만족하는 k, l, k', l'에 대하여 두 직선 $y=\frac{k}{l}x$와 $y=\frac{k'}{l'}x$은 일치할 수 없다.	C 3

해결과정 01에서는 귀류법의 문제해결 전략을 사용하는 것을 볼 수 있으므로 P7, 해결과정 02에서는 두 직선이 일치한다를 $\frac{k}{l}=\frac{k'}{l'}$ 으로 변형하는 능력을 보므로 P5, 서로소와 기울기가 일치한다의 연결성을 파악하는 능력을 보므로 P6, 수학적 추론에 근거한 정당화 능력을 보므로 R4, 추론 과정에서 올바른 기호를 사용했는가를 보므로 C1, 추론 과정에서 논리적으로 설명하는가를 보므로 C2가 드러난다. 채점과정 03에서는 자신의 문제 해결 과정을 반성적으로 표현하는 능력을 볼 수 있으므로 C3이 드러난다. 이를 표로 정리해보면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-21> 나무심기 문제 논제1(1)의 하위요소

번호	하위 요소	하위 요소를 구체적으로 제시
01	P 7	귀류법이라는 문제해결 전략을 활용하여 문제를 해결하는 능력
02	P 5	두 직선이 일치한다를 $\frac{k}{l}=\frac{k'}{l'}$ 으로 변형하는 능력
	P 6	서로소와 기울기가 일치하는 것의 연결성을 파악하는 능력
	R 4	수학적 추론에 근거하여 정당화하는 능력
	C 1	예시문항의 a와 같은 새로운 기호를 정의하고 사용했는가 등의 수학적으로 바른 표현을 사용하는 능력
	C 2	추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력
03	C 3	자신의 문제 해결 과정을 반성적으로 표현하는 능력

[논제 1](2)

<표 Ⅳ-22> 나무심기 문제 논제1(2)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소

번호	해결과정	예시답안에서의 표현	하위 요소
04	8개의 점에 나무를 심을 수 있음을 보이기	아래 참고[10]	P 6, 7 R 4 C 1, 2
05	그 외의 점에 나무를 심을 수 없음을 보이기	아래 참고[11]	P 6 R 3, 4 C 1, 2

10) $k \geq 2$ 일 때, k 번째 날의 나무를 심을 수 있는 점의 좌표는 k 와 서로소인 양의 정수 l (단, $l \leq k$)에 대하여 $(k, l), (k, -l), (-k, l), (-k, -l), (l, k), (l, -k), (-l, k), (-l, -k)$ 뿐임을 k 에 수학적 귀납법을 적용하여 보이자. 편의상 위의 $8f(k)$ 개의 점을 'k 의 서로소인 점들'이라고 부르자.

먼저 $k=2$ 일 때 위의 명제가 참임을 보이자. 2 의 서로소인 점, 즉 $(2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1), (1, 2), (1, -2), (-1, 2), (-1, -2)$ 각각은 직선 $y=\frac{1}{2}x, y=-\frac{1}{2}x, y=2x, y=-2x$ 중 하나 위에 있다. 첫째 날에 심은 점의 좌표 $(-1, 1), (-1, 0), (-1, -1), (0, 1), (0, -1), (1, 1), (1, 0), (1, -1)$ 각각은 모두 직선 $y=0, x=0, y=x, y=-x$ 위에 있고, 2의 서로소인 점들은 이 직선 위에 있지 않다. 따라서 2의 서로소인 점들은 원두막의 중심인 $(0, 0)$ 에서 보았을 때 첫째 날 심은 나무들에 의해 가려지지 않는다. 나머지 격자점인 $(2, 2), (2, -2), (-2, 2), (-2, -2), (2, 0), (0, 2)$ 은 직선 $y=0, x=0, y=x, y=-x$ 중 하나 위에 있으므로 이 점의 좌표에는 나무를 심을 수 없다. 따라서 $k=2$ 일 때 성립한다.

이제 $2 \leq k \leq n$ 인 모든 자연수 k 에 대하여 위의 명제가 참이라고 가정하자. 그러면 가정에 의하여 $2 \leq k \leq n$ 인 k 에 대하여 k 의 '서로소인 점들'은 k 와 서로소이면서 k 보다 작은 양의 정수 l 에 대하여 직선 $y=\frac{k}{l}x, y=-\frac{k}{l}x, y=\frac{l}{k}x, y=-\frac{l}{k}x$ 위에 있다. 반면에 $(n+1)$ 번째 날에 $n+1$ 의 서로소인 점들은 $n+1$ 과 서로소이면서 $n+1$ 보다 작은 양의 정수 l 에 대하여 직선 $y=\frac{n+1}{l}x, y=-\frac{n+1}{l}x, y=\frac{l}{n+1}x, y=-\frac{l}{n+1}x$ 위에 있고, 이들 직선의 기울기는 $2 \leq k \leq n$ 인 k 에 대하여 k 의 서로소인 점들이 있는 직선의 기울기와 일치하지 않는다. 왜 그런지 보기 위하여 $n+1$ 과 서로소이면서 $n+1$ 보다 작은 양의 정수 l 에 대하여 $y=\frac{n+1}{l}x$ 가 k 와 서로소이면서 k 보다 작은 양의 정수 l' 에 대하여 $y=\frac{k}{l'}x, y=-\frac{k}{l'}x, y=\frac{l'}{k}x, y=-\frac{l'}{k}x$ 중의 하나와 일치한다고 가정하자. 그러면 $\frac{n+1}{l}>0$ 이므로 $y=\frac{n+1}{l}x$ 와 일치할 수 있는 것은 $y=\frac{k}{l'}x$ 또는 $y=\frac{l'}{k}x$ 중의 하나 이다. 그런데 [논제 1](1)의 결과에 의하여 이것은 모두 불가능하다. 나머지 경우도 비슷하게 증명할 수 있다. 따라서 $n+1$ 의 서로소인 점들에 심은 나무는 원두막의 중심인 $(0, 0)$ 에서 보았을 때 그 전에 심은 나무들에 의해 가려지지 않는다.

11) 이제 절댓값이 $n+1$ 이하이고 $n+1$ 과 서로소가 아닌 정수 m 을 택하자. 그러면 $n+1=dp$ 이고 $m=dq$ 인 2이상인 정수 d, 절댓값이 서로소인 정수 p, q 가 존재한다(이 때 d 는 $n+1$ 과 m 의 최대공약수이다). 그러면 $(n+1, m)$ 은 직선 $y=\frac{q}{p}x$ 위에 있다 귀납적 가정에 의해 (p, q) 의 좌표에 이미 나무를 심게 되므로 $(n+1, m)$ 은 이 점에 가려 보이지 않는다. 나머지

해결과정 04에서는 [논제 1](1)의 결과와 나무의 위치와의 연결성을 볼 수 있으므로 P6, 수학적 귀납법이라는 문제해결 전략으로 문제를 해결하는 능력을 볼 수 있으므로 P7, 수학적 추론에 근거하여 정당화하는 능력을 보는 R4, 수학적으로 올바른 표현을 사용하는가를 볼 수 있으므로 C1, 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력을 볼 수 있으므로 C2가 드러난다. 해결과정 05에서는 서로소가 아니다와 나무를 심을 수 없음의 연결성을 파악하는 능력을 볼 수 있으므로 P6, 서로소가 아니라면을 수학적으로 추측하는 R3, 추측을 수학적 추론에 근거하여 정당화하는 R4, 수학적으로 바른 표현을 사용하는가의 C1, 추론 과정을 논리적으로 설명하는가의 C2가 드러난다. 이를 표로 정리해보면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-23> 나무심기 문제 논제1(2)의 하위요소

번호	하위 요소	하위 요소를 구체적으로 제시
04	P 6	[논제1](1)의 결과와 이전에 심은 나무의 위치와의 연결성을 파악하는 능력
	P 7	수학적 귀납법이라는 문제해결 전략을 활용하여 문제를 해결하는 능력
	R 4	수학적 추론에 근거하여 정당화하는 능력
	C 1	수학적으로 바른 표현을 사용하는 능력
	C 2	추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력
05	P 6	서로소가 아니다와 나무를 심을 수 없다의 연결성을 파악하는 능력
	R 3	서로소가 아니라면을 가정하여 수학적으로 추측하는 능력
	R 4	수학적 추론에 근거하여 정당화하는 능력
	C 1	수학적으로 바른 표현을 사용하는 능력
	C 2	추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력

경우도 비슷하게 증명할 수 있다. 이것으로 위의 명제가 참이라는 결론을 내릴 수 있다.

[논제 1](3)

<표 Ⅳ-24> 나무심기 문제 논제1(3)의 해결과정과 수학적 과정 하위요소

번호	해결과정	예시답안에서의 표현	하위 요소
06	[논제 1](2)의 결과를 바탕으로 $n \geq 2$인 경우 나무의 수를 $f(n)$으로 표현하기	위의 논의에 따라 $n \geq 2$일 때, n번째 날 나무를 심을 수 있는 점의 좌표는 $l \leq n$이고 n과 서로소인 자연수 l에 대하여 정확히 $(n, l), (n, -l), (-n, l), (-n, -l), (l, n), (l, -n), (-l, n), (-l, -n)$ 이므로 n번째 날에는 $8f(n)$ 그루의 나무를 심을 수 있다.	P 6 C 2
07	$n = 1$인 경우 나무의 수를 $f(n)$으로 표현하기	또한 $n = 1$인 경우, $f(1) = 1$이고 첫째 날 심는 나무의 수는 8이므로 첫 번째 날 심는 나무의 수도 $8f(1)$로 쓸 수 있다.	P 4, 5 C 2

해결과정 06에서는 [논제 1](2)의 결과와 $f(n)$과의 연결성을 파악하는 능력을 볼 수 있으므로 P6, 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력을 볼 수 있으므로 C2가 드러난다. 해결과정 07에서는 [논제 1](2)의 결과가 $n \geq 2$인 경우에만 한한 것을 인지하고 $n = 1$일 때를 따로 보여야 함을 파악할 수 있으므로 P4, 첫째날 심은 나무의 수를 f로 변환할 수 있는가를 볼 수 있으므로 P5, 추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력을 볼 수 있으므로 C2가 드러난다. 이를 표로 정리해보면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-25> 나무심기 문제 논제1(3)의 하위요소

번호	하위 요소	하위 요소를 구체적으로 제시
06	P 6	[논제1](2)의 결과와 $f(n)$과의 연결성을 파악하는 능력
	C 2	추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력
07	P 4	[논제1](2)의 결과가 $n \geq 2$인 경우에 한하며 $n = 1$인 경우는 따로 보여야 함을 인지하는 능력
	P 5	첫째날 심은 나무의 수를 $f(1)$로 바꾸어 표현하는 능력
	C 2	추론 과정을 논리적으로 설명하는 능력

[논제 2]

<표 Ⅳ-26> 나무심기 문제 논제2의 해결과정과 수학적 과정 하위요소

번호	해결과정	예시답안에서의 표현	하위 요소
08	[논제 1]의 결과를 바탕으로 열흘간 심은 나무의 총 수를 $f(n)$의 형태로 표현하기	[논제 1]의 결과에 의하여 열흘간 심은 나무의 총 수는 $8 \cdot f(1) + 8 \cdot f(2) + \cdots + 8 \cdot f(10)$ 이다.	P 5, 6
09	n이 한 소수의 거듭제곱꼴($n = p^a$)인 경우에 대하여 $f(n)$의 값을 찾아내기	그런데 제시문 (가)의 성질(2)에 의하여 소수 p, 자연수 m에 대하여 $n = p^m$이면 $f(n) = p^{m-1}(p-1)$이므로 다음이 성립한다. $f(2) = 2^{1-1}(2-1) = 1$ $f(3) = 3^{1-1}(3-1) = 2$ $f(4) = f(2^2) = 2^{2-1}(2-1) = 2$ $f(5) = 5^{1-1}(5-1) = 4$ $f(7) = 7^{1-1}(7-1) = 6$ $f(8) = f(2^3) = 2^{3-1}(2-1) = 4$ $f(9) = f(3^2) = 3^{2-1}(3-1) = 6$	P 6, 7 R 4 C 5
10	n이 서로 다른 두 소수의 곱 꼴($n = p_1p_2$)인 경우에 $f(n)$의 값을 찾아내기	또한 제시문 (가)의 성질(1)에 의하여 서로소인 두 자연수 m, n에 대하여 $f(mn) = f(m)f(n)$이므로 다음이 성립한다. $f(6) = f(2) \cdot f(3) = 2$ $f(10) = f(2) \cdot f(5) = 4$	P 6, 7 R 4 C 5
11	앞의 결과와 $f(1)$의 값를 바탕으로 열흘간 심은 나무의 수를 정확히 구하기	또한 $f(1) = 1$이므로 열흘간 심은 나무의 총 수는 256 그루이다.	R 6

해결과정 08에서는 열흘간 심은 나무의 수를 f로 문제해결에 적합한 형태로 변환하는 능력을 볼 수 있으므로 P5, [논제 1]의 결과와 f의 연결성을 파악하는 능력을 볼 수 있으므로 P6이 드러난다. 해결과정 09와 해결과정 10에서는 제시문(가)의 성질 (2) 또는 성질 (1)과 문제해결 과정의 연결성을 파악하는 능력을 볼 수 있으므로 P6, 소인수의 개수에 따

라 경우나누기 전략을 하는지 볼 수 있으므로 P7, 수학적 추론에 근거한 정당화 능력을 볼 수 있으므로 R4, 정확히 계산하였는가 점검 능력을 볼 수 있으므로 C5가 드러난다. 해결과정 11에서는 문제해결 결과를 다시 나무의 수로 바꾸어 해석하는 능력을 볼 수 있으므로 R6이 드러난다. 이를 표로 정리해보면 다음과 같다.

<표 Ⅳ-27> 나무심기 문제 논제2의 하위요소

번호	하위 요소	하위 요소를 구체적으로 제시
08	P 5	열흘간 심은 나무의 수를 f에 대한 식으로 문제해결에 적합한 형태로 변환하는 능력
	P 6	[논제 1]의 결과와 f의 연결성을 파악하는 능력
09	P 6	제시문(가)의 성질 (2)와 문제해결의 연결성을 파악하는 능력
	P 7	소인수의 개수에 따라 경우나누기 전략을 쓰는 능력
	R 4	수학적 추론에 근거한 정당화 능력
	C 5	정확히 계산하였는가를 점검하는 능력
10	P 6	제시문(가)의 성질 (1)과 문제해결의 연결성을 파악하는 능력
	P 7	소인수의 개수에 따라 경우나누기 전략을 쓰는 능력
	R 4	수학적 추론에 근거한 정당화 능력
	C 5	정확히 계산하였는가를 점검하는 능력
11	R 6	문제 해결 결과를 다시 열흘간 심은 나무의 수로 바꾸어 해석하는 능력

[논제 3]

<표 Ⅳ-28> 나무심기 문제 논제3의 해결과정과 수학적 과정 하위요소

번호	해결과정	예시답안에서의 표현	하위 요소
12	[논제 1]의 결과를 바탕으로, 문제를 f에 관한 식으로 바꾸기	[논제 1]의 결과에 의하여 n번째 날 심는 나무의 수는 $8f(n)$이다. 따라서 [논제3]은 $f(n)=6$이 되는 자연수 n의 값을 모두 찾는 문제이다.	R 5, 6
13	n이 한 소수의 거듭제곱꼴($n=p_1^{a_1}$)일 때 $f(n)=6$을 만족하는 n의 값을 찾아내기	아래 참고[12]	P 6, 7 R 4 C 2, 5
14	n이 서로 다른 두 소수의 거듭제곱 꼴($n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}$)일 때 $f(n)=6$을 만족하는 n의 값을 찾아내기	아래 참고[13]	P 6, 7 R 4 C 2, 5
15	n이 서로 다른 세 개 이상의 소수의 곱 형태이면 $f(n)=6$이 될 수 없음을 보이기	$m\geq 3$이면 $p_1\geq 2, p_2\geq 3, p_3\geq 5$이므로 $f(n)\geq (p_1-1)(p_2-1)(p_3-1)\geq 1\cdot 2\cdot 4=8$이 된다. 따라서 $f(n)=6$이 되려면 $m\leq 2$이다.	P 7 R 3, 4 C 2
16	n의 값을 다시 나무를 심는 문제 상황으로 재해석하여 표현하기	따라서 48그루의 나무를 심게 되는 날은 일곱째 날, 아홉째 날, 열넷째 날, 열여덟째 날이다.	R 6

12) $m=1$이라고 하자. $f(n)=f(p_1^{\alpha_1})=p_1^{\alpha_1-1}(p_1-1)=6$이고 p_1은 소수이므로 p_1-1의 값은 1, 2, 6중의 하나이다. $p_1-1=1$이라고 하면 $p_1=2$이므로 $p_1^{\alpha_1-1}=2^{\alpha_1-1}=6$인데, 2의 거듭제곱으로 6을 만들 수 없으므로 이 경우에는 n값을 찾을 수 없다. $p_1-1=2$이라고 하면 $p_1=3$이므로 $p_1^{\alpha_1-1}=3^{\alpha_1-1}=3$이 되어 $\alpha_1=2$이다. 이 때 $n=p_1^{\alpha_1}=3^2=9$이다. $p_1-1=6$이라고 하면 $p_1=7$이므로 $p_1^{\alpha_1-1}=7^{\alpha_1-1}=1$이 되어 $\alpha_1=1$이다. 이 때 $n=p_1^{\alpha_1}=7^1=7$이다.

13) $m=2$라고 하자. $f(n)=f(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2})=p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=6$이고 $p_2-1\geq 2$이므로 p_2-1의 값은 2, 3, 6중의 하나이다. 그러나 $p_2-1=3$이

해결과정 12에서는 48그루의 나무를 심는 것을 f에 관한 식으로 문제해결에 적합한 형태로 변환하는 능력을 보므로 P5, [논제 1]의 결과와 f의 연결성을 파악하는 능력을 보므로 P6이 드러난다. 해결과정 13, 해결과정 14에서는 제시문(가)의 성질 (1)과 (2)를 문제해결과 연결 짓는 능력을 볼 수 있으므로 P6, 소인수의 개수에 따라 경우나누기 전략을 쓰고 있는가를 볼 수 있으므로 P7, 수학적 추론 과정에 근거한 정당화 능력을 볼 수 있으므로 R4, 문제해결 과정을 논리적으로 설명하는 능력을 볼 수 있으므로 C2, 정확히 계산하였는가를 점검하는 능력으로 C5가 드러난다. 해결과정 15에서는 수학적으로 추측하는 능력인 R3, 추측을 수학적으로 정당화하는 능력인 R4, 문제해결 과정을 논리적으로 설명하는 능력인 C2를 볼 수 있다. 해결과정 16에서는 문제해결 과정의 결과인 n의 값을 다시 문제를 심는 상황으로 바꾸어 해석하는 능력을 볼 수 있으므로 R6이 드러난다. 이를 표로 정리하면 다음과 같다.

면 $p_2=4$가 되어 p_2가 소수라는 가정에 모순이므로 $p_2\neq 4$이다. 먼저 $p_2-1=2$인 경우를 생각하자. 그러면 $p_2=3$이 되고 $p_1<p_2$이므로 $p_1=2$이다. $p_2-1=2$이고 $f(n)=6$이므로 $p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)=2^{\alpha_1-1}3^{\alpha_2-1}(2-1)=3$이다. 따라서 $\alpha_1=1$, $\alpha_2=2$이다. 이 때 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}=2^1 3^2=18$이다. 이제 $p_2-1=6$인 경우를 생각하자. 그러면 $p_2=7$이 되고 $p_1<p_2$이므로 p_1은 2, 3, 5 중의 하나이다. $p_2-1=6$이고 $f(n)=6$이므로 $p_1^{\alpha_1-1}p_2^{\alpha_2-1}(p_1-1)(p_2-1)=p_1^{\alpha_1-1}7^{\alpha_2-1}(p_1-1)(7-1)=6$이다. 따라서 $p_1^{\alpha_1-1}=7^{\alpha_2-1}=p_1-1=1$이다. 따라서 $p_1=2$이고 $\alpha_1=\alpha_2=1$이다. 이 때 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}=2^1 7^1=14$이다.

<표 Ⅳ-29> 나무심기 문제 논제3의 하위요소

번호	하위 요소	하위 요소를 구체적으로 제시
12	P 5	48그루의 나무를 심는 것을 f에 대한 식으로 문제해결에 적합한 형태로 변환하는 능력
	P 6	[논제 1]의 결과와 f의 연결성을 파악하는 능력
13	P 6	제시문(가)의 성질 (2)와 문제해결의 연결성을 파악하는 능력
	P 7	소인수의 개수에 따라 경우나누기 전략을 쓰는 능력
	R 4	수학적 추론 과정에 근거한 정당화 능력
	C 2	문제해결 과정을 논리적으로 설명하는 능력
	C 5	정확히 계산하였는가를 점검하는 능력
14	P 6	제시문(가)의 성질 (1)과 문제해결의 연결성을 파악하는 능력
	P 7	소인수의 개수에 따라 경우나누기 전략을 쓰는 능력
	R 4	수학적 추론 과정에 근거한 정당화 능력
	C 2	문제해결 과정을 논리적으로 설명하는 능력
	C 5	정확히 계산하였는가를 점검하는 능력
15	P 7	귀류법의 문제해결 전략을 쓰는 능력
	R 3	추측하는 능력
	R 4	추측을 수학적 추론으로 정당화하는 능력
	C 2	문제해결 과정을 논리적으로 설명하는 능력
16	R 6	문제 해결 결과를 다시 48그루의 나무를 심은 날로 바꾸어 해석하는 능력

위와 같이 나무 심기 문제를 수학적 과정 하위 요소로 분석한 결과, 나무 심기 문제를 통해 학생들의 수학적 과정을 평가할 수 있을 것이라 결론지을 수 있다.

2.2 채점 기준표

2.1에서의 분석을 반영한 채점 기준표를 작성하였다. 16개의 해결과정

을 적절히 조직하여 다음과 같이 6개의 채점코드를 만들었다.

<표 Ⅳ-30> 나무심기 문제 논제1(1)의 채점기준표

채점 코드	배점	응답내용
01	3	두 직선이 일치한다고 가정하여 모순을 이끌어내려 하였으며, 정당화를 잘 해냄
	2	수학적 표현에는 다소 문제가 있지만 정당화를 잘 해낸 경우
	1	두 직선이 일치한다고 가정하여 모순을 이끌어내려 하였으나 $\frac{k}{l}=\frac{k'}{l'}$ 이면 자연수 a에 대하여 $k=ak', l=al'$ 이라는 결론을 바로 내리는 등 정당화에 문제가 있는 경우
	0	기타 오답, 무응답

<표 Ⅳ-31> 나무심기 문제 논제1(2)의 채점기준표

채점 코드	배점	응답내용
02	3	수학적 귀납법 또는 다른 방법을 이용하여 $(k, l), \cdots (-l, -k)$의 좌표에 나무를 심을 수 있음을 수학적으로 정당화함
	2	수학적으로 명확히 정당화를 하지는 않았으나, k, l이 서로소일 때 $y=\frac{k}{l}x$에서 원점으로부터 가장 가까운 격자점에는 나무를 심을 수 있으며 그것이 $(l, k), (-l, -k)$임을 설명'하는 등 정당화를 시도함
	1	[논제1](1)의 결과와 연결하려고 시도했지만 명확히 정당화하지는 못함
	0	기타 오답, 무응답
03	3	k, l이 서로소가 아닐 때 (k, l)에 나무를 심을 수 없음을 명확히 정당화한 경우
	1	k, l이 서로소가 아닐 때 (k, l)에 나무를 심을 수 없음을 보이려고 하였으나 정당화는 못한 경우
	0	기타 오답, 무응답

<표 Ⅳ-32> 나무심기 문제 논제1(3)의 채점기준표

채점 코드	배점	응답내용
04	2	[논제1](2)의 결과와 $n=1$인 경우를 고려하여 자연수 n에 대하여 n번째 날 심는 나무의 수가 $8f(n)$임을 잘 설명한 경우
	1	$n=1$인 경우를 따로 고려해야 함을 생각하지 못하고 $8f(n)$으로 바로 표현한 경우
	0	기타 오답, 무응답

<표 Ⅳ-33> 나무심기 문제 논제2의 채점기준표

채점 코드	배점	응답내용
05	3	열흘 동안 심은 나무의 수를 정확히 구했고, 제시문에 나온 성질들을 적절히 활용하여 정당화한 경우
	2	열흘 동안 심은 나무의 수를 정확히 구했지만, 제시문에 나온 성질들을 적절히 활용하여 정당화하지는 않은 경우
	1	시도하였으나 정확히 나무의 수를 구하지 못했고, 제시문에 나온 성질들을 활용하여 정당화하지도 않은 경우
	0	기타 오답, 무응답

<표 Ⅳ-34> 나무심기 문제 논제3의 채점기준표

채점 코드	배점	응답내용
06	3	모든 경우를 고려하여 n의 값을 찾고 정당화한 경우
	2	n이 p^a 또는 $p_1^{a_1}p_2^{a_2}$의 형태인 경우에는 잘 정당화하고, 정확히 n의 값을 구했으나, 서로 다른 세 소수의 곱의 형태는 될 수 없음을 정당화하지 못한 경우
	1	n의 값은 잘 찾아냈으나 경우나누기 등의 설명이 없는 경우
	0	기타 오답, 무응답

2.3 채점 결과 및 두 독립표본 t검정 결과

27명의 답안을 위의 채점 기준표에 따라 채점하였다. 이 중 암호문제에서 P07이었던 학생이 오일러 ϕ함수에 대한 선행학습은 하지 않았기 때문에 이 학생을 N00으로 놓았다. 따라서 암호 문제에서의 선행학습 집단과 비선행학습 집단의 인원수가 각각 7명, 20명이었는데, 나무심기 문제에서는 각각 6명, 21명으로 변경되었다. 다음은 나무 심기 문제의 채점 결과이다.

<표 Ⅳ-35> 나무심기 문제 채점 결과

학생	01	02	03	04	05	06	총점
P01	1	2	0	1	3	2	9
P02	1	2	3	2	3	2	13
P03	1	0	0	1	1	1	4
P04	1	2	0	1	3	2	9
P05	1	0	0	1	3	3	8
P06	1	2	0	1	3	0	7
N00	1	0	0	2	3	2	8
N01	1	0	0	0	3	1	5
N02	1	0	0	1	2	0	4
N03	1	3	0	1	3	1	9
N04	1	0	3	1	2	2	9
N05	1	3	3	1	3	2	13
N06	1	0	0	1	3	1	6
N07	1	3	0	2	2	1	9
N08	1	0	3	1	2	1	8
N09	1	0	1	1	2	2	7
N10	1	1	0	1	3	2	8
N11	3	2	3	1	3	2	14
N12	1	3	3	1	0	1	9
N13	1	1	3	0	0	0	5
N14	1	0	0	2	0	0	3
N15	1	0	0	2	3	2	8
N16	1	0	0	2	3	2	8
N17	1	0	3	1	3	2	10
N18	1	0	3	3	3	1	11
N19	1	3	0	1	3	2	10
N20	1	1	0	1	3	3	9

암호 문제와 마찬가지로 선행학습 여부에 따라 나무 심기 문제에 대한 학생들의 성적에 차이가 있는가를 확인하기 위하여 두 독립표본 t검정을 실시하였다. 마찬가지로 표본의 수가 적기 때문에 결론을 일반화시키기에는 한계가 있다는 점을 다시 밝혀둔다. 27명의 선행학습 여부에 따른 나무심기 문제 총점의 차이를 알아보기 위하여 두 독립표본 t검정을 실시한 결과는 다음의 표와 같다.

<표 Ⅳ-36> 나무심기문제 두 독립표본 t검정 결과

선행학습 여부	선행집단	비선행집단
평균	8.33	8.29
표준편차	2.944	2.813
사례수	6	21
t 통계값	-.036	
유의확률	.971	

선행집단의 나무 심기 문제 평균은 8.33, 표준편차는 2.944이고, 비선행집단의 나무 심기 문제 평균은 8.29, 표준편차는 2.813이다. 선행학습 여부의 나무 심기 문제의 성적 차이가 있는가에 대한 t통계값은 -.036, 유의확률은 .971로서 유의수준 .05에서 선행학습 여부에 따라 나무 심기 문제성적은 유의한 차이가 없는 것으로 분석되었다.

각각의 문항에 대한 t검정 결과는 다음과 같다. 사례수는 동일하므로 생략하였다.

<표 Ⅳ-37> 나무심기 문제 논제별 두 독립표본 t검정 결과

채점 코드	t검정 결과			채점 코드	t검정 결과		
01	선행학습 여부	선행집단	비선행집단	04	선행학습 여부	선행집단	비선행집단
	평균	1.00	1.10		평균	1.17	1.24
	표준편차	0	.436		표준편차	.408	.700
	t 통계값	-.527			t 통계값	-.236	
	유의확률	.603			유의확률	.815	
02	선행학습 여부	선행집단	비선행집단	05	선행학습 여부	선행집단	비선행집단
	평균	1.33	1.00		평균	2.67	2.33
	표준편차	1.033	1.342		표준편차	.816	1.065
	t 통계값	.560			t 통계값	.707	
	유의확률	.580			유의확률	.487	
03	선행학습 여부	선행집단	비선행집단	06	선행학습 여부	선행집단	비선행집단
	평균	.5	1.22		평균	1.67	1.43
	표준편차	1225	1.470		표준편차	1.033	.811
	t 통계값	-1.047			t 통계값	.598	
	유의확률	.305			유의확률	.555	

각 문항에 대한 유의확률 역시 유의수준 .05에서 유의한 차이가 없는 것으로 분석되었다. 앞서 언급한 것과 같이 표본의 수가 적어서 이 값의 의미는 크지 않다. 다음 절에서는 질적 분석을 통해 선행학생의 답안과 비선행학생의 답안을 분석해 보도록 하겠다.

2.4 선행학생의 답안과 비선행학생의 답안 분석

암호문제에서와 마찬가지로 선행학습 집단 학생의 답안과 비선행학습 집단 학생의 답안을 분석하여 선행학습 여부가 영향을 미쳤는가를 알아보고자 한다. 나무 심기 문제 역시 선행학습 여부가 영향을 미치지 않도록 많은 부분을 수정하였으며, 이는 Ⅲ장에서 자세히 다루었었다. 앞의 문제와 마찬가지로 이번 문제에서도 P02가 선행학습 집단 학생 중 가장

높은 점수를 받았으므로 P02와 N11의 답안을 분석하였다.

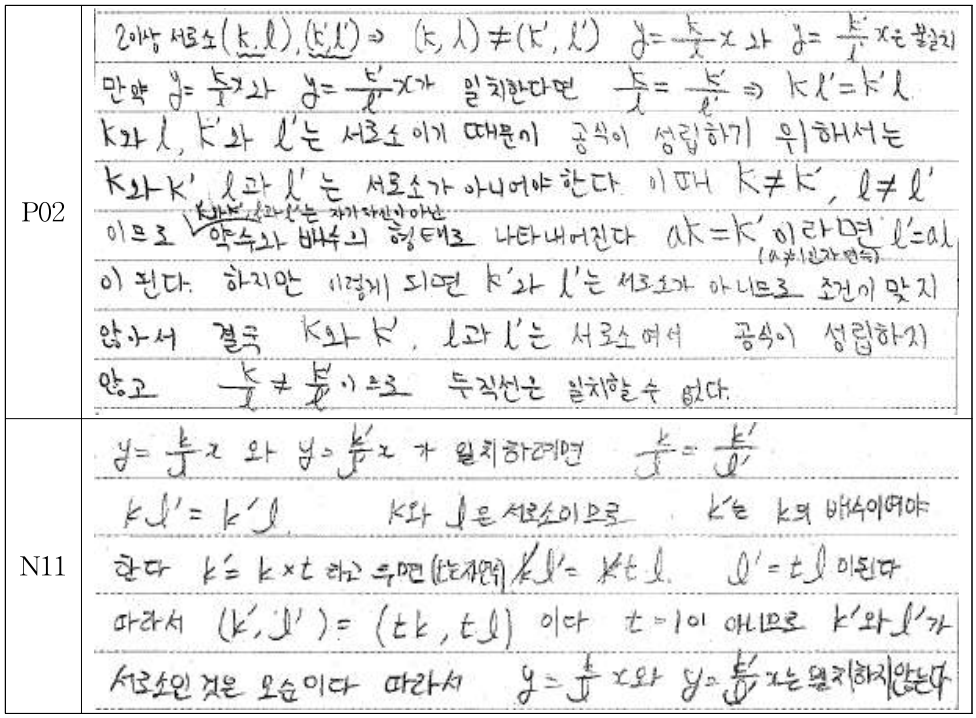
<표 Ⅳ-38> 나무심기 문제 질적 분석 대상 학생 점수

학생	01	02	03	04	05	06	총점
P02	1	2	3	2	3	2	13
N11	3	2	3	1	3	2	14

채점코드 01에서는 N11이 더 높은 점수를 받았고, 채점코드 04에서는 P02가 더 높은 점수를 받았다. 각각의 경우에 대하여 답안을 살펴보도록 하겠다.

2.4.1 채점코드 01

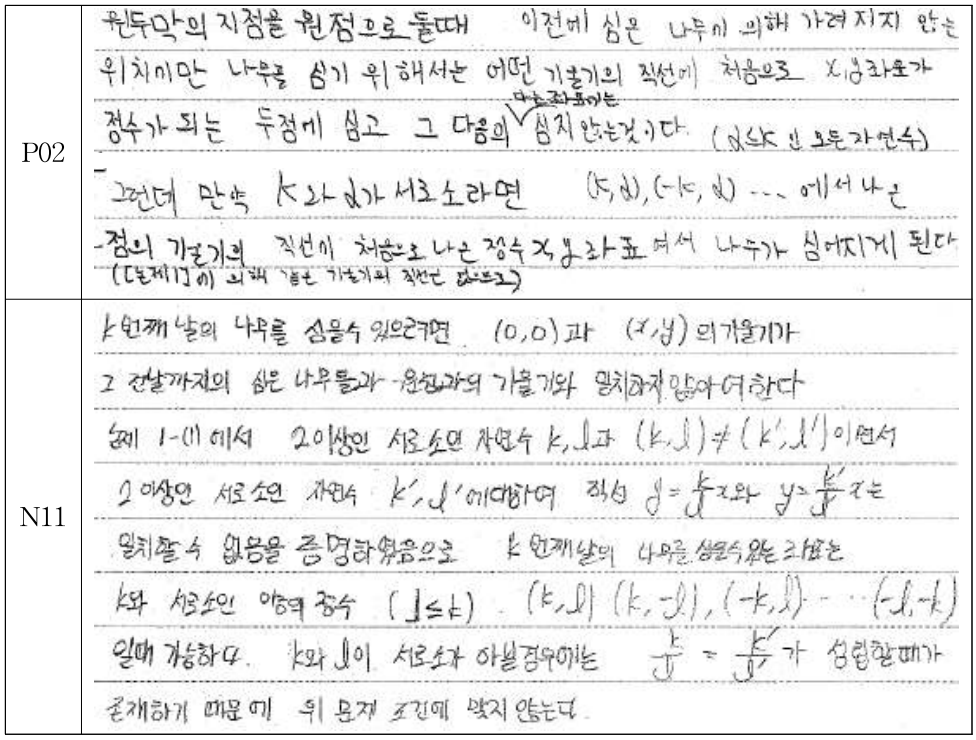
채점코드 01은 서로소인 두 정수 k, l과 k', l'에 대하여 $\frac{k}{l} \neq \frac{k'}{l'}$이 됨을 증명하는 것으로, 증명에 필요한 개념은 서로소, 약수, 배수 등의 교육과정 내의 소재들이다. 그러나 대부분의 학생이 만점을 받지 못했다. N11만 정확하게 증명하였고 P02를 포함한 26명의 학생들은 $\frac{k}{l} = \frac{k'}{l'}$으로부터 곧장 자연수 a에 대하여 $k = ak', l = al'$이 된다고 하는 등 논리적 비약이 있었다. 두 학생의 답안은 다음과 같다.



[그림 Ⅳ-6] 나무심기 문제 채점코드 01 학생답안

2.4.2 채점코드 02

채점코드 02는 두 학생 모두 수학적 귀납법을 통하여 증명하지는 못하였지만, P02는 k와 l이 서로소일 때 (k, l)이 $y = \frac{k}{l}x$ 위의 격자점 중 원점에서 가장 가까운 점이라고 설명함으로써 정당화를 시도하였고, N11은 [논제1](1)의 결과를 이용하여 정당화를 시도하였다. 이 역시 선행학습의 영향이 있다고 볼 수는 없다. 다음은 각 학생의 답안이다.

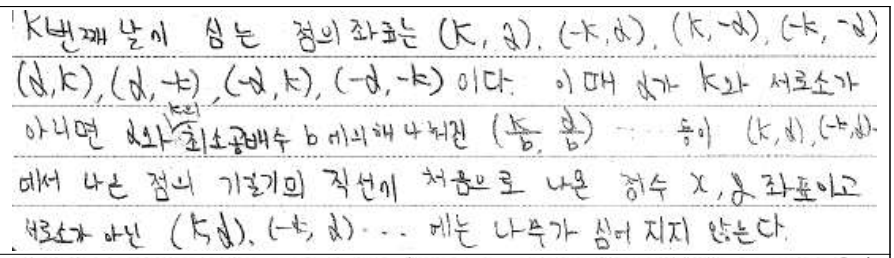
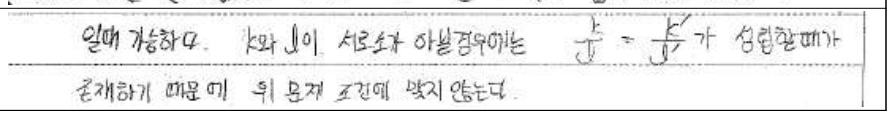


[그림 Ⅳ-7] 나무심기 문제 채점코드 02 학생답안

2.4.3 채점코드 03

채점코드 03은 k와 l이 서로소가 아닌 경우에 (k, l)에 나무를 심을 수 없음을 보이는 것으로, k와 서로소인 l에 대하여 l하나가 정확히 8개의 점을 만들어낸다는 것을 보이기 위해 반드시 필요한 과정이지만 논제에서 그것을 명확히 보지 못한 학생의 경우에는 증명조차 시도하지 않은 경우가 많았다. 실제로 29명의 학생 중 k와 l이 서로소가 아닌 경우를 증명하고자 시도한 학생은 10명으로 전체 학생의 $\frac{1}{3}$ 뿐이었다. 두 학생은 모두 k, l이 서로소가 아닐 때, (k, l)과 원점을 지나는 직선 위에 또

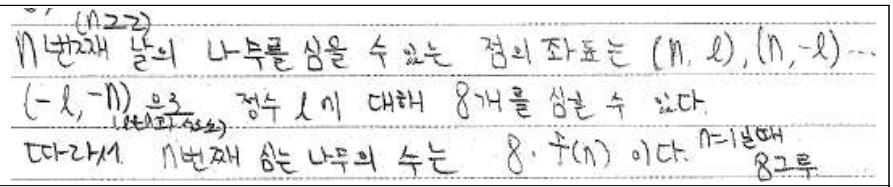
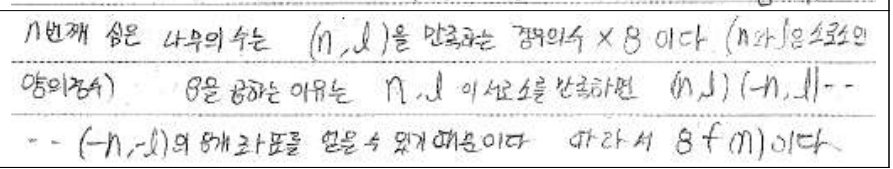
다른 격자점이 찍힘을 서술하며 정당화하였다. 이에 대한 답안 역시 선행학습 여부가 영향을 미치지 못했다. 다음은 두 학생의 답안이다.

P02	
N11	

[그림 Ⅳ-8] 나무심기 문제 채점코드 03 학생답안

2.4.4 채점코드 04

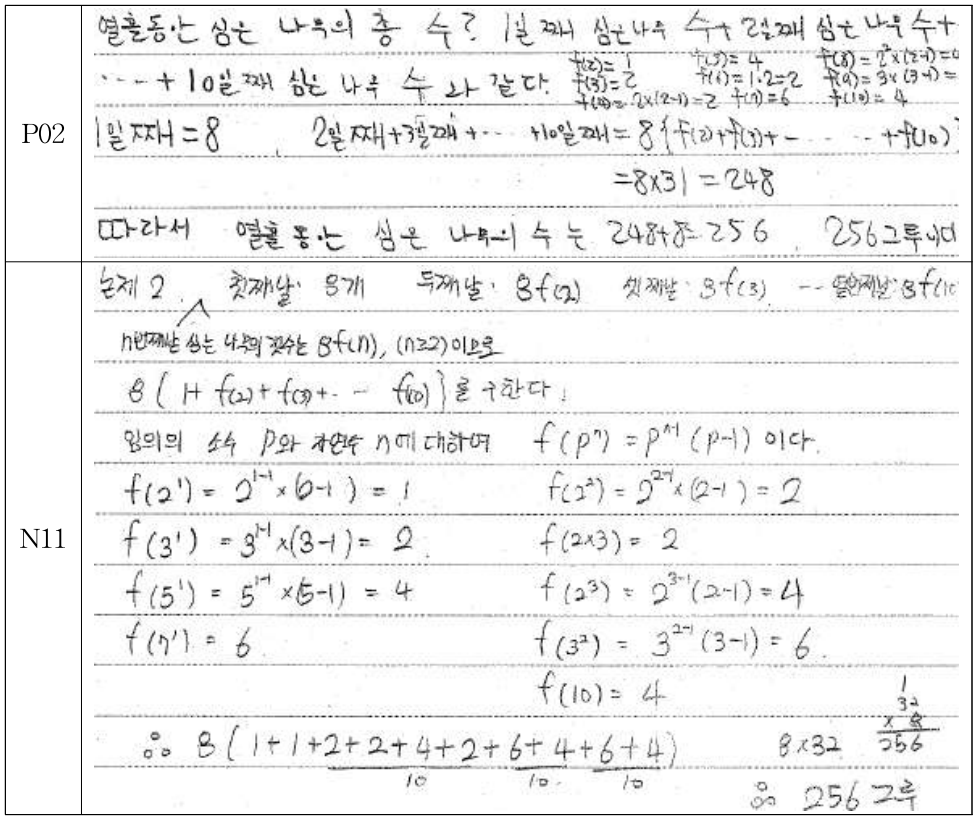
채점코드 04는 [논제 1](1), (2)의 결과를 바탕으로 n번째 심는 나무의 수가 $8f(n)$임을 정당화하는 논제이다. 이 논제의 경우에는 [논제1]에서 $n \geq 2$인 경우에 대해 n번째 날 심는 나무의 수가 $8f(n)$임은 보였지만 $n=1$인 경우는 고려하지 않았다. P02는 $n=1$인 경우를 따로 고려하였기 때문에 만점인 2점을 받았고, N11은 그것을 고려하지 않았기 때문에 1점을 받았다. 이 문항은 전체집합을 보는 사고가 필요했던 문항으로 특별히 선행학습을 통해 길러질 수 있는 능력은 아니다. 다음은 두 학생의 답안이다.

P02	
N11	

[그림 Ⅳ-9] 나무심기문제 채점코드 04 학생답안

2.4.5 채점코드 05

채점코드 05는 [논제 1]의 결과와 제시문에 나타난 오일러 ϕ함수의 성질을 바탕으로 열흘 동안 심은 나무의 수를 구하는 문제이다. 이 문항은 증명문제가 아니라 계산 문제였으므로 다른 문항에 비해 학생들이 쉽게 접근하였다. 점수가 낮은 다른 학생들의 답안과의 차이점으로는 두 학생은 계산의 근거가 되는 [논제1]의 결과, 제시문의 법칙 등을 명확히 제시하였다는 점이다. 이 문항에서도 선행학습에 의한 차이점은 보이지 않았는데, 선행학습을 하지 않은 학생 역시 오일러 ϕ함수의 두 가지 성질을 공리처럼 이용하여 정당화하였다. 제시문에 그 성질이 이미 제시되어 있으므로 선행학습을 한 학생이라고 해서 유리한 것이 아니었다. 다음은 두 학생의 답안이다.



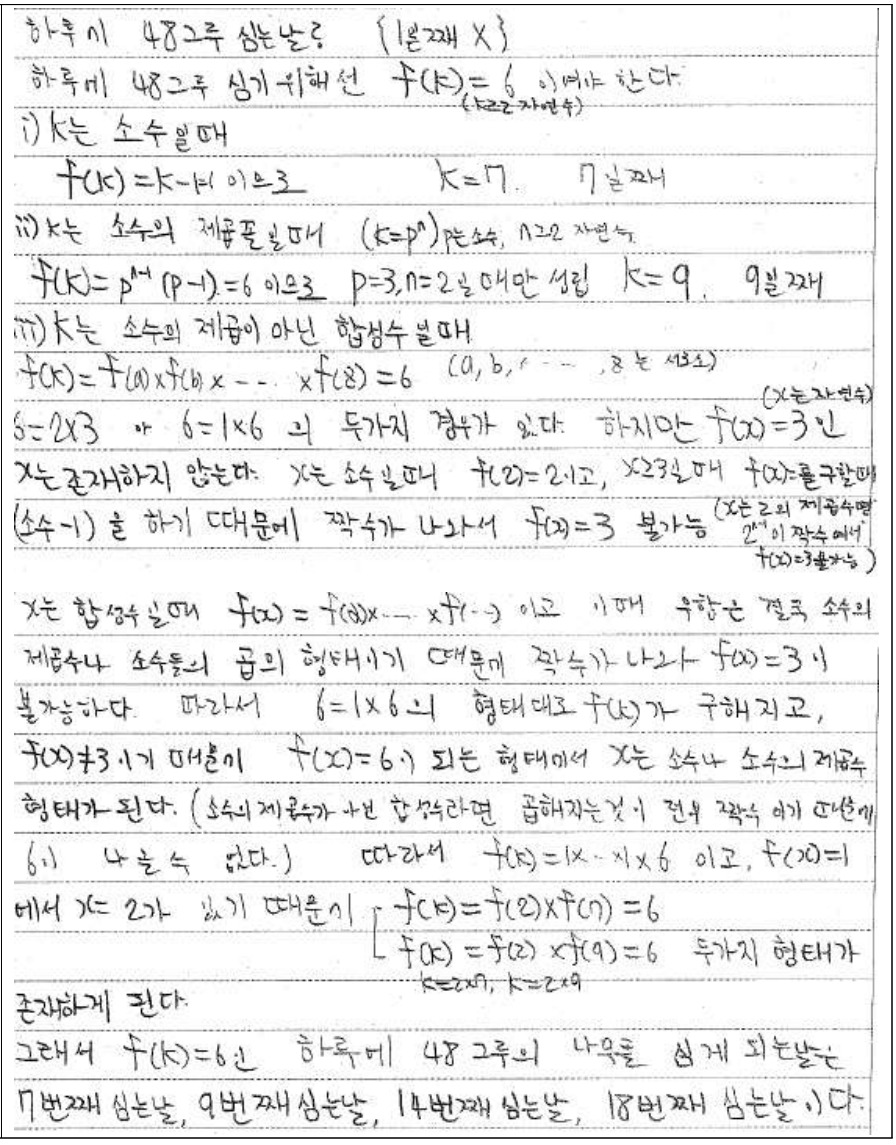
[그림 Ⅳ-10] 나무심기 문제 채점코드 05 학생답안

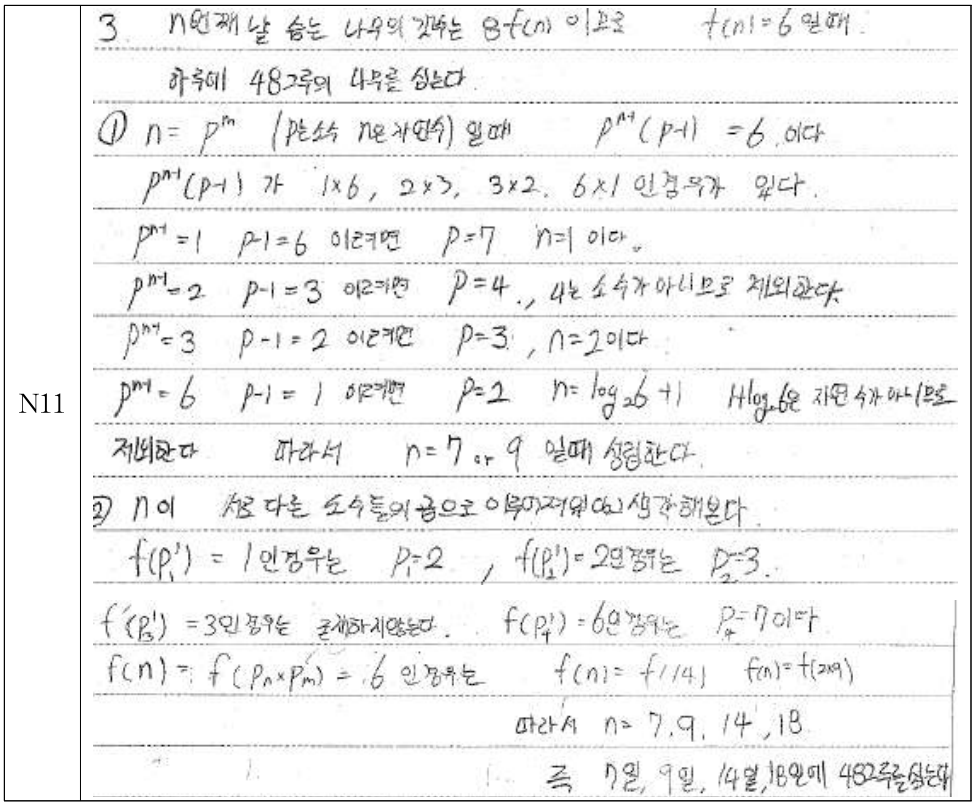
2.4.6 채점코드 06

채점코드 06은 $f(n)=6$이 되는 자연수 n의 값을 모두 구하는 문제로, 학생들은 n값을 계산하는 과정까지는 잘 해내었다. 그러나 서로 다른 세 소수가 곱해진 꼴인 경우에는 $f(n)\neq 6$임을 증명한 학생은 단 한명도 없었다. P02, N11 두 학생도 다른 학생들과 마찬가지로 $n=p_1^{a_1}$꼴의 경우와 $n=p_1^{a_1}p_2^{a_2}$꼴인 경우의 n값을 빠짐없이 구해냈고, 더 이상의 정당화가 필요함을 느끼지 못하고 증명을 끝냈다. 다음은 두 학생의 답안이

다. 이 경우 역시 선행학습 여부가 학생의 답안에는 영향을 미치지 않았음을 말해준다.

P02





[그림 Ⅳ-11] 나무심기문제 채점코드 06 학생답안

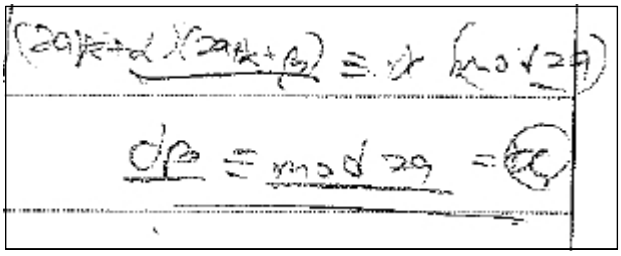
3. 기타 논의사항: 선행학습으로 인해 방해를 받은 사례

본 연구는 학생들의 수학적 과정을 평가할 수 있고, 선행학습 여부가 영향을 미치지 않도록 수리논술 문항을 수정하여 학생들에게 제시하였다. 따라서 위에서 살펴본 바와 같이 수정된 수리논술 문항에 대해서는 선행학습 여부가 답안 작성에 주는 영향을 확인할 수 없었다. 그런데 일부 학생의 경우 다음의 몇 가지 사례에서처럼 잘못된 답안을 작성한 사례도 있었는데, 이를 자세히 보고하고 그 원인을 살펴보고자 한다. 특히 암호문제의 경우 나무심기문제보다 선행학습을 한 학생들이 선행학습으

로 인하여 방해 받은 사례가 더 많았는데, 이는 합동식이 오일러 ϕ함수보다 고등학생들에게 더 많이 노출되었기 때문으로 짐작된다. 암호문제의 경우, 선행학습을 한 다수의 학생들이 수정된 기호인 $a \sim b$를 사용하지 않고, 정수론에서 쓰이는 기호인 $a \equiv b \pmod{29}$를 쓰는 것이 발견되었다. 새로운 기호에 대한 정의 없이 $a \equiv b \pmod{29}$를 사용한 것은 잘못된 것이지만 답안 작성에 큰 오류를 범하지 않았으면 따로 보고하지 않았다.

3.1 첫 번째 사례 : P01의 답안

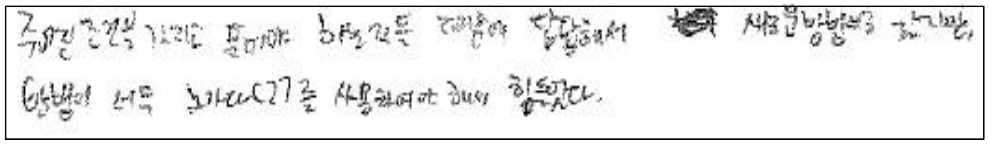
P01은 경시대회에서 나온 문제 등을 통하여 정수론을 접한 경험이 있는 학생이다. 다음은 이 학생의 답안에서 발견된 내용이다.



[그림 Ⅳ-12] P01의 틀린 답안

두 번째 줄에 있는 $\alpha \equiv \mathrm{mod}\,29 = \alpha$는 전혀 의미 없는 기호로 이 학생이 합동식을 학습하기는 했지만 합동식 개념을 이해하지 못하고 있다고 판단할 수 있다. 학생이 쓴 내용이 갖고 있는 의미를 최대한 추측해보면, 제시문(나)에서 법칙 (ⅳ)로 제시된 것에 해당한다. 29로 나누었을 때의 나머지가 각각 α, β인 두 수를 곱한 것을 29로 나눈 나머지는 $\alpha\beta$를 29로 나눈 나머지와 같다는 것을 쓰고자 한 것이라 짐작할 수 있다. 이미 제시문에 법칙으로 제시되어 공리처럼 사용하기만 하면 되는 것을 이와

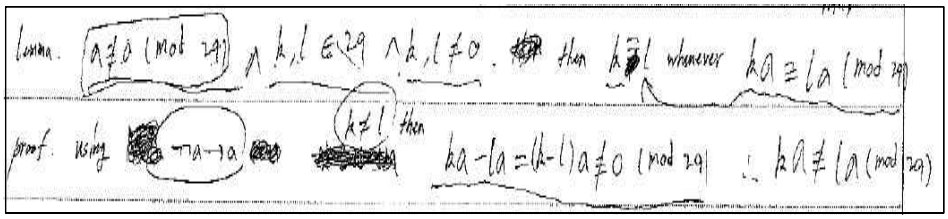
같이 잘못된 형식으로 적은 것은, 제시문에 충실히 읽지 않고, 자신이 선행학습으로 암기한 것 중 제시문의 것과 비슷한 것을 기억하여 적으려 한 것이다. 다음은 이 학생이 암호문제를 해결한 후, 합동식에 대한 선행학습이 암호문제를 해결하는 데에 어떤 도움을 주었는지 적어낸 설문지의 일부이다. 이 학생이 제시문에 주어진 것을 공리처럼 문제 해결에 갖다 쓴 것이 아니라 자신이 기억하는 것 중 제시문에 주어진 것과 비슷한 것이 무엇인지 재현해내려 애썼다는 것을 확인할 수 있다.



[그림 Ⅳ-13] P01의 설문지 결과

3.2 두 번째 사례 : P06의 답안

P06은 한 대학의 영재교육센터에서 교육을 받은 학생이다. 다음은 이 학생의 답안에서 발견된 내용이다.



[그림 Ⅳ-14] P06의 틀린 답안

학생의 답안에 있는 $\wedge$, $\neg$, $a \equiv b \pmod{29}$ 등의 기호는 이 학생이 논리학, 정수론 등의 많은 영역에서 선행학습을 했음을 말해주고 있지만, 실제로 전체 답안에는 의미 없는 기호들이 다수 있다. 첫 번째 줄에 있는 $k, l \in 29$가 그 예이다. 학생이 쓴 내용이 갖고 있는 의미를 최대한 추

측해보면, 제시문(나)에서 법칙 (ⅴ)로 제시된 것에 해당한다. 즉, a가 29의 배수가 아닐 때, $ka \sim kb$이면 $a \sim b$임을 증명하려고 했던 것으로 추측된다. 다음은 제시문(나)의 법칙 (ⅴ)와 학생이 답안에서 작성한 lemma가 어떤 점에서 다른지, 왜 그것을 답안에 적었는지를 알아보기 위해 실시한 인터뷰의 일부이다. 인터뷰는 연구자가 이메일로 질문하고, 이메일로 답을 받는 방식으로 진행되었다.

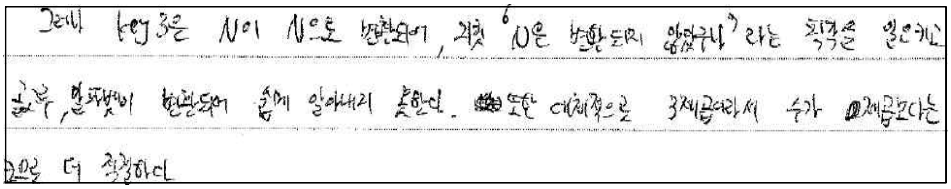
> 연구자 : 제시문에 주어진 법칙과 학생의 lemma는 다른 것인가요? 왜 그것을 증명하였나요?
> P06 : 솔직히 lemma라고 안해도 되는데, 굳이 거창하게 lemma라고 한 이유는 [문제 3] (b),(c) 2개를 증명하는데 사용되고, 또, 그 증명에서 하이라이트여서 lemma라고 했어요.

P06 역시 P01의 경우와 마찬가지로 제시문에 주어진 것을 공리처럼 논제 해결에 사용하는 것이 아니라 자신이 암기하고 있는 지식 중 제시문의 것과 비슷한 것을 적어낸 것임을 알 수 있다. 일부 선행학습을 한 학생들의 이와 같은 특성은 수정되어 제시된 수리논술 문항이 제시문에 적힌 것을 공리처럼 이용해야 하기 때문에 학생들의 답안 작성에 부정적 영향을 미쳤음을 알 수 있다.

3.3 세 번째 사례 : P07의 답안

P07은 교육청 산하의 영재학급에 속한 학생이며, 영재학급에서 참여한 프로그램에서 합동식을 접했다. P07은 암호문제에서 [논제1]만을 풀었으며, 그것에서 핵심이 되는 개념인 '2가 키로서 적당하지 않다'를 자의적으로 해석하여 틀린 답을 도출했다. P07의 경우는 앞의 두 가지 사

례와는 조금 다르게 합동식에 대한 선행학습으로 인하여 잘못된 답안을 작성했다고 보기는 어렵지만, 자신이 왜 '2가 키로서 적당하지 않다'고 결론 내렸는지를 설명하게 하는 인터뷰 과정에서 의미 있는 언급을 하였기 때문에 보고하고자 한다. 다음은 P07의 처음 답안으로 '3이 키로서 적당하다'는 것을 나름의 이유로 정당화하고 있다. P07은 N이 N으로 변환되면 상대방에게 착각을 일으킬 수 있다고 설명하고 있다.



[그림 Ⅳ-15] P07의 틀린 답안

다수의 학생들이 키로서 적당하다는 것과 일대일대응을 잘 연결시켰는데 P07이 위와 같은 답안을 작성한 것이 흥미로워서 이 학생과 인터뷰를 실시하였다. 인터뷰 과정에서 왜 2가 키로서 적당하지 않은지에 대해 질문하자, P07은 일대일대응이 되면 규칙을 갖고 바뀌는 것이니까 해킹하는 사람에게 그 규칙이 노출될 수 있으므로 위험하다고 설명했다. 그와 같은 생각을 하게 된 것은 이전에 보았던 해커를 생각했다고 말했다. 다음은 P07과의 인터뷰의 일부이다.

연구자 : 2는 키로서 적당하지 않다라고 했는데, 키로서 적당하지 않다의 정의를 나름대로 내려 볼래요?

P07 : A가 A로 바뀌면 그게 암호는 아니잖아요. 제가 잘못 썼는데 2는 키로서 적당하지 않아요. 만약에 일대일대응이 되면 키로서 적당하지 않아요. 왜냐면 만약에 일대일대응이면 규칙을 갖고 바뀌는 것이니까요. 중간에 해킹하는 사람도 그 규칙을 발견할 수 있다는 단점이 있는 것 같아요. 적당히 같아야지 좋은 것이지, 모두 다 1로 가버린다거나 하면 안 되

는 거니까요.

연구자 : 그런 생각을 하게 된 계기가 있나요?

P07 : 받는 사람이 어려우면 해킹하는 사람도 어렵고, 받는 사람이 쉬우면 해킹하는 사람도 쉬운 것이잖아요. 악의를 갖고 해킹을 하는 사람이 있을 수 있으니까요. 해킹의 위협조차 막아야 하니까요. 엘런 체게 같은 사람이라면 아무리 어려운 암호도 해독을 해버리거든요.

연구자 : 그런 경우 만일 단어 길이가 길어진다면 어떻게 될까요?

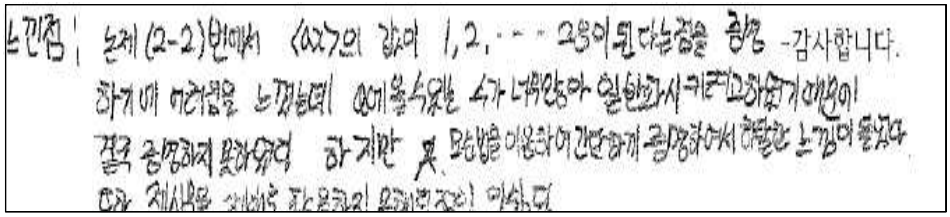
P07 : 그럼 너무 많은 가능성이 있겠네요. 그렇게 되면 안 될 것 같기도 하네요.

인터뷰의 마지막에서 P07은 자신이 갖고 있는 선행지식, 선입견 등이 아니라 제시문에 더욱 집중해야 함을 언급하였다. 앞서 설명한 것처럼 P07의 사례의 경우 정수론의 합동식에 대한 선행학습으로 잘못된 답안을 작성하였다고 보기는 힘들지만, 선행지식이 있는 경우 제시문에 집중하지 못하고 자신이 알고 있는 선행지식들 중 유사한 것이 무엇이 있는가를 검색해보다가 정작 주목해야할 제시문에는 집중하지 못했음을 보여주는 사례로 볼 수 있다. 다음은 P07이 제시문에 더욱 집중해야 하며, 자신이 갖고 있는 선행지식, 선입견 때문에 제대로 집중하지 못했음을 말하는 인터뷰의 일부이다.

P07 : 이번 것도 제가 먼저 갖고 있었던 생각이 영향을 미쳐서 제 마음대로 문제를 해석한 것 같네요. 제시문에 있는 내용에 충실해서 읽어야겠다는 생각을 다시 한 번 하게 됩니다. 어디서 봤었지? 이런 생각을 하다가 시간이 모두 갔던 것 같아요.

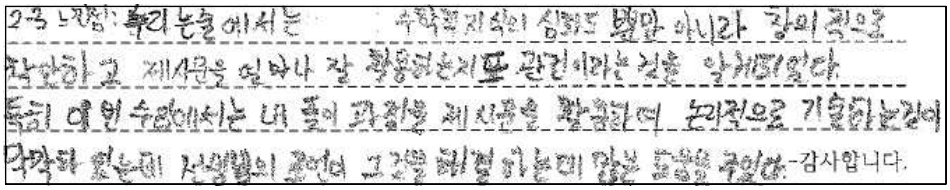
다음은 다른 학생들의 설문지에서 제시문에 충실하게 답을 해야 함을

언급한 것이다. N11은 제시문을 제대로 활용하지 못한 점이 아쉽다고 밝히고 있다. 정수론에 대한 선행학습 보다는 제시문에 주어진 것을 이해하기 위한 노력이 더 필요하다고 생각하고 있음을 알 수 있다.



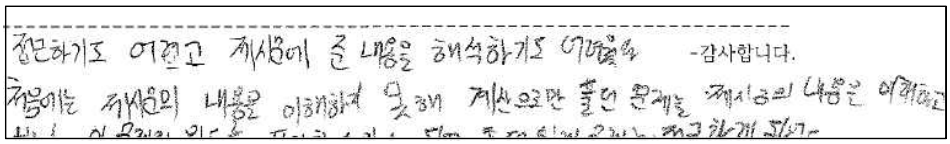
[그림 Ⅳ-16] N11의 설문지 결과

N04는 제시문을 얼마나 잘 활용하는가가 학생에게 주어진 문제를 해결하는 관건이었음을 깨달았다고 말하고 있다.



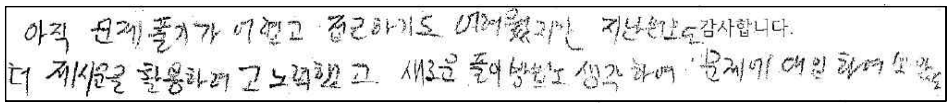
[그림 Ⅳ-17] N04의 설문지 결과

N06은 처음에는 제시문의 내용을 이해하지 못해서 단순 계산으로만 문제를 해결했지만, 제시문의 내용을 이해하고 나니 문제에 보다 쉽게 접근할 수 있었음을 밝히고 있다.



[그림 Ⅳ-18] N06의 설문지 결과 ①

이 학생은 두 번째 문제인 나무심기 문제를 해결한 후 설문지에서 지난번 문제보다 더 제시문을 활용하기 위해 노력했다는 점을 밝히고 있다.



[그림 Ⅳ-19] N06의 설문지 결과 ②

위의 설문들은 모두 선행학습을 하지 않은 학생의 답안들이다. 다수의 비선행학습 집단의 학생들은 주어진 두 개의 수리논술 문항을 푸는 데에 다른 것보다 제시문에 대한 이해와 활용이 중요함을 깨달았음을 알 수 있다.

Ⅴ. 요약 및 결론

1. 요약

수리논술은 문제해결 능력, 추론 능력, 의사소통 능력 등의 수학적 과정을 평가할 수 있는 평가 방법이다. 그러나 수리논술의 난도가 지나치게 높아 학생들의 학업부담을 가중시키는 점 등 비판의 의견 또한 높다. 난도를 높이는 원인의 하나로 지적되고 있는 것이 바로 교육과정 외의 소재를 수리논술에 사용하고 있다는 점이다. 그러나 선행학습 여부가 수리논술 성취도에 미치는 영향에 대해서는 선언적인 주장만 있을 뿐, 실증적인 연구가 미흡하다. 본 연구에서는 교육과정 외의 소재를 활용하였지만 학생들의 수학적 과정을 평가할 수 있고, 선행 학습 여부가 영향을 미치지 않도록 수정한 수리 논술 문항에 대하여, 선행학습 집단과 비선행학습 집단의 답안을 분석함으로써 교육과정 외의 소재를 활용한 수리논술 문항의 가능성을 살펴보고자 하였다.

이 연구는 크게 두 가지의 질문을 하고 있다.

연구문제 1. 교육과정 외의 요소를 소재로 하더라도 적절히 수정하면 수학적 과정을 평가할 수 있는 수리논술 문항으로 만들 수 있는가?

연구문제 2. 수정된 수리논술 문항에 대하여 선행학습 여부가 유의미한 영향을 미치는가?

연구문제 1을 해결하기 위해 본 연구에서는 학생들의 수학적 과정을 평가할 수 있도록 정상권 외(2012)에 기반하여 수리논술 문항을 수정하고 분석하였다. 구체적인 수정 과정은 Ⅲ장에서 자세히 진술하였지만, 간단히 정리하면 다음과 같다.

1. 대학 교재에서 쓰이는 표현법을 그대로 쓰는 경우, 모든 학생에게 익숙하거나 모든 학생에게 익숙하지 않은 기호로 수정하였다.
2. 수학적 과정은 학생들이 쓴 답안이 있어야 평가 가능하므로, 예비 검사를 통해 학생들이 어려움을 겪는 단계를 파악하고 그 부분을 소논제로 나누어 제시하였다.
3. 대학 교재에만 나오는 명제는 그것을 직접 증명하는 것을 요구하지 않고, 그 명제를 공리처럼 논리적 추론 과정에서 근거로 사용할 수 있도록 하였다.

연구문제 1의 결과, 위의 방법으로 수정된 두 문항인 암호 문제, 나무 심기 문제 해결과정에서 문제해결 능력, 추론 능력, 의사소통 능력 등의 수학적 과정 요소를 평가할 수 있음을 확인할 수 있었다.

연구문제 2를 해결하기 위해 본 연구에서는 연구문제 1을 해결하는 과정에서 만들어진 두 개의 수리논술 문항을 고등학교 2학년 32명의 학생들에게 투입하고 그 결과를 분석하였다. 분석은 양적, 질적 분석이 동시에 이루어졌으며 양적 분석은 두 독립표본 t검정(two independent t test)을 통하여 유의확률을 살펴보았고, 질적 분석은 선행학습 집단의 학생 답안과 비선행학습 집단의 학생 답안을 비교분석하였다. 양적 분석의 경우에는 표본의 수가 충분히 많지 않아 큰 의미는 없지만, 유의확률을 보고하는 것은 필요하다고 보아 보고하였다.

연구문제 2의 결과는 다음과 같다.

첫째, 양적 분석 결과는 다음과 같다. 암호 문제는 선행학습 집단의 평균이 6.29, 비선행학습 집단의 평균이 8.75, 유의확률 .355으로 유의수준 .05에서 유의한 차이가 없는 것으로 분석되었다. 나무 심기 문제는 선행학습 집단의 평균이 8.33, 비선행학습 집단의 평균이 8.29, 유의확률은 .971로서 유의수준 .05에서 유의한 차이가 없는 것으로 분석되었다.

둘째, 질적 분석의 결과는 다음과 같다. 연구에서 사용한 두 문항은 선행학습 여부가 영향을 미치지 않도록 설계되었고, 실제로 선행학습 집단 학생의 답안과 비선행학습 집단 학생의 답안에서는 선행학습으로 인한 차이점은 발견하지 못하였다. 이 과정에서 본 연구에서 의도하지 않았지만 일부 선행학습 집단의 학생 답안 중 문제점들이 발견되었는데, 대부분의 사례는 제시문과 논제를 충실히 읽지 않고, 자신이 암기한 선행지식을 적어내는 경우였다.

2. 결론 및 제언

본 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, 대학 소재를 활용한 수리논술 문항도 적절히 수정하면 학생들의 수학적 과정을 평가할 수 있음을 확인할 수 있었다. 위에서 제시한 바와 같이 수정한 두 개의 수리논술 문항으로 학생의 수학적 과정의 하위 요소들을 평가할 수 있는 가능성을 확인하였다.

둘째, 수정된 두 개의 문항에 대하여 선행학습 여부가 수리논술의 성취도에 미치는 유의미한 영향은 확인되지 않았다. 표본의 수가 적었기

때문에 이 결과를 일반화시키기에는 무리가 있지만, 위와 같은 방법으로 설계된 수리논술문항에 대한 학생들의 성취도 차이는 거의 없는 것으로 확인되었다. 질적 분석에 있어서도 선행학습으로 인한 학생들의 성취도 차이는 찾아볼 수 없었다.

셋째, 연구에서 의도하지는 않았지만, 일부 선행학습 집단 학생의 답안에서 문제점이 발견되었다. 대부분의 사례는 제시문을 충실히 이해하고 공리로서 그 성질들을 활용하지 않고, 자신이 암기한 선행지식을 적어내는 경우였다.

이 연구는 대학 소재를 활용하였지만 수학적 과정을 평가할 수 있고, 선행학습 여부가 영향을 미치지 않을 수 있도록 적절히 수정한 수리논술 문항을 바탕으로 수리논술 문항을 수학적 과정 중심 하위 요소로 분석하고, 선행학습 집단과 비선행학습 집단의 성적 차이를 분석함으로써 대학 소재를 활용한 수리논술의 가능성을 제안하였다. 그러나 이 연구 결과는 학생들의 수학적 과정을 평가할 수 있고, 선행학습 여부가 영향을 미치지 않도록 조심스럽게 설계되고 수정된 문항에 대한 결과이므로 이를 대학 소재를 활용한 어떤 수리논술 문항도 괜찮다고 해석해서는 안 될 것이다. 또한 표본의 수가 적어서 실험결과를 일반화시키기에는 무리가 있으며 채점기준표, 채점 결과 등에 있어서 다양한 결과가 존재할 수 있다는 제한점이 있다. 하지만 수리논술과 관련하여 교육과정 외의 소재를 활용하면 절대로 안 된다는 것 보다는, 보다 다양한 소재를 활용하여 진정한 의미의 수학적 과정을 평가할 수 있으며 선행학습 여부가 영향을 미치지 않는 수리논술 문항 개발을 위한 가이드라인을 마련하는 것이 더욱 의미 있다.

마지막으로 이 연구를 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구에서는 수리논술에 활용할 교육과정 외의 소재로 정수론의 일부 개념만을 택하였다. 다른 수학 과목, 또는 수학 외의 소재를 활용한 수리논술의 가능성에 대한 논의도 필요할 것이다.

둘째, 본 연구는 일반 고등학교 2학년 3등급 이내의 27명의 답안에 대한 결과로 그것을 일반화 시키는 데에는 무리가 따른다. 따라서 보다 많은 학생들에 대하여 실험하고 유의미한 결과를 얻어내는 과정이 필요할 것이다.

셋째, 수리논술 채점 기준에 대한 논의가 보다 광범위하게 이루어져야 한다. 본 연구에서는 수학능력시험문제, 또는 간단한 서술형 평가에 대한 채점기준표를 참고하였지만, 수리논술은 보다 복잡하고 고차원적인 사고과정을 평가하는 것이기 때문에 수리논술에서 평가해야 하는 항목들을 반영한 채점기준표에 대한 논의가 반드시 필요하다.

참 고 문 헌

교육인적자원부(2005). 논술고사기준 설정 및 심의계획. 교육인적자원부.

교육과학기술부(2011). 2011 수학과 교육과정. 교육과학기술부 고시, 제 2011-361호.

고상숙, 전성훈(209). 방정식의 문제 만들기 활동에서 문제구조를 중심으로 문제해결에 관한 연구. 수학교육 논문집, 23(1), 109-128.

고영희(2008). 수학 교과에서의 수리논술 방안 연구- 10단계 학생을 중심으로. 서울시립대학교 석사논문.

김도한 외 18명(2009). 2009년 창의 중심의 미래형 수학과 교육과정 모형 연구, 한국과학창의재단.

김부윤, 이영숙(2003). 우리나라에서의 수학적 문제해결 연구. 수학교육, 42(2), 137-157.

김상화, 방정숙(20100. 초등학교에서의 수학적 의사소통 목표와 성취요소 설정-D.R.O.C 유형을 중심으로-. 수학교육 논문집, 24(2), 385-413.

김성우(2008). 대입논술고사의 이중성과 교육적 함의.

김성호(2009). 수리논술형 과제 활용 수업에 관한 연구. 한국교원대학교 대학원 석사논문.

김신영(2009). 대학수학능력시험의 개선방안 탐색. 교육평가연구. 22(1), 1-27.

김연주, 나귀수(2009). 학생들의 학습 수준에 따른 수학적 의사소통의 특징-개방형문제를 활용한 소집단 협동학습을 중심으로-. 한국초등수학교육학회지, 13(2), 141-161.

김영숙, 방정숙(2009). 수리논술형 문제에 대한 초등학교 5학년 학생들의 문제해결력과 수학적 정당화 과정 분석. 수학교육48(2), 149-167.

김영화(2010). 일반계고등학교 2학년 자연계열 학생을 대상으로 한 수학적 사고력 및 표현력 향상을 위한 수학적 글쓰기 지도에 대한 사례연구. 고려대학교 석사논문.

김우현, 송상헌(2009), 변형된 상금 분배 문제의 해결과정에 나타나는 초등학교 수학영재들의 사고 특성 분석. 학교수학, 11(2), 317-333.

김원중, 황우형(2010). 학교 내신시험과 대학수학능력시험과의 비교를 통한 대학입학 고사의 수리논술 문항 분석.

김은혜, 박만구(2011). 수학 영재교육 대상 학생과 일반 학생의 개방형 문제 해결 전략 및 행동 특성 분석. 한국초등수학학회지, 15(1), 19-38.

김정빈(2012). 한국과 프랑스의 대입논술시험 제도 비교연구. 동국대학교 박사논문.

노국향 외(2001). PISA 2000 수학 평가 결가 분석 연구. 한국교육과정평가원, 연구보고 RRE 2001-9-3.

류희찬(1999). 수학적 창의성을 신장시키기 위한 수업 방향 탐색. 청람수학교육. 8(1), 1-14.

박미혜, 방정숙(2009). 개정 교육과정의 실험 적용에서 나타나는 수학적 의사소통 분석-초등 1, 2학년 탐구활동과 이야기 마당을 중심으로-. 수학교육학연구, 19(1), 163-183.

박병용(2008). 통합교과형 논술 지도 과정에서 겪는 어려움에 대한 사례연구. 순천대학교 석사논문.

박정호(2009). 통합형 수학 교과서 비교분석을 통한 수리논술 교수-학습 자료 개발: 고등학교 수학1 지수 · 로그 함수 단원을 중심으로. 고려대학교 교육대학원 석사논문.

박정호, 권혁진(2009). 교과서 비교분석을 통한 수리논술 교육 제언. 교과교육연구, 2(1).

박제남(2011). 수리논술 평가목표의 분류 및 실제에 관한 연구. 교육문화연구, 17(3).

박주영(2008). 대수적 서술형 평가에서 나타난 오류와 교정에 관한 사례 연구. 한국교원대학교 석사논문.

박현호(2007). 대입수리논술 문제해결을 위한 지도: 실생활과 관련된 문제를 중심으로. 울산대학교 석사논문.

백대현, 이진희(2010). Problem solving by mathematically gifted middle school students: A case study. 학교수학, 12(3), 259-271.

백지연(2010). 수리논술 교육을 위한 대학별 수리논술과 대학수학능력 시험 비교 분석. 이화여자대학교 석사논문

사교육걱정없는세상(2012). 서울 주요 10개 대학 2012학년도 수리논술 문제 전수 분석 결과 보도자료.

서광윤(2012). 폴리아의 문제해결 전략을 이용한 수리논술 지도에 관한 연구. 경남대학교 석사논문.

서동엽(2003). 초등 수학 교재에서 활용되는 추론 분석. 수학교육학 연구, 13(2), 159-178.

서상조(2008). 수리논술 기출문제 분석과 이를 활용한 수업 방안 제시. 연세대학교 석사논문.

성태제(1999). 교육평가 방법의 변화와 결과타당도에 대한 고려. 교육학 연구. 1999. vol.37. 197-218.

성태제(2007). SPSS/AMOS를 이용한 알기 쉬운 통계분석-기술통계에서 구조방정식모형까지-. 학지사.

손상원(2010). 수리논술에 관한 효율적인 지도방안 연구. 부산대학교 석사논문.

송상헌, 강은희, 박은정, 허지연(2004). 수학 영재들의 수학적 추론 능력

분석에 관한 연구. 과학교육논총, 17, 17-34.
송인숙(2009). 수리논술 문제 분석 및 지도방안. 연세대학교 석사논문.
심집중(2009). 대학별 고사 지도에 관한 연구. 경상대학교 석사논문.
양성기(2009). 수리논술에 대한 학생들의 인식 및 효과적인 지도방안에 대한 연구. 전남대학교 석사논문.
엄태희(2011). 수리논술의 다양한 지도 방법에 대한 연구. 아주대학교 석사논문.
오성록, 정순영(2009). 주제의 친숙도와 독해전략을 통한 영어독해 효과에 관한 연구. 한국영어영문학. 53(2). 279-305.
우정호(2011). 학교 수학의 교육적 기초. 서울: 서울대학교출판부.
이미경 외(2004). PISA2003 결과 분석 연구: 수학적 소양, 읽기 소양, 과학적 소양 수준 및 배경변인 .분석. 한국교육과정평가원, 연구보고 RRE 2004-2-1
이세숙(2011). 선행학습이 수학적 창의성 및 영재행동 특성에 미치는 영향: - 수학영재와 일반학생의 비교연구. 경원대학교 석사논문.
이영주(2010). 수리논술의 효과적인 지도방안: Polya의 문제해결방법론과 관련하여. 서울시립대학교 석사논문.
이인영(2007). 수리 논술 교수-학습 프로그램 적용을 통한 수학적 사고력 신장. 인하대학교 석사논문.
이종희, 김선희(2002). 학교 현장에서 수학적 추론에 대한 실태 조사-수학적 추론 유형을 중심으로-. 수학교육, 41(3), 273-289.
이종희, 김선희(2003). 수학적 의사소통, 서울: 교우사.
이종희, 김선희, 채미애(2001). 수학적 의사소통 능력의 평가기준 개발. 수학교육학 연구, 11(1), 207-221.
이햇님(2011). 학교 수학 교육과정과 연계한 수리논술 수업방향에 관한 연구.

서강대학교 석사논문.

이현영(2011). 평균값 정리에 관한 수리논술 지도. 연세대학교 석사논문.

이휘인(2010). 대입수리논술(통합논술)을 수학적 모델링 관점으로 분석 및 지도. 한국외국어대학교 석사논문.

전신영, 유기웅(2011). 성인학습자의 선행경험으로 인한 학습방해 과정에 관한 연구. 교육문제연구, 41, 93-119.

전평국, 김은희, 김원경(2002). 수학적 추론 능력 평가 기준에 관한 연구. 수학교육 논문집, 13, 425-455.

정상권, 이경화, 유연주, 신보미, 김구연(2012). 2011년 과정 중심의 수학 교과 평가방안연구. 한국과학창의재단.

조은숙(2002). 영어독해평가에서의 배경지식과 문제 유형의 영향. 연세대학교 석사논문.

조주연, 백석윤(2009). 초등 수학에서 문제만들기 활동의 문제해결 학습지도와 수학 학습태도 형성에 시사점 탐색. 서울교육대학교 한국초등교육, 19(2), 71-88.

지슬기(2012). 문항유형에 따른 학습자의 영어 능력과 주제 친숙도의 영향력 조사 연구. 한국외국어대학교 석사논문.

최인숙(2007). 수리 논술 첨삭지도에 관한 사례 연구. 아주대학교 석사논문.

표성수(2011). 수리논술평가의 정체성에 대한 연구. 부산대학교 박사논문.

한국교육과정평가원(2012). 2013학년도 수학능력시험 대비 학습 방법 안내. 한국교육과정평가원.

홍우주, 방정숙(2008). 초등학교 6학년 수업에서의 수학적 의사소통과 학생의 수학적 사고 과정 분석. 한국학교수학회논문집, 11(2), 201-219.

황선욱 외 32명(2011). 창의 중심의 미래형 수학과 교과내용 개선 및 교

육과정 개정 시안 연구, 한국과학창의재단.

Jarvis(2001). Learning in later life: an introduction for educators and careers. London: Kogan Page.

Peretz, A., & Shoham, M. (1990). Testing reading comprehension in LSP: Does topic familiarity affect assessed difficulty and actual performance? Israel: Ben Girion University of the Negev.

OECD. (2009). PISA 2009 Assessment Framework: Key competencies in reading, mathematics and science. OECD.

OECD. (2011). PISA 2012 Mathematics Framework. OECD.

부록1. 수리논술 문항 수정 전 원문항

1. 암호 문제 원문항

- 한양대학교 2009학년도 수시 2학기-Ⅱ 논술고사

1. 다음 제시문을 읽고 물음에 답하시오. (40점)

〈가〉 암호란 통신문의 내용을 제삼자가 판독할 수 없도록 글자, 숫자, 부호 등으로 변형시킨 것인데 주로 군사적 목적이나 외교통신, 전자상거래 등에 많이 이용된다.

다음과 같은 방식으로 만들어지는 암호를 생각해보자. 먼저 알파벳 A부터 Z와 !, ?에 다음과 같이 숫자를 대응시킨다.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	!	?
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28

이제 key를 고정된 양의 정수 k라 하고, 다음과 같은 변환규칙에 의해 암호화한다.

변환규칙: 숫자 n에 대응하는 문자 → n^k을 29로 나눈 나머지에 대응하는 문자

예를 들어 key가 3인 경우, D에 대응하는 숫자가 4이므로 4^3을 29로 나눈 나머지는 6이 된다. 따라서 D는 6에 대응하는 문자 F로 변환된다.

〈나〉 두 정수 a, b와 양의 정수 m에 대해, $a-b$가 m의 배수(즉, $a-b=mq$인 정수 q가 존재)일 때, a와 b는 법 m에 대해 합동이라고 하고 $a \equiv b \pmod{m}$으로 표기한다. 일반 등식에서와 같이 합동식에서도 다음의 법칙들이 성립한다.

(i) $a \equiv a \pmod{m}$

(ii) $a \equiv b \pmod{m}$ 이면, $b \equiv a \pmod{m}$

(iii) $a \equiv b \pmod{m}$ 이고 $b \equiv c \pmod{m}$ 이면, $a \equiv c \pmod{m}$

(iv) $a \equiv b \pmod{m}$ 이고 $c \equiv d \pmod{m}$ 이면, $a+c \equiv b+d \pmod{m}$ 이고 $ac \equiv bd \pmod{m}$

(v) $ac \equiv bc \pmod{m}$ 이고 c와 m이 서로 소이면, $a \equiv b \pmod{m}$

(1) key가 3일 때와 key가 2일 때, 통신문 'HUNT'를 변환하여 얻어진 암호문을 비교하고 발생하는 문제에 대하여 논하시오.

(2) 아래 표와 〈나〉의 법칙들을 이용하여 4^{28}을 29로 나눈 나머지가 1임을 설명하고, 임의의 정수 a가 29의 배수가 아닐 때 a^{28}을 29로 나눈 나머지에 대하여 설명하시오.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
$4x \pmod{29}$	4	8	12	16	20	24	28	3	7	11	15	19	23	27	2	6	10	14	18	22	26	1	5	9	13	17	21	25

[여기서 $4x \pmod{29}$ 는 $4x$를 29로 나눈 나머지를 뜻함.]

(3) 암호문을 정확하게 해독하기 위해 key가 가져야 할 조건을 논하시오.

2. 나무심기 문제 원문항

- 홍익대학교 2011학년도 수시모집 자연계 논술고사

【문제 3】

(가) 임의의 자연수 n이 주어졌을 때, 1부터 n까지의 (1과 n을 포함한) 자연수 중 n과 서로 소인 자연수의 개수를 $\phi(n)$이라 하자. 이렇게 정의된 함수를 오일러의 ϕ 함수라 한다. 예를 들어, 1부터 10까지의 자연수 중 10과 서로 소인 수는 1, 3, 7, 9 이므로 $\phi(10)=4$ 이다. 또한, 오일러의 ϕ 함수는 다음 성질을 만족함이 알려져 있다.

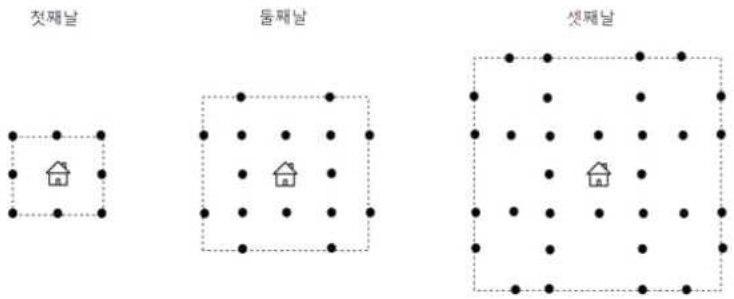
(1) 임의의 서로 소인 두 자연수 m, n에 대하여,

$$\phi(mn)=\phi(m)\phi(n).$$

(2) 임의의 소수 p와 자연수 n에 대하여,

$$\phi(p^n)=p^{n-1}(p-1).$$

(나) 중심에 원두막이 있고 그림과 같이 가로 세로 1미터 간격으로 나무를 심을 수 있는 과수원이 있다. 이곳에 매일 다음과 같은 방법으로 나무를 심는다.



위 그림과 같이, n번째 날에는 원두막을 중심으로 갖고 변의 길이가 $2n$미터인 정사각형의 변 위에 나무를 심되 중심에서 보았을 때 이전에 심은 나무에 의해 가려지지 않는 위치에만 심는다. 이때 나무의 굵기는 무시할 수 있을 만큼 작다고 가정한다.

(a) 임의의 자연수 n이 주어졌을 때, n번째의 날에 심은 나무의 개수를 오일러의 ϕ 함수를 사용하여 나타내는 방법을 설명하고, 이를 이용하여 열흘 동안 심은 나무의 총 개수를 구하시오.

(b) 나무를 매일 계속 심어나간다고 할 때, 하루에 48그루의 나무를 심게 되는 날을 모두 구하고, 풀이 과정을 서술하시오.

부록2. 수리논술 답안 받은 후 실시한 설문지

안녕하십니까?
본 설문조사에 참여해 주신 점에 대해 진심으로 감사드립니다.
본 설문지는 서울대학교 석사학위 논문을 위한 자료로 시행되는 것으로 여러분이 응답한 자료는 연구목적 이외에는 사용되지 않으며 익명으로 처리될 것입니다. 현 고등학교 학생들의 소중한 자료를 얻기 위해 이렇게 조사를 하오니 자신의 생각대로 하나도 빠짐없이 서술해 주시기 바랍니다.

설문에 들어가기에 앞서 여러분들에 대한 간단한 인적사항을 알아보고자 합니다. 설문 응답자에 대한 실태 파악을 위한 것으로 답해 주시면 감사하겠습니다.

- ( )고등학교, 2학년 ( )반
- 이름 :

1-1. 위의 논술 문제와 유사한 문제를 풀어본 적이 있거나 정수론을 배운 적이 있습니까?……(예 / 아니오)
(예를 택한 경우 1-2와 2-1 또는 2-2에 답해주십시오.)

1-2. 위의 논술 문제와 유사한 문제를 풀어본 적이 있거나 정수론을 배운 적이 있다면 그 경위를 알려주세요. (복수선택 가능)
대학부설 영재교육원……( )
교육지원청 부설 영재교육원 ……( )
교육지원청 산하 영재학급 ……( )
기타 사교육 기관 ……( )
자가 학습 ……( )

2-1. 위의 논술문제와 유사한 문제를 풀어보았다면, 그것이 '암호 문제'를 해결하는데 도움이 되었다고 생각되나요?……(예 / 아니오)
그렇게 생각한 이유는 무엇인가요?

_____

_____

2-2. 자가학습으로 정수론을 학습하였다면, 그것이 '암호 문제'를 해결하는데 도움이 되었다고 생각되나요? ……(예 / 아니오)
그렇게 생각한 이유는 무엇인가요?

_____

_____

-감사합니다.

Abstract

A study on how to utilize contents beyond the school curriculum in making university entrance exam questions for estimating students' mathematical writing ability

Heo, Jihee

Major Advisor : Kim, Suh Ryung

Department of Mathematics Education

The Graduate School

Seoul National University

According to the criteria of year 2005 of the Ministry of Education, Nonsulgosa (논술고사) is a "test to estimate students' ability to logically write their opinion and thinking about a given writing topic". Consequently the Nonsulgosa should assess higher order problem solving skills such as comprehension, thinking skills, ability to express oneself, and creativity, not ability of memorization. In this context, one should make the questions of the Math Nonsulgosa to evaluate, through students' answers mainly involving mathematical

writing, mathematical reasoning ability, mathematical problem solving skills, and mathematical communication skill. In order to assess not memorized knowledge but higher level thinking skills by focusing on student's mathematical problem solving procedure, it is necessary for a student to be placed in an unfamiliar problem situation and the contents treated in the Math Nonsulgosa had better to be new to students. In order to suggest a way of diversifying contents treated in the Math Nonsulgosa, we selected contents beyond the school curriculum and then, utilizing them appropriately, made Math Nonsulgosa problems so that they not only assess higher order thinking skills especially by being focused on student's problem solving procedure but an advance studying beyond the school curriculum also is not beneficial to students' writing the answers to them. Then we proceeded to give the problems to the students who participated in the experiment and analyze students' answers.

First of all, we selected two existing Math Nonsulgosa problems and then modified them properly so that student's problem solving procedure mainly involving mathematical writing can be assessed and no advance studying beyond the school curriculum is beneficial to students' answering them.

The following are main outcomes of our experiment on these two Math Nonsulgosa problems.

First, we observed that although problems dealt with contents beyond the school curriculum, they could assess students' higher order thinking skills such as their mathematical problem solving skills, reasoning ability, mathematical communication skills by being focused on student's problem solving procedure. Most students wrote their answers using only facts given in the problem statements and

mathematical knowledge within the school curriculum.

Second, we observed that although problems dealt with contents beyond the school curriculum, no advance studying beyond the school curriculum was beneficial to students' answering them. Two-independent-samples t test shows that there is no significant difference in the average of the group of students who did advance studying beyond the school curriculum and that of the group of students who did not. Furthermore, the qualitative analysis shows that students wrote their answers using only facts given in the problem statements and mathematical knowledge within the school curriculum. Rather, some students who did advance studying beyond the school curriculum just listed some memorized facts related to the given topic without reading the given statements thoroughly.

Throughout the research for this thesis, we could see a good possibility of utilizing contents beyond the school curriculum in making Math Nonsulgosa problems so that they not only assess higher order thinking skills especially by being focused on student's problem solving procedure but an advance studying beyond the school curriculum also is not beneficial to students' writing the answers to them.

keywords : Math Nonsulgosa, contents beyond the school curriculum, evaluation centered on student's problem solving procedure, an advance studying beyond the school curriculum

Student Number : 2011-21568