creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

교육학석사 학위논문

Constructionism 기반 패턴 구성 프로그램에 관한 연구

2013년 8월

서울대학교 대학원

수학교육과

신 동 조

Constructionism 기반 패턴 구성 프로그램에 관한 연구

지도교수 조 한 혁

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함
2013년 6월

서울대학교 대학원
수학교육과
신 동 조

신동조의 석사 학위논문을 인준함
2013년 8월

위 원 장 이 경 화

부위원장 권 오 남

위 원 조 한 혁

국문초록

패턴은 패턴 속에 내재된 규칙을 파악하고 이를 설명하는 과정에서 대수적 사고를 드러내고 발달시키는데 효과적인 도구이다. 따라서 수학교육에서 특히, 대수 도입과 대수 교육에서 그 중요성이 높아지고 있다. 많은 연구에서 다루고 있는 패턴에 관한 전형적인 과제는 패턴의 규칙을 파악하고 이 규칙을 일반화하여 언어 또는 기호를 사용하여 패턴의 근본이 되는 함수적 관계를 설명하는 과정으로 제시된다. 그러므로 패턴을 통한 학습이나 연구의 목적은 주로 학생들이 주어진 패턴의 일반적인 관계를 문자 기호로 표현하는 것에 초점을 두게 된다. 하지만 주어진 패턴을 문자 기호를 사용하여 나타내는 것은 많은 어려움이 있을 뿐만 아니라, 설령 학생들이 패턴 과제를 통해 좀 더 이른 시기에 문자 기호를 사용하여 일반적인 관계를 표현했다고 할지라고 자신들이 사용한 문자 기호에 대한 오개념을 가지고 있거나 아무 의미 없이 이러한 문자를 사용할 수 있다. 따라서 본 연구는 패턴의 일반적인 관계를 문자 기호를 사용하여 표현하기에 앞서 문자에 대한 올바른 개념 이해가 선행되어야한다는 문제의식에서 출발하였다. 이러한 문제의식을 바탕으로 먼저 쌓기나무 마이크로월드 환경에서 어린 학생들도 쉽게 시각적 패턴을 구성하고, 탐구하고, 분석할 수 있는 실행 가능한 표현체계를 만들었다. 그리고 이 표현체계와 마이크로월드상의 시각적 피드백을 통해 학교수학에서 문자 기호를 배우기 이전의 학생들이 문자 기호와 일반화의 의미를 형성하는데 어떠한 변화가 있는지 살펴보았다.

그 결과 학생들은 변수를 나타내는 문자 기호를 단지 특정한 큰 수나 패턴을 생성하기 위한 조작의 도구로 생각하면서도 이 문자를 사용하여 패턴의 일반적인 관계를 바르게 표현하는 경향이 있었다. 즉, 이것은 패턴의 관계를 대수적으로 표현한다는 것이 그들이 사용한 문자 기호의 의

미를 안다는 것을 함의하지 않았다는 것을 의미했다. 그리고 쌓기나무 마이크로환경에서의 상호작용과 연구자의 피드백은 변수를 문자로 표현하여 사용하는 것에 대한 잘못된 개념을 가지고 있거나 아무 의미 없이 문자 기호를 사용하는 학생들에게 문자 기호를 유연하게 사용할 수 있는 환경을 제공함으로써 시각적 표현이나 언어적 표현이 가지는 모호성을 문자 기호로 해소 할 수 있는 잠재성을 보여주었다.

본 연구는 현행 수학과 교육과정에서 일반화를 나타내는 문자 기호에 대한 어려움을 극복할 수 있는 하나의 대안으로 사용되어질 수 있으며, 이러한 패턴 구성 프로그램이 중·고등학교에서 중요하게 다루어지는 수학 개념에 대한 올바른 정신적 습관을 길러줄 수 있을 것으로 기대된다.

주요어 : 패턴, 일반화, 쌓기나무 표현, 문자 기호, 변수
학 번 : 2011-21563

목 차

Ⅰ. 서론 ····· 1
1. 연구의 필요성 및 목적 ····· 1
2. 연구문제 ····· 6
3. 용어 정의 ····· 6

Ⅱ. 이론적 배경 ····· 8
1. constructionism ····· 8
1.1. constructivism과 constructionism ····· 8
1.2. constructionism 기반 학습 환경 ····· 11
1.3. constructionism 마이크로월드 ····· 16
2. 패턴과 대수적 사고 ····· 22
2.1. 패턴의 종류 ····· 23
2.2. 패턴의 일반화 ····· 26
2.3. 패턴과 대수적 사고 ····· 28

Ⅲ. 연구 방법 및 절차 ····· 34
1. 연구 대상 ····· 34
2. 연구 절차 ····· 34
3. 검사도구 ····· 35
4. 자료의 수집 및 분석 ····· 38

Ⅳ. 쌓기나무 패턴 프로그램 설계 ····· 40
1. 쌓기나무 패턴 구성 프로그램의 학습 환경 ····· 40
1.1. 학습자 중심 학습 환경 ····· 42

1.2. 지식 중심 학습 환경 ····· 42
1.3. 평가 중심 학습 환경 ····· 44
1.4. 공동체 중심 학습 환경 ····· 46
2. 쌓기나무 패턴 구성 프로그램 ····· 46
2.1. 대상의 구조 파악과 활용 ····· 47
2.2. 문자 변수의 의미 형성과 일반화 표현 ····· 49

Ⅴ. 교수 설계 적용 및 결과 분석 ····· 57
1. 대상의 구조 파악과 활용 ····· 57
2. 문자 변수의 의미 형성과 일반화 표현 ····· 61
2.1. 문자 변수 n을 통한 패턴 구성 과정 ····· 62
2.2. 문자 변수 n에 대한 학생들의 이해 상태 분석 ····· 69
2.3. 문자 변수 n을 통한 일반화 표현과 의미 형성 ····· 73

Ⅵ. 요약 및 결론 ····· 86
1. 요약 ····· 86
2. 결론 및 제언 ····· 90

참고문헌 ····· 93
부록 ····· 99
Abstract ····· 105

표 목 차

<표 Ⅱ-1> 쌓기나무 마이크로월드 기본 조작 활동(김철호, 2012) ····· 20
<표 Ⅱ-2> 패턴 과제의 중요한 특징과 분류(Chua, 2009, p.23) ····· 23
<표 Ⅲ-1> 연구 절차 ····· 35
<표 Ⅳ-1> 차시별 온라인 교수 설계 내용 ····· 50
<표 Ⅴ-1> 학생들이 설명한 문자 변수 n의 의미 ····· 72
<표 Ⅴ-2> 온라인 과제에 대한 정·오답 결과 ····· 74
<표 Ⅴ-3> 교실 과제에 대한 정·오답 결과 ····· 80

그 림 목 차

[그림 Ⅱ-1] 학습 환경에 대한 관점(Bransford 등, 2000) ····· 14
[그림 Ⅱ-2] LOGO의 기본 행동 문자: '가자, 돌자' ····· 16
[그림 Ⅱ-3] 쌓기나무 마이크로월드의 기본 행동 문자 ····· 18
[그림 Ⅱ-4] 쌓기나무 표현을 사용한 쌓기나무 구성 ····· 18
[그림 Ⅱ-5] '[ ]' 기능의 사용 ····· 19
[그림 Ⅱ-6] 쌓기나무 마이크로월드 기본 조작 활동 ····· 20
[그림 Ⅱ-7] 대만의 쌓기나무 프로그램: 가상 조작 화이트보드 ····· 21
[그림 Ⅱ-8] 생성원의 참조 (Chua, 2009) ····· 24
[그림 Ⅱ-9] 패턴 과제에서 첫 번째 항의 결정 ····· 25
[그림 Ⅱ-10] eXpresser의 기본 인터페이스 ····· 32
[그림 Ⅲ-1] 온라인 활동에서 제시한 패턴 과제 ····· 37
[그림 Ⅲ-2] 교실 활동에서 제시한 패턴 과제 ····· 38
[그림 Ⅲ-3] 쌓기나무 프로그램 환경에서의 검사 도구: 내 의견 ····· 39
[그림 Ⅳ-1] Web 2.0 기반 쌓기나무 마이크로월드 인터페이스 ····· 41

[그림 Ⅳ-2] 하나의 패턴 과제에 대한 학생들의 다양한 표현 ····· 45
[그림 Ⅳ-3] 문자 치환을 사용하는 방법 ····· 48
[그림 Ⅳ-4] 첫 단계: 구조를 파악하고 활용하기 ····· 49
[그림 Ⅳ-5] 문자 치환을 사용하여 간단한 쌓기나무 표현 만들기 ····· 51
[그림 Ⅳ-6] 패턴 만들기 상자 ····· 52
[그림 Ⅳ-7] 특수화/일반화의 상호전환(김남희, 1997a) ····· 53
[그림 Ⅳ-8] 패턴 만들기 상자에서 문자 변수의 사용 ····· 54
[그림 Ⅳ-9] 패턴 만들기 상자 생성 과정 ····· 55
[그림 Ⅳ-10] 이차 패턴의 시각적 특성 ····· 56
[그림 Ⅴ-1] 치환 문자를 사용하여 조직화된 쌓기나무 표현의 예 ····· 58
[그림 Ⅴ-2] 치환 문자 속에 치환 문자를 사용한 예 ····· 59
[그림 Ⅴ-3] 많은 문자 치환을 사용한 예 ····· 60
[그림 Ⅴ-4] 패턴 만들기 상자에 대한 학생들의 생각 ····· 62
[그림 Ⅴ-5] 1번 과제에서 학생들의 사고 방법 분석 ····· 63
[그림 Ⅴ-6] 2번 과제에서 학생들의 사고 방법 분석 ····· 64
[그림 Ⅴ-7] 3번 과제에서 학생들의 사고 방법 분석 ····· 65
[그림 Ⅴ-8] 4번 과제에서 학생들의 사고 방법 분석 ····· 66
[그림 Ⅴ-9] 이차패턴 1번 과제에서 학생들의 사고 방법 분석 ····· 68
[그림 Ⅴ-10] 이차패턴 2번 과제에서 학생들의 사고 방법 분석 ····· 69
[그림 Ⅴ-11] 패턴의 구조를 정확히 파악하지 못한 학생의 예 ····· 75
[그림 Ⅴ-12] 문자 치환의 수정을 통한 올바른 표현 구성 ····· 76
[그림 Ⅴ-13] ‘n’과 ‘$n-1$’의 관계적 의미 형성 ····· 77
[그림 Ⅴ-14] 치환과 변수에 대한 형식적인 사용과 개선 ····· 78
[그림 Ⅴ-15] 이차패턴에서 n을 제대로 사용하지 못한 예 ····· 81
[그림 Ⅴ-16] 패턴의 일반화 과정에서의 모호한 기호사용 ····· 84
[그림 Ⅴ-17] 마이크로월드와의 상호작용 통한 기호 사용의 수정 ····· 84

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

패턴이 학교 수학에서 중요한 요소로 인식되면서 패턴에 관한 많은 연구가 진행 되고 있다. NCTM(2000)[1]은 학교 수학의 10개 영역에 있어서 요구되는 규준을 제시하였는데 그 중 대수 영역의 첫 번째 규준으로 '패턴, 관계, 함수에 대한 이해'를 강조하였다. 또한 현실주의 수학교육을 반영한 Britannica(1998) 교과서 역시 대수 교육과정을 '패턴과 기호(pattern and symbols)' 단원으로 시작함으로써 패턴을 대수 교육의 핵심으로 다루고 있다. 패턴이 많은 연구자들에 의해 대수 도입과 대수 교육을 위해 중요하게 다루어지고 있는 이유는 패턴을 어떻게 제시하느냐에 따라 어린 아동에게도 쉽게 제공할 수 있으며 나아가 주어진 패턴의 관계를 파악하고 이를 일반화 하는 과정에서 학생들의 대수적 사고를 드러내고 이를 발달시키기 위한 효과적인 도구이기 때문이다(Amit & Neria, 2008; Barbosa 등, 2007; English & Warren 1998; Kerbs 2003; Radford, 2006; Stacey, 1989; Zazkis & Liljedahl, 2002). 그러므로 현대 수학에서 강조되고 있는 패턴에 기초한 대수 도입과 학습은 대수를 문자 기호의 도입을 통한 기호화와 동일시하는 전통적인 관점과는 달리 대수 자체보다는 대수를 학습하는 데 도움이 되는 대수적 사고를 강조하기 위한 도입으로 볼 수 있고, 특히 관계, 규칙 그리고 일반화 지도를 강조한 것으로 볼 수 있다(김성준, 2002, 2004).

Küchemann(1981)은 학교 대수에서 문자사용에 관한 학생들의 이해 수

1) 미국수학교사협의회(National Council of Teachers of Mathematics)에서는 1989년 '학교 수학의 교육과정과 평가 규준'을 발표하였고, 2000년에는 이를 개정하여 '학교 수학을 위한 원리와 규준'을 내놓고 학교 수학 교육을 위한 지침을 제공하였다.

준을 여섯 단계로 나누었다[2]. 그는 학생들이 문자를 미지수로 사용하는 것보다 일반화된 수나 변수로 이해하고 사용하는 것이 어렵다고 밝히고, 패턴을 통한 경험이 이러한 어려움을 극복하고 대상에 대한 일반적인 관계를 파악하는 초석이 될 수 있다고 하였다. 그의 연구는 학생들이 패턴에 대한 경험이 이후 대수 학습에서 핵심이 되는 일반화된 수나 변수에 대한 올바른 이해로 나아갈 수 있다는 것을 의미하면서 전통적인 대수 교육과정에서 문자 기호에 대한 새로운 과제를 던져주었다. 즉, 이러한 점은 Küchemann이 학생들에게 문자 기호에 대한 의미를 느낄 수 있는 시간과 환경이 충분히 제공 되지 않고 갑작스럽게 도입하고 조작하는 전통적인 교육과정보다 패턴에 기초한 대수 학습의 필요성을 강조하는 것으로 볼 수 있다.

많은 연구에서 다루고 있는 패턴에 관한 전형적인 과제는 패턴의 규칙을 파악하고 이 규칙을 일반화하여 언어 또는 기호를 사용하여 패턴에 근본이 되는 함수적인 관계를 설명하는 과정으로 제시된다(Chua & Hoyles, 2012). 그러므로 패턴을 통한 학습이나 연구의 목적은 주로 학생들이 주어진 패턴의 일반적인 관계를 문자 기호로 표현하는 것에 초점을 두게 된다. 하지만 주어진 패턴을 문자 기호를 사용하여 나타내는 것은 많은 어려움이 있을 뿐만 아니라(Hoyles & Küchemann, 2002), 설령 학생들이 패턴 과제를 통해 좀 더 이른 시기에 n번째 패턴을 n에 대한 식으로 표현했다고 할지라도 자신들이 사용한 문자 n에 대한 오개념을 가지거나 아무 의미 없이 이러한 문자를 사용할 수 있다(Lee & Wheeler, 1987). 한 예로 Lee & Wheeler의 연구에서 심지어 고등학교 학생들도 패턴속의 관계를 n에 대한 식으로 일반화하여 표현했지만 그들이 사용

2) Küchemann은 학생들이 사용하는 6가지 문자사용 유형을 위계적으로 문자를 수치화(letter evaluated), 문자를 사용하지 않음(letter not used), 문자를 어떤 대상으로 사용(letter used as an object), 문자를 특정한 미지수로 사용(letter used as a specific unknown), 문자를 일반화된 수로 사용(letter used as a generalized number), 문자를 변수로 사용(letter used as a variable)으로 나누었다(p. 104).

한 문자 n에 대한 의미를 단지 하나의 큰 수로 생각하고 있다고 하였다. 따라서 패턴을 통한 학습이 학생들의 대수적 사고를 발달시키는 도구로서 사용되기 위해서는 주어진 패턴의 일반적인 관계를 문자 기호를 사용하여 표현하기에 앞서 이러한 문자에 대한 올바른 이해가 선행되어야 한다. 그리고 이러한 문자 기호에 대한 이해를 바탕으로 패턴에 내재된 함수적인 관계를 기호로 표현하는 과정으로 나아가야 한다.

Noss 등(2011)은 일반화에 대한 의미와 이것을 문자 기호로 표현하는 것에 대한 어려움을 위한 하나의 방법으로 패턴을 구성하고 분석할 수 있는 대안적인 표현체계를 가지는 환경의 필요성을 제기하였다. 그리고 이러한 표현체계를 구현하기 위한 많은 예비 연구를 통해 구성주의적 접근을 기반으로 시각적 패턴을 만들 수 있는 마이크로월드인 'eXpresser'를 개발하였다. 이 마이크로월드의 중요한 특징은 패턴의 일반적인 관계를 표현하기 위해 사용하는 문자 기호 대신 그림 형태로 나타나는 표현체계를 사용한다는 것이다. 그들은 이 표현체계를 'icon-variable'이라고 부르고 학교 수학에서 문자를 배우기전의 학생들이 문자의 개념을 더 쉽게 이해하기 위한 방법으로 사용하였다. 하지만 학생들이 eXpresser와의 상호작용을 통해 일반성에 대한 아이디어를 만들어낼 수 있지만 이 아이디어를 문자 기호에 담아서 표현하기 위해서는 또 다른 어려움에 직면할 수 있다. 이것은 학생들이 대수 학습에서 자신이 생각하는 바를 표현하는 것과 그것을 문자를 사용하여 나타내는 것은 서로 독립적일 수 있기 때문이다(Booth, 1984). 따라서 패턴을 통한 대수 도입과 대수 교육을 위해서 일반화를 표현하는 것과 더불어 그들이 사용하는 문자 기호가 학생들에게 의미 있는 기호로 사용될 수 있는 충분한 경험을 제공하는 학습 환경이 필요하다.

최근 이러한 학습 환경 설계에 관한 관심이 증가하면서 학습 환경을 어떻게 설계해야 하는지에 관한 많은 연구가 진행되고 있다. 특히 정보 테

크놀로지(technology)의 발달과 함께 학교교육에서 공학적 도구의 사용이 증가하고 있다[3]. Jonassen(1995)은 학생들에게 제공되는 정보 테크놀로지는 학생들의 인지적 도구로서 사용되어야 하고, 이를 위해 '테크놀로지로부터의 학습(learning from technology)'이 아닌 '테크놀로지와 함께하는 학습(learning with technology)'이 되어야 한다고 주장한다. 테크놀로지로부터의 학습은 테크놀로지에 미리 지정된 지식이나 기술을 학생들이 습득하는 것을 목표로 하는 반면 테크놀로지와 함께하는 학습은 테크놀로지가 학습을 지배하거나 학습자가 테크놀로지에 의해 지배되는 것이 아니다. 오히려 테크놀로지가 학습자의 지식을 구성하기 위해 도와주는 도구로서 사용되어야 한다는 것이다. Jonassen은 테크놀로지와 함께하는 학습이 학습자가 컴퓨터와 지적인 협력을 하는 것인데 이러한 지적인 협력을 통한 학습의 전체 합은 부분들의 합보다 더 크게 작용한다고 하였다. 그러므로 테크놀로지를 활용한 효과적인 교수를 위해서는 교사 중심의 '교수학적 실천(instructional practices)'로부터 학습자 중심의 학습 또는 '구성주의적 접근(constructivism[4] approach)'으로의 전환이 필요하다(Jonassen, 1995). constructivism에 입각한 교육과정은 학습자가 스스로 의미 탐구를 반영한 하나의 교육과정 지도를 만드는 것인데(변영계, 2005), Papert(1980)는 이러한 constructivism의 인지 이론 기반에 실제적인 교육적 전략을 더한 교수 방법론으로 'constructionism'을 소개하고 constructivism과 구별하여 사용하였다. 그는 constructionism에 기반 하

3) NCTM(2000)에서 발표한 학교수학을 위한 6가지 원리[1]중 하나가 정보 테크놀로지의 원리이다. NCTM은 테크놀로지가 수학을 가르치는데 영향을 미치고 학생들의 학습을 향상시킨다고 하였다. 따라서 학교수학에서 테크놀로지를 적절히 사용하여 더 많은 수학을 보다 심도 있게 학습할 수 있도록 제안하였다. 또한 교육과학기술부(2011)는 스마트(SMART)교육의 중점 과제와 추진 전략 및 실행 로드맵을 제시하였다. 스마트 교육의 핵심 내용은 학교 교육이 자기 주도적이고(Self-Directed) 흥미로워야 하며(Motivated) 수준과 적성에 맞는(Adaptive) 풍부한 자료(Resource Enriched)를 제시하는 정보 테크놀로지 기반(Technology Embeded)으로 이루어져야 한다는 것이며 이러한 흐름은 시대가 지남에 따라 강조되고 있다.

4) 'constructivism'은 '구성주의'로 번역되어 사용되어 지는데 본 연구에서는 Papert의 'constructionism'과의 번역에서 오는 혼동을 피하기 위해 원어를 그대로 사용한다.

여 초등의 직관 기하에서 중등의 논리 기하의 차이를 어떠한 도구로 어떻게 디자인해야 할지를 생각하였다. 그리고 모든 평면 도형은 '길이'와 '각'으로 이루어진다는 사실에 주목하여 평면 도형을 구성하기 위해 '가자'와 '돌자'라는 두 개의 기본 행동 명령에 따라 거북이가 그림을 그릴 수 있는 환경인 LOGO 프로그램을 개발하였다. 이러한 의미에서 Papert가 제안한 '가자'와 '돌자'의 기본적인 아이디어는 평면 도형에 대한 '강력한 아이디어(powerful idea)[5]'가 된다. 학습자는 자신이 원하는 도형을 그리기 위해 '가자'와 '돌자'를 사용하여 표현한다. 그리고 이 표현들은 컴퓨터 화면에 즉각적으로 실행된다는 점에서 '실행 가능한 표현(executable expression)'이라 할 수 있다. 실행 가능한 표현을 사용하여 대상을 구성함으로써 학습자는 자신이 사용한 표현에 대한 피드백을 받을 수 있고 오류를 수정하는 과정에서 반성적 사고를 할 수 있다.

이러한 LOGO의 기본 아이디어는 미디어의 발달과 공간감각에 대한 중요성이 강조됨에 따라 3차원의 환경으로 발전되었다(Cho 등, 2010). 이 환경은 공간을 구성하기 위해 '앞, 좌, 우, 위, 아래'를 기본적인 아이디어로 하고, 이를 실행할 수 있는 표현들을 사용하여 정육면체 쌓기나무로 입체도형을 만들 수 있는 '쌓기나무 마이크로월드'이다.

따라서 본 연구에서는 학교 수학에서 중요하게 다루어지고 있는 소재인 쌓기나무[6]를 구현할 수 있는 쌓기나무 마이크로월드에서 학생들이 문자

---

5) Papert(1980)는 '강력한 아이디어(powerful idea)'를 일생 동안 사고하는 도구로 사용될 수 있는 것이라고 하였다.

6) 우리나라 제 7차 개정교육과정에서도 '규칙성과 문제해결' 영역에서 시각적 패턴을 사용하여 저학년부터 '규칙적인 배열에서 규칙을 찾기', '다양한 변화의 규칙 찾기', 그리고 '다양한 변화 규칙을 수로 나타내고 설명하기'의 패턴 활동을 제시한다. 그리고 6학년의 '도형' 영역에서는 시각적 패턴 중 쌓기나무를 규칙적으로 늘어놓은 패턴을 제시하여 '패턴의 규칙 찾기'와 '규칙을 통해 개수 구하기' 활동을 하도록 하고 있다. 특히, 교육과정에서 사용하는 쌓기나무는 공간감각과 패턴의 인식뿐만 아니라 공간에서의 의사소통을 위한 중요한 소재로 다루어지고 있다. 김철호(2012)는 쌓기나무 패턴과 교육과정의 연계성에 대해 살펴봄으로써 쌓기나무는 어린 아동들의 유희의 소재이며, 초등학교 교육과정에서 다루어지고 있는 만큼 학생들에게 친숙하게 다가갈 수 있을 뿐만 아니라 쌓기나무 패턴을 통한 문자 도입, 일차식과 이차식 및 함수적 사고, 점화식, 수학적 귀납법등으로 나아갈 수 있는 수직적 수학화를 위한 중요한 소재가

기호를 사용하여 패턴을 만들어보고 분석할 수 있는 패턴 구성 프로그램을 설계하고자 한다. 그리고 이 프로그램에서의 활동이 학교수학에서 문자 기호를 배우기 이전의 학생들이 문자 기호와 일반화의 의미를 형성하는데 어떠한 변화가 있는지 살펴본다.

2. 연구 문제

연구 문제 1. constructionism 기반 쌓기나무 패턴 구성 프로그램이 어떻게 설계 될 수 있을까?

연구 문제 2. constructionism 기반 쌓기나무 패턴 구성 활동을 통해 학생들의 문자 기호와 일반화에 대한 의미 형성에 어떠한 변화가 있는가?

3. 용어 정의

(1) 쌓기나무 패턴

패턴은 다양한 의미로 사용되고 있지만 학교 수학에서 사용하는 패턴은 주로 수, 도형, 무늬 등을 일정한 규칙으로 늘어놓은 배열을 의미한다(김동현, 2009). 본 연구에서는 도형에 관한 패턴 중 쌓기나무를 규칙적으로 늘어놓은 배열을 쌓기나무 패턴으로 정의하여 사용한다. 이러한 쌓기나무 패턴은 초등학교 6학년 교과서에서 규칙성 찾기의 소재로 사용되고 있다.

된다고 하였다.

(2) 쌓기나무 표현

쌓기나무 마이크로월드(Cho 등, 2010)에서 5개의 행동 명령(s, R, L, u, d)은 각 명령에 대응하는 대상이 컴퓨터 화면에 시뮬레이션 되어 나타난다는 점에서 '실행 가능한 표현(executable expression)'이다. 쌓기나무 마이크로월드에서 학습자는 원하는 대상을 's, R, L, u, d'등의 문자열을 사용하여 구성하는데 본 연구에서는 여기서 대상을 만들기 위해 사용한 문자열을 쌓기나무 표현이라 정의하여 사용한다.

(3) 패턴 구성 활동

본 연구에서는 쌓기나무 마이크로월드에서 자신이 원하는 쌓기나무 입체를 쌓기나무 표현을 통해 만드는 활동을 패턴 구성 활동으로 정의하여 사용한다. 그러므로 패턴 구성 활동에서는 쌓기나무 표현을 만드는 것이 핵심이다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. constructionism

이 장에서는 패턴 구성 프로그램 설계의 이론적 근거가 되는 constructionism 이론과 이 이론을 적용한 학습 환경에 대해 살펴보고자 한다. 이를 위해 먼저 '구성주의'로 잘 알려진 constructivism에 대해 알아보고 이와 비교하여 constructionism을 살펴본다. 이후 국·내외 constructionism 에 기반하여 설계된 학습 환경 중 쌓기나무를 소재로 한 학습 환경에 대해 소개한다.

1.1. constructivism과 constructionism

constructionism은 1972년 영국에서 열린 ICME 2에서 Papert의 발표로 처음 사용되어졌다. 김화경(2006)은 Piaget의 constructivism과 Papert의 constructionism 이론 모두 '구성주의'로 번역되어 사용된다는 점에서 이를 구분해야 한다고 하였다. constructivism은 지식이 외부로부터 주어지는 것이 아니고 우리가 이미 알고 있는 것을 통해 새로운 정보를 조정함으로써, 그리고 자신의 경험을 반성함으로써 우리의 내면에서 자주적으로 구성된다는 것을 이론의 바탕에 두고 있다. constructivism을 강조한 학습에서는 학생이 교사의 수업을 수동적으로 받아들이는 것이 아니고, 학생 스스로가 능동적으로 구성하는 것이다. 따라서 constructivism에서 교사는 자신이 가진 지식을 잘 전달하려고 애쓰는 일보다 학생이 지식을 의미 있게 잘 구성하도록 협력 내지 조언하는 자세가 중요하다(변영계, 2005). Bruner의 인지적 구성주의(cognitive constructivism) 역시 학습이란 능동적인 과정이며, 학습자가 그들의 기존 지식을 바탕으로 새로운

아이디어나 개념들을 구성하는 것이라고 하였다. 수업과 관련하여 교사는 학생들이 스스로 원리를 발견할 수 있도록 해야 하며, 학생들이 배워야 할 정보를 학습자의 능력에 맞게 변형시키는 것으로서 나선형 교육과정을 주장하였다(변영계, 2005). Vygotsky의 사회적 구성주의(social constructivism)는 사회적 상호작용, 언어, 문화가 학습에 미치는 영향이 주요 관심의 대상이었으며, Piaget와 마찬가지로 학습은 발달해가는 것으로 보았다. 그는 constructivism에 입각한 교육과정이란 학습자가 스스로 의미 탐구를 반영한 하나의 교육과정 지도를 만드는 것이라고 하였다. 결국 constructivism은 교수 환경에서 자신이 듣고 배운 것을 동화, 조절을 통해 보다 새로운 상위의 도식이나 구조를 생성하는 인지이론이다. 이후 Papert(1980)는 constructivism의 인지 이론 기반에 실제적인 교육적 전략을 더한 교수 방법론으로 'constructionism'을 소개하고 constructivism과 구별하여 사용하였다. constructivism과 Papert의 constructionism은 모두 지식이 단순히 전이되는 것이 아니라 학습자가 마음속에서 구성하는 것이라는 기본 관점을 가지고 있지만 constructivism은 경험을 강조하는 반면 constructionism은 도구를 강조한다(김화경, 2006). Papert는 컴퓨터 프로그래밍 학습에 의해 학습자가 생각하는 방식을 배우게 된다고 하였다. 이는 학습자가 모방과 반복을 통해 지식의 전이를 위한 교수학적 도구로 이용하던 테크놀로지를 지식의 의미를 스스로 찾아나가기 위한 학습의 도구라는 관점으로의 전환을 의미한다. 이러한 관점은 테크놀로지로부터의 학습에서 테크놀로지와 함께하는 학습으로의 전환을 의미한다고 볼 수 있다.

constructionism에서 학습은 실재하는 대상을 적극적으로 만들고 그 과정에서 반성이 일어날 때 가장 효과적으로 나타날 수 있다. 그러므로 constructionism에서 학습이 성공적으로 이루어지기 위해서는 이러한 구성활동과 그에 대한 반성이 일어날 수 있는 환경 설계가 필수적으로 선

행되어야 한다(김화경, 2006). Papert는 constructionism이 '아동들에게 그들이 행하여 배울 수 있었던 것보다 많이 배울 수 있도록 좋은 것을 주는 것'이라 하였는데 여기서 '좋은 것'이 바로 구성과 반성이 일어날 수 있는 환경을 뜻한다. 따라서 Papert는 constructionism에 기반 하여 초등의 직관 기하에서 중등의 논리 기하의 차이를 어떠한 도구로 어떻게 디자인해야 할지를 생각했다. 그리고 모든 평면 도형은 '길이'와 '각'으로 이루어진다는 사실에 주목하여 평면 도형을 구성하기 위해 '가자'와 '돌자'라는 두 개의 기본 행동 명령에 따라 거북이가 그림을 그릴 수 있는 환경인 LOGO 프로그램을 개발하였다. LOGO는 학습자에게 익숙한 '가자'와 '돌자'라는 두 가지 기본 행동 명령으로 평면 위에 그들이 원하는 그림을 그리게 하는 환경이다. LOGO는 '바닥은 좁게 천장은 높게(Low floor and high ceiling)'로 설명되어지곤 했는데 이것은 LOGO가 초보자들이 처음 시작하기 쉬우며(low floor), 이를 활용하여 전문가들이 정교하고 점점 더 고차원의 일을 수행할 수 있다는 것을 의미한다(high ceiling). 아동에게 constructionism에 기반한 LOGO는 단순한 놀이로서 생각할 수 있지만, Kafai & Resnick(1996)은 아동이 이러한 의미 있는 물리적 대상을 직접 만들어 보고 조작해보는 활동을 통해 정신적인 구성으로 나아갈 수 있다고 하면서 constructionism을 통한 학습에 주목 하였다.

constructionism은 LOGO와 같이 학습자가 물리적 대상을 직접 만들 수 있는 환경을 필요로 하는데 이러한 환경을 컴퓨터 속에 만든 것이 바로 마이크로월드이다(Edwards, 1995). 마이크로월드의 가장 큰 특징 중 하나는 대상을 직접 구성할 수 있고 이렇게 구성된 대상을 조작할 수 있다는 것이다. 수학의 형식적인 정의나 정리는 마이크로월드 속에 내재되어 있기 때문에 학생들은 마이크로월드에서 대상을 구성하고 조작해봄으로써 그 의미에 점진적으로 도달할 수 있게 된다. 또한 마이크로월드는

대상과 조작의 상징적 체계와 동적이고 시각적인 표현을 연결한다. 이것은 학습자가 하나의 체계에서 수학적 대상을 예측하고 행동하는 기회를 제공하며, 이를 다른 체계에서 피드백 받을 수 있게 한다는 점에서 의미가 있다(Edwards, 1995). 학습자는 이러한 환경 속에서 자신의 생각을 재 고찰 할 수 있으며, 오류 분석을 통해 대상의 궁극적인 목적으로 나아갈 수 있다.

1.2. constructionism 기반 학습 환경

다음은 앞서 살펴본 constructionism에 기반한 학습 환경을 설계하기 위해 관련된 선행 연구들에 대해 살펴본다. 먼저 constructionism에 기초로 하여 만들어진 '학습과학(learning science)[7]'에서 Bransford 등(2000)이 제시한 학습 환경 설계를 위한 4가지 관점에 대해 살펴본다. 그리고 패턴 구성 프로그램이 '학습 용이한 수학(learnable mathematics)' 되기 위해 Eigenberg(1995)와 Resnick & Silverman(2005)의 교육용 공학 프로그램 설계 원리에 대해 알아본다.

1.2.1. 학습과학의 주요환경

학습자에게 의미 있는 학습 환경을 설계하기 위해 Bransford 등(2000)은 학습과학에서의 4가지 주요환경에 대해 제시하였다. Bransford 등이 제시한 4가지 주요환경은 '학습자중심 학습 환경', '지식중심 학습 환경', '평가중심 학습 환경', '공동체중심 학습 환경'이다.

먼저 '학습자중심' 이라는 용어는 교육 상황에서 학습자의 지식, 기술,

7) 학습과학이란 과학적인 방법을 통하여 인간의 정신을 체계적으로 연구하고, 학습에 관한 인지심리학자와 교육심리학자의 연구 결과를 교육의 실재에 적용하려는 분야이다(Bransford 등, 2000).

태도, 믿음 등에 특별히 주의를 기울일 때 사용하는 용어이다. 학습자중심의 학습 환경에서는 학습자가 가지고 있는 선행 지식과 학습 방식을 고려하여야 한다. 그러므로 학습자중심의 학습 환경을 구축한다는 것은 학습자의 선행 지식, 학습 방식, 문화적 특징, 신념 등이 새로운 정보를 해석하는데 영향을 주는 것을 고려하여 학습 환경을 구성한다는 것을 의미한다(Bransford 등, 2000). 교실 환경이 아닌 공학적 장치를 이용하는 학습자중심 학습 환경을 구현하기 위해서는 학습자가 공학적 장치를 사용하는 형태에 관한 정보를 모두 저장하고, 수집된 정보에 대하여 교육적인 목적에서 선별 및 분석 과정을 거쳐 학습자를 판단할 수 있도록 하여야 한다(송민호, 2010).

지식중심 환경에서는 심도 깊은 이해와 이후 계속되는 학습 전이 과정을 거쳐 학습자의 지식이 더욱 풍부해지도록 도와줄 필요가 있다고 본다. 이는 수학에서 계산 방법을 배우는 것을 넘어 수학을 이해하고 수학적으로 생각할 수 있도록 해야 한다는 것이다. 지식중심 학습 환경의 흥미로운 접근법중 하나가 '점진적 형식화(progressive formalization)'인데 Bransford 등은 이를 MIC(Mathematics in Context)교과서를 예를 들어 설명하였다. 이는 학습자가 그림, 다이어그램과 초기의 비형식적인 아이디어를 점차 구조화된 방식으로 형성해 가도록 격려해서 그들이 대수의 개념과 절차를 획득하도록 하는 것이다 (Bransford 등, 2000). 이러한 과정은 하나의 방향으로 연속적으로 이루어지는 것이 아니므로 학습 이전에 학습자의 선행 지식을 파악해야 한다는 점에서 학습자 중심 학습 환경과 동일한 관점을 가지며, 학습자에게 중요한 개념적 아이디어를 초기에서부터 점진적으로 접하도록 한다는 점에서 '조기 대수(early algebra)'와 유사한 관점을 가진다고 볼 수 있다. 지식중심 학습 환경에서 공학적 장치는 학습자가 지식의 구조에 접근할 수 있도록 환경을 제공하는 역할을 해야 한다. 이를 위해서 지식의 구조를 가장 잘 표현할 수 있는 표현

체계를 찾아내어 의미변화 없이 잘 구현하기 위한 공학적 장치를 개발하여야 한다(송민호, 2010).

평가중심 학습 환경은 피드백과 수정의 기회를 제공해야하고 평가의 대상이 학습목표와 일치되어야 한다(Bransford 등, 2000). 또한 전통적인 학습 환경에서의 평가와 달리 새로운 학습 환경에서는 학습자가 자신의 활동을 평가하거나 다른 학습자를 평가할 수 있다. 자기 평가는 수업에 대한 메타 인지적 접근의 중요한 부분이 되어 자기반성의 기회를 제공한다(송민호, 2010). 동료평가는 학습자에게 자신의 학습 과정이나 평가 과정에 대한 성찰의 기회를 제공함과 동시에 다른 학습자의 평가자가 되어 봄으로써 학습자의 정의적 영역에 대한 효과를 기대할 수 있다(배영지, 2008). 평가는 역시 학습자의 이해를 측정할 수 있어야 한다. 이것은 동일한 해답에 대한 소요 시간의 차이 또는 해답이 도출되는 과정 등 다양한 방향에서 접근할 수 있어야 한다. 평가중심 학습 환경을 구현하기 위해서 공학적 장치는 기존의 지필식 시험을 공학적 장치로 구현하는 수준을 넘어서서, 진단하려는 학습자의 활동에 대한 평가가 이루어질 수 있도록 학습자의 활동을 위한 공학적 장치를 평가를 위한 공학적 장치와 연계시켜야 한다(송민호, 2010).

마지막으로 공동체중심 학습 환경에서는 자신의 활동이 다른 사람과 공유할 수 있는 기회를 갖는 것은 학습자와 교수자 모두에게 상당한 원동력이 된다는 것을 가정한다. 구체적으로 학습자는 자신의 학습이 유용하다는 것을 알거나 사회적 공동체에 도움이 된다는 것을 알 때 학습 동기가 더욱 자극된다(Bransford 등, 2010). 공동체중심 학습 환경에서 공학적 장치는 수학적 의사소통이 가능하도록 설계하여야 한다. 수학적 의사소통은 수식이나 그래프와 같은 표현에 관한 의사소통뿐만 아니라, 지식중심 학습 환경에서 학습자의 활동과 같은 시각적 표현에 관한 의사소통도 포함하여야 한다(송민호, 2010).

위에서 살펴본 것과 같이 학습 과학의 주요한 네 가지 학습 환경은 개념적으로 서로 관련되어 있고 상호지지해 주는 하나의 체계로 이해되어야 한다[그림 Ⅱ-1].

[그림 Ⅱ-1] 학습 환경에 대한 관점 (Bransford 등, 2000)

1.2.2. 교육용 공학 프로그램 설계 원리

Eigenberg(1995)는 학습자를 위한 소프트웨어 디자인에 대한 설계연구에서 교육용 공학 프로그램의 설계 원리를 세 가지로 제시하였다.
첫 번째 원리는 직접적인 조작과 프로그래밍이 동시에 가능한 환경이어야 한다는 것이다. Eigenberg는 프로그래밍을 통한 구성이 학습의 기본이 된다고 하여 프로그래밍을 강조하였다. 두 번째 원리는 수학자들이 사용하는 환경과 교육용 환경의 차이를 줄여야 한다는 것이다. 즉, 교육용 환경 자체가 실제 탐구 환경이어야 한다. 이는 수학 교육을 위한 공학용 환경은 실제 수학과의 차이를 최대한 줄이고, 수학에서 사용하는 아이디어와 기호적 표기 등과 최대한 유사한 환경을 제공해야 한다는 것을 의미한다. 세 번째 원리는 학습자를 위한 교재나 설명서, 도움말 기능들이 포함되어야 한다는 것이다. 교육용 공학은 공학적 도구를 통해 학

습이 이루어지게 하는 것이 목표이기 때문에 학습자의 학습을 위한 기능들이 포함되어야 한다고 하였다.

Resnick & Silverman(2005)은 다년간 아동들을 위한 새로운 테크놀로지 디자인에 대해 연구하여 공학용 프로그램 설계에 관한 10가지 원리를 제시하였다.

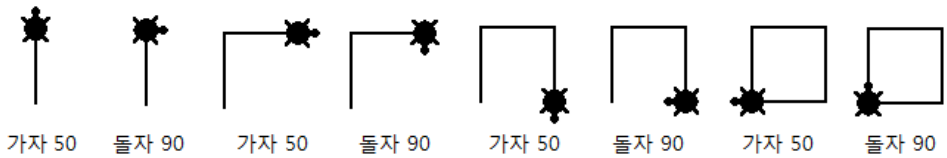
첫 번째 원리는 디자이너들을 위한 디자인(Design for designers)이 되어야 한다는 것이다. Resnick & Silverman은 '디자인을 통한 학습(learning through designing)'을 강조하였다. 이것는 Papert의 constructionism을 그들의 첫 번째 설계 원리로 생각하는 것이다. 즉, 그들은 구성주의학자(constructionist)들이 무언가를 만들거나 디자인 하는 경험으로부터 많을 것을 배운다고 믿었다. Resnick & Silverman이 말한 디자인을 통한 학습은 '손을 통한 학습(hands-on learning)'과 '무언가를 하는 것을 통한 학습(learning by doing)'과는 조금 다르다. 즉, 학생들이 무언가를 단지 구성하는 것뿐만 아니라 그들의 구성에 내재하고 있는 아이디어를 탐구하는 것이 중요하고 이것을 테크놀로지 설계의 목표가 된다고 하였다. 두 번째 원리는 '바닥은 좁게 벽은 넓게(Low floor and wide walls)'로 비유하여 설명하였다. 이것은 초보자들이 접근하기 쉬운 환경을 제시하되 학습 환경이 넓은 범위에서 다양한 탐구가 일어나야 한다는 것이다. LOGO 언어는 '바닥은 좁게 천장은 높게(Low floor and high ceiling)'로 비유되어 설명되어지곤 했는데 여기서 높은 천장은 전문적인 것이 가능한 환경을 뜻한다. 하지만 Resnick & Silverman은 전문적인 것이 가능한 환경보다 넓은 범위에 적용 가능한 환경을 강조하였다. 세 번째 원리는 '강력한 아이디어(Papert, 1980)'를 중요시하되 강요하지 말라는 것이다. 강력한 아이디어를 직접적으로 가르치는 것은 효과적이지 못하고, 오히려 강력한 아이디어를 디자인을 위한 자연스러운 부분으로 우연히 접하게 하고 사용하게 하는 기회를 제공해야 한다고 하였

다. 이외에도 Resnick & Silverman은 다양한 원리를 제시하였는데 그들이 제시하는 원리의 핵심은 아주 간단한 아이디어를 학습함으로써 그 아이디어가 이후 학생들의 학습에 두루 쓰일 수 있고, 응용 가능해야 한다는 것이다. Resnick & Silverman은 컴퓨터 프로그래밍을 배워야 한다는 것을 강조하지 않았다. LOGO와 Basic같은 프로그래밍이 1980년대에는 기본적인 교육 활동으로 여겨졌고, 분명 프로그래밍을 능숙한 사람들은 많은 영역에서 그들의 능력을 훌륭하게 사용할 수 있지만 30년이 지난 현재는 프로그래밍 언어를 필수적으로 강조하기보다 복잡한 프로그래밍 언어는 숨기고 핵심적인 부분의 강조를 통한 학습 환경 설계가 필요하다고 하였다.

1.3. constructionism 기반 마이크로월드

1.3.1. 쌓기나무 마이크로월드

Papert(1980)가 제안한 LOGO는 '가자, 돌자' 라는 신체동조적인 명령을 사용하여 평면상에 다양한 수학적 대상 또는 상황을 학습자가 말하듯이 표현할 수 있는 실행 가능한 표현 체계이다[그림 Ⅱ-2]. 이러한 신체동조적인 개념은 일반적으로 최근 수학교육에서 광범위하게 연구가 진행되고 있는 체화 이론(embodied cognition)과 연관된다(Healy & Kynigos, 2010).



[그림 Ⅱ-2] LOGO의 기본 행동 문자: '가자, 돌자'

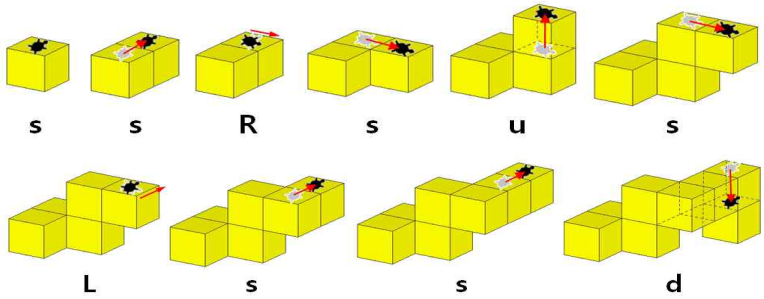
Cho 등(2010)은 LOGO의 신체동조적인 명령과 최근에 강조되고 있는 공감 감각의 개발에 맞추어 3차원 입체도형을 만드는 LOGO 기반 쌓기나무 마이크로월드를 개발하였다. 이 마이크로월드에서 기본 블록으로 사용하는 쌓기나무는 우리나라 초등학교 교육과정에서 공간감각, 의사소통 및 규칙성을 인식하기 위해 사용되고 있는 소재인 만큼 그 중요성이 증가하고 있다. Cho 등은 쌓기나무를 사용하여 공간도형을 구성하기 위해 '앞, 좌, 우, 위, 아래'를 기본적인 아이디어로 하고, 이를 구현할 수 있는 문자 표현들(s, L, R, u, d)을 사용하여 쌓기나무 입체도형을 만들 수 있는 환경을 설계하였다.

우리나라를 비롯한 외국의 초등학교 교육과정에서는 쌓기나무를 활용하여 다양한 활동들을 요구하고 있다. 하지만 학교 현장에서는 쌓기나무를 사용하는 현실적인 제약에 의해 이러한 요구를 반영하지 못하고 있는 것이 사실이다. 따라서 최근의 컴퓨터를 통한 학습 환경의 흐름과 발맞추어 쌓기나무 마이크로월드가 이러한 제약을 해결할 수 있는 환경으로 학교 현장에서 다양하게 활용되어 질 수 있다(양지원, 2011). 쌓기나무 마이크로월드는 기존 LOGO 언어보다 더욱 간단한 표현들을 사용하여 대상을 구성함으로써 어린 아이들도 쉽게 사용할 수 있다는 장점이 있다. 즉, 이전에 LOGO 프로그램을 학습하기 위해 프로그래밍을 배워야한다는 부담감에서 벗어날 수 있다(Resnick & Silverman, 2005). 또한 쌓기나무 마이크로월드는 간단한 문자 표현들을 사용하여 가상의 쌓기나무를 구성할 수 있는데 여기서 사용하는 표현 그 자체는 쌓기나무를 의사소통할 수 있는 하나의 도구로서 사용되어질 수 있다. [그림 Ⅱ-3]은 쌓기나무 마이크로월드에서 사용하는 기본적인 5개의 행동 문자와 그 기능에 대한 설명이다.

표현 문자	설명	비교
s (소문자) R (대문자) L (대문자)	one step forward turn Right turn Left	수평 운동
u (소문자) d (소문자)	move up move down	수직 운동

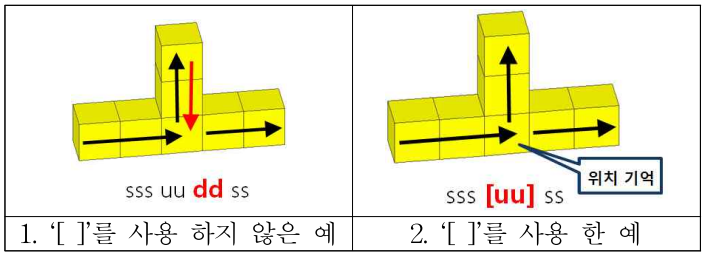
[그림 Ⅱ-3] 쌓기나무 마이크로월드의 기본 행동 문자

5개의 기본 행동 문자는 거북이가 한 발자국 앞으로 나아가면서 쌓기나무 한 개를 만드는 ‘s’, 왼쪽으로 90도 회전하는 ‘L’, 오른쪽으로 90도 회전하는 ‘R’, 승강기를 타듯이 위로 한 층 올라가면서 쌓기나무를 만드는 ‘u’, 아래로 한 층 내려가면서 쌓기나무를 만드는 ‘d’ 등이 있다. 여기서 대문자 ‘R’, ‘L’은 거북이의 방향만 바꾸는 명령이고, 소문자 ‘s’, ‘u’, ‘d’는 거북이가 움직이는 동시에 하나의 쌓기나무를 만드는 명령으로 구분된다. [그림 Ⅱ-4]은 ‘ssRsusLssd’이라는 문자열을 입력하였을 때, 거북이가 입력한 문자열에 따라 쌓기나무를 만드는 과정이다. [그림 Ⅱ-4]의 예와 같이 자신이 원하는 쌓기나무 입체도형을 만들기 위해 사용한 문자열을 ‘쌓기나무 표현’이라고 하고, 이러한 문자열은 실행을 통해 시뮬레이션 되어 나타나게 된다는 점에서 ‘실행 가능한 표현(executable expression)’이라고 한다.



[그림 Ⅱ-4] 쌓기나무 표현을 사용한 쌓기나무 구성

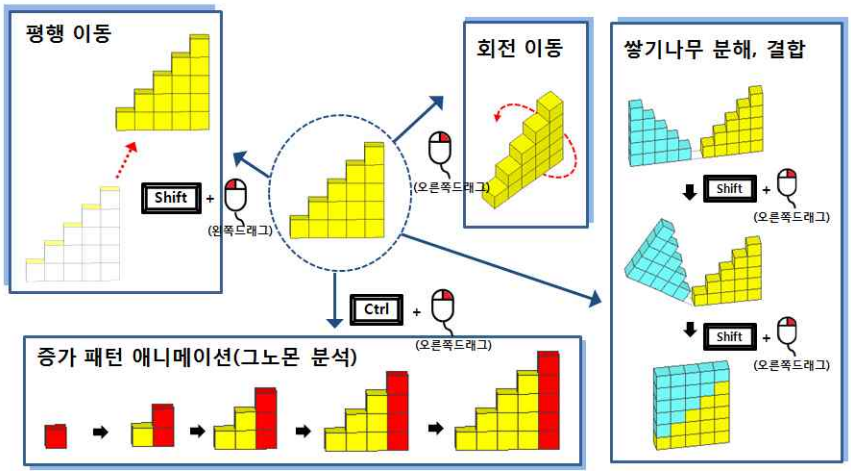
거북이는 실제로 3차원 공간을 움직이듯 쌓기나무를 만들기 때문에 [그림 Ⅱ-5-1]과 같은 대상을 만들기 위해서는 갔던 길을 되돌아와야 하는 상황이 발생한다. 즉, 이 상황은 한붓그리기가 되지 않는 상황을 의미하는데 이러한 경우에 쌓기나무 표현에 대괄호 '[ ]'를 사용함으로써 해결할 수 있다. '[ ]' 기능은 헨젤과그레텔의 조약돌 은유와 같이 돌아오길 원하는 위치에 '['를 사용하고 계속해서 쌓기나무를 만든 다음 ']'를 사용하면 거북이의 위치를 '[' 사용 직전의 위치로 돌아가게 할 수 있다[그림 Ⅱ-5-2]. 따라서 갔던 길을 되돌아 와야 한다는 불편함을 해소할 수 있다(양지원, 2011).



1. '[ ]'를 사용 하지 않은 예	2. '[ ]'를 사용 한 예

[그림 Ⅱ-5] '[ ]' 기능의 사용

이렇게 기본 행동 문자를 통해 만들어진 쌓기나무 입체도형은 마우스 드래그(왼쪽, 오른쪽)와 키보드(ctrl키, shift키)를 통해 조작할 수 있다. 즉, 학생들이 쌓기나무 표현을 사용하여 원하는 대상을 구성하였다면 이 대상을 키보드와 마우스 조작에 의해 평행이동, 회전이동, 그노몬 탐구 그리고 분해·결합하면서 탐구할 수 있다[그림 Ⅱ-6].



[그림 Ⅱ-6] 쌓기나무 마이크로월드 기본 조작 활동

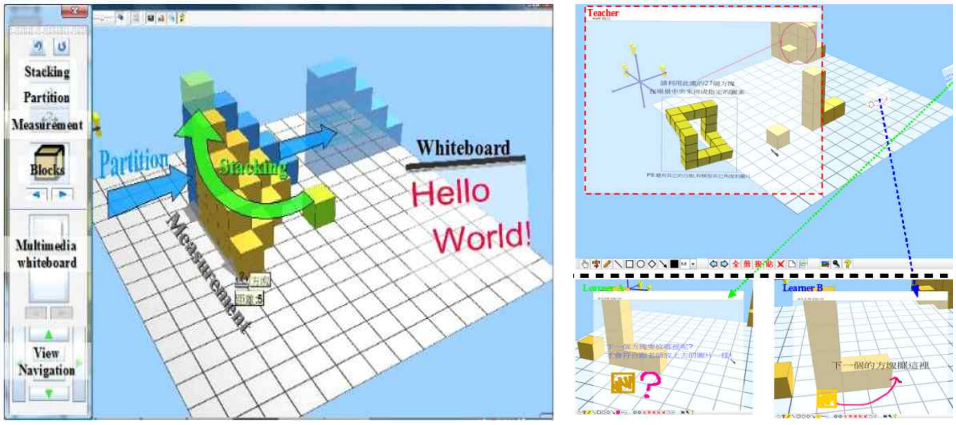
김철호(2012)는 중학교 학생들을 대상으로 쌓기나무 마이크로월드에서의 쌓기나무 패턴을 마우스와 키보드를 통한 조작 활동을 하였는데 연구에서 소개한 조작 활동은 <표 Ⅱ-1>와 같다.

이외에도 이지윤(2010)은 쌓기나무 마이크로월드에서 창의력 활동 개발 및 평가를 위해 constructionism 기반 창의력 프로그램 설계 연구를 하였고, 양지원(2011)은 쌓기나무 표현을 사용한 쌓기나무 작품 만들기와 이 작품에 대한 평가에 관한 사이버 멘토링 프로그램을 개발하였다.

<표 Ⅱ-1> 쌓기나무 마이크로월드 기본 조작 활동(김철호, 2012)

기본 조작	내용
쉬프트+마우스 왼쪽 끌기(평행이동)	화면에 나타난 쌓기나무 그림을 이동시킬 수 있다.
마우스 오른쪽 끌기(회전이동)	마이크로월드 상에 구현된 쌓기나무 그림을 회전하여 앞, 뒤, 좌우를 확인할 수 있다.
콘트롤+마우스 오른쪽 끌기(그노몬)	각 단계별 그노몬을 확인할 수 있는 기능으로 끌기를 통하여 반복적으로 그노몬이 사라지거나 생기게 할 수 있다.
쉬프트+마우스 오른쪽 끌기(분해, 결합)	그노몬을 분해하여 회전시키거나 두 개의 쌓기나무를 합치기 위해 회전시키는 등의 작업을 할 수 있다.

국외에서 개발된 쌓기나무 마이크로월드 중 하나는 Hwang 등(2009)이 소개한 '가상 조작 화이트보드(Virtual Manipulatives and Whiteboard System, 이하 'VMW시스템'으로 표기)'이다[그림 Ⅱ-7]. VMW시스템의 설계 목표는 물리적인 조작과 정신적인 조작을 통해 기하 문제에서 다양한 전략의 구성을 증진시키는 것이다. 이 시스템은 쌓기나무를 조작할 수 있는 다양한 기능을 제공하는데 특히, 반투명한 화이트보드를 제공하여 교사와 학생, 학생과 학생 간에 의사소통할 수 있는 환경을 제공한다는 점에서 더 큰 의의가 있다. 가상의 화이트보드를 사용하여 하나의 학습 커뮤니티를 형성하고 이 환경에서 학습 내용을 서로 의사소통할 수 있다는 점에서 Bransford(2000)의 공동체중심 학습 환경 설계가 반영된 프로그램이라고 할 수 있다.



[그림 Ⅱ-7] 대만의 쌓기나무 프로그램: 가상 조작 화이트보드

쌓기나무가 교육과정에서 강조되고 있는 만큼 국내외 쌓기나무를 소재로 한 공학용 프로그램들을 연구하고 개발한 사례들이 많다. 하지만 대부분의 쌓기나무 프로그램들은 공간지각능력에 초점을 두고 설계되었다. 따라서 쌓기나무에 관한 기존의 연구가 대부분 기하적인 면에 중점을 두었다면 본 연구에서는 대수적인 면에 중점을 두어 패턴의 규칙성 탐구와

일반화에 활용하기 위한 패턴 프로그램을 설계하는 것을 목표로 한다.

2. 패턴과 대수적 사고

패턴은 다양한 의미로 사용되고 있지만 학교 수학에서 사용하는 패턴은 주로 수, 도형, 무늬 등을 일정한 규칙으로 늘어놓은 배열을 의미한다(김동현, 2009). 패턴이 학교 수학에서 중요한 요소로 인식되면서 패턴에 관한 많은 연구가 진행 되고 있다. NCTM(2000)은 학교 수학의 10개 영역에 있어서 요구되는 규준을 제시하였는데 그 중 대수 영역의 첫 번째 규준으로 '패턴, 관계, 함수에 대한 이해'를 강조하였다. 또한 현실주의 수학교육을 반영한 Britannica(1998) 교과서 역시 대수 교육과정을 '패턴과 기호(pattern and symbols)' 단원으로 시작함으로써 패턴을 대수 교육의 핵심으로 다루고 있다. 패턴은 패턴의 일반적인 규칙을 인식하고 설명하는 과정에서 학생들의 대수적 사고를 드러내고 이를 발달시키는 경험을 제공하는데 효과적인 도구이기 때문에 많은 연구자들에 의해 대수 도입과 대수 교육을 위해 중요하게 다루어지고 있다(Amit & Neria, 2008; Barbosa 등, 2007; English & Warren 1998; Kerbs 2003; Radford, 2006; Stacey 1989; Zazkis & Liljedahl 2002). 하지만 Zazkis & Liljedahl(2002)은 아직 많은 나라의 교육과정에서 방정식을 풀거나 수를 조작하는 것과는 달리 패턴 탐구가 중요하게 다루어지지 않고 있다고 하였다. 또한 일부 교사들은 패턴을 통한 활동이 교육과정에 핵심이기 보다 재미를 통한 교육과정의 풍성함의 소재로만 생각하고 있다고 하였다. 하지만 패턴은 대수를 넘어 수학의 모든 영역에서 핵심적인 역할을 할 수 있으므로 교육과정 및 교사뿐만 아니라 학생들도 패턴을 통한 학습에 주목하게 하는 것이 중요하다.

2.1. 패턴의 종류

학교 수학에서 패턴이 대상을 일정한 규칙으로 늘어놓은 배열을 의미한다면 어떤 대상을 늘어놓을지 어떠한 방법으로 늘어놓을지에 관해 패턴의 종류를 분류할 수 있다. 대부분의 패턴 연구에서는 늘어놓는 대상에 따라 수(number)를 일정한 규칙으로 배열하는 경우와 점, 성냥개비, 타일 등의 시각적 대상을 배열하는 경우로 나눈다. 또한 늘어놓는 방법에 따라 반복패턴과 증가패턴으로 나눌 수 있는데 반복패턴은 저학년 학생들에게 반복되는 대상을 인지하기 위한 과제로 많이 사용되어 진다. Chua(2009)는 패턴 과제에서 제공하는 패턴 자체에 주목하였으며, 학생들에게 적절한 패턴 문제를 제공하는 것이 패턴 활동에서 선행되어야 한다고 하였다. 따라서 교사들이 학생들에게 패턴 과제를 제시할 때 어려움의 정도를 돕기 위한 이론적 틀을 5개의 특징으로 나누고 이를 수 패턴(numerical pattern)과 시각적 패턴(figural pattern)[8]으로 구분하여 제시하였다<표 Ⅱ-2>.

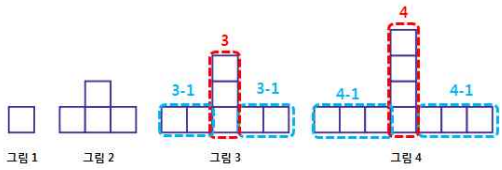
<표 Ⅱ-2> 패턴 과제의 중요한 특징과 분류(Chua, 2009, p.23)

특 징	수 패턴	시각적 패턴
패턴 배열의 형태	• 수 배열 • 항등식의 배열	• 그림 배열 • 하나의 그림
함수의 유형	• 선형 (일차) • 비선형(예: 이차)	• 선형 (일차) • 비선형(예: 이차)
연관된 변수의 개수	• 1개 • 2개 또는 그 이상	• 1개 • 2개 또는 그 이상
생성원[9](generator)의 참조	• 숫자와 무관 • 항등식 속에 있음	• 그림과 무관 • 그림 속에 있음
시각적 표현		• 2차원 그림 • 3차원 그림

8) 본 연구에서는 수를 일정한 규칙으로 나열한 배열을 '수 패턴(number pattern, numeric pattern, numerical pattern)', 기하학적 그림을 규칙적으로 나열한 배열을 '시각적 패턴(figural pattern, pictorial pattern, geometric pattern, visual pattern)'이라고 정의하여 사용한다.

9) 여기서 생성원은 패턴 과제에서 독립변수, 즉 항의 번호를 의미한다. 즉, 이것은 각

함수의 유형에 따른 분류는 일반항이 일차함수(선형)인지 이차함수 또는 지수함수(비선형)에 따라 구분하는 방법이다. 생성원의 참조에 따른 분류는 항의 번호(독립변수)가 주어진 패턴과 연관되어 있는지의 유무에 따라 패턴 과제를 구분하는 방법이다. [그림 Ⅱ-8]와 같이 패턴 속에 생성원을 찾을 수 있을 때 학생들은 패턴의 구조를 인식할 수 있고 규칙을 이끌어낼 수 있지만 그 관계가 명확하지 않을 때 패턴을 변화시키지 않고 규칙을 이끌어내기가 힘들다.

Line 1: 1 = 1 Line 2: 1 + 3 = 4 Line 3: 1 + 3 + 5 = 9 Line 4: 1 + 3 + 5 + 7 = 16	
수 패턴에서 생성원의 참조	시각적 패턴에서 생성원의 참조

[그림 Ⅱ-8] 생성원의 참조 (Chua, 2009)

또한 시각적 표현에 따른 분류는 그림이 2차원(점, 성냥개비, 타일)으로 주어질 경우와 3차원(쌓기나무)으로 따라 구분할 수 있다.

Lee & Freiman(2006)은 패턴을 제시할 때 첫 번째 항을 어떻게 시작하는지를 결정하는 것이 중요하다고 하였다. 그들의 연구에서 사용한 패턴을 통해 살펴보면 [그림 Ⅱ-9]는 패턴이 배열된 대상이나 배열 규칙은 같지만 첫 번째 항을 1개의 별로 시작했는지 4개의 별로 시작했는지에 따라 구분된다. 중요한 것은 1개의 별로 시작하는 패턴의 대수적 표현은 '$3n-2$'인데 이것은 '$3n+1$'로 표현되는 오른쪽 패턴에 비해 대수적 표현에 '빼기'를 포함하고 있기 때문에 학생들이 어렵게 느낀다는 것이다. 그러므로 패턴 과제를 제시할 때 첫 번째 항을 결정하는 것 또한 중요한 요소로 다루어져야 한다.

항의 번호와 패턴의 개수의 연관 유무를 나타낸다.

[그림 Ⅱ-9] 패턴 과제에서 첫 번째 항의 결정

최근 패턴에 관한 연구는 수를 규칙적으로 나열한 수 패턴보다 그림을 규칙적으로 나열한 시각적 패턴을 제시하는 경향이 두드러진다. 패턴에 관한 연구에서 시각적 패턴이 강조되고 있는 이유는 기호나 수로 표현된 과제에 비해 구체적이고, 기본적이며, 실제적인 상황을 제공할 수 있기 때문이다(Orton 등, 1999). 수 패턴은 때때로 패턴이 어떻게 계속되어야 하는지에 관한 구체적인 가정과 명백한 맥락이 없기 때문에 여러 답안이 나올 수 있는 반면, 시각적 패턴은 이후의 패턴이 어떻게 변하는지에 관한 맥락을 제공함으로써 이러한 문제에 대처할 수 있다(Chua, 2009)[10]. 또한 시각적 패턴은 학생들이 대수를 탐구하도록 돕는데 중요한 역할을 하며 패턴을 분해하고 재구성하는 것에 초점을 두는 활동은 일반화를 촉진한다(Warren & Cooper, 2008). 구체적으로 시각적 패턴은 학생들이 패턴을 인지하는 관점에 따라 다양한 방법으로 일반화할 수 있기 때문에 학생들이 패턴을 어떠한 방식으로 보고 있는지를 분석할 수 있으며, 수학에서 창의성을 기르기 위한 연구와 대수적인 동치관계와 등식의 개념 이해를 위해 사용되어질 수 있다(Lee & Freiman, 2006; Isabel 등, 2012). 하지만 시각적 패턴 과제에서 학생들은 그림이 주는 정보를 버리고 수나 대응표로 만드는 경향이 있는데 이러한 경향은 패턴 과제를 더 어렵게 만들 수 있다(Warren, 1996). 하나의 예로 이러한 어려움을 함수

10) 예를 들어 '1, 4, 7, 10, 13 …'으로 주어진 패턴은 '1, 4, 7, 10, 13, 1, 4, 7, 10, 13, …' 또는 '1, 4, 7, 10, 13, 13, 10, 7, 4, 1, 1, 4, 7, 10, 13, …' 등 많은 방식으로 규칙을 만들 수 있다. 하지만 Brousseau의 교수학적 계약에 의해 3씩 증가하는 패턴이라는 암묵적인 가정이 형성된다.

의 유형에 따라 생각해보면 시각적 패턴에서 수 패턴으로의 전환이 일차 패턴에서는 연속되는 항간의 공통된 차이를 파악함으로써 일반화에 도달할 수 있지만 이러한 방법이 이차패턴의 일반화에는 성공적인 전략이 되지 못한다(Barbosa 등, 2007; Kerbs, 2003; Amit & Neria, 2008; Orton & Orton, 1999). 수 패턴으로 주어진 이차패턴을 대수적 표현으로 나타내기 위해서는 주어진 수들을 소인수분해 등의 조작을 통해서 반복된 규칙을 찾아야 하는데 이는 어린 학생들에게 기대하기 쉽지 않다. 따라서 패턴 과제에서 시각적 패턴을 활용하는 것은 학생들의 대수적 사고를 위한 많은 이점을 가질 수 있다.

2.2. 패턴의 일반화

일반화는 여러 가지 수학적인 사고 중의 하나로 수학의 여러 영역, 특히 대수 영역에서는 일반화를 인식하는 것이 핵심적인 역할을 한다(Lannin, 2005; NCTM, 2000).

김남희(1997b)는 일반화의 의미를 추상화의 의미와 비교하면서 어떤 추상적인 유(class)를 보다 넓은 유로 확장하는 것이라고 하였다. 일반화에 대해 Polya(1957)는 '하나의 대상에 대한 고찰에서 그 대상을 포함하는 집합의 고찰로 넓히는 것' 또는 '제한된 집합에 대한 고찰에서 그 집합을 포함한 더 포괄적인 집합으로 넓히는 것'이라고 하였다(Amit & Neria, 2008, 재인용). Harel & Tall(1991)은 일반화란 주어진 주장을 더 넓은 문맥에 적용하는 것이라고 하며 일반화를 확장적(expansive), 재구성적(reconstructive), 분리적(disjunctive)으로 구분하였다. 확장적 일반화는 스키마의 재구성 없이 현재 가지고 있는 스키마의 적용 범위를 단순히 확장시키는 것이다. 이에 반해 재구성적 일반화는 현재 가지고 있는 스키마의 적용 범위를 넓히기 위해 재구성되어지는 것이며, 분리적 일반화

는 새로운 문맥으로 나아갈 때 그에 맞는 새로운 스키마가 구성되는 것이다. Dörfler(1991)에 의하면 일반화란 생각과 의사소통의 수단임과 동시에 대상이라고 하였다. 그는 경험적인(empirical) 일반화와 이론적인(theoretical) 일반화를 구분하였다. 경험적인 일반화는 여러 대상들의 공통된 특징들이나 공통된 성질을 인지하는데 기초하여 그 공통 성질을 그러한 대상이나 상황에 공통적이고 일반적인 것이라고 기억하는 것이다. 반면 이론적 일반화는 Dörfler가 말한 '행동 체계'로 시작하는데 이 행동 체계에서 본질적인 불변성[11]이 원형들에 의해 확인되고 대신하게 된다. 일반화는 이 본질적인 불변성의 추상성을 통해 구성되는데 그 추상화된 본질은 대상 그 자체라기보다 대상들 사이의 관계를 의미한다.

대수에서 패턴과 관련된 대부분의 연구에서는 패턴을 일반화한다는 것을 나열된 패턴 S의 몇 개의 원소에서 공통성을 파악하는 능력과 이 공통성이 S의 모든 항에 적용된다는 것을 알고 이것을 S안에 있는 어떠한 항에도 적용되는 직접적인 표현을 제공하기 위하여 사용하는 능력으로 사용하고 있다(Radord, 2006, p.2). 구체적으로 여기서 말하는 패턴의 일반화는 주로 수적으로 또는 시각적으로 표현된 패턴의 개수를 일반적인 대수식으로 표현하는 것을 의미한다. 김성준(2003)은 패턴의 일반화는 패턴을 통해 과정을 표현하는 것이며, 여기서 대상과 구조를 파악하는 것이라고 하였다. 그는 대수 학습에서 대수적 사고를 이끌어내는 출발점으로 패턴의 일반화를 강조하였으며 변수와 대수식 개념은 본질적으로 이러한 패턴의 일반화에서부터 시작될 수 있다고 하였다.

Stacey(1989, p.150)는 패턴 일반화 단계이자 패턴 과제를 제작하는 원리로서 항의 번호에 따라 '몸풀기 문제(warm-up exercise)', '근 일반화(near generalisation)', '원 일반화(far generalisation)[12]'로 구분하였다.

---

11) 김남희(1997b, p.451)는 행동이 반복될 때 변하지 않는 고정적 관계를 행동의 불변성이라 하였다.

12) 원문에 대한 번역은 김철호(2012, p.13)의 논문에 실린 용어 번역을 사용하였다.

몸풀기 문제는 학생들이 시각적 패턴에 익숙해지기 위해 5~6번째 항의 패턴의 개수를 묻는 과제이며, 근 일반화와 원 일반화는 거듭되는 차이에 대한 속성의 사용을 명시적으로 필요로 하는 단계로 각각 10~20번째, 100번째 이상의 항에 대한 과제이다. 근 일반화는 단계적으로 세거나 그림을 그려서 풀 수 있는 질문이며, 원 일반화는 근 일반화와 같이 단계적인 접근의 실제적인 한계를 넘어서는 질문이다. 여기서 100번째, 1000번째와 같은 원 일반화는 학생들이 일반적인 규칙을 구성하도록 유도하는 역할을 한다. 김성준(2003)은 Stacey(1989)가 사용한 원 일반화를 같은 문맥으로 '큰 수'라는 표현하였고, 이 큰 수는 대수적 표현을 이끌어 내기 위한 중간단계에서 산술 과정과 대수 결과를 동시에 나타내기 위해 효과적으로 사용될 수 있다고 하였다. 김동현(2009)은 근 일반화로 표현된 20번째 항을 묻는 과제가 초등학교 5학년 학생들에게는 즉각적인 산술 조작을 하기 어려운 큰 수, 즉 원 일반화로서의 의미로 받아들여진다고 하였다. Stacey의 일반화 단계에 따라 패턴 일반화의 전형적인 과제는 패턴을 파악하고, 근 일반화와 원 일반화로 확장하며, 언어 또는 기호를 사용하여 패턴에 근본이 되는 함수적인 관계를 설명하는 과정으로 제시된다(Chua & Hoyles, 2012).

2.3. 패턴과 대수적 사고

대수적 사고에 대한 해석은 대수를 어떻게 정의[13]하느냐에 따라 다양하게 파악되는데 패턴에 기초한 대수 도입은 그 가운데 관계와 규칙을 강조한 것으로 볼 수 있다. 여기서 패턴을 파악한다는 것은 주어진 패턴에 내재해 있는 관계를 파악하는 것이며, 동시에 규칙에 대한 논의를 통해 일반화를 하는 것이다(김성준, 2002). 패턴을 통한 대수적 사고의 발

13) Usiskin(1988)은 대수를 일반화된 산술로서의 대수, 문제해결 과정을 연구하는 대수, 양들 사이의 관계를 연구하는 대수, 구조를 연구하는 대수로 구분하였다.

달에 관한 연구에서 Mavrikis 등(2012)은 패턴을 통해 대수적 일반화의 발달을 위한 마이크로월드 설계에서 필수적인 3가지 대수적 사고의 요소들을 제시하였다. 첫 번째 요소는 학생들이 대상의 구조를 파악하고 그것의 힘을 이용하는 것이다. 앞서 언급한 것과 같이 시각적 패턴을 사용하여 학생들의 대수적 사고의 발달에 접근한 많은 연구들이 있다. Mavrikis 등은 이러한 접근의 잠재성은 대상의 기본 단위(building blocks)를 확인하고, 대상을 이러한 기본 단위로 분해하는 습관에서 기인한다고 하였다. Cuoco 등(1996)도 역시 수학과 교육과정을 조직하는 원리에 관한 연구에서 대상의 구조에 관한 기본 단위를 발견하는 것은 대수영역에서 유용한 전략이 될 수 있다고 하였다. 그들은 이에 대한 근거로 대수학자들의 공통적인 경향에 대해 설명하였다.

대수학자들은 모든 대상이 매우 간단한 부분들의 결합이라는 구조 이론 또는 분해 이론을 선호한다. 구조 이론이 가치 있는 이유는 부분으로 나누어진 기본 단위에 대한 결과가 보통 더 일반적인 대상에 대한 결과로 확장될 수 있기 때문이다(Cuoco 등, 1996).

Radford(2012)는 패턴 탐구를 통한 저학년 학생들의 대수적 사고에 관한 연구에서 두 행으로 나누어진 패턴의 일반화 과제를 제시하였다. Radford는 제시된 패턴의 각 행은 단순히 정렬된 직사각형의 묶음이 아니라 나누어질 수 있으며, 나누어진 부분들은 대수적 관계가 발생할 수 있는 잠재적인 단서들을 간직하고 있다고 하였다. 그리고 이것을 데카르트의 저서 Geometry에서 나온 내용과 연관 시켜 다음과 같이 설명하였다.

도형의 분해는 알고 있는 숫자와 알지 못하는 숫자 사이에서 관계의 창출을 가능하게 하며, '알지 못하는 부분과 알고 있는 부분 사이에 구별을 짓지 않게

하면서' 계산을 수행할 수 있게 한다(Decartes, 1954, p.8; Radford, 2012, 재인용).

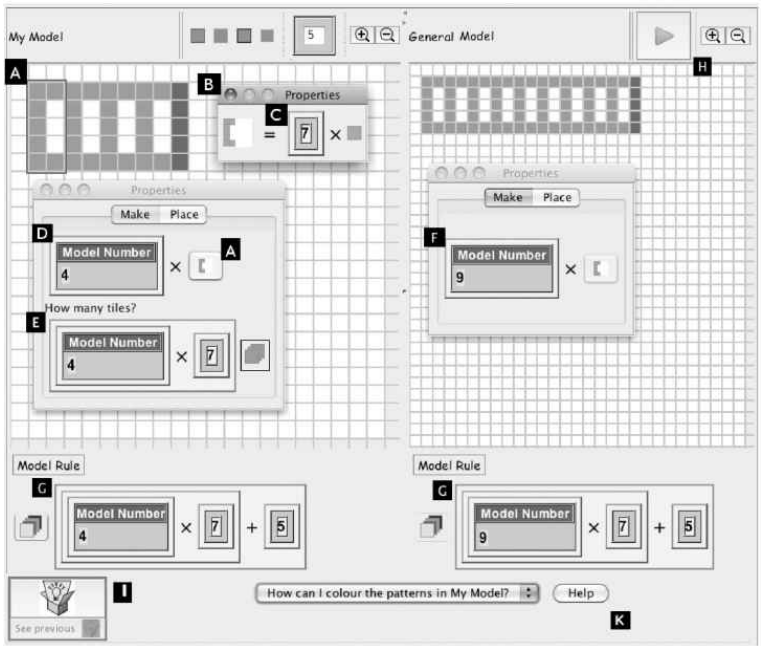
그러나 어린 학생들이 이러한 대상을 기본 단위로 분해하는 습관을 들이는 것은 쉽지 않다. 그 이유 중 하나는 학생들이 대상을 구조적으로 보는 것에 대한 장점을 인식하지 못하기 때문이다. 학교 수학에서 일반화에 관해 다룰 때, 교사들은 어떤 특정한 경우에 대해 생각하는 것은 일반적인 경우에 대해 생각하는 것에 대한 몇 개의 예에 불과하다고 생각한다. 반면 학생들은 교사가 제공하는 모든 특정한 경우에 대해 대답할 수 있는 것이 교사가 요구하는 일반적인 경우와 무엇이 다른지 모른다. 여기서 교사와 학생사이에 일반화에 대한 인식의 차이가 발생하게 된다(Mavrikis 등, 2012). Redden (1996)은 이러한 차이는 구조를 파악하고, 구조를 이용하는 것에 관한 장점을 인식하는 경험이 없다면 결코 쉽게 해결되지 않을 것이라고 하였다. 따라서 시각적 패턴에 관한 구성활동은 대상을 기본 단위로 분해하는 습관을 통해 구조적으로 볼 수 있어야하며 이러한 구조를 이용하는 것에 대한 장점을 경험할 수 있는 활동이 전제되어야 한다.

Mavrikis 등이 제시한 두 번째 요소는 변하는 것과 변하지 않는 것을 확인하면서 특별한 것에서 일반적인 것을 볼 수 있어야 한다는 것이다. 대수적 일반화와 관련된 사고의 발달을 위해서 특별한 것에서 일반적인 것을 보는 것이 핵심적인 역할을 하지만 이러한 것을 파악하기는 쉽지 않다. 앞서 소개한 eXpresser는 타일을 사용하여 패턴을 만들고 이를 통해 대수적 일반화를 이해하고 발달시키는 것을 목표로 만들어진 마이크로월드이다. 여기서 반복되는 패턴을 하나의 기본 단위로 묶을 수 있다 [그림 Ⅱ-8-A]. 이러한 만들어진 하나의 기본 단위는 이후 패턴을 반복해서 나타내기 위해 사용할 수 있는데 이때 좌・우와 위・아래로 얼마만큼 이동할 것인지와 반복의 횟수를 정하게 된다. [그림 Ⅱ-10-D]와 같이

반복의 횟수는 네모 상자에 숫자를 적어서 나타내는데 이때 네모 상자의 속성을 '열림(unlock)'으로 선택할 수 있다. 이 속성의 기본 값은 '잠김(lock)'으로 되어 있기 때문에 열림을 선택하지 않을 때는 기본 값인 잠김의 기능을 가진다. 여기서 잠김은 수가 잠겨있기 때문에 변하지 않고 일정한 값을 나타내는 상수를 의미하고, 열림은 여러 가지로 변하는 값을 나타내는 변수의 역할을 한다. 만약 네모 상자의 속성을 열림으로 설정해놓고 [그림 Ⅱ-10-H]의 재생 버튼을 누르면 상자안의 숫자가 임의로 변하게 되고 해당되는 패턴의 모양이 General Model창에 애니메이션으로 만들어진다. 그러므로 패턴을 만들 때 열림의 기능을 잘못 사용한다면 General Model창에서 재생버튼을 눌렀을 때 주어진 패턴과 다른 모양의 패턴이 생성될 수 있다. 즉, General Model창과 재생버튼은 학생들에게 그들이 설정한 열림의 결과에 대한 피드백을 제공하게 된다. 이러한 시각적 피드백은 학생들이 열림의 결과를 인식하게 해주며 시각적 패턴에서 변하지 않아야 하는 부분과 변해야 하는 부분의 역할을 이해하는데 도움을 줄 수 있다.

마지막 세 번째 요소는 상징적으로 표현함으로써 일반화를 인식하고 설명하는 것이다. 상징적으로 표현한다는 것은 반드시 학교 수학에서 사용하는 일반적인 대수 기호가 아닐 수도 있다. Dörfler(1991)에 의하면 이론적 일반화는 확실한 기호적 기술이 필요하지만 이 기호적 기술은 일반적인 대수 문자의 사용과 일치하는 것은 아니라고 하였다. 그는 이러한 기호들이 물론 완전히 대수적일 수도 있지만 말로 나타날 수도 있고, 도상적(iconic) 일수도 있으며, 기하학적일 수도 있다는 것이다. Radford(2012) 역시 학생들이 일반적인 대수적 기호체계를 사용하지 않더라도 충분히 대수적으로 사고 할 수 있으며, 그의 연구에서 어린 학생들이 패턴을 표현하기 위해 보여준 제스처는 본질적으로 대수적이라고 할 수 있다. 이러한 이론적 배경으로부터 Mavrikis 등은 패턴의 일반화

를 종래의 일반적인 대수 기호의 사용이 아닌 패턴의 관계를 표현할 수 있는 기호 체계를 가지는 마이크로월드 설계에 초점을 두었다. 즉, 종래의 대수에서 사용하는 일반적인 문자가 아닌 직관적인 의미를 가지고 있는 'icon-variable'을 설계하였고 학생들의 대수적 일반화는 이러한 접근 가능한 상징체계를 이용함으로써 발달할 수 있다고 하였다. 결국 학생들이 이용할 수 있는 하나의 언어를 설계하여 그들이 패턴에서 파악한 관계를 새로운 언어로 표현할 수 있으며, 나아가 관습적인 기호의 기계적인 습득 없이 문자의 본래의 기능을 경험할 수 있다고 하였다.



[그림 Ⅱ-10] eXpresser의 기본 인터페이스

Noss (2004)는 학습 환경 설계에서 중요한 점은 학생들에게 수학적 지식을 표현하는데 용이해야 하며(learnable) 동시에 수학적인 엄밀성이 유지된(rigorous) 새로운 방법들을 제시해야 한다는 것이다. 이것은 기존의

수학보다 학생들이 접근하기 쉽게 설계되어야함과 동시에 수학적 지식의 본래의 모습이 이러한 간결함에 의해 희생되어서는 안 된다는 것이다. 학습 환경 설계가 학생들에게 학습 용이성을 높이고 동시에 수학적 엄밀성을 유지하는 것이 중요하지만 일반적으로 이 둘 사이의 관계는 비례적이지 않다. 따라서 앞서 설명한 것과 같이 비록 일반화를 인식하고 설명하는 것이 일반적인 대수 기호를 통해 표현하는 것과 동일시 될 수는 없지만 일반화에 대한 아이디어를 문자 기호에 담아 표현하기 위해서는 패턴을 통한 비형식적인 과정에서 일반화를 표현하는 문자 기호를 활용할 수 있는 학습 용이하고 수학적으로 엄밀성을 적절히 유지되는 새로운 환경을 제공하는 것이 필요하다.

Ⅲ. 연구 방법 및 절차

1. 연구 대상

본 연구에서는 S대학교와 학관 협력 사업 중인 S시 관내 초등학교 6학년 학생 44명을 연구 대상으로 선정하였다. 연구에 참여한 학생들은 학기 초 창의체험활동 담당 교사의 추천으로 멘토링 과정에 선발되어 1년간 멘토링 활동에 참가한다. 제 7차 교육과정에서는 미지수나 변수를 문자로 나타내는 것을 중학교 1학년 과정에서 처음 학습하지만, 연구에 참가한 학생들이 해당하는 제 7차 개정 교육과정에서는 6학년 2학기 방정식 단원에서 자리지기로서의 문자로 대수를 도입한다. 따라서 본 연구는 학생들이 학교 수학에서 문자를 다루기전인 6학년 1학기와 여름방학기간 동안 진행되었다.

2. 연구 절차

먼저 쌓기나무 마이크로월드 환경에서의 패턴 구성활동 프로그램을 설계하기 위해 학습 환경 설계 이론과 패턴에 관한 문헌검토를 실시하였다. 이를 바탕으로 패턴 구성에 필요한 쌓기나무 표현들을 정리하여 설계에 포함시켰으며, 학생들에게 제시할 패턴 과제를 선정하였다. 패턴 구성 활동은 4차시의 온라인 활동과 이후 2차시의 교실 활동으로 진행되었고, 온라인 활동에서는 일차패턴을 구성하는 활동을, 교실 활동에서는 이차패턴을 구성하는 활동을 하였다. 온라인과 교실 활동은 모두 쌓기나무 마이크로월드를 사용한 컴퓨터 환경에서 진행되었다. 차시별 동영상 강

의와 해당되는 과제를 학생들에게 제시하였으며, 자료 분석은 학생들이 제출한 쌓기나무 표현과 댓글이 온라인상에 저장되어 연구자에 의해 분석되었다. 학생들이 제출한 과제에 대한 연구자의 피드백은 학습 환경에서의 댓글과 문자메시지를 통해 이루어졌다. 교실 활동은 온라인 과제를 바탕으로 수준별로 2개의 조로 나누어 진행되었다. 교실 활동이 끝난 후 학생들이 제출한 답안 이외의 분석이 필요한 학생을 일부 선정하여 개별 면담을 실시하여 결과를 분석하였다.

<표 Ⅲ-1> 연구 절차

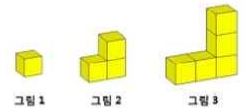
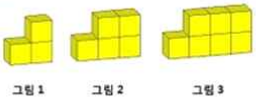
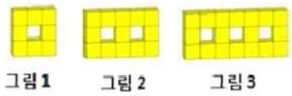
연구 일시	연구 내용
~4월	• 문헌 검토 (환경 설계 및 패턴에 대한 선행 연구 검토)
4월	• 패턴 구성 프로그램 설계 및 패턴 과제 선정
4~7월	• 패턴 구성 활동 교수 설계 적용(온라인)
7월	• 온라인 과제 분석 및 교실 활동 설계
8월~	• 패턴 구성 활동 교수 설계 적용(교실) • 쌓기나무 패턴에 관한 사전 검사 • 사후 검사, 개별 면담 실시 및 결과 분석

3. 검사 도구

본 연구에서는 쌓기나무 표현을 사용하여 패턴을 구성하는 과정에서 학생들에게 나타나는 대수적 사고를 살펴보기 위해서 패턴에 관한 사전 연구와 초등학교 교과서[14]에 제시된 쌓기나무 패턴 과제를 온라인 과제와 교실 과제로 나누어 제작하였다. 온라인 과제와 교실 과제에서는 각각

14) 교과서에서는 쌓기나무로 만든 모양들에서 규칙을 찾아 말해보는 것과 네 번째 항의 쌓기나무 개수를 묻는다.

일차패턴과 이차패턴을 사용하였다. 이 과제는 프로그램내에서 학생들이 패턴을 직접 만들어보는 과제이며, 학생들이 제출한 쌓기나무 표현과 댓글을 통해 분석되었다. 온라인에서 실시된 패턴 과제는 [그림 Ⅲ-1]과 같다. 1번 문제는 일차패턴의 일반식에서 상수항이 '0'인 문제로 구분하였고, 2번 문제와 3번 문제는 증가하는 쌓기나무의 개수는 똑같지만 첫 번째 항에 차이가 있는 문제이다. Lee & Freiman(2006)은 학생들에게 패턴 과제를 제시할 때 패턴의 첫 번째를 어떻게 제시하는지를 중요하게 봤는데 2번 문제는 첫 번째 항을 1로 시작함으로써 일반식에 빼기를 표현 되도록 하였다. 이를 통해 3번 문제와 일반화 과정에서 어떠한 차이가 있는지 살펴보기 위해 제시하였다. Rivera & Becker(2008) 역시 2번과 같은 일반식을 가진 문제를 '구성적 비표준(Constructive Nonstandard)' 문제로 구분하였다. 4번 문제는 Mavrikis 등(2012)이 사용한 기차 패턴을 변형한 문제로 이 문제는 학생들이 다양한 방식으로 표현이 가능하다는 점에서 문제에 포함시켜 제시하였다. 각 문제당 5개의 질문을 각각 Stacey(1989)의 '몸풀기 문제', '근 일반화', '원 일반화', '언어적으로 표현하기' '기호적으로 표현하기'에 근거하여 제시하였다.

번호	패턴 모양	패턴 유형	참고
1		일차 패턴 $3n$	기본 반복 패턴
2		일차 패턴 $2n-1$	초등학교 6학년 교과서 쌓기나무 패턴
3		일차 패턴 $2n+1$	Radford(2006) 타일 패턴 변형
4		일차 패턴 $5n+3$	Mavrikis 등(2012) 타일 패턴 변형

[그림 Ⅲ-1] 온라인 활동에서 제시한 패턴 과제

이후 진행된 교실 활동에서는 이차패턴을 구성하는 활동이 진행되었다. 이차패턴을 쌓기나무 표현으로 나타내기 위해서는 n을 최소 2번 사용해야한다. 따라서 이차패턴은 학생들에게 문자 기호와 일반화에 대한 이해를 한층 더 요구한다. 이차 패턴의 과제를 선정함에 있어서 이명기(2011)의 연구에서 대부분의 초등학교 6학년 학생들도 가로·세로가 1씩 증가하는 정사각형 모양의 이차패턴(일반식이 n^2)에 대한 일반적인 관계를 쉽게 파악하고 일반화할 수 있다고 하였기 때문에 패턴 구성 과제에서 정사각형 또는 직사각형으로만 구성된 문제는 포함하지 않았다. [그림 Ⅲ-2]는 교실 활동에서 학생들에게 제시한 패턴 과제이다. 4번 문제와 5번 문제는 일반식에서 상수항이 0인 문제와 아닌 문제로 분류되며, 나아가 두 개의 일차식의 곱으로 표현가능한 문제와 아닌 문제로도 나눌 수 있기 때문에 이차패턴의 일반화에서 상수항의 역할과 인수분해의 유무가 어떠한 영향을 미치는지 볼 수 있다. 또한 5번 문제는 시각적 접근에서 학생들에게 익숙한 사각형의 모양이 상대적으로 쉽게 보이는 문제

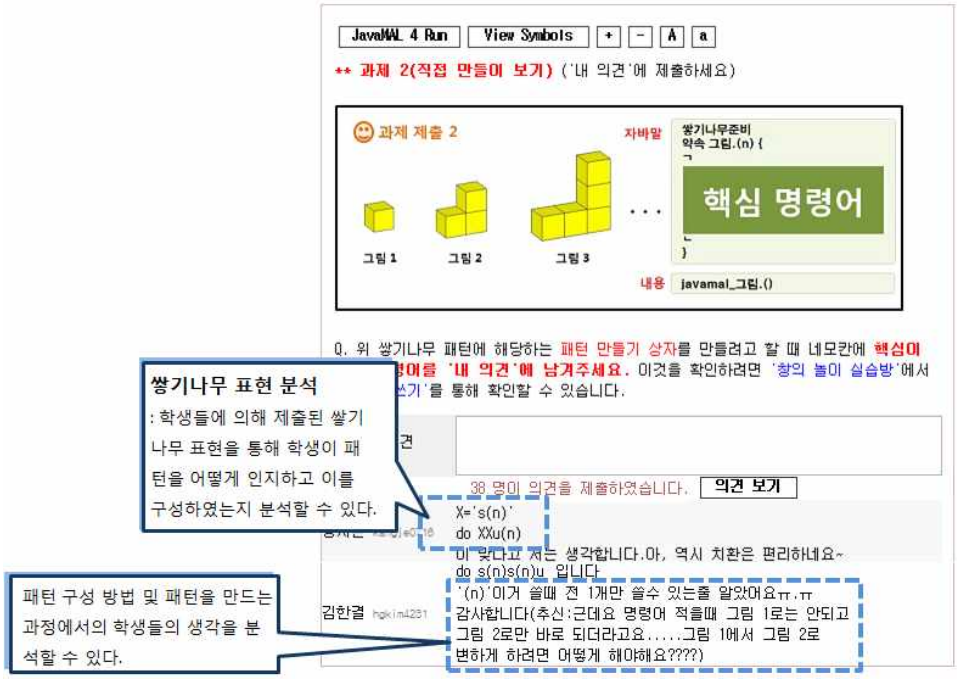
로써 4번 문제와 비교된다.

번호	패턴 모양	패턴 유형
1		이차 패턴 n^2+2n
2		이차 패턴 n^2+n+2

[그림 Ⅲ-2] 교실 활동에서 제시한 패턴 과제

4. 자료 수집 및 방법

자료 수집은 학생들이 온라인으로 제출한 쌓기나무 표현과 댓글 등의 의견을 바탕으로 이루어졌다. 또한 교실 활동 이전에 실시한 쌓기나무 패턴에 관한 사전 검사와 교수 설계 적용 이후에 이루어진 사후 검사를 추가로 실시하여 분석에 활용하였다. 본 연구는 먼저 두 달간 문자 치환을 사용하여 자유로운 작품을 만드는 과제를 시행하였고, 이후 2주간의 온라인 활동과 2일간의 교실 활동에서 주어진 쌓기나무 패턴을 구성하는 과제를 시행하였다. 온라인에서 학생들이 제출한 답변은 [그림 Ⅲ-3]과 같이 저장되어 작성한 학생과 연구자가 볼 수 있다. 이렇게 제출된 답안은 연구자에 의해 분석이 되고 피드백을 통해 학생이 수정된 답안을 제출할 수 있으며 연구자는 이러한 과정을 통해 학생의 쌓기나무 표현의 변화와 의견을 분석할 수 있었다.



[그림 Ⅲ-3] 쌓기나무 프로그램 환경에서의 검사 도구: 내 의견

교실 활동도 마찬가지로 쌓기나무 마이크로월드환경에서 수집된 정보를 바탕으로 진행되었고, 심층적인 분석이 필요하다고 생각되는 일부 학생을 선정하여 개별 면담을 실시하였고, 개별 면담의 내용은 녹취되어 연구 분석을 위해 사용되었다.

Ⅳ. 쌓기나무 패턴 프로그램 설계

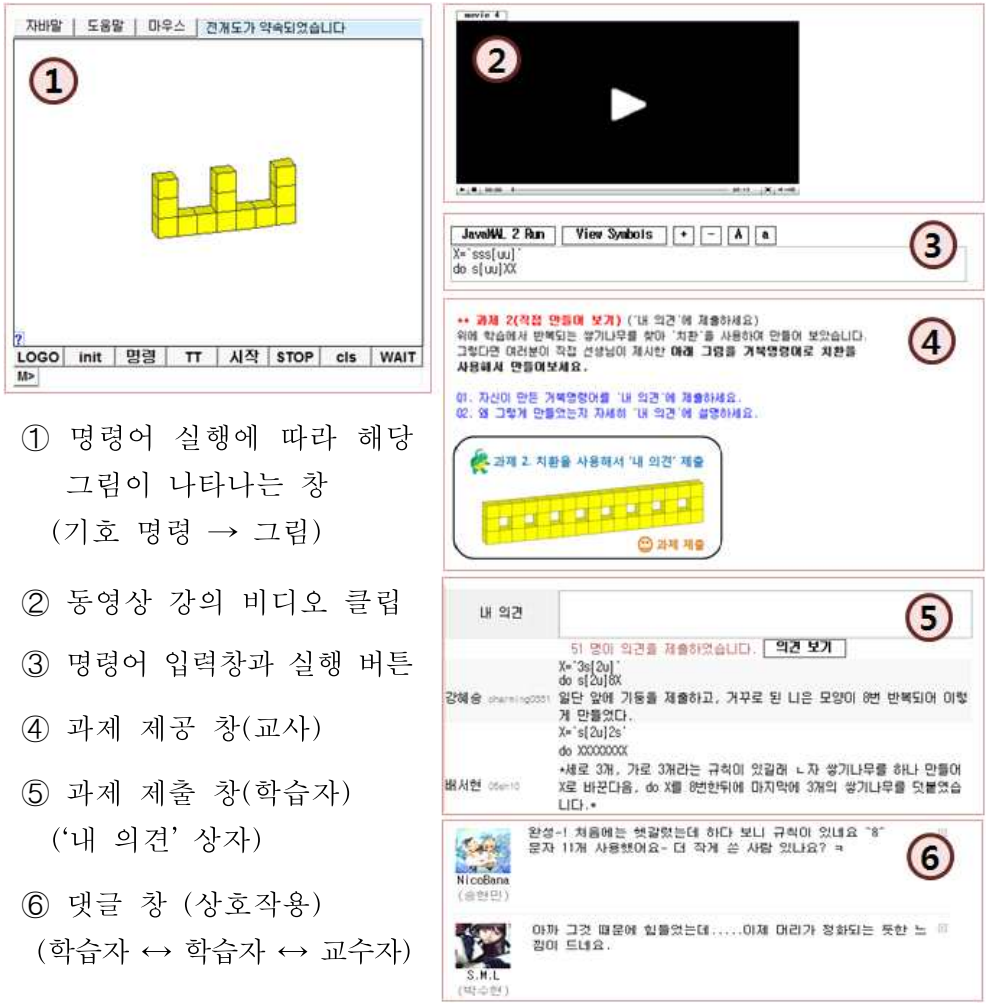
Cho 등(2010)에 의해 설계된 쌓기나무 마이크로월드는 LOGO의 신체동조적인 표현을 기반으로 쌓기나무를 만들고, 조작하고, 의사소통할 수 있는 환경이다. 본 연구는 쌓기나무 마이크로월드에서 학생들의 패턴 구성과 일반화에 대한 아이디어를 발달시키기 위한 프로그램을 설계하고자 한다. 프로그램의 특징은 실행 가능한 표현체계를 사용하여 패턴을 구성하고 패턴에 내재한 관계를 일반적인 대수 기호가 아닌 학생들이 좀 더 접근하기 용이하게 설계된 쌓기나무 마이크로월드에서의 기호체계를 사용하여 표현하도록 하는 것이다. 그리고 이러한 기호체계가 어린 학생들이 학습하기에 용이함과 더불어 수학적 엄밀성을 가질 수 있도록 설계함으로써 학생들이 일반화를 표현하기 위한 도구로서의 문자의 의미와 기능을 느낄 수 있게 하는 것을 목표로 한다.

우선 프로그램의 기본 환경은 Bransford(2000)가 제시한 학습과학에서의 주요환경인 '학습자중심 학습 환경', '지식중심 학습 환경', '평가중심 학습 환경', '공동체중심 학습 환경'을 반영하고 최근 교육부에서 진행하고 있는 스마트교육의 목표와 Resnick & Silverman(2005)의 설계 이론에 따라 학생들이 주도적으로 흥미를 가지고 수준에 맞는 자료를 제공하도록 설계하였으며 프로그램의 내용은 constructionism을 기반으로 Mavrikis 등(2012)이 말한 대수적 일반화에 관한 아이디어를 뒷받침하는 3가지 주요한 대수적 방식의 사고에 기초하였다.

1. 쌓기나무 패턴 구성 프로그램의 학습 환경

[그림 Ⅳ-1]은 쌓기나무 프로그램이 구현되는 Web 2.0 기반 마이크로

월드 인터페이스이다. 본 패턴 프로그램은 쌓기나무 마이크로월드에서 Bransford(2000)의 네 가지 학습 환경과 Resnick & Silverman(2005)의 설계 이론에 근거한 학습 환경 설계를 제시한다.



① 명령어 실행에 따라 해당 그림이 나타나는 창 (기호 명령 → 그림)

② 동영상 강의 비디오 클립

③ 명령어 입력창과 실행 버튼

④ 과제 제공 창(교사)

⑤ 과제 제출 창(학습자) ('내 의견' 상자)

⑥ 댓글 창 (상호작용) (학습자 ↔ 학습자 ↔ 교수자)

[그림 Ⅳ-1] Web 2.0 기반 쌓기나무 마이크로월드 인터페이스

1.1. 학습자 중심 학습 환경

학습자 중심의 학습 환경에서는 학습자가 가지고 있는 선행 지식과 학습 방식을 고려해야 한다(Bransford 등, 2000). 쌓기나무 프로그램을 통한 패턴 활동은 Web 2.0 기반 교육으로 교실 환경과 공학적 장치가 동시에 구현되지 않는 환경이라는 점에서 학습자에 대한 충분한 정보를 얻기 힘들다. 따라서 Web 2.0 환경에서 학습자가 사용하는 정보를 모두 저장하여 교육적인 목적에서 학습자를 판단할 수 있어야 한다(송민호, 2010). 본 연구에서는 패턴 구성에 대한 본격적인 활동이 시작되기 전 [그림 Ⅳ-1-4]를 이용하여 패턴의 일반화에 관한 기본적인 문항을 제시하였으며, 학습자가 제출한 답안[그림 Ⅳ-1-5]을 분석함으로써 패턴에 관한 기본적인 선행 지식을 분석할 수 있었다. 또한 패턴 구성 프로그램을 창의적인 쌓기나무 작품 만들기로 시작함으로써 학생들이 제출한 쌓기나무 표현[그림 Ⅳ-1-4]과 설명[그림 Ⅳ-1-5]을 분석할 수 있었으며 이를 통해 학생들이 쌓기나무 마이크로월드에서 대상을 어떠한 방식으로 구성해 가는지를 분석할 수 있었다. [그림 Ⅳ-1-6]에서의 학생들 간의 상호작용 역시 프로그램에 참여하는 학생들의 성향을 분석하는데 사용될 수 있었다.

1.2. 지식 중심 학습 환경

지식중심 학습 환경에서 공학적 장치는 학습자가 지식의 구조에 접근할 수 있도록 환경을 제공하는 역할을 해야 한다. 과거에 LOGO와 관련된 수학교육 연구가 많이 이루어졌을 때, LOGO는 학교 수학을 위해 필요한 핵심 아이디어를 비형식적인 접근을 통해 접근한다는 점에서 많은 호응을 얻었다. 하지만 LOGO가 가지고 있는 가장 큰 단점은 LOGO 언어

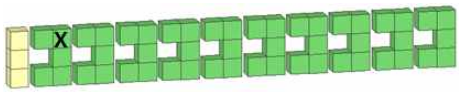
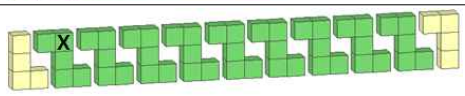
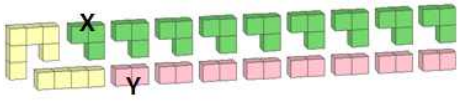
가 수학적이기 보다 프로그래밍언어라는 점이고, 프로그래밍언어를 강조하지 않은 현대에서는 학생들이 배워야할 프로그래밍에 대한 부담감이 크게 작용하였다는 것이다(Resnick & Silverman, 2005). 그러므로 지식의 구조를 가장 잘 표현할 수 있는 표현체계를 찾아내어 의미변화 없이 잘 구현하기 위한 공학적 장치를 개발하는 것이 더욱 중요하다(송민호, 2010). 'eXpresser'에서 패턴의 일반화를 통한 대수적 사고의 발달의 핵심은 패턴의 기본 단위를 확인하고 이를 통해 여러 개의 타일을 하나의 유닛으로 묶는 것과 각각의 기본 단위에 대해 '잠김/열림' 기능을 선택하게 함으로써 일반적인 대수 기호를 사용하지 않고 변수와 상수의 아이디어를 표현하는 것이다. 'eXpresser'는 비단 패턴의 일반적인 대수적 표현을 위해서 설계된 마이크로월드가 아니다. 대수학자들이 모든 대상을 매우 간단한 부분들의 결합으로 보는 것을 선호하듯이 의미 있는 부분들을 통해 더 일반적인 대상을 보는 정신의 습관은 학생들이 이후 배우게 되는 수학에 있어서도 긍정적으로 작용할 수 있는 지식이 구조가 된다. 따라서 쌓기나무 패턴 구성 프로그램도 이러한 기본 단위의 아이디어를 문자 치환이라는 개념으로 사용하여 대상을 의미 있는 부분들로 분해하고 결합하는 활동이 핵심이 되도록 설계하였다. 또한 과거에 LOGO가 수학교육보다 프로그래밍 언어라는 부정적인 시각을 보여주었다면 쌓기나무 패턴 구성 프로그램 내에서 사용하는 쌓기나무 표현은 수학에서 사용하는 대수 기호와 그 의미를 반영할 수 있도록 설계하였다. 오히려 쌓기나무 패턴 프로그램에서 사용하는 표현은 수학에서 사용하는 치환, 함수개념을 구체적인 활동으로 연결해줄 수 있는 가능성을 제공한다. 즉 쌓기나무 패턴 프로그램은 기본적인 아이디어를 좀 더 넓은 범위로 적용하는 것을 목표로 설계되었다(Resnick & Silverman, 2005).

1.3. 평가 중심 학습 환경

평가중심 학습 환경이 되기 위해서는 피드백과 수정의 기회를 제공해야 하고 학습자의 학습내용을 평가할 수 있어야한다(Bransford 등, 2000). 최근 마우스를 통한 조작 활동이 강조됨에 따라 대부분의 컴퓨터 소프트웨어는 마우스 기반 활동으로 설계되어지고 있다. 예를 들어, 쌓기나무를 조작하고 의사소통할 수 있는 환경인 가상 조작 화이트보드(Virtual Manipulatives and Whiteboard System)는 주로 마우스 조작을 통해 쌓기나무를 만드는 환경이다. 이 환경은 쌓기나무를 조작하면서 공간지각 능력을 위한 쌓기나무 활동 및 패턴 활동을 할 수 있지만 학생들이 학습 과정보다 결과 위주로 분석되고 평가가 이루어진다. 왜냐하면 학생들이 학습하는 과정을 설명하게 하거나 직접적인 관찰 또는 촬영 등에 의해 학습이 어떻게 이루어졌는지를 관찰할 수 있지만 현실적인 학습 상황을 고려한다면 이러한 과정이 지속적으로 이루어지기가 힘들다. 따라서 학습자의 학습 과정이 기록되어질 수 있는 표현체계 또는 환경이 제공된다는 것은 자기평가, 동료평가, 교사 평가 등에 용이하게 사용되어질 수 있다.

[그림 Ⅳ-1-3]은 학습자가 원하는 가상의 쌓기나무를 만들기 위해 해당되는 쌓기나무 표현을 입력 및 저장할 수 있는 창이다. 여기서 '실행' 버튼을 누르게 되면 쌓기나무 표현에 해당하는 그림이 [그림 Ⅳ-1-1]에 구현된다. 쌓기나무 패턴 구성 프로그램의 특징은 학습자가 사용한 표현이 즉각적으로 이미지로 구현 되는 실행 가능한 표현이라는 점이다. 학습자에게 제공되는 시각적 피드백은 학습자의 흥미와 동기를 유발하고 자신이 만든 패턴의 오류 수정을 통해 반성적 사고를 하도록 한다. 또한 교사는 학생들이 제출한 쌓기나무 표현을 분석함으로써 학습자의 사고 과정 확인하고 이를 평가의 도구로서 사용할 수 있다. 왜냐하면 학습자가

제출한 쌓기나무 표현은 그 자체가 학습자의 사고 과정이 기록된 그릇이 되기 때문에 쌓기나무 표현을 분석하는 것을 통해 학생들의 사고 과정을 분석할 수 있다. 예를 들어, [그림 Ⅳ-2]는 동일한 쌓기나무 과제에 대해 학습자가 서로 다른 방식으로 쌓기나무를 만든 상황이다. 그러므로 쌓기나무 표현을 분석함으로써 학습자가 주어진 패턴의 기본 단위를 어떻게 생각하고 패턴을 구성하였는지 등을 쉽게 알 수 있다.

학생들에 제출한 다양한 표현	시각적 구현(사고 과정 분석)
X=‘ss[uuRRs]’ do s[uu] 10X	
X=‘s[uuRRs]s’ do s[uu]s 9X suuRRs	
X=‘[uuRRs]’; Y=‘ss’ do s[uussd] 4s 8{XY}X	

[그림 Ⅳ-2] 하나의 패턴 과제에 대한 학생들의 다양한 표현

[그림 Ⅳ-1-5]는 학습자가 쌓기나무 표현이외에도 과제에 대한 자신의 설명 및 의견을 제출할 수 있는 ‘내 의견’ 창이다. 여기서 제출된 내용은 학습자와 교사만이 공유할 수 있으며 학습자에 의해 계속적으로 수정을 할 수 있다. 따라서 학습자가 과제를 수행하면서 궁금한 사항과 의견이 남길 필요가 있을 때 또는 교사가 학생들이 패턴을 어떻게 구성했는지에 관한 추가적인 설명이 필요할 때 ‘내 의견’창에 설명을 요구함으로써 이 내용을 분석하고 평가할 수 있다.

1.4. 공동체 중심 학습 환경

공동체 중심 학습 환경에서는 자신의 활동이 다른 사람과 공유할 수 있는 기회를 가져야 한다(Bransford 등, 2010). 패턴의 일반화를 통한 대수적 사고의 발달을 위해 설계된 'eXpresser'는 시각적 패턴을 구성하고 표현하도록 설계된 환경이다. 하지만 'eXpresser'에서는 학습자가 구성한 패턴을 다른 사람들과 의사소통하고 공유하는데 제한이 있다. Bransford 등(2010)은 학습자가 자신의 학습이 유용하다는 것을 알거나 사회적 공동체에 도움이 된다는 것을 알 때 학습 동기가 더욱 자극된다고 하였다. 따라서 공동체 중심 학습 환경을 구성하는 것은 학생들의 활동을 긍정적으로 촉진할 수 있다. 쌓기나무 프로그램에서 사용하는 쌓기나무 표현의 중요한 특징 중의 하나는 쌓기나무라는 시각적 대상을 의사소통할 수 있는 표현체계라는 점이다. 공간에 대한 의사소통의 경험이 중요하게 인식되면서 쌓기나무를 활용한 의사소통은 교육과정 내에서도 중요하게 다루어지고 있다(교육과학기술부, 2010)는 점에서 쌓기나무 표현이 가져다주는 의미는 깊어진다. 쌓기나무 표현을 통한 의사소통은 학습자, 교사, 공동체 구성원, 공학적 장치 사이에 상호작용을 의미하며, 이러한 상호작용은 스스로를 평가함과 동시에 다른 학습자와의 가치 있는 사고 협동의 환경을 제공한다. 구체적으로 학생들은 [그림 Ⅳ-1-6]에서 자신이 만든 쌓기나무 표현과 이에 해당하는 시각적 구현을 다른 사람들과 공유할 수 있다.

2. 쌓기나무 패턴 구성 프로그램

쌓기나무 패턴 구성 프로그램은 Mavrikis 등(2012)이 말한 대수적 일반화에 관한 아이디어를 뒷받침하는 3가지 주요한 대수적인 사고를 바탕으

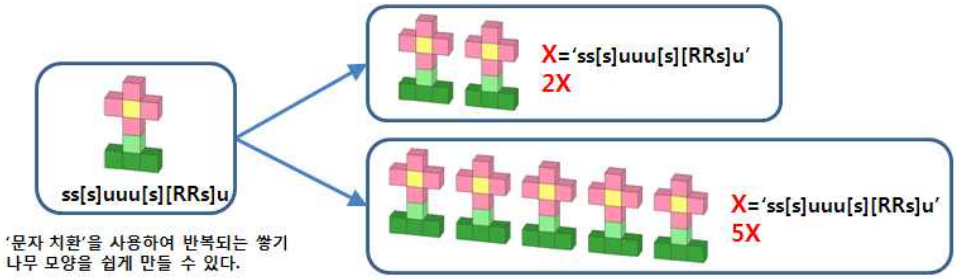
로 문자 치환을 사용하여 대상의 구조를 파악하고 활용하는 단계와 문자 변수 사용의 사용을 통해 변수 개념의 의미 형성과 일반화를 표현하는 단계로 나누어 설계되었다.

2.1 대상의 구조 파악과 활용(창의적인 작품 만들기)

쌓기나무 패턴 구성 프로그램의 첫 번째 단계는 기본적인 쌓기나무 표현을 익히고 이것을 사용하여 자신이 만들고 싶은 쌓기나무 입체도형을 자유롭게 만드는 것이다. 이 단계에서 학생들은 자신이 만들고 싶은 대상을 생각하고 이를 쌓기나무 표현을 통해 구성하는 과정에서 쌓기나무 마이크로월드에 흥미를 가질 수 있으며, 쌓기나무 표현에 익숙해 질 수 있다. 이 단계에서 중요한 것은 이후 패턴을 구성하는데 핵심이 되는 '문자 치환'의 개념을 자신들이 만든 쌓기나무 작품을 통해서 학습한다는 것이다. 문자 치환이란 자신이 구성한 쌓기나무 입체도형을 반복적으로 사용하고 싶거나, 만들기 원하는 대상이 반복과 대칭 등의 기하학적 구조를 가지고 있을 때 이 부분에 해당하는 쌓기나무 표현을 하나의 문자로 치환하여 사용하는 것이다. 이는 앞서 Redden(1996)이 강조한 대상의 구조를 파악하고, 구조를 이용하는 것의 장점을 학생 스스로가 인식하는 경험을 가지게 하기 위해서이다. 쌓기나무 마이크로월드 환경에서 반복되는 대상을 문자 치환을 사용하여 나타낸다면 학생들이 사용하는 쌓기나무 표현 역시 간결하게 표현될 수 있고, 치환된 문자를 계속적으로 활용하여 반복되는 대상을 쉽게 구성함으로써 학생들이 구조를 이용하는 것의 장점을 경험할 수 있기 때문이다.

[그림 Ⅳ-3]의 예를 통해 문자 치환에 대해서 알아보자. [그림 Ⅳ-3]은 꽃밭을 만들기 위해 꽃 하나를 반복적으로 사용하는 경우, 하나의 꽃을 생성하는 쌓기나무 표현을 만든 후([그림 Ⅳ-3]에서는 왼쪽에 있는 하나

의 꽃을 만들기 위한 쌓기나무 표현은 'ss[s]uuu[s][RRs]u'를 사용하였다), 수학에서 수식을 하나의 문자로 치환하듯이 이 표현을 하나의 문자로 묶는 모습이다([그림 Ⅳ-3]에서는 하나의 꽃을 생성하기 위한 쌓기나무 표현인 'ss[s]uuu[s][RRs]u'를 하나의 문자 X로 묶었다. 즉, X='ss[s]uuu[s][RRs]u'). 이렇게 반복하고자 하는 대상을 생성하는 쌓기나무 표현을 하나의 문자로 치환하여 나타내었다면 이후 치환된 문자를 사용함으로써 간단하게 대상을 반복적으로 나타낼 수 있다([그림 Ⅳ-3]의 오른쪽 그림은 2개의 꽃과 5개의 꽃을 만들기 위해 각각 2X와 5X라는 간단한 쌓기나무 표현을 사용한 예이다). 쌓기나무 패턴 구성 프로그램에서는 학생들에게 쌓기나무 표현에 숫자를 사용할 수 있다. 예를 들어 5개의 쌓기나무를 일렬로 만드는 쌓기나무 표현은 'sssss'이지만 5개의 s는 간단하게 '5s'로 나타낼 수 있다. 숫자를 도입하여 나타내는 이유는 쌓기나무 표현이 좀 더 수학적인 표기와 비슷한 구조를 가지게 하고, 패턴의 일반적인 표현을 구성하기 위해 필요한 절차로서 작용하기 때문이다.

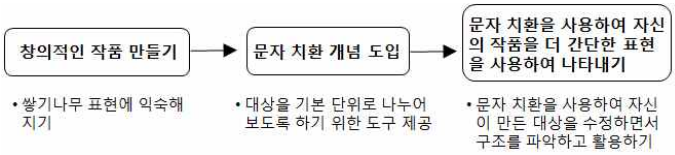


[그림 Ⅳ-3] 문자 치환을 사용하는 방법

문자 치환 개념을 학생들에게 설명한 후 자신이 만들었던 쌓기나무 입체도형을 문자 치환을 사용하여 좀 더 간결하게 나타내도록 한다. 그리고 학생들이 문자 치환을 사용하여 제출한 쌓기나무 표현은 연구자의 피

드백에 따라 계속해서 정교화 하여 제출 하도록 하였다.

앞에서 문자 치환의 본질적인 아이디어는 Cuoco 등(1996)과 Mavrikis 등(2012)등이 말한 '기본 단위'의 아이디어와 같다고 언급하였다. 이는 우리가 원하는 대상의 구조를 기본 단위들의 합으로 보게 하는 것이 유용한 대수적 전략이며 패턴의 일반화에 핵심이 될 수 있기 때문에 이러한 활동을 비형식적으로 제시하고 학습자가 스스로 경험하고 느낄 수 있도록 프로그램에 포함하였다. 즉, 문자 치환은 패턴을 의미 있는 조각들로 분해하여 효율적으로 조작할 수 있게 해주며 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 파악하고 규칙적으로 변하는 부분을 문자 치환을 사용하여 나타냄으로써 패턴의 일반화로 나아가는데 핵심적인 전략적 도구가 된다. 또한 문자 치환의 개념을 비형식적으로 도입함으로써 실제로 같은 대상을 구성하는데 더 간단하고 효율적인 쌓기나무 표현을 사용하여 나타낸다는 것은 학생들의 학습 동기를 유발할 수 있다. 따라서 학생들은 자신들이 흥미를 가지고 만든 쌓기나무 입체도형을 기본 단위로 분해하는 과정을 통해서 구조를 활용하는 이점을 느낄 수 있는 활동을 패턴 구성 프로그램의 첫 번째 과정으로 구성하였다[그림 Ⅳ-4].



[그림 Ⅳ-4] 첫 단계: 구조를 파악하고 활용하기

2.2. 문자 변수의 의미 형성과 일반화 표현

쌓기나무 패턴 구성 프로그램의 두 번째 활동으로서 학생들에게 본격적인 쌓기나무 패턴 구성 과제를 제시하였다. 패턴 구성 활동은 총 4차시에 걸쳐 진행되었으며, 차시별 내용은 많은 연구에서 주로 사용하는

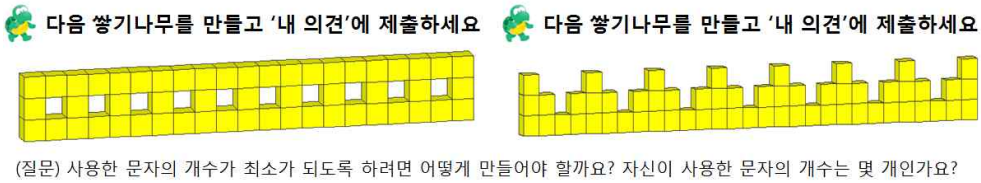
Stacey(1989)의 패턴의 일반화 단계를 바탕으로 제시하였다. 1, 2차시는 주로 특정한 항의 패턴을 구성하는 단계, 3, 4차시는 일반적 패턴을 구성하는 단계로 나누었다. 3, 4차시에서 쌓기나무 마이크로월드에서 일반적인 패턴을 표현하기 위해 수학에서 변수 역할을 하는 문자 기호를 도입하고 이를 사용하여 할 수 있는 환경을 제시하였다. 차시별 구체적인 교수 학습 내용은 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 차시별 온라인 교수 설계 내용

차시	학습 목표	학습 내용
1	규칙성 파악과 표현 (문자 치환)	특정한 항의 번호에 대한 쌓기나무 패턴을 제시하고 이를 구성하는 쌓기나무 표현을 만든다. 이때 사용하는 문자의 개수를 최소로 한다.
2	몸풀기 문제와 근 일반화	변하는 것과 변하지 않는 것을 파악하여 주어진 패턴의 4, 5, 20단계에 해당하는 쌓기나무 표현을 만든다.
3	원 일반화와 패턴 만들기 상자	주어진 패턴의 100단계에 해당하는 쌓기나무 표현을 만든다. 변수에 대한 의미형성과 이를 활용하기 위해 '패턴 만들기 상자' 메타포를 도입한다.
4	문자 변수 n의 도입과 패턴의 일반화	패턴 만들기 상자를 만들 수 있는 문자 변수 n을 도입하고, n을 사용하여 패턴 만들기 상자를 만들기 위한 쌓기나무 표현을 구성한다.

1차시는 규칙성을 파악하고 표현하는 과정으로 규칙적으로 증가하는 쌓기나무 패턴을 제시하고 이것을 최소한의 쌓기나무 표현을 사용하여 나타내도록 한다. 창의적인 쌓기나무 작품 만들기 단계에서와 같이 최소한의 쌓기나무 표현을 사용하는 것은 패턴에서 변하는 부분을 정확하게 인지하고 이것을 문자 치환을 사용하여 표현해야 하는 것을 말하기 때문에

학생들에게 간접적으로 대상의 구조 파악하도록 유도하는 것이라고 볼 수 있다[그림 Ⅳ-5].



[그림 Ⅳ-5] 문자 치환을 사용하여 간단한 쌓기나무 표현 만들기

쌓기나무 패턴 프로그램에서 제공하는 패턴 과제는 증가 패턴이므로 가장 기본적이면서 중요한 것은 반복되어 증가하는 부분을 인지하고 문자 치환을 사용하여 주어진 패턴을 표현하는 것이다[15]. 물론 학생들은 문자 치환을 사용하지 않고 쌓기나무를 하나씩 붙여가며 주어진 과제를 해결할 수 있지만 이러한 방법은 큰 항의 패턴을 요구하였을 때 문제가 된다. 즉, '큰 수'는 패턴의 일반화 연구에서 산술적인 사고에서 대수적인 사고로 나아가기 위한 중간단계로서 작용할 수 있다(김성준, 2003).

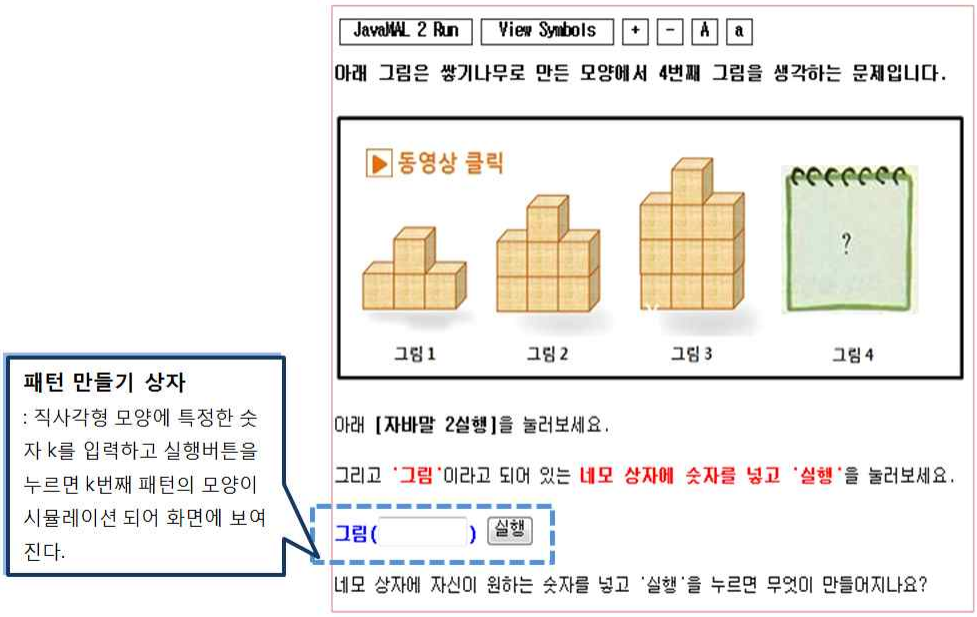
패턴을 구성하는 과정에서 학생들이 사용한 최소한의 문자의 개수는 댓글을 통해 다른 학생들과 공유할 수 있으며 다른 학생들과의 상호작용을 통해 쌓기나무 표현을 좀 더 간결하고 구조적으로 개선할 수 있다.

2차시는 주어진 패턴의 4, 5, 20번째 그림을 쌓기나무 표현으로 만들어 보는 과제를 제시하였다. 2차시 과제 역시 쌓기나무 표현에 사용하는 문자의 개수를 최소로 만들도록 요구하였다. 2차시에서 학생들이 만든 4, 5, 20번째 패턴은 이후 3, 4차시에 패턴의 일반화를 위해 계속해서 사용되었다.

3차시 활동이 시작되기 전에 주어진 패턴의 100번째 그림을 쌓기나무 표현으로 만들어 보는 과제를 제시하였다. 이때 연구자는 학생들이 제출

15) 패턴 과제에 따라 문자 치환을 사용하지 않아도 되는 경우도 있다. [그림 Ⅴ-6-1]은 문자 치환을 사용하지 않고 일반적인 쌓기나무 표현을 만든 예이다.

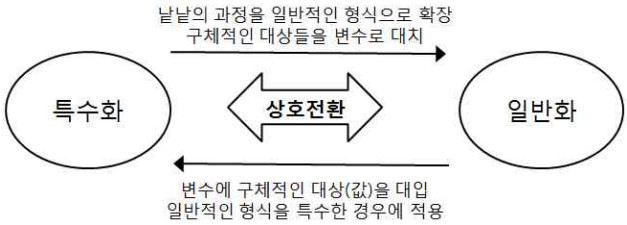
한 쌓기나무 표현을 분석하여 패턴의 규칙을 파악하지 못한 학생들에게 메시지나 댓글을 통해 피드백을 주었고, 학생들은 피드백 이외에 학생들 간의 상호작용을 통해서 자신의 표현을 계속적으로 개선해 나갈 수 있었다. 이후 일반화를 표현하는 문자 기호에 대한 의미형성과 이를 활용하는 환경을 제시하기 위해 '패턴 만들기 상자'를 도입하였다. 여기서 도입한 패턴 만들기 상자는 [그림 Ⅳ-6]과 같이 상자에 숫자를 입력하면 숫자에 해당하는 패턴의 항이 실행되어 즉각적으로 화면에 구현되는 상자이다. 먼저 학생들은 패턴 만들기 상자에 숫자를 입력하여 시뮬레이션 되는 화면을 관찰한다. 그리고 학생들에게 이러한 상자를 쌓기나무 표현을 사용하여 어떻게 만들 수 있을지 이전 차시에서 자신들이 만든 4, 5, 20, 100단계 쌓기나무 표현과 연관 지어 생각하도록 한다.



[그림 Ⅳ-6] 패턴 만들기 상자

학생들이 빈칸에 숫자를 넣고 나오는 대상을 확인하고, 이러한 기능을

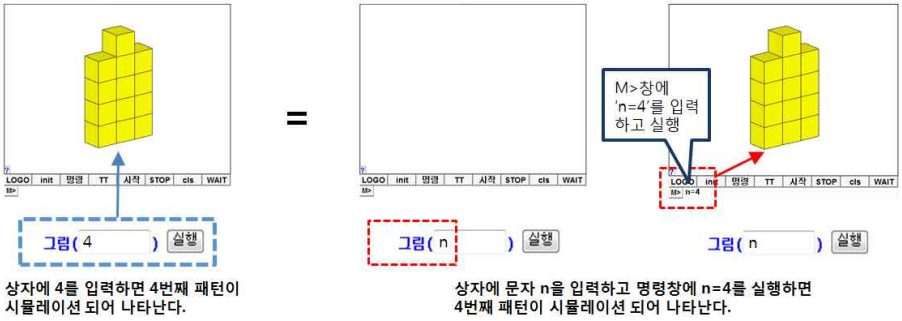
가지는 상자를 어떻게 구성할지에 관해 생각하게 하고 이를 직접 쌓기나무 표현으로 구성해보도록 하는 과정을 반복한다. 김남희(1997a)는 이러한 과정을 '특수에서 일반으로, 일반에서 특수로의 상호 전환의 과정' 이라고 하였다. 그는 이 과정이 변수 개념 학습에서 상당히 중요하게 다루어져야하는 내용이라고 하였으며, Freudenthal의 표현을 빌려 학생들이 이와 같이 스스로 만들어 가는 활동에 참여함으로써 수학적 개념을 능동적으로 형성해 나갈 수 있다고 하였다. 즉, 일반화된 맥락에서 사용된 변수의 의미를 학생들이 직접 구성해보고 사용해야 한다는 것, 특수에서 일반으로 일반에서 특수로의 두 가지 과정은 교과서의 제시나 교사의 설명으로만 이루어져서는 안 되고 학생들에 의한 직접경험으로 구성되어야 한다는 것이다. 따라서 쌓기나무 프로그램에서는 문자 기호의 개념 지도를 위해 패턴 만들기 상자가 중요한 역할을 한다. 학생들은 연구자가 미리 만들어 놓은 상자에 숫자를 입력하고 그 결과를 관찰하게 된다(특수화). 그리고 이러한 패턴 만들기 상자가 만들어지는 과정을 스스로 생각하여 쌓기나무 표현을 사용하여 직접 만들어 본다(일반화). 마지막으로 자신이 만든 패턴 만들기 상자가 바르게 만들어졌는지 상자에 숫자를 입력하여 확인하게 된다(특수화). 김남희는 학생들이 다가이름으로서의 변수의 본질을 완전하게 이해하고, 일반화를 위해 변수를 사용하는 방식, 변수가 나타내는 대상에 대한 올바른 인식을 위해서는 이러한 상호 전환을 풍부하게 경험이 필수적으로 선행되어야 한다고 하였다.



[그림 Ⅳ-7] 특수화/일반화의 상호전환(김남희, 1997a, p153)

3차시에서는 패턴 만들기 상자와 같은 기능을 쌓기나무 표현을 통해 만들려고 한다면 쌓기나무 표현을 어떻게 구성해야 하는지를 이전 차시에서 자신들이 만든 4, 5, 20, 100단계의 쌓기나무 표현과 연관 지어 자유롭게 설명해 보도록 하였다. 그리고 이 질문에 대한 학생들의 답안을 분석함으로써 4차시 수업을 설계에 활용 하였다.

4차시 수업은 본격적으로 문자 기호를 사용하여 쌓기나무 표현에 변수 개념을 도입하였다. [그림 Ⅳ-8]과 같이 패턴 만들기 상자는 네모 상자가 주어지고 그 안에 숫자를 넣게 되면 숫자에 해당하는 패턴이 그림 창에 시뮬레이션 되어 나타나게 하는 기능을 가지고 있다. 우선 학생들이 직접 네모 상자에 몇 개의 특정한 숫자를 입력하고 실행된 결과에 대한 관찰을 통해 이 네모 상자의 기능을 경험하고 느끼도록 해야 한다. 그 후 [그림 Ⅳ-8]의 오른쪽 그림과 같이 네모 상자 자리에 특정한 문자(예를 들어, n)를 입력하고 그 위에 있는 실행 창에 'n=(숫자)'를 입력해서 나오는 결과를 관찰하게 함으로써 상자 대신 문자 n을 사용하여도 같은 결과를 가진다는 사실을 알게 한다. 이것은 네모 상자가 어떤 수라도 가질 수 있고 특정한 수를 입력하면 특정한 패턴을 취할 수 있다는 기능을 문자 n 역시 같은 상황에서 그 기능을 가진다는 것을 보여주기 위한 과정으로 설계되었다.



[그림 Ⅳ-8] 패턴 만들기 상자에서 문자 변수의 사용

즉, 이것은 쌓기나무 표현에서 변하는 여러 가지 숫자 대신 문자 기호 n을 사용하여 나타낼 수 있고, 이 문자 기호는 단순히 하나의 대상 또는 숫자를 나타내는 것이 아닌 여러 가지 값을 나타낼 수 있는 변수로서 이해하는 것을 목표로 설계에 포함시켰다.

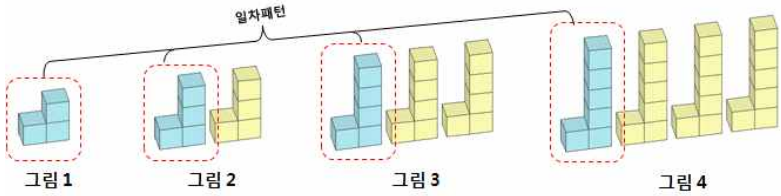
일반적으로 패턴 만들기 상자는 [그림 Ⅳ-9]와 같은 4단계로 진행된다. 먼저 문자 변수를 사용하여 일반화된 쌓기나무 표현을 만든다. 그리고 상자 만들기를 실행하여 상자를 만들고 여기서 특정한 숫자를 입력하고, 숫자에 해당되는 단계의 쌓기나무가 시뮬레이션 되어 나오는지 확인한다. 만약 다른 패턴이 나온다면 처음으로 돌아가 자신의 쌓기나무 표현을 수정하며 계속해서 이 과정을 반복한다.

[그림 Ⅳ-9] 패턴 만들기 상자 생성 과정

학생들은 문자 변수 n을 사용하여 제시된 패턴에 생성할 수 있는 일반적인 쌓기나무 표현을 만들게 된다. 그리고 자신이 만든 표현을 패턴 만들기 상자로 구현하여 시뮬레이션 해보고 즉각적인 시각적 피드백을 통해 결과를 확인하게 된다. 시뮬레이션 결과 잘못된 패턴이 나온다는 것은 대부분 문자 변수 n의사용이 잘못된 경우이기 때문에 다시 자신이 만든 쌓기나무 표현을 분석하는 과정을 반복함으로써 패턴에 내재된 관

계에 대한 이해와 문자 변수의 의미가 개선되어 나갈 수 있다. 교사는 학생들이 제출한 쌓기나무 표현과 수정 과정을 분석함으로써 필요시 메시지나 댓글을 통해 피드백을 제공할 수 있다.

이후 교실 활동에서 역시 일반적인 쌓기나무 표현을 만드는 과제를 통해 문자 변수 n을 지속적으로 사용하는 환경을 제시하였다. 하지만 교실 활동에서는 좀 더 어려운 쌓기나무 패턴 과제를 제시하였다. 교실 활동에서 제시한 패턴은 이차패턴인데 이차패턴은 패턴의 일반항이 이차식으로 표현되어지거나 시각적 관점에서 보면 일정한 부분이 반복되어 나타나는 일차패턴이 연이어 나타나는 것으로 특성화할 수 있다[그림 Ⅳ-10]. 따라서 쌓기나무 표현에서 이차패턴을 표현하기 위해서는 최소 두 번 이상의 문자 변수 n을 사용해야 하고 이러한 환경에서의 패턴 구성 활동이 변수에 대한 본질적인 의미를 견고히 할 수 있을 것으로 기대할 수 있다.



[그림 Ⅳ-10] 이차 패턴의 시각적 특성

Ⅴ. 교수 설계 적용 및 결과 분석

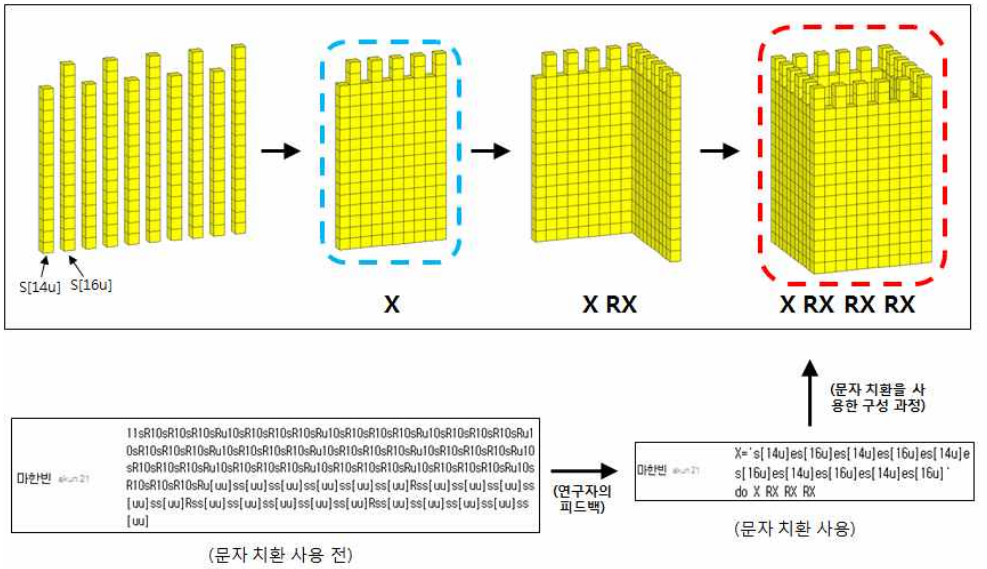
Mavrikis 등(2012)은 패턴을 통해 대수적 일반화의 발달을 위한 마이크로월드 설계에서 일반화의 아이디어를 뒷받침하는 3가지 주요한 대수적인 방식의 사고를 제시하였다. 본 연구에서는 Mavrikis 등이 제시한 일반화를 위한 3가지 대수적 사고에 초점을 맞춰 쌓기나무 패턴 구성 프로그램을 설계하고 적용하였으며 학생들이 제출한 쌓기나무 표현과 댓글 그리고 개별 면담을 실시하여 결과를 분석하였다.

1. 대상의 구조 파악과 활용

창의적인 쌓기나무 작품 만들기는 학생들이 기하학적 대상을 볼 때 그 구조를 보게 하는 정신적 습관을 기르게 하는 것과 구조 활용의 용이성과 그 힘을 학생 스스로 경험하게 하는 것을 목표로 한다. 먼저 학생들은 쌓기나무 마이크로월드에서 5가지 기본 명령과 '[ ]'명령을 사용하여 창의적인 쌓기나무 작품을 만들기를 하였다. 이후 문자 치환의 개념을 도입하여 그들이 쌓기나무 작품을 만들기 위해 구성한 쌓기나무 표현을 문자 치환을 사용하여 간결하게 나타내도록 요구하였다. 문자 치환은 학생들에게 의도적으로 대상을 부분으로 분해하게 하며, 나아가 자신이 작은 부분들로 나누기 위해 사용한 문자 치환을 활용하도록 격려함으로써 이 부분들이 대상의 기본 단위가 되는 의미 있는 조각들이 되기를 기대하였다. 필요할 경우 연구자의 피드백이 제공되었으며, 이를 통해 학생들은 쌓기나무 표현을 조직적으로 개선해나갈 수 있었다[16]. [그림 Ⅴ-1]

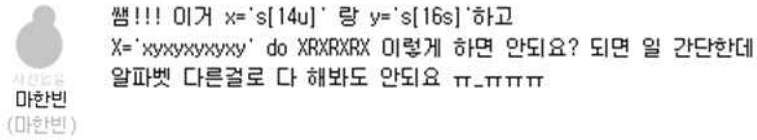
16) 양지원(2011)은 쌓기나무 표현의 조직성을 대칭적인 대상을 만들 때 대칭적이게 표현하는 지, 압축적으로 나타내었는지, 대상을 만든 단위별로 생각하여 표현하였는지 등으로 사용하였다.

은 문자 치환 개념을 도입하기전과 도입한 후의 학생이 사용한 쌓기나무 표현의 변화이다. 학생의 쌓기나무 표현을 분석한 결과 최초에 대상을 만들기 위해 바닥에서부터 쌓기나무로 정사각형을 그리듯이 쌓아서 올렸다. 비록 바닥에서부터 규칙적으로 쌓기나무를 쌓기는 하였지만 대상의 기하학적인 구조를 충분히 활용하지 못하였고, 학생이 구성한 쌓기나무 표현도 복잡하게 나타났다[그림 Ⅴ-1-왼쪽]. 이후 문자 치환에 대한 학습이 이루어졌고 문자 치환을 사용해서 쌓기나무 표현을 간결하게 만들도록 요구하였다. 연구자는 학생이 수정된 쌓기나무 표현을 제출할 때마다 피드백을 제공함으로써 좀 더 조직적으로 개선되는 모습을 볼 수 있었다. 이 학생이 마지막으로 제출한 쌓기나무 표현은 [그림 Ⅴ-1]의 오른쪽 표현과 같이 문자 치환을 사용하기 전보다 훨씬 간결해진 모습을 볼 수 있었다. 쌓기나무 표현을 통해 학생이 대상을 만든 과정을 분석하면 그림과 같이 똑같은 4면으로 구성된 대상을 하나의 기본 단위로 잡고 이를 문자 X를 사용하여 나타내었다. 이후 문자 치환 X를 이용하여 4면을 'X RX RX RX'과 같이 간단하게 구성하였다.



[그림 Ⅴ-1] 치환 문자를 사용하여 조직화된 쌓기나무 표현의 예

비록 학생이 만들고자 하는 대상이 간단한 입체도형이었지만 대상을 4개의 동일한 부분으로 분해하여 하나의 면을 X로 치환하고 X를 대칭적으로 활용하는 모습을 볼 수 있었다. 또한 학생이 남긴 댓글을 보면 학생은 원래 3개의 문자 치환을 사용하여 쌓기나무 표현을 더욱 간단하게 구성하려는 시도를 했었다. 즉, [그림 Ⅴ-2]의 학생의 댓글과 같이 [그림 Ⅴ-1]에서 나타낸 X를 크기가 다른 두 개의 세로 기둥으로 분해하여 각각을 x와 y로 치환하였으며 X를 X='xyxyxyxyxy'로 표현하려고 하는 모습을 볼 수 있었다. 이러한 모습은 이 학생이 한 면을 더 작은 기본 단위로 분해함으로써 훨씬 간단하고 조직적인 쌓기나무 표현을 구성한 것으로 볼 수 있다[17].

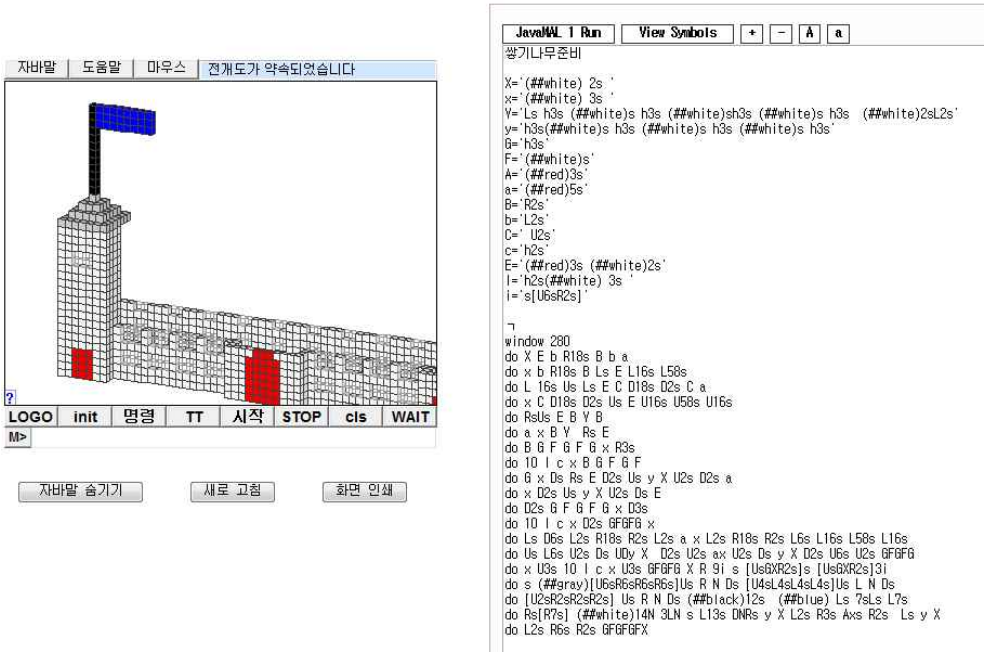


[그림 Ⅴ-2] 치환 문자 속에 치환 문자를 사용한 예

따라서 문자 치환이라는 도구를 사용하는 것과 쌓기나무 표현을 간결하게 구성하려고 노력하는 것은 학생들이 대상의 구조를 보고 활용하는 것에 긍정적인 역할을 하였다고 볼 수 있다. 하지만 창의적인 작품 같은 확산적인 과제에서의 문제점은 학생들이 대상의 기하학적 구조보다 시각적인 측면에 초점을 두는 경우와 하나의 대상에 수많은 문자 치환을 무분별하게 사용하는 경우였다. 전자는 쌓기나무를 사용하여 좀 더 미적인 측면을 강조함으로써 그들이 구성한 대상 자체가 기하적인 특징을 갖고 있지 않았기 때문에 문자 치환을 사용하도록 요구 하였을 때도 이를 효

17) 사실 쌓기나무 마이크로월드에서는 문자 치환 속에 다른 문자 치환을 사용하여 쌓기나무 표현을 구현하기 위해서는 'do_2' 라는 표현을 사용해야한다. 하지만 학생들에게 이러한 표현은 가르쳐주지 않았으므로 치환 속에 치환을 생각한 학생도 이를 구현할 수 없었다.

율적으로 활용하지 못하였다. 후자는 [그림 Ⅴ-3]과 같이 필요 이상의 많은 문자 치환을 사용한 경우인데, 이 학생은 무려 15개의 치환 문자를 사용하였다. 심지어 2개의 쌓기나무를 구성하는 'ss' 라는 쌓기나무 표현조차 하나의 문자로 치환하는 모습을 볼 수 있었다. 그는 반복되는 기본 단위를 너무 세밀하게 분해한 나머지 오히려 더 복잡한 쌓기나무 표현을 만들어내는 모습을 볼 수 있었다.



[그림 Ⅴ-3] 많은 문자 치환을 사용한 예

쌓기나무 패턴 구성 활동의 첫 번째 단계에서 학생들은 창의적인 작품을 만드는 과정을 통해 쌓기나무 표현에 익숙해졌으며 대부분이 문자 치환을 사용하면서 반복하는 것에 대해 간단히 표현할 수 있는 편리함을 느끼게 되었다. 실제로 [그림 Ⅴ-1]의 예에서와 같이 간단한 대상을 구성하더라도 문자 치환을 사용하기 전에 비해 훨씬 간결하고 조직된 쌓기

나무 표현을 사용하는 모습을 볼 수 있었다. 하지만 학생들이 만든 작품들 중 기하학적인 구조가 많이 들어나지 않을 경우, 연구자의 의도와 다르게 문자 치환을 사용하는 모습을 볼 수 있었다는 점에서 연구의 제한점을 갖는다.

2. 문자 변수의 의미 형성과 일반화 표현

3차시 활동에서 패턴 만들기 상자를 통해 문자 변수 n을 도입하기 전에 먼저 패턴 만들기 상자에 숫자를 입력하고 실행하는 과정을 반복하게 하였으며, 이러한 상자의 기능을 가지는 쌓기나무 표현을 자유롭게 만들어보도록 하였다. 이때 전 시간에 자신이 제출한 4번째, 5번째, 20번째, 100번째 쌓기나무 표현을 사용하여 설명하도록 하였다. [그림 Ⅴ-4]와 같이 1, 2차시에서 4번째, 5번째, 20번째, 100번째 패턴을 올바르게 표현한 학생들 중 몇몇은 패턴 만들기 상자에 여러 숫자를 입력했던 경험에 주목하였다. 그들은 4번째, 5번째, 20번째, 100번째 쌓기나무 표현에서 숫자가 변하는 자리에 ‘ㅁ’ 또는 ‘네모’를 사용하면 이 ‘ㅁ’ 또는 ‘네모’가 상자의 역할을 할 수 있다고 답했다. 학생들이 ‘ㅁ’ 또는 ‘네모’라는 용어를 사용하여 표현한 것은 숫자를 입력하는 칸을 패턴 만들기 상자라는 이름으로 도입하였고, 학생들이 이 상자를 사용할 때 네모 모양에 숫자를 넣고 실행하는 과정을 반복하였기 때문이다. 따라서 이 학생들은 이러한 네모 상자가 숫자를 대신하고 패턴 만들기 상자와 같은 기능을 하는 것으로 인식하였다. 학생들은 이전 차시에서 자신들이 만들었던 쌓기나무 표현을 분석함으로써 여러 가지 수를 동시에 나타낼 수 있는 문자 기호의 의미 형성 대한 가능성을 보여 주었다.

쌓기나무준비 ㄱ X='ss[u]' do s[u 4X ㄴ	쌓기나무준비 ㄱ X='ss[u]' do s[u 20X ㄴ	쌓기나무준비 ㄱ X='ss[u]' do s[u 100X ㄴ	쌓기나무준비 ㄱ X='ss[u]' do s[u]□X ㄴ X 앞에 변하는 숫자 대신 '□'을 넣어서 표현
4번째 패턴	20번째 패턴	100번째 패턴	학생 답변: 예전에 만들었던 것을 사용했는데요. 저는 숫자가 변하는 부분에 네모를 넣어주면 될 것 같습니다.

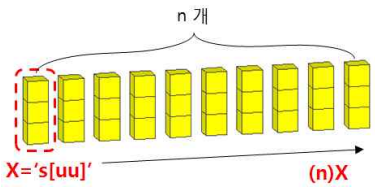
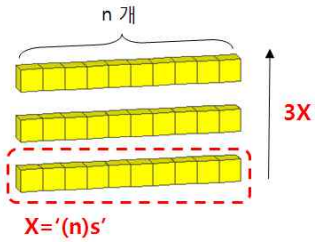
[그림 Ⅴ-4] 패턴 만들기 상자에 대한 학생들의 생각

2.1. 문자 변수 n을 통한 패턴 구성 과정

패턴 만들기 상자를 통해 문자 변수 n을 도입하고 4개의 일차패턴을 제시하여 패턴 만들기 상자를 만드는 과제를 제시하였다. 연구자는 학생들이 패턴 만들기 상자를 만드는 과정에서 제출한 쌓기나무 표현을 분석하고 피드백을 제공하였다. 먼저 학생들에게 제시된 4개의 쌓기나무 패턴 과제에 대해 학생들이 일정하게 증가하는 패턴의 변화를 어떻게 파악하였는지를 분석하였다.

1번 과제에서 학생들은 크게 2가지 방법으로 패턴의 변화를 파악하여 구성하였다. [그림 Ⅴ-5]와 같이 대부분의 학생들은 3개씩 늘어나는 3개의 세로 기둥을 문자 X를 사용하여 치환한 뒤 n번째 패턴 표현에서 이 기본 단위를 n번 반복시켰다. 반면 2명의 학생은 패턴을 층별로 파악하여 구성하였다. 즉, 한 층에 n의 가로 기둥을 문자 X를 사용하여 치환한 뒤 이를 2층, 3층까지 쌓아 올렸다. 두 그룹이 패턴을 만드는 과정은 쌓기나무 표현에서도 다르게 나타났다. 첫 번째 유형은 3개의 쌓기나무를 하나의 기본 단위로 묶고 이를 n번 반복하기 위해 치환 문자 속에는 3개의 쌓기나무 's[uu]'를 사용한 뒤 X앞에 문자 변수 n을 사용하였다. 반면에 두 번째 유형은 기본 단위를 선택할 때부터 가로로 늘려진 n개의 쌓기나무를 하나의 단위로 파악하였기 때문에 치환 문자 속에 문자 변수

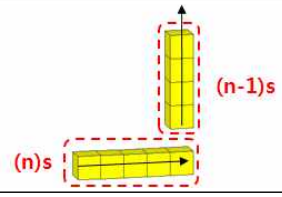
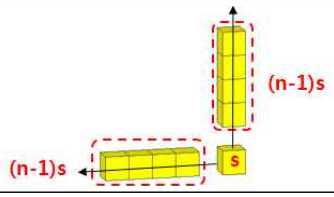
n을사용하고 이것을 위로 3번 반복한 것을 볼 수 있다.

	유형 1 (35명)	유형 2 (2명)
쌓기나무 표현	X='s[uu]' do (n)X	X='(n-1)[s]' do sXuXuX
사고 과정		

[그림 Ⅴ-5] 1번 과제에서 학생들의 사고 방법 분석

2번 과제에서 학생들이 파악한 패턴의 변화 역시 크게 2가지 방법으로 분류되었다. [그림 Ⅴ-6]과 같이 첫 번째 유형은 n개의 쌓기나무를 오른쪽 방향으로 나열하고 바로 $n-1$개의 쌓기나무를 위로 쌓았다. 반면 두 번째 유형은 하나의 쌓기나무를 먼저 구성한 뒤, 위로 $n-1$개의 쌓기나무를 만들고, 처음 위치로 돌아온 후 왼쪽 방향으로 $n-1$개의 쌓기나무를 나열하는 것이다. 첫 번째 유형은 한붓그리기를 하듯이 쌓기나무를 쌓았고, 두 번째 유형은 하나의 기준이 되는 쌓기나무를 만든 후 이 기준점을 중심으로 같은 단위의 쌓기나무를 위와 옆으로 반복해서 나열하였다. 두 그룹이 패턴을 만드는 과정을 쌓기나무 표현에서 찾아보면 첫 번째 유형은 문자 치환을 사용하기 않았고, n과 $n-1$의 관계를 파악하면서 쌓기나무 표현을 간략하게 나타낸 반면 두 번째 유형은 $n-1$개의 일렬로 나열된 쌓기나무를 문자 치환 X를 사용하여 표현한 것이다. 이 그룹의 학생들은 주어진 패턴 과제에서 반복되어 나타나는 대상을 문자 치환을 사용하여 하나로 묶는 것에 집중하였고, 그렇기 때문에 하나의 쌓기나무를 기준 쌓기나무로 고정 시킴으로써 2개의 동일한 기본 단위를

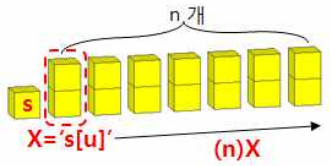
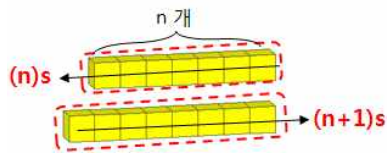
만들어 낼 수 있었다.

	유형 1 (26명)	유형 2 (9명)
쌓기나무 표현	do (n)s(n-1)u	X='[(n-1)u]2R(n-1)s' do sX
사고 과정		

[그림 Ⅴ-6] 2번 과제에서 학생들의 사고 방법 분석

3번 과제는 [그림 Ⅴ-7]과 같이 1번 과제와 유사한 패턴을 가지고 있지만 1번 과제와 달리 첫 번째 항에 있는 하나의 쌓기나무는 변하지 않고 그대로 유지되는 패턴이다. 이것은 패턴의 일반항에서 상수항이 0이 아닌 패턴으로 제시 되었고 볼 수 있다. 학생들이 파악한 패턴의 변화 역시 1번과 유사하게 2가지로 분류되었다. 첫 번째 유형은 하나의 변하지 않는 쌓기나무를 먼저 놓고 반복되어 증가하는 2개의 세로 기둥을 문자 X로 치환하여 n번 나열하였다. 두 번째 유형은 치환을 사용하지 않았고, 2번 문항의 첫 번째 그룹에서 사용한 방법과 같이 한붓그리기를 하듯이 $n+1$개의 쌓기나무를 오른쪽으로 일렬로 쌓은 뒤 2층에서 n개의 쌓기나무를 왼쪽으로 일렬로 쌓았다. 쌓기나무 마이크로월드 시스템이 위로 올라가기 위해서는 행동 문자 'u'를 사용해야 하는데 u가 사용하면 한 칸 위로 올라가는 동시에 하나의 쌓기나무가 같이 만들어지기 때문에 2층 n개의 쌓기나무를 만들기 위해서 $n-1$개의 쌓기나무를 왼쪽으로 일렬로 나열해야 한다. [그림 Ⅴ-7]의 오른쪽 유형의 쌓기나무 표현을 살펴보면 학생들이 1층의 쌓기나무를 $(n+1)$s로 2층의 쌓기나무를 u$(n-1)$s로 표현한 것을 볼 수 있다. 즉, 이 학생들은 쌓기나무 표현 속에 $n+1$과

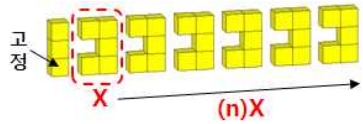
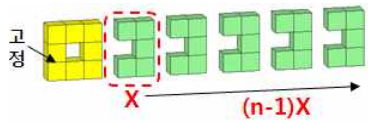
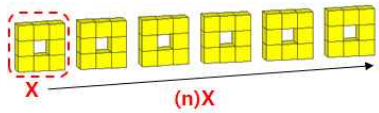
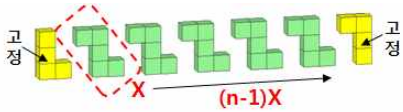
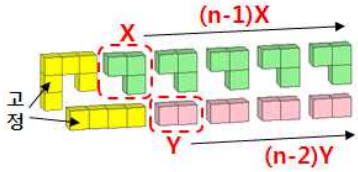
$n-1$의 적절하게 사용하는 모습을 통해서 문자 변수 n에 대한 기능을 관계적으로 파악하고 이를 사용하고 있다고 볼 수 있다.

	유형 1 (33명)	유형 2 (3명)
쌓기나무 표현	X='s[u]' do s(n)X	do (n+1)suRR(n-1)s
사고 과정		

[그림 Ⅴ-7] 3번 과제에서 학생들의 사고 방법 분석

4번 문제는 학생들이 문제의 특성상 다양한 방법으로 패턴의 변화를 파악하고 있음을 볼 수 있었다. [그림 Ⅴ-8]에서와 같이 첫 번째와 두 번째 유형은 비슷한 사고 과정에 의해 패턴을 구성하였다. 이 두 개의 그룹은 변하는 부분을 뒤집힌 'ㄷ' 모양으로 파악하고 이를 기본 단위 X로 치환하여 사용하였다. 첫 번째 그룹은 쌓기나무 3개로 만든 세로 기둥을 변하지 않는 부분으로 고정하고 변하는 부분 X를 n번 반복하여 나타낸 반면 두 번째 그룹은 변하지 않은 부분을 주어진 패턴의 첫 번째 항(ㅁ 모양)으로 하고 이후 변하는 부분 X를 $n-1$번 반복하여 구성하였다. 세 번째 유형은 반복되는 부분 자체를 주어진 패턴의 첫 번째 항으로 생각하고 이를 n번 반복하여 나타냈는데 이때 ㅁ 모양의 한쪽 끝을 겹치도록 하였다. 네 번째 유형과 다섯 번째 유형은 특이한 모양으로 패턴을 파악하였다. 네 번째 유형에서 변하지 않는 부분은 양쪽 끝에 있는 'ㄴ' 모양과 'ㄱ'모양으로 구성하고 가운데 'ㄹ'과 비슷한 모양을 반복되어 변하는 부분으로 파악하였다. 따라서 이것을 X로 치환하여 $n-1$번 반복하는 모습을 볼 수 있었다. 마지막 다섯 번째 유형은 패턴의 구조를 제대

로 파악하지 못함으로써 다소 복잡한 쌓기나무 표현을 만들었다. 특히, 이 학생은 반복되어 변하는 부분을 두 개의 단위로 생각하고 이를 각각 X와 Y로 치환하여 나타내었고, 변하지 않는 부분 역시 특이한 모양으로 파악하는 것을 볼 수 있었다. 이 학생은 결국 $n+2$번째 패턴을 구성하였는데 이후 쌓기나무 마이크로월드와의 상호작용을 통해서 올바른 패턴을 구성하는 과정은 다음 장에 자세히 다루었다.

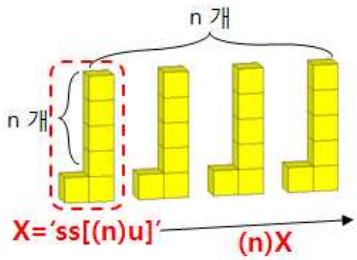
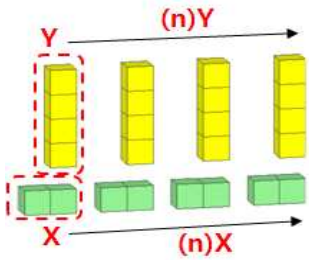
	패턴 구성 과정	쌓기나무 표현
유형 1 (26명)		X=‘ss[uuRRs]’ do s[uu] (n)X
유형 2 (7명)		X=‘ss[uuRRs]’ do s[uu]ss[uuRRs] (n-1)X
유형 3 (2명)		X=‘sss[uuRRssd]’ do (n)X
유형 4 (1명)		X=‘s[uuRRs]s’ do s[uu]s (n-1)X suuRRs
유형 5 (1명)		X=‘[uuRRs]’; Y=‘ss’ do s[uussd] 4s (n-2){XY}X

[그림 Ⅴ-8] 4번 과제에서 학생들의 사고 방법 분석

온라인 활동이 끝난 뒤 2주 뒤에 교실 활동을 실시하였다. 교실 활동은 온라인 활동과 비슷한 과정으로 진행 되었고 온라인 활동과 달리 학생들

에게 이차패턴을 제시하고 쌓기나무 표현으로 구성하도록 하였다. 본 과제에서 주어진 이차패턴은 패턴이 가로로 증가함과 동시에 세로 역시 증가하는 양상을 보인다. 그렇기 때문에 학생들이 주어진 패턴을 적절하게 파악하고 이를 표현하기 위해서는 이러한 두 방향의 증가를 동시에 인지해야 한다. 즉, 쌓기나무 표현에도 적어도 두 개 이상의 문자 변수 n을 사용해야하기 때문에 일차패턴에 비해 많은 학생들이 패턴을 구성하기에 많은 어려움을 가졌다. 다음은 학생들이 패턴의 주어진 2개의 이차 패턴 과제를 구성하는 과정이다.

이차패턴 1번 문제에서 주어진 이차패턴을 만든 학생들은 대부분 [그림 Ⅴ-9]의 첫 번째 유형과 같은 방식으로 패턴의 변화를 파악하는 모습을 보였다. 즉, 특정한 항의 패턴을 분해해보면(그림 예: 4단계 패턴) 대칭된 'ㄴ' 모양이 동일하게 항의 번호 만큼 가로로 나열됨을 볼 수 있다. 그래서 대부분의 학생들은 이 부분을 하나의 기본 단위 X로 치환하고 이것을 n번 반복하여 나타냈다. 그러나 여기서 X로 묶은 기본 단위 자체가 일차 증가 패턴이기 때문에 X안의 쌓기나무 표현 속에서 또 한 번의 문자 변수 n을 사용하여 나타내었다. 비록 쌓기나무 표현 자체는 간단하지만 학생들이 치환 속과 do 뒤에 동시에 문자 변수 n을 사용하는 것은 쉽지 않았다. 두 번째 유형으로 패턴을 구성한 학생은 온라인 학습 때부터 습관적으로 여러 개의 문자 치환을 사용하여 패턴을 구성한 학생이다. 이 학생은 1번 유형에서 X로 치환하여 나타낸 패턴을 X와 Y를 사용하여 나누어 표현했지만 비슷한 방식으로 일반적인 패턴을 구성할 수 있었다.

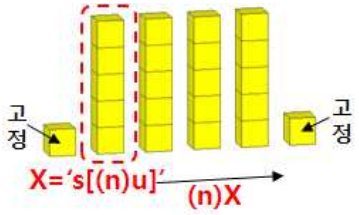
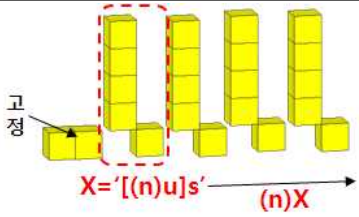
	유형 1 (23명)	유형 2 (1명)
쌓기나무 표현	X='ss[(n)u]' do (n)X	X='ss' ; Y='[(n)u]' do (n){XY}
사고 과정		

[그림 Ⅴ-9] 이차패턴 1번 과제에서 학생들의 사고 방법 분석

2번 과제 역시 학생들은 크게 2가지 방법으로 패턴의 변화를 파악하여 표현하였다. 첫 번째 유형은 가장 기본적으로 생각할 수 있는 방법으로 먼저 양 끝에 있는 두 개의 쌓기나무를 고정시킨다. 그 후 가운데 있는 세로 기둥을 X를 사용하여 치환하고 이를 n번 나열시켰다. 2번 과제 역시 이차패턴이기 때문에 치환으로 표현한 X 자체가 고정되어 있는 것이 아니고 쌓기나무가 한 개씩 위로 늘어나게 된다. 그러므로 X속에 문자 변수 n이 포함되었다. 2번 과제에서 특이한 점은 두 번째 유형으로 문제를 해결한 학생이 꽤 많았다는 것이다. [그림 Ⅴ-10]과 같이 학생들은 패턴을 다소 인지하기 어려운 형태로 파악하였으며 이를 나타내는 쌓기나무 역시 1번 유형에 비해 분석하기가 쉽지 않았다. 수업이 끝난 후 개별 면담을 통해 이러한 패턴을 구성한 학생들에게 두 가지 공통점을 발견할 수 있었다. 먼저 2번 유형의 학생들은 처음에 변하지 않는 것이 있으면 먼저 만들고 이후 변하는 부분을 문자 치환 X를 사용하여 적절히 치환하고 n번 나열하려고 생각이 강하게 나타났다. 그렇기 때문에 주어진 패턴에 마지막 하나의 쌓기나무를 문자 치환을 사용해서 처리하려다 보니 부자연스러운 형태의 기본 단위가 하나의 문자로 치환되는 모습을

볼 수 있었다. 두 번째 공통점은 학생들이 하나의 문자로 치환한 대상은 [그림 Ⅴ-10]의 오른쪽과 같이 눈으로 보기에는 다소 부자연스럽게 보이지만 쌓기나무 패턴 프로그램에서 구현하기는 어렵지 않았다는 점이다. 그 이유는 쌓기나무 패턴 프로그램에서는 '[(n)u]s'라는 표현을 사용하여 다소 부자연스러운 대상을 간단히 구성할 수 있기 때문이다.

일반적으로 패턴의 일반화 연구에서 이차패턴을 일반화하여 표현하기 위해서는 다양한 전략과 접근방법을 사용하기 때문에 패턴을 일반화하는 과정도 다양하게 나타난다. 하지만 쌓기나무 패턴 구성 프로그램에서는 학생들이 다양한 방법을 사용하여 패턴을 구성하지 못했고, 몇 가지 유형을 제외하고는 모두 잘못된 패턴을 구성하였다. 이는 종이와 펜으로 패턴의 일반화를 표현하는 다른 연구들에 비해 쌓기나무 마이크로월드의 시스템 특성상 이차패턴을 일반화 할 수 있는 방법이 제한됨을 보여주었다.

	유형 1 (20명)	유형 2 (6명)
쌓기나무 표현	X='s[(n)u]' do s(n)Xs	X='[(n)u]s' do ss(n)X
사고 과정		

[그림 Ⅴ-10] 이차패턴 2번 과제에서 학생들의 사고 방법 분석

2.2. 문자 변수 n에 대한 학생들의 이해 상태 분석

온라인 활동에서 4가지 일차 패턴 구성 과제를 모두 끝내고 학생들에게

자신들이 사용한 문자 변수 n의 의미 또는 기능에 대해 자유롭게 적어 보도록 물었다. 4개의 과제에서 문자 변수 n을 한 번도 사용하지 않은 학생은 없었으며 최소한 3개 이상의 패턴에서 정답이든 오답이든 문자 변수 n을 사용하였다. 이러한 물음은 대부분의 학생들이 문자 변수 n을 사용하여 틀렸든지 맞았든지 일반적인 쌓기나무 표현을 구성하여 제출하였지만 문자 변수의 의미를 알고 사용한 것인지 아니면 형식적인 조작의 도구로소 사용한 것인지를 알아보기 위해서 제시하였다. 대부분의 학생들은 n이 의미하는 대상을 수에 국한시켰고, 일부 학생들은 그림을 만들 수 있는 것이라 표현하였다. <표 Ⅴ-1>에서와 같이 가장 많은 학생들이 생각하는 문자 변수의 의미는 여러 가지 값을 대입할 수 있는 것이었다. 학생들의 말을 인용하면 n은 계속해서 여러 가지 숫자를 변화시키면서 대입(입력)할 수 있는 것이라고 했다. 이는 쌓기나무 패턴 구성에서 n을 숫자를 넣는 상자에 비유하여 도입하였고, 계속해서 n에 숫자를 넣어 시뮬레이션 되는 패턴을 관찰하는 활동을 하였기 때문이라고 분석되었다. 다른 학생들의 설명으로는 수나 그림과 같은 여러 가지 대상을 나타내는 것, 또는 구체적으로 숫자 1, 2와 비교하면서 아직 정해지지 않은 수, 아무 숫자나 다 되는 수라는 응답도 있었다. 절반 이상의 학생들은 쌓기나무 패턴 구성 프로그램에서의 활동을 통해 자신들이 사용한 문자 변수 n이 하나의 숫자 또는 대상을 가리키는 것이 아니고 여러 가지 수를 표현하거나 대입할 수 있는 기호로 인식하는 경향이 있었다. 하지만 몇 명의 학생들은 그들이 패턴의 일반적인 표현을 위해 사용한 문자 변수의 의미를 전혀 다르게 이해하고 있었다. 한 예로 자신이 사용한 문자 변수 n이 100과 같은 큰 수를 나타내는 것이라고 한 학생도 있고 심지어 숫자는 바꿀 수 있지만 문자 변수 n을 사용하면 정해진 수만 나온다는 학생도 있었다. 또한 패턴을 만들기 위해서 필요한 것, 규칙을 실행하기 위해서 필요한 것, 반복되어 사용해야 하는 것을 방지해 주는 것, 심지어

치환 역할을 하는 것으로 이해한 학생들도 있었다. 이러한 학생들은 문자 변수 n을 패턴 구성 활동에 초점을 두고 패턴을 만들기 위해 반드시 사용해야 하는 하나의 도구로 생각하고 있었다. 문제는 이 학생들 중 패턴 구성 과제에서 문자 변수 n을 사용하여 패턴의 일반적인 표현을 바르게 구성하여 제출한 학생들도 있다는 것이다. 즉, 이 학생들은 자신이 사용한 문자에 대한 본질적인 이해 없이 기계적인 과정에 따라 일반적인 쌓기나무 표현을 만들어낸 것이다. 김남희(1997a)는 현직 교사와 예비 교사들이 변수 개념이 초등학교 때부터 시작됨으로 중・고등학교에서는 특별히 설명하지 않거나 또는 고등학생들은 이미 변수의 개념을 알고 있다고 생각하고 변수 개념을 아예 언급 하지 않을 때가 많다고 하였다. 하지만 Lee & Wheeler(1987)는 심지어 고등학교 학생들도 그들이 문자 n의 의미를 어떤 하나의 큰 수로 생각하더라도 이것을 n에 대한 식으로 일반화하여 표현할 수 있다고 하였다. 따라서 패턴 연구 등 많은 연구에서 학생들에게 변수를 사용한 대수적 기호로 관계를 표현할 수 있는지 없는지에 초점을 두기에 앞서 문자 기호에 대한 이해가 올바르게 되었는지에 관한 사전 연구가 필요할 것이다.

<표 Ⅴ-1> 학생들이 설명한 문자 변수 n의 의미

문자 변수 n의 의미	주로 사용되는 예 또는 설명	응답자 (비율)
여러 가지 값을 대입할 수 있는 것	• 계속 다른 숫자들을 쓸 수 있는 것 • 여러 가지 숫자를 계속 입력할 수 있는 것 • 숫자를 계속 변화시키면서 넣을 수 있는 것	14명 (33%)
여러 가지 대상 (수, 그림 등)	• 여러 가지 숫자를 나타내는 것 • 여러 가지 그림을 만들 수 있는 것	6명 (14%)
정해지지 않은 수	• 1,2와 같이 정해진 수가 아닌 것	4명 (10%)
패턴 만들기 상자 역할	• 패턴 만들기 상자에 쓴 명령을 실행할 수 있도록 하는 것 • 패턴을 만들기 위해 쓰는 것 • 규칙을 실행할 때 쓰는 것	4명 (10%)
정해진 수	• 숫자는 바꿀 수 있지만 n을 사용하면 정해진 수만 나온다. • 결과적으로 어떤 숫자랑 똑같다. • 100과 같이 쌓기나무의 크기가 커질 때 쓰는 것	4명 (10%)
규칙을 반복하는 것	• 규칙에 따라 숫자를 적으면 그 규칙이 반복되는 것	3명 (7%)
몇 번째를 나타내는 것	• 그림 뒤에 있는 숫자 • 몇 번째를 나타내는 숫자	2명 (5%)
임의의 수	• 아무 숫자나 다 되는 것	2명 (5%)
반복이 되는 것을 막아 주는 것	• 패턴을 만들 때 반복이 되는 것을 막아주는 것	2명 (5%)
치환 역할	• n은 치환인데 많은 것을 포함하고 있다.	1명 (2%)

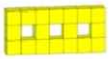
2.3. 문자 변수 n을 통한 일반화 표현과 의미 형성

다음은 학생들에게 제시된 4개의 쌓기나무 패턴 과제에 대한 정답과 오답 그리고 오답의 유형들을 분석함으로써 연구자의 피드백과 쌓기나무 마이크로월드와의 상호작용을 통해 일반화가 어떻게 표현되고 개선되어 가는지 그리고 문자 변수 n에 관한 의미가 어떻게 발달될 수 있을지를 살펴본다. <표 Ⅴ-2>와 같이 일차패턴에서 학생들이 범하게 되는 오답은 3가지 유형으로 분류되었다. 첫 번째 유형은 패턴의 알맞은 모양을 구성하였지만 n번째 패턴을 만든 것이 아니라 $n+1$번째 또는 $n+2$번째 패턴을 만든 경우이고, 두 번째 유형은 주어진 패턴과 다른 모양의 패턴을 만든 경우이다. 마지막으로 세 번째 유형은 쌓기나무 표현 자체에 변수 문자를 사용하지 않고, 특정한 숫자를 사용하여 나타낸 경우이다. 오답 유형 중에서 패턴의 규칙은 잘 파악하여 표현했으나 학생이 구성한 표현이 n번째 표현이 아닌 경우가 가장 많았다. 특히, 2번 문항에서 이러한 유형의 오류를 범하는 학생의 수가 가장 많았다. 이것은 Lee & Freiman(2006)이 말한 패턴의 첫 번째 항을 어떻게 제시하느냐가 쌓기나무 패턴 구성 프로그램에서도 중요하게 작용한 것으로 볼 수 있다. 2번 문항과 3번 문항은 증가하는 쌓기나무의 수가 똑같지만 2번 문항은 첫 번째 항이 하나의 쌓기나무로 시작한다는 것에서 학생들은 문자 변수를 포함한 쌓기나무 표현에서 '$n-1$'이라는 표현을 사용하지 않을 수 없는 상황에 직면하게 되는 것이다[18]. 다음은 첫 번째 오류를 범한 두 명의 학생에 대해 살펴봄으로써 학생들이 이러한 오류가 쌓기나무 마이크로월드와의 상호작용을 통해 어떻게 개선되는지 살펴보도록 한다.

---

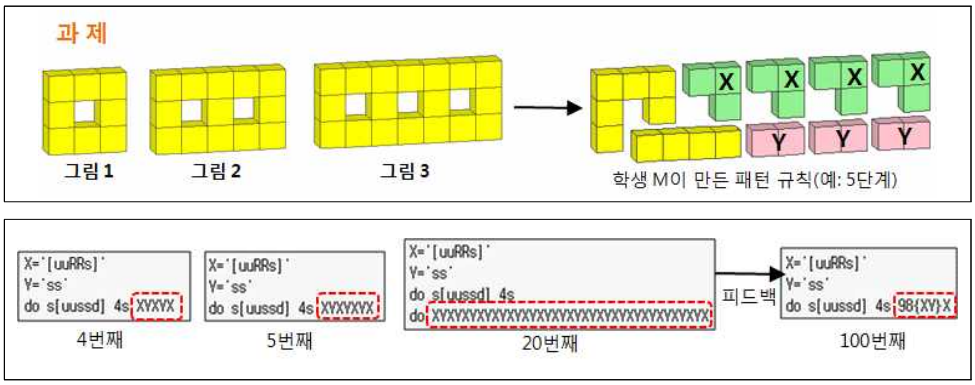
18) 이것은 Lee & Freiman(2006)이 말한 비록 배열된 대상이나 배열 규칙은 같지만 n번째 패턴이 '$3n-2$'로 나오는 것과 '$3n+1$'나오는 것에서 '빼기'를 포함한 대수적 표현이 학생들에게는 인지적 부하로 작용하는 것과 같은 의미로 해석된다.

<표 Ⅴ-2> 온라인 과제에 대한 정·오답 결과

문항	과 제	정 답	오 답		
			$n+1$ 또는 $n+2$ 단계를 표현	다른 모양의 패턴 구성	변수를 사용하지 않음
1		39명 (88%)	2명 (5%)	1명 (2%)	2명 (5%)
2		29명 (66%)	10명 (23%)	4명 (9%)	1명 (2%)
3		39명 (88%)	3명 (7%)	0명 (0%)	2명 (5%)
4		35명 (79%)	4명 (9%)	3명 (7%)	2명 (5%)

[그림 Ⅴ-11]과 같이 학생 A는 4번 과제에서 4, 5, 20번째 패턴을 만들어 제출 하였다. 이 학생은 문자 치환을 적절하지 사용하지 못하여 복잡한 쌓기나무 표현으로 패턴을 구성하였다. 비록 제출한 표현을 실행하면 4, 5, 20번째 패턴이 정확하게 나오지만 패턴의 구조를 정확하게 파악하지 못하는 모습을 볼 수 있었다. 학생 A는 4, 5, 20번째 패턴을 만드는 과정에서 필요한 수만큼 X와 Y를 반복해서 사용하였다. 여기서 주의해야할 점은 컴퓨터 환경에는 '복사하기'와 '붙이기' 기능이 있다는 것이다. 만약 100번째 패턴을 구성할 때 이 기능을 사용한다면 비록 쌓기나무 표현은 복잡하게 나오지만 학생들이 큰 수고로움 없이 만들어낼 수 있다. 이는 컴퓨터 환경에서 일부 학생들에게는 100번째 패턴이 '큰 수'로서 작용하지 못할 수도 있음을 함의한다. 이러한 이유로 사용한 문자의 수를 최소로 하라는 등의 교사의 개입이 필요하였다. 본 연구에서도 20번째 패턴까지 만든 뒤 학생에게 최대한 문자를 줄일 수 있도록 쌓기나무 표현을 수정하라는 지시를 하였고 학생은 100번째 패턴을 '98{XY}'라는 표현을 사용하여 제출하였다. 학생 A가 직면한 어려움은 100번째 패턴을

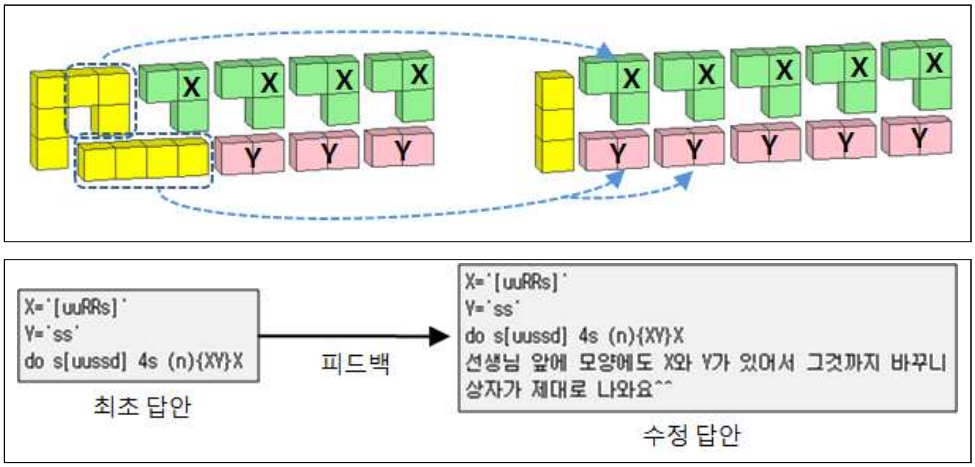
구성하는 단계가 아니었다. 문제는 문자 변수를 사용하여 패턴 만들기 상자를 만드는 과제에서 나타났는데, 학생이 100번째 패턴을 구성할 때 사용한 표현에서 '98{XY}'를 'n{XY}'으로 바꿔 제출하였다. 이것은 결국 $n+2$ 단계의 패턴을 만들게 되었고 연구자는 학생에게 $n+2$단계의 패턴에 나오는 것을 지적하면서 쌓기나무 표현을 수정하여 제출하도록 하였다.



[그림 Ⅴ-11] 패턴의 구조를 정확히 파악하지 못한 학생의 예

학생 A는 자신이 100번째에 사용했던 쌓기나무 표현을 활용하여 '$(n-2)${XY}'라고 표현할 수 있었지만 n과 $n-2$의 관계에 대해서는 생각하지 못했다. 즉, 이 학생은 n을 사용하여 패턴 만들기 상자를 만들고 이 상자에 숫자를 입력하게 되면 입력한 숫자에 대응한 만큼의 쌓기나무 또는 쌓기나무 단위가 나타난다는 사실만을 가지고 문제를 해결하려고 한 것이다. 결국 자신이 만든 쌓기나무 표현의 분석과 시뮬레이션을 통해서 그가 두 개의 문자 치환을 사용하며 패턴을 만들 때부터 문자 치환을 잘못 적용한 것을 깨달았다[그림 Ⅴ-12]. 따라서 치환 문자 X와 Y를 확장하여 적용함으로써 n번째 패턴에는 n개의 X와 n개의 Y가 있다는 것을 발견하고 n에 관한 수정된 모델을 만들어 낼 수 있었다. 비록 두

개의 문자 치환 X와 Y를 사용함으로써 이것을 하나의 기본 단위로 나타내지는 못했지만 자신이 처음에 만든 쌓기나무 표현을 분석함으로써 n번째의 패턴을 구성하는 쌓기나무 표현으로 수정할 수 있었다.



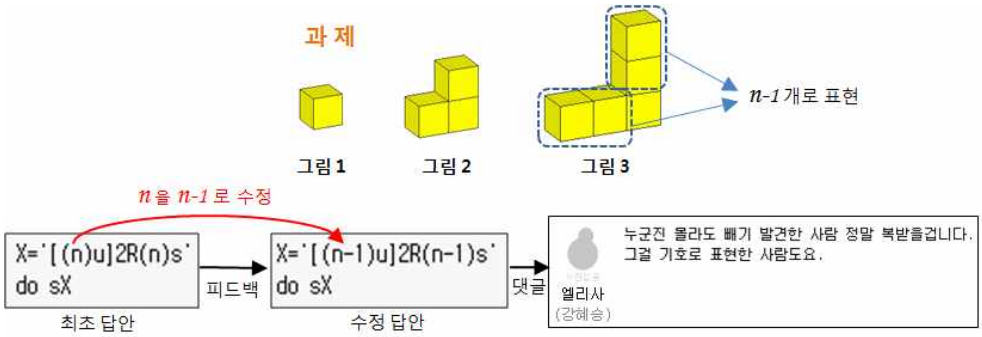
[그림 Ⅴ-12] 문자 치환의 수정을 통한 올바른 표현 구성

다음의 에피소드는 2번 과제에서 $n+1$번째의 패턴을 구성한 학생이 n번째 패턴을 만들기 위해 쌓기나무 표현을 수정해나가는 과정을 보여준다. 연구자는 학생 B가 제출한 쌓기나무 표현을 분석한 후, 학생이 만든 쌓기나무 표현이 n번째 패턴을 만든 것이 아니라 $n+1$번째 패턴을 만드는 표현임을 알 수 있었다. 이 후 연구자는 학생 B에게 $n+1$단계의 패턴에 나오는 것을 지적하면서 쌓기나무 표현을 수정하여 제출하도록 하였다.

학생 B는 피드백을 받은 후 '$n-1$'이라는 표현을 사용하여 쌓기나무 표현을 올바르게 수정하였고, 자신이 발견한 $n-1$에 대해 다음과 같은 댓글을 적었다[그림 Ⅴ-13].

"누군진 몰라도 빼기 발견한 사람 정말 복받을 겁니다. 그걸 기호로 표

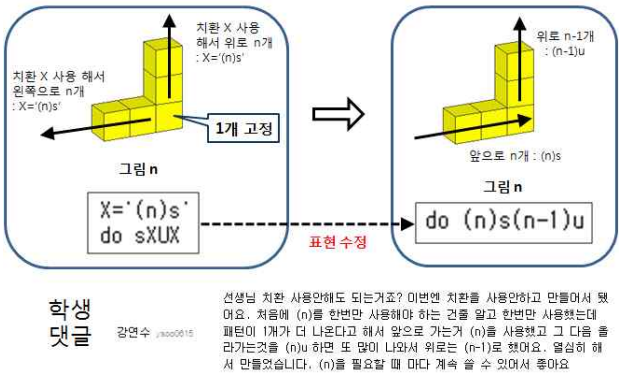
현한 사람도요.”



[그림 Ⅴ-13] ‘n’과 ‘$n-1$’의 관계적 의미 형성

이 학생이 수정한 표현은 단순히 n을 $n-1$로 바꾼 것이라고 생각할 수도 있다. 하지만 이것은 문자 변수 n이 무엇을 의미하는지 모르고 단순히 추상적인 문자로 생각하여 조작을 위해 사용하였다가 쌓기나무 마이크로월드와의 상호작용을 통해 $n-1$과 n의 관계에 초점을 맞추게 된 것이다. 즉, 이 학생은 $n-1$과 n의 관계성을 알게 되어 마침내 문자 변수 n이 가지는 일반성을 파악하여 올바르게 표현을 수정하여 제출할 수 있었다. 패턴의 일반화에서 n번째 패턴을 n에 대한 대수식으로 표현하였다는 것이 기호에 대한 기능 즉, 시각적 표현이나 언어적 표현이 가지는 모호성이 문자 기호를 사용하여 표현함으로써 해소될 수 있는 기능에 대한 이해를 가지고 이를 표현했다고 단정 지을 수는 없다. 앞서 설명한 것과 같이 Lee & Wheeler(1987)의 연구에서 심지어 고등학교 학생들도 패턴을 n에 대한 식으로 일반화하여 표현했지만 그들이 사용한 문자 n에 대한 의미를 단지 하나의 큰 수로 생각하고 있다고 하였다. 그러므로 아직 학교 수학에서 문자를 배우지 않은, 그리고 문자가 가지는 일반성에 대한 이해가 부족한 학생들에게는 이러한 기호의 대한 이해가 선행되어야 진정 패턴의 일반화에서 ‘일반화’라는 용어가 의미를 가지게 될 것이다.

학생 C 역시 2번 과제에서 학생 B와 마찬가지로 $n+1$번째의 패턴을 구성하였고, 연구자에 의해 쌓기나무 표현을 수정하여 제출하도록 지시받았다. 그는 2번을 제외한 모든 문항에서 일반적인 패턴을 만드는 쌓기나무 표현을 올바르게 만들었다. 제출한 쌓기나무 표현을 분석한 결과 이 학생이 대부분의 패턴을 비슷한 과정을 거쳐서 만드는 것으로 나타났다. 먼저 변하는 부분과 변하지 않는 부분을 파악하고, 변하는 부분은 문자 X로 치환하여 나타낸다. 그 후 X를 n번 반복하여 나타내기 위해 '(n)X'라는 표현을 일관되게 사용하였고, 주어진 과제를 무리 없이 제출할 수 있었다. 2번 과제가 3번 과제와 같이 두 개의 쌓기나무가 증가하는 경우로 나타나지만 3번 문항은 이 두 개의 쌓기나무가 붙어서 한 방향으로 증가한 반면 2번 과제는 2개의 쌓기나무가 분리되어 1개씩 서로 다른 두 방향으로 증가한다. 4개의 과제를 제출하는 과정에서 학생이 가지지고 있었던 고정관념은 패턴 만들기 상자를 만들기 위해 1개의 문자 치환 X와 1개의 문자 변수 n을 사용해야 한다는 것이었다. 따라서 [그림 V-14] 왼쪽 그림에서와 같이 하나의 쌓기나무를 고정시킨 뒤, 일렬로 나열되는 n개의 쌓기나무 단위[19]를 위쪽 방향으로 한번 나열하고, 이어서 왼쪽으로 나열하였다.



[그림 V-14] 치환과 변수에 대한 형식적인 사용과 개선

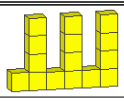
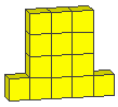
19) 학생은 이 단위를 X='(n)s'으로 나타내었다.

결국 학생은 $n+1$번째의 패턴을 만들게 되었고 연구자의 피드백이 있은 후 쌓기나무 마이크로월드와의 상호작용에 의해 이전의 가지고 있었던 고정관념에서 벗어날 수 있었다. 이는 학생에 제출한 댓글에서 나타났는데 학생은 처음에 n번째 쌓기나무 패턴을 구성하기 위해서는 쌓기나무 표현에 무조건 X를 사용하여 반복되는 대상을 치환을 사용하여 나타내야 하고, 여기서 문자 n을 꼭 한 번 사용해야 한다고 생각하였다. 그리고 자신이 사용한 n의 의미를 묻는 질문에서 이 학생은 "n은 작품에 규칙을 쓸 때 사용하는 것이다"라고 대답하였다. 즉, 학생이 생각하는 문자 n은 패턴 또는 규칙을 사용하기 위해서 필요한 형식적인 도구이며, 일반성의 의미를 담고 있지 않았다. 이후 학생은 쌓기나무 마이크로월드와의 상호작용을 통해 새롭게 수정된 쌓기나무 표현을 제출하였는데, 처음에 제출한 표현과 전혀 다른 표현을 제출하였다[그림 Ⅴ-14-오른쪽]. 그의 답변에서 볼 수 있듯이 그는 패턴을 구성하는 과정에서 치환을 사용해야 할 필요가 없는 경우는 치환을 굳이 사용하지 않아도 된다는 것과 문자 변수 n을 필요할 때마다 사용할 수 있고 관계에 따라 $n-1$등으로 나타낼 수 있다는 것을 알게 되었다. 실제로 그는 수정하여 제출한 과제에서 두 개의 방향으로 증가하는 패턴을 표현하기 위해 문자 변수를 두 번 사용하였으며, 특히 처음에 사용한 문자 변수를 n이라 표현하고 이후 위로 쌓인 쌓기나무를 n에서 $n-1$로 수정하는 모습을 볼 수 있었다. 이 학생이 제출한 최종 답안에는 패턴이 구성되는 관계에 따라 n과 $n-1$이 동시에 사용되는 모습을 볼 수 있었다. 그는 문자 치환 X와 문자 변수 n은 패턴을 만들기 위해 딱 한번 사용되어야 한다는 형식적인 생각에서 벗어났고 이들의 의미를 파악함으로써 문자를 유연하게 적용하여 사용할 수 있었다.

교실에서 이루어진 이차패턴 활동에서 역시 학생들의 제출한 쌓기나무 표현을 분석하여 정답과 오답 그리고 오답의 유형들을 분석하였다. <표

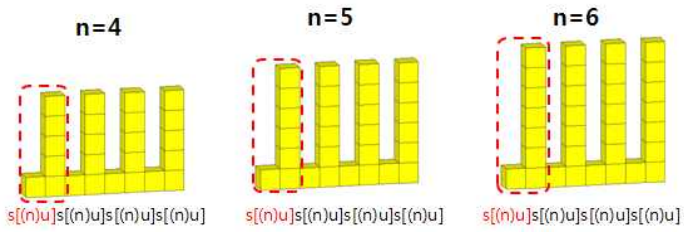
Ⅴ-3>을 보면 일차패턴에 비해 정답률이 현저하게 많이 떨어진 것으로 볼 수 있다. 오답 유형 역시 일차패턴에서 대부분의 오답이 $n+1$, $n+2$ 단계의 패턴을 구성한 것에 비해 이차패턴에서는 이러한 문제는 발생하지 않았다. 대신 주어진 문제가 이차패턴이지만 하나의 문자 변수 n을 사용하여 일차패턴을 구성한 학생들이 가장 많았으며, 아예 변수를 사용하지 않아서 똑같은 대상이 반복되거나 문자를 잘못 사용한 경우, 그리고 비록 문자 변수 n을 두 번 사용하여 나타냈지만 시뮬레이션 되는 결과가 주어진 이차패턴과 다른 모양의 패턴이 구성한 사례도 있었다.

<표 Ⅴ-3> 교실 과제에 대한 정·오답 결과

문항	과 제	정 답	오 답		
			문자 변수를 한번 사용	문자 변수를 사용 하지 않거나 잘못 사용	다른 이차 패턴 구성
1		24명 (55%)	15명 (34%)	2명 (5%)	3명 (7%)
2		26명 (59%)	16명 (36%)	2명 (5%)	0명 (0%)

다음은 이차패턴을 구성하는 과정에서 문자 변수 n을 한 번만 사용함으로써 일반적인 쌓기나무 표현을 만들어내지 못한 학생의 사례이다. 이 학생은 온라인 학습에서 패턴의 변화는 잘 파악하였지만 $n+1$번째 패턴을 구성하였고, 연구자의 피드백에 의해 n과 $n-1$의 관계성을 파악하여 올바르게 수정하였다. 하지만 단순 증가가 아닌 이차패턴을 쌓기나무 표현으로 나타내는 것에는 어려움을 겪었다. [그림 Ⅴ-15]에서와 같이 이 학생은 세로로 증가하는 변화 규칙에 대한 쌓기나무 표현이 ‘ss[(n)u]’로 나타내어짐을 알았다. 하지만 그는 ‘ss[(n)u]’를 n번 반복해서 나타내지 못하고 단지 4번 반복하고 이것을 문자 치환을 사용하여 X=‘ss[(n)u]

ss[(n)u] ss[(n)u] ss[(n)u]' 으로 나타내고 do X로 실행을 하였다. 학생이 제출한 쌓기나무 표현을 분석하면 [그림 V-15]와 같다. 즉, n=4일 때는 주어진 패턴과 똑같은 패턴이 구성되어 나오지만 $n \neq 4$인 모든 자연수에서는 이 쌓기나무 표현이 적용되지 않았다. 그 이유는 학생이 ss[(n)u]를 4번 반복하고 이것을 X로 치환하여 나타내었기 때문에 항상 4개의 ss[(n)u]가 n에 따라 구성된다. 즉, 주어진 이차패턴은 ss[(n)u]가 가로도 역시 n개 반복해서 증가해야 하지만 이것을 n을 사용해서 표현하지 못하고 단지 4번 반복함으로써 ss[(n)u] 단위는 항상 4번만 반복되고 n에 따라 세로만 하나의 쌓기나무가 증가하게 되는 것이다. 활동이 끝난 후 학생이 이차패턴 구성에 어떠한 어려움을 겪고 있는지를 분석하기 위해 개별 면담을 실시하였다. 개별 면담은 학생이 제출한 쌓기나무 표현을 컴퓨터 화면에 시뮬레이션 시키고 이 결과를 보면서 진행되었다.

패턴 구성 과정	쌓기나무 표현
	X='2s[(n)u]2s[(n)u]2s[(n)u]2s[(n)u]' do X

[그림 V-15] 이차패턴에서 n을 제대로 사용하지 못한 예

학생 D와의 개별 면담 내용은 다음과 같다.

교사: 지금 제출한 쌓기나무 표현을 실행하면 주어진 패턴이 나오니?
학생: 네 나와요. (4번째 패턴을 종이에 그리며) 4번째 그림이 이렇게 나오는데 $n=4$를 실행하면 나왔어요.

교사: 그럼 $n=5$을 입력해도 정확해서 패턴이 나오니?

학생: 네. ($n=5$를 직접 넣고 나오는 화면을 관찰 한 뒤) 이게 하나가 안 나오네요.

교사: $n=6$은 어떠니?

학생: ($n=6$을 직접 넣고 나오는 화면을 관찰 한 뒤) 이것도 4개만 나와요.

교사: 그럼 쌓기나무 표현이 잘못된 것이 아니니?

학생: 아니에요. 이것만 입력하면 만들 수 있어요.

(X='ss[(n)u] ss[(n)u] ss[(n)u] ss[(n)u]'에서 ss[(n)u]를 하나 더 추가 한 뒤 $n=5$를 실행한다)

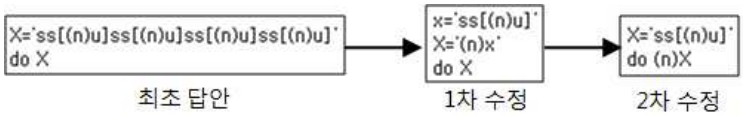
학생: 이렇게 하면 5번째 그림이 나오잖아요.

교사: 그럼 100번째 그림은 어떻게 할 꺼니?

학생: 이것을 100번 적으면 되죠. 아 잠시 만요. (ss[(n)u]명령을 가르 키며) 이것을 x로 치환하고 100x라 하면 되죠.

교사: 그럼 선생님이 처음에 물어본 과제를 다시 수정해서 제출해보렴.

(학생은 아래의 그림과 같은 첫 번째 수정을 한 뒤 실행을 하였지만 화면에 쌓기나무가 나타나지 않았다. 이것은 학생의 만든 쌓기나무 표현이 잘못된 것이 아니고 시스템상의 기능적인 측면이라는 점에서 연구자에 의해 실행 가능한 최종 답안으로 수정되었다)



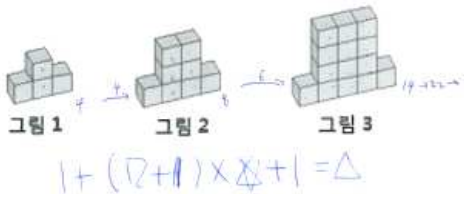
교사: 네가 처음에 제출한 쌓기나무 표현이라 마지막에 제출한 표현이랑 무엇이 달라졌니?

학생: 처음에는 제가 ss[(n)u]을 4개 밖에 안적어서 5, 6을 넣으면 안 나왔어요. 옆으로 늘어나는 것을 해주려면 ss[(n)u]를 개수만큼 적어줘야 해서 아예 ss[(n)u]를 X를 치환하고 반복해줬어요

교사: X안에 있는 n이랑 do 뒤에 있는 n이랑은 같은 거니?
학생: 같아요. n에 숫자를 다르게 넣을 때마다 모양이 변하는 거잖아요. 그래서 숫자를 넣으면 규칙이 X안에 있는 것은 위로 증가해야 하고, do 뒤에 있는 것은 이것이 옆으로 커져야 하니깐요.

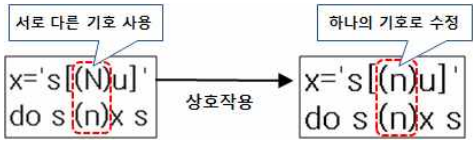
개별 면담과 온라인 과제를 통해서 이 학생은 문자 변수 n에 다양한 숫자를 입력할 수 있고, 입력한 수만큼 해당하는 규칙이 실행되어 나온다고 이해하고 있었다. 그리고 n을 두 번 사용함으로써 위로 증가하는 쌓기나무와 옆으로 증가하는 쌓기나무를 동시에 표현해줄 수 있다고 하면서 이차패턴을 일반화하여 표현할 수 있었다. 연구자는 학생이 올바른 표현으로 수정하도록 하기 위해 직접적인 도움을 주지 않았다. 다만 학생이 제출한 쌓기나무 표현이 어디서부터 잘못됐는지를 상기 시켜줬으며 학생은 적극적으로 자기가 만든 쌓기나무 표현과 쌓기나무 마이크로월드에서의 시뮬레이션을 통해 수정해야할 부분을 발견할 수 있었다.

다음은 이차패턴을 구성하는 과정에서 문자 변수를 잘못 사용하는 학생에 대한 사례를 소개한다. 이 학생은 이차패턴 구성활동 전에 실시한 이차패턴의 개수를 일반화하는 문제에서 패턴을 일반화하기 위해 □, ☆, △등의 다양한 기호를 사용하여 표현하였다. [그림 Ⅴ-16]은 이차패턴의 일반화에 관한 사전 지필검사에서 학생이 사용한 표현이다. 이 학생은 일차패턴의 일반화 문제에서도 □와 △ 기호를 사용하여 일반식을 표현하였다. [그림 Ⅴ-16]에 제시된 패턴의 n번째 항의 쌓기나무 개수는 $(n+1)\times n+2$개이다. 패턴의 일반화를 요구하는 문항에서 학생 E는 '1+(□+1)×☆+1=△'라는 표현을 사용하였다. 변수 개념에 대한 이해에서 많은 학생들이 가지고 있는 오개념 중 하나는 변수 기호는 유일한 대상과 연결되어 있다고 생각하기 때문에 변수 기호가 바뀌면 변수가 나타내고 있는 대상도 달라진다는 것이다(김남희, 1997a).



[그림 Ⅴ-16] 패턴의 일반화 과정에서의 모호한 기호사용

사전 지필검사 이후 학생 E는 쌓기나무 표현을 사용하여 이차패턴을 구성하였다. 이 학생이 처음 제출한 쌓기나무 표현에는 사전 검사지에서 두 개의 기호를 사용한 것과 같이 두 개의 변수 N과 n을 사용하였다[그림 Ⅴ-17-왼쪽]. 학생 E는 자신이 만든 쌓기나무 표현에 숫자를 넣어 확인하는 과정을 거치지 않았기에 연구자는 이러한 과정을 하도록 지시하였다. 학생은 자신이 만든 쌓기나무 표현으로부터의 몇 번의 시뮬레이션을 실시하였고 결국 자신이 제출한 쌓기나무 표현에서 N을 n이 동일한 기호임을 알게 되었다. 그리고 N을 n으로 수정하고 시뮬레이션을 통해 확인함으로써 최종적으로 수정된 표현을 제출하였다. 학생이 기호를 통일 시키는 과정에 대해 개별 면담을 실시하여 문자 기호 사용에 대해 심층적으로 분석하였다.



[그림 Ⅴ-17] 마이크로월드와의 상호작용 통한 기호 사용의 수정

학생 E와의 개별 면담 내용은 다음과 같다.

교사: (학생이 제출한 사전 지필 검사지를 보여주며) 여기서 □와 ☆은 무엇을 의미하니?

학생: 단계요.

교사: 단계가 무엇이니?

학생: (검사지의 그림을 가리키며) 그림 뒤에 숫자요.

교사: 그럼 네가 사용한 □와 ☆는 다른 숫자니?

학생: 네. (재빨리 말을 바꾸며) 아니요 같은 숫자에요.

(학생은 ☆모양을 지우고 □로 바꾼다)

학생: □가 4이면 22가 맞아요.

교사: (학생이 최초에 제출한 모델을 가리키며) 처음에 N과 n으로 만들었다가 왜 N을 n으로 바꿨니?

학생: N은 위로 올라가는 쌓기나무이고, n은 옆으로 가는 쌓기나무라서요. 근데 실행을 누르니 실행이 아무것도 안 나와서 다시 바꿨어요.

교사: 그럼 N과 n은 같은 거니?

학생: 네 여기서는 같아요. 똑같이 커지니깐

최초에 학생 E는 사전 지필 검사와 쌓기나무 패턴 프로그램에서 모두 동일한 변수를 두 개의 서로 다른 기호를 사용하여 표현하였다. 즉, 지필 검사에서는 이것을 □와 ☆를 사용하여 나타내었고, 쌓기나무 표현에서도 역시 서로 다른 기호 N과 n을 사용하였다. 하지만 쌓기나무 패턴 프로그램에서 두 개의 독립변수를 사용하여 쌓기나무 표현을 만들고 시뮬레이션을 할 경우는 그 중 하나의 변수에 의존하여 시뮬레이션 되기 때문에 학생은 즉각적으로 자신이 만든 표현에 오류가 있음을 발견하게 되었다. 그리고 올바른 모델을 구성하기 위해서 자신이 제출한 쌓기나무 표현을 분석하여 N을 n으로 수정된 쌓기나무 표현을 제출하였다. 이후 개별면담을 통해 사전 지필 검사에서 사용한 모호한 기호사용 역시 하나의 기호로 바르게 개선하는 모습을 볼 수 있었다.

Ⅵ. 요약 및 결론

1. 요약

패턴은 패턴 속에 내재된 규칙을 파악하고 이를 설명하는 과정에서 대수적 사고를 드러내고 발달시키는데 효과적인 도구이다. 따라서 수학교육에서 구체적으로 대수 도입과 대수 교육에서 그 중요성이 높아지고 있다. 많은 연구에서 다루고 있는 패턴에 관한 전형적인 과제는 패턴의 규칙을 파악하고 이 규칙을 일반화하여 언어 또는 기호를 사용하여 패턴의 근본이 되는 함수적 관계를 설명하는 과정으로 제시된다. 그러므로 패턴을 통한 학습이나 연구의 목적은 주로 학생들이 주어진 패턴의 일반적인 관계를 문자 기호로 표현하는 것에 초점을 두게 된다. 하지만 주어진 패턴을 문자 기호를 사용하여 나타내는 것은 많은 어려움이 있을 뿐만 아니라, 설령 학생이 패턴 과제를 통해 좀 더 이른 시기에 n번째 패턴을 n에 대한 식으로 표현했다고 할지라도 자신들이 사용한 문자 n에 대한 오개념을 가지거나 아무 의미 없이 이러한 문자를 사용할 수 있다. 따라서 패턴을 통한 활동이 학생들의 대수적 사고의 발달시키는 도구로서 사용되기 위해서는 주어진 패턴의 일반적인 관계를 대수적 기호를 사용하여 표현하기에 앞서 일반성을 표현하는 문자 기호에 대한 이해가 선행되어야 한다. 그리고 이러한 문자 기호에 대한 이해를 바탕으로 패턴에 내재된 함수적인 관계를 기호로 표현하는 과정으로 나아가야 한다. 본 연구에서는 이러한 문제의식을 바탕으로 Cho 등(2010)에 의해 개발된 쌓기나무 마이크로월드에서 constructionism 기반의 패턴 구성 프로그램을 설계하였다. 그리고 이 프로그램에서의 활동이 학교수학에서 문자를 배우기 이전의 학생들의 문자 기호와 일반화에 대한 의미형성에 어떠한 변

화가 있는지를 살펴보기 위하여 다음과 같은 연구문제를 설정하였다.

연구 문제 1. constructionism 기반 쌓기나무 패턴 구성 프로그램이 어떻게 설계 될 수 있을까?

연구 문제 2. constructionism 기반 쌓기나무 패턴 구성 활동을 통해 학생들의 문자 기호와 일반화에 대한 의미 형성에 어떠한 변화가 있는가?

각 연구문제에 대한 자료 분석 및 연구 결과는 다음과 같다.

constructionism 기반 쌓기나무 패턴 구성 프로그램의 설계에 관한 연구문제 1을 위해 Bransford 등(2000)의 학습 환경 설계에 관한 네 가지 관점 '학습자중심 학습 환경', '지식중심 학습 환경', '평가중심 학습 환경', '공동체중심 학습 환경'에 기반한 학습 환경을 설계하였다. 특히, 쌓기나무 패턴 프로그램은 실행 가능한 표현(executable expression)을 기반으로 하기 때문에 이러한 표현이 가져다주는 시각적 피드백은 학습자의 흥미와 동기를 유발하고 자신이 만든 쌓기나무 표현을 분석함으로써 오류를 발견하고 수정하는 반성적 사고를 이끌었다. 더욱이 쌓기나무 표현은 자기 평가뿐만 아니라 동료 평가, 교사 평가의 도구로서 사용되어졌으며, Web 2.0 기반의 환경을 설계함으로써 공동체중심 학습 환경을 구현하였다. 이러한 공동체중심 학습 환경에서 쌓기나무 표현을 매개로 학습들의 자신의 의견을 공유하고 자신의 제출한 쌓기나무 표현을 개선하는 모습을 볼 수 있었다.

연구문제 2에서는 Mavrikis 등(2012)이 말한 대수적 일반화에 관한 아이디어를 뒷받침하는 3가지 주요한 대수적인 사고를 바탕으로 문자 치환을 사용하여 대상의 구조를 파악하고 활용하는 단계와 문자 변수 사용의 사용을 통해 변수 개념의 의미 형성과 일반화를 표현하는 단계로 나누어

교수 설계 및 적용을 하였다. 구체적으로 전자는 문자 치환 개념을 도입하여 대상을 구조적으로 보게 하고 패턴에서 변하는 것과 변하지 않는 것을 구분하게 하는 도구로 제시하였으며, 후자는 문자 변수 n을 도입하고 사용하는 과정에서 학생들이 문자 변수 n에 대해 가지는 의미를 분석하고 이 의미가 어떻게 개선되어 나가는지 살펴보았다.

창의적인 쌓기나무 작품을 만드는 과정에서 학생들에게 제시한 문자 치환은 의도적으로 대상을 부분들로 나누어 보도록 하는 것이었고, 이 과정에서 문자 치환은 쌓기나무 표현과 학생들의 사고가 좀 더 조직적이고 구조적인 형태로 발전하는데 긍정적인 역할을 하였다. 또한 대부분의 학생들이 치환을 사용하면서 반복하는 것에 대해 간단히 표현할 수 있는 편리함을 느꼈고, 문자 치환을 왜 사용해야 하는지에 대한 이유를 스스로 경험할 수 있었다. 이후 문자 변수 n을 도입하였고, 이를 사용하여 일차패턴과 이차패턴을 구성하도록 하였다. 학생들이 제출한 쌓기나무 표현을 분석한 결과 대부분 2가지 유형으로 패턴을 구성했으며, 일차패턴에서는 약 80%의 학생들이 패턴을 올바르게 구성한 반면 이차패턴에서는 약 56%의 학생들이 패턴을 올바르게 구성하였다. 4개의 일차패턴을 쌓기나무 표현으로 제출하고 학생들에게 자신이 사용한 문자 n에 대한 의미를 묻는 질문에 약 60%의 학생이 정해지지 않은, 여러 가지 수를 나타내고, 여러 가지 값을 대입할 수 있는 기호라고 답한 반면 나머지 학생들은 패턴을 만들기 위해 사용하는 것 또는 규칙을 반복시키는 것 등의 단지 패턴을 생성하는 조작을 위한 도구로서 생각하고 있었다. 더욱이 문자 n을 정해진 수, 100과 같은 큰 수 등으로 생각하는 학생들도 있었는데 중요한 것은 이런 학생들이 n에 대한 쌓기나무 표현을 올바로 제출하였다는 점이었다. 즉, 학생들은 문자 n의 의미를 알고 사용하였다기보다 알고리즘적인 방법에 따라 패턴을 구성하였다고 볼 수 있다. 이러한 결과를 통해 학생들이 문자에 대한 의미를 모르는 상태에서

도 올바른 대수적 표현을 만들어 낼 수 있다는 사실과 같은 맥락으로 설명되어진다.

마지막으로 학생들이 패턴을 구성하는 과정에서 발생하는 오답의 유형을 분석하고 이에 대한 피드백을 제시하였다. 그리고 이러한 피드백과 마이크로월드와의 상호작용을 하는 과정에서 문자 변수에 대한 이해와 의미가 어떻게 형성되는지를 살펴보았다. 일차패턴에서 학생들이 범하게 되는 오류는 기존의 패턴의 일반화에서 연구되었던 유형과는 달리 패턴의 규칙을 알고 n에 대한 쌓기나무 표현을 구성하였지만 n번째 패턴이 아니고 $n+1$번째 또는 $n+2$번째 패턴을 구성한 것이었다. 특히 2번 과제와 같이 학생들이 $n-1$라는 표현을 쓸 수밖에 없는 과제를 제시함으로써 오답률이 크게 증가하는 모습을 볼 수 있었다. 이것은 문자 변수에 대한 이해가 부족한 학생들에게는 첫 번째 항을 어떻게 제시하는지가 일반적인 패턴을 표현할 때 큰 어려움을 작용한 것으로 분석되었다. 거꾸로 생각하면 이러한 문제를 학생들에게 제시하는 것은 학생들이 문자 변수를 올바르게 이해하고 사용하는지를 분석하는데 도움을 줄 수 있을 것이다. 이차패턴에서는 일차패턴과 달리 $n+1$번째 또는 $n+2$번째 패턴을 구성하여 오답처리 된 학생은 없었으며 대부분 문자 변수 n을 한번 사용하여 오답을 한 학생들이 많았다. 이것은 일차패턴을 구성했다는 의미이며 문자 변수 n에 대한 의미를 알지 못하거나 아예 이차패턴의 규칙을 파악하지 못한 학생들로 나누어졌다.

일차패턴 과제에서 $n+1$번째 또는 $n+2$번째 패턴을 구성한 학생들에게 그들이 구성한 패턴이 잘못되었다는 것을 알려주었고 쌓기나무 표현을 수정하도록 요구하였다. 학생들은 자신이 구성한 쌓기나무 표현과 이를 쌓기나무 마이크로월드에서 구현하면서 자신의 표현을 계속적으로 수정하여 제출하였다. 이 과정에서 학생들에게 관찰된 변화는 처음에는 문자 변수 n이 무엇을 의미하는지 모르고 단순한 추상적인 문자로 생각하고

조작을 위한 도구로 사용하였다가 쌓기나무 마이크로월드와의 상호작용을 통해 $n-1$과 n등의 관계에 초점을 맞추게 되었고 이들의 관계성을 파악 하여 마침내 문자 변수 n이 가지는 일반성을 파악해 나갔다는 점이다. 학생들은 주어진 예제에 따라 문자 치환 X와 문자 변수 n을 알고리즘적으로 조작하는 경향이 있었지만 쌓기나무 마이크로월드와의 상호작용에 의해 시각적 표현이나 언어적 표현이 가지는 모호성이 이러한 문자 기호를 유연하게 사용하여 표현함으로써 해소 될 수 있는 가능성을 보여주었다.

2. 결론 및 제언

본 연구는 기존의 패턴의 일반화에 관한 연구가 대수적인 표현에 초점을 맞춘 것에 반해 학생들에게 일반적인 대수식으로 나아갈 수 있는 쌓기나무 표현을 설계함으로써 학생들에게 대수식의 중간적인 표현을 제공했다는 점에서 의의가 있다. 또한 패턴의 관계를 대수적으로 표현한다는 것이 대수적 표현 속에 그들이 사용한 문자 기호의 의미를 안다는 것을 함의하지 않는다는 것을 밝히고 대수적 표현 이전에 문자 기호가 가지고 있는 일반성에 대한 이해를 바탕에 두고 설계되었다는 점에서 역시 그 의의를 찾아볼 수 있다. 쌓기나무 패턴 프로그램 설계는 학생들이 문자 치환을 사용하여 대상을 구조적이고 조직적으로 보도록 하는데 긍정적인 경향을 끼쳤다. 나아가 무의미한 조작의 도구로 사용되었던 문자 변수의 본질적인 의미를 학생들이 파악하는데 가능성을 보여주었으며 이를 통해 학생들이 문자를 유연하게 사용하는 모습을 볼 수 있었다.

본 연구는 학교 수학에서 문자를 배우기 이전의 학생들을 대상으로 패턴을 표현할 수 있는 환경인 쌓기나무 패턴 프로그램을 설계하였다. 본

연구에서 적용한 교수 설계를 바탕으로 다음과 같은 제언을 하고자 한다.

첫째, 본 연구는 쌓기나무 패턴 구성 프로그램의 첫 번째 단계로 창의적인 쌓기나무 작품을 만드는 과제를 제시하였다. 이 단계의 목표는 학생들이 쌓기나무 표현에 익숙해지는 것뿐만 아니라 작품을 만든 후 문자 치환을 도입하여 학생들이 만든 작품을 문자 치환을 사용하여 구조적으로 분해하도록 하는 것이다. 하지만 창의적인 작품을 만드는 것은 학생들에게 확산적 사고를 요구하는 것으로 이것은 학생들의 창의성 평가를 위한 과제로 적합하겠지만 대상을 구조적으로 보도록 이끌기에는 부족했다. 실제로 학생들은 좀 더 화려하고 복잡한 작품을 만들려고 애쓰는 경향은 있었지만 작품의 기하학적 성질을 초점을 맞추고 의미 있는 부분들과 분해·결합을 통해 작품을 구성하는 학생들의 수는 적었다. 따라서 성을 만드는 것과 같이 또는 그보다 더 구체적인 주제나 기하학적인 그림 등 학생들에게 주어진 과제에 대해 구조적인 접근이 가능한 과제를 제시해야할 것이다.

둘째, 학생들에게 문자 기호가 가지는 일반성을 인식하게 해주기 위해서는 적합한 패턴과제를 선택하는 것이 우선 되어야 한다. 본 연구에서 사용한 일차패턴의 2번 문제와 같이 패턴의 일반식 또는 쌓기나무 표현에 '빼기'가 표현되는 문제는 학생들이 기계적인 조작을 위한 도구로서 문자를 사용하는 것을 넘어 문자 기호들 사이의 관계를 형성하게 하는데 도움을 줄 수 있다. 물론 학생들이 이러한 문제들은 해결하는데 어려움이 있지만 패턴을 통한 문자 기호의 일반성의 이해에 중요한 역할을 할 수 있기 때문이다.

셋째, 본 연구에서 개발한 쌓기나무 패턴 프로그램은 초등학교에서 쌓기나무 활동 및 패턴 탐구를 위해 사용되어질 수 있다. 본 연구의 연구 참여자들이 속한 시에서는 매년 쌓기나무 마이크로월드에서 창의적인 작

품 만들기 등의 활동을 하고 있다. 따라서 쌓기나무 프로그램은 최근 교육과정에서 강조하고 있는 창의적 체험활동의 일환으로 사용되어질 수 있을 뿐만 아니라 패턴 구성을 통해 문자 기호에 대한 의미와 패턴에 관계를 표현하기 위한 중요한 마이크로월드로서 사용되어질 수 있다. 그리고 이러한 활동을 통해 중·고등학교 수학에서 중요하게 사용되는 변수와 인수 분해 등의 수학적 개념에 대한 올바른 정신적 습관(Habits of Mind)이 될 수 있기를 기대한다.

참 고 문 헌

교육과학기술부 (2011). 스마트교육 추진 전략 실행 계획. 스마트 교육 추진 전략 오픈 정책 설명회 자료집. 11월 9일. 서울: 한국교육학술정보원.

김남희 (1997a). **변수 개념의 분석 및 교수-학습.** 서울: 경문사.

_____ (1997b). 일반화의 의미와 구성에 대한 이해. **대한 수학교육학회 논문집, 7**(1), 445-458.

김동현 (2009). 초등학교 5학년 학생들의 시각적 증가 패턴 문제해결 전략. 경인교육대학교 교육대학원 석사학위 논문.

김성준 (2002). 대수 교육과정의 변화에 관한 고찰-패턴에 기초한 대수 도입을 중심으로-. **대한수학교육학회지<학교수학>, 12**(3), 353-369.

_____ (2003). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰. **대한수학교육학회지<학교수학>, 5**(3), 343-360.

_____ (2004). 대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색. 서울대학교 박사학위 논문.

김화경 (2006). '컴퓨터와 수학교육' 학습-지도 환경에 관한 연구. 서울대학교 박사학위 논문.

김철호 (2012). 시각적 패턴의 일반화에 관한 연구 - 마이크로월드 기반 쌓기나무 패턴을 중심으로-. 서울대학교 석사학위 논문.

배영지 (2008). 자기평가 및 동료평가를 도입한 수업이 학업 성취도와 수학적 성향에 미치는 영향. 국민대학교 교육대학원 석사학위 논문.

변영계 (2005). **교수·학습 이론의 이해**. 서울: 학지사.

송민호 (2010). Constructionism 기반 수학교육공학 관점에서의 학습 환경 설계 연구. 서울대학교 박사학위 논문.

이명기 (2011). 패턴의 유형에 따른 초등학교 6학년 학생들의 일반화 방법

연구. 청주교육대학교 석사학위 논문.
양지원 (2011). 사이버 멘토링 환경 설계 연구. 서울대학교 석사학위 논문.
이지윤 (2010). Constructionism 기반 수학 창의력 프로그램에 관한 연구. 서울대학교 석사학위 논문.
Amit, M. & Neria, D. (2008). "Rising to challenge": Using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *ZDM Mathematics Education, 40,* 111-129.
Barbosa, A., Palhares, P., & Vale, I. (2007). Patterns and generalization: The influence of visual strategies. In D. Pitta-Pantazi, & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education, 6,* 844-851, Larnaca, Cyprus: University of Cyprus.
Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors.* Windsor, Berkshire: NFER-Nelson.
Bransford, J. D., Brown, A. L., & Cocking R. R. (2000). 학습과학 - 뇌, 마음, 경험 그리고 교육 (신종호, 박종효, 최지영, 김민성 역). 서울: 학지사.
Britannica (1998). *Patterns and symbols.* Encyclopedia Britannica Education Corporation.
Cho, H., Kim, H., Song, M. and Lee, J. (2010) Representation Systems of Building Blocks in LOGO-based Microworld. *constuctionism 2010,* paris
Chua, B. L. (2009). Features of generalising task: Help or hurdle to expressing generality? *Australian Mathematics Teacher, 65*(2), 18-24.
_____ & Hoyles, C. (2010). Generalisation and perceptual agility: How did teachers fare in a quadratic generalising problem? *Research in Mathematics Education, 12*(1), 71-72.
_____ (2012). Seeing through students' eyes: The

best-help strategy for pattern generalisation, *12th International Congress on Mathematical Education,* Seoul, Korea.

Cuoco, A. A., Goldenberg, E. P., & Mark, J. (1996). Habits of mind: an organizing principle for mathematics curriculum. *Journal of Mathematical Behavior, 15*(4), 375-402.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics, in Bishop, A. J., Mellin-Olsen, S., van Dormolen, J.(Eds.), *Mathematical Knowledge : Its Growth Through Teaching,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 63–85.

Edwards, L. D. (1995). Microworlds as representation. In diSessa, A., Hoyles, C., Noss, R. & Edwards, L.(Eds.), *Computers and exploratory learning,* Berlin: Springer.

Eisenberg, M. (1995). Creating software application for children: some thoughts about design, In A. A. diSessa, C. Hoyles, R. Noss & L. Edwards(Eds), *Computer and exploratory learning,* Berlin: Springer.

English, L. & Warren, E. (1988). Introducing the variable through pattern exploration. *The mathematics teacher, 91*(2), 166-190.

Harel, G. and Tall, D. (1991). The general, the abstract and the generic in advanced mathematics, *For the Learning of Mathematics 11*(1), 38–42.

_____ & Kynigos, C. (2010). Charting the microworld territory over time: design and construction in mathematics education, *ZDM Mathematics Education, 42,* 63-76.

Hoyles, C. & Küchemann, D., (2002). Students' Understanding of Logical Implication. *Educational Studies in Mathematics, 51*(3), 193-223.

Hwang, W. Y., Su, J. H., Huang, Y. M. & Dong, J. J. (2009). A Study of Multi-Representation of Geometry Problem Solving with Virtual

Manipulatives and Whiteboard System. *Educational Technology & Society, 12*(3), 229–247.

Isabel, V., Teresa, P., Isabel, C., Ana, B. & Lina, F. (2012). Pattern problem solving tasks as a mean to foster creativity in mathematics. *Proceedings of the 36th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4*, 171-178.

Jonassen, D. H. (1993). Computer as Cognitive Tools: Learning with Technology, Not from Technology, *Journal of Computing in Higher Education, 6*(2), 40-73.

Küuchemann, D. (1981). Algebra. In K. Hart, etal.(Eds.), *Children's Understanding of Mathematics:* 11-16, The CSMS Mathematics Team.

Kafai, Y. & Resnick, M. (1996). *constructionism in practice*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Kerbs, A. S. (2003). Middle grade students' algebraic understanding in a reform curriculum. *School Science and Mathematics, 103,* 233–243.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and Justification: The Challenge of Introducing Algebraic Reasoning Through Patterning Activities, *Mathematical Thinking and learning, 7*(3), 231-258.

Lee, Lesley, & David Wheeler. (1987). *Algebraic Thinking in High School Students: Their Conceptions of Generalization and Justification* (Research Report). Montreal, Canada: Concordia University, Mathematics Department.

_____ & Viktor Freiman. (2006). Developing Algebraic Thinking through Pattern Exploration. *Mathematics Teaching in the Middle School 11,* 428–433.

NCTM. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA:

The National Council of Teachers of Mathematics.

Noss, R. (2004). Designing a learnable mathematics: a fundamental role for computers? *Plenary and regular lectures, Abstracts, 10th International Congress on Mathematics Education*, 83.

Noss, R., Poulovassilis, A., Geraniou, E., Gutierrez-Santos, S., Hoyles, C., Kahn, K., Magoulas, G.D., & Mavrikis, M. (2011). The design of a system to support exploratory learning of algebraic generalisation. *Computers & Education, 59*(1), 63-81.

Mavrikis, M., Noss, R., Hoyles C. & Geraniou, E. (2012). Sowing the seeds of algebraic generalization: designing epistemic affordances for and intelligent microworld. In Noss, R. & DiSessa, A. (Eds.), Special issue on Knowledge Transformation, Design and Technology, Journal of Computer Assisted Learning.

Orton, A., & Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton. (Ed.), *Pattern in the Teaching and Learning of Mathematics*, 104-120, London: Cassell.

_____ & Roper, T (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern, *Pattern in the Teaching and learning of mathematics*, 121-136, Redwood Books Ltd.

Papert, S. (1980). *Mindstorms: children, computers, and powerful ideas.* Cambridge, Massachusetts: Perseus Publishing.

Radford, L. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In S.Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, & A. Méndez (Eds.), *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 1,* 2-21.

_____ (2012). Early algebraic thinking epistemological, semiotic, and developmental issues, *12th International Congress on Mathematical Education,* Seoul, Korea.

Redden T. (1996). Wouldn't it be good if we had a symbol to stand for any number? *In Proceedings of the 20th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4,* 195–202. Valencia, Spain.

Resnick, M. & Silverman, B. (2005). Some reflections on designing construction kits for kids. *Proceeding of interaction design and children conference,* Boulder, CO.

Rivera, F. D. & Becker, J. R. (2008). Middle school children''s cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalizations involving linear figural patterns. *ZDM Mathematics Education, 40*(1), 65-82.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics 20,* 147-164.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Shulte.(Eds.). *The Ideas of Algebra, K-12,* 8-19, NCTM.

Warren, E. (1996). *Interaction between instructional approaches, students' reasoning processes, and their understanding of elementary algebra.* Unpublished dissertation. Queensland University of Technology.

_____ & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support 8 year olds' thinking. *Educational Studies in Mathematics, 67,* 171–185.

Zazkis, R. & Liljedahl, P. (2002). Generalization of patterns: the tension between algebraic thinking and algebraic noation. *Educational Studies in Mathematics 49,* 379-402.

부 록

1주차: 규칙성 파악과 표현

과제 1

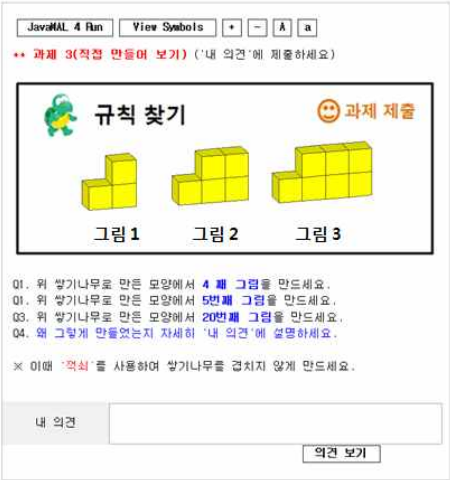
과제 2

2주차: 몸풀기 문제 와 근 일반화

과제 1

과제 2

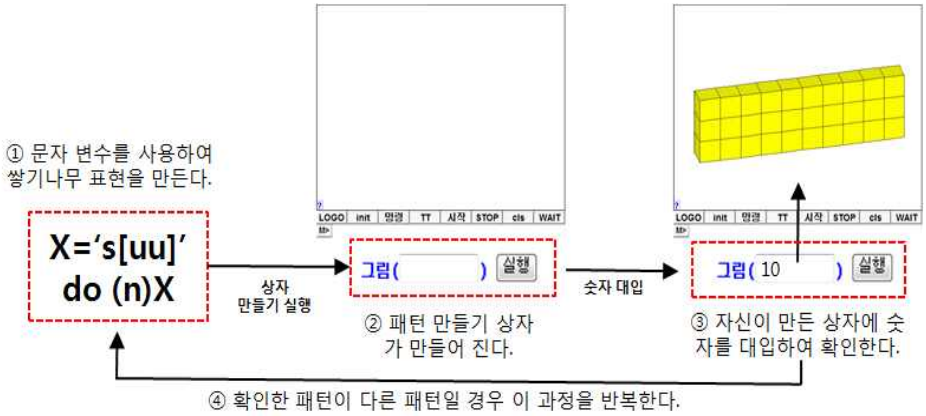
과제 3



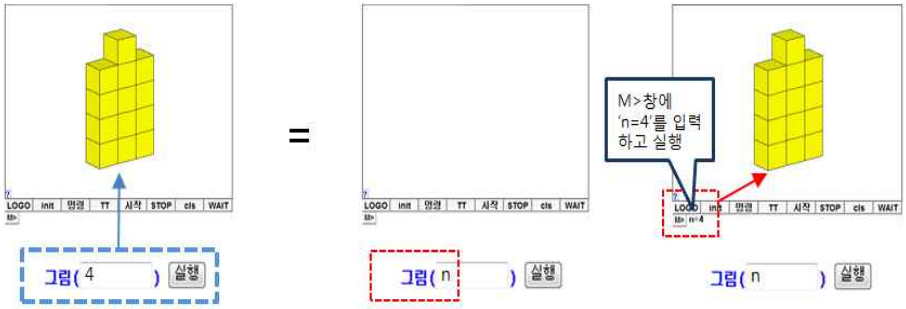
과제 4

3주차: 패턴 만들기 상자

패턴 만들기 상자 실행 과정



패턴 만들기 상자를 통한 변수 도입

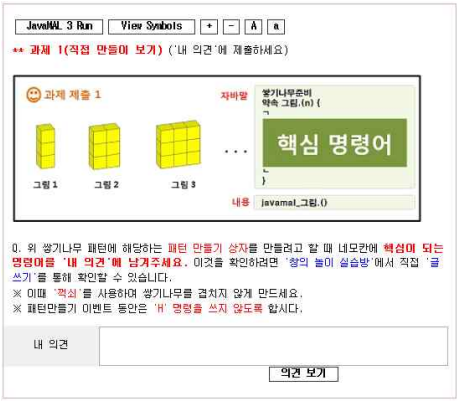


상자에 4를 입력하면 4번째 패턴이 시뮬레이션 되어 나타난다.

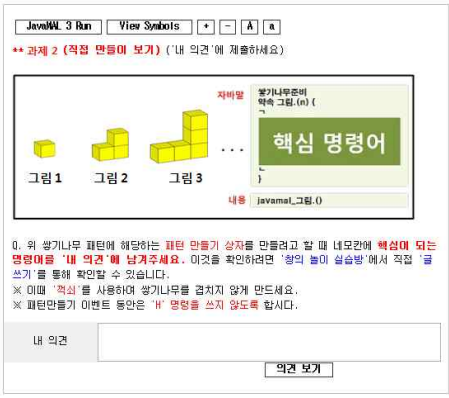
상자에 문자 n을 입력하고 명령창에 n=4를 실행하면 4번째 패턴이 시뮬레이션 되어 나타난다.

4주차: 문자 변수 n의 도입과 패턴의 일반화

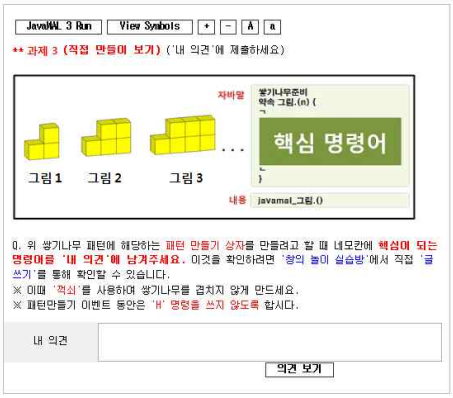
과제 1



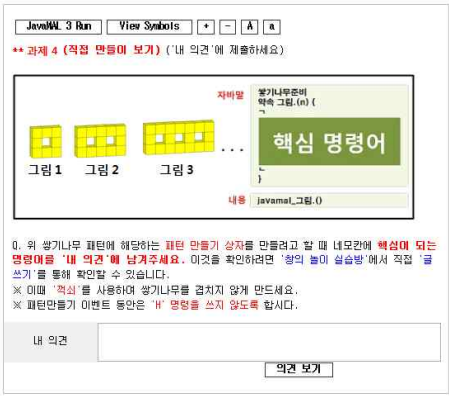
과제 2



과제 3

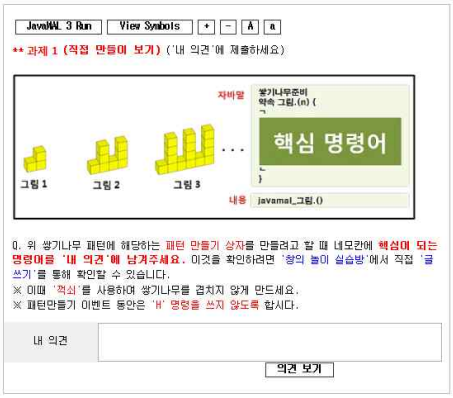


과제 4

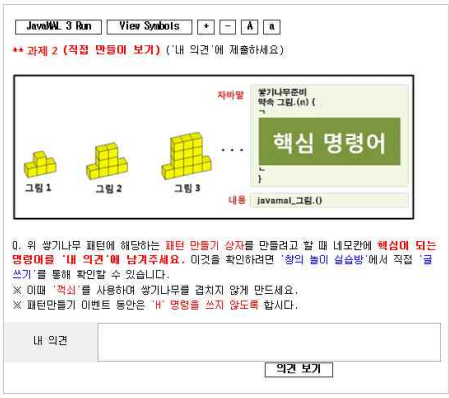


교실 활동: 이차패턴의 일반화

과제 1



과제 2



ABSTRACT

A study on pattern construction program based on constructionism

Shin Dong Jo
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

Since patterns are considered as one of the effective vehicles for revealing and developing algebraic thinking, many pattern studies importantly treat them as a tool for introduction and education of algebra. A typical pattern task in many studies involves, for instance, identifying a pattern rule, extending the pattern to make a near and far generalization, and articulating the functional relationship underpinning the pattern using words or symbols. Therefore, main purpose of pattern studies focuses mostly on expressing the functional relationship underpinning the pattern using letters or symbols. But many students have difficulty in using letters or symbols to articulate the functional relationship. Furthermore, although the students are able to express the relationship by using the symbol

through pattern tasks, they might have little meaning for the symbol. Therefore I have a critical mind that the students who have no meaning for letters or symbols need to have their meaning before articulating the functional relationship using the symbol. In this paper, I design an executable expression to construct, explore, and analyze a polycube pattern activity in JavaMAL microworld environment. Then I develop a pattern construction program to be run the executable expression and observe students' change about meaning making of symbol and generalization.

As a result, many students have a tendency to construct pattern's general expression in using letters and symbols in polycube pattern program, although they think of the symbols as a big number or a tool of manipulation to construct patterns. In other words, it doesn't mean that expressing pattern's relationship algebraically implies knowing symbols' meaning. Using as reference illustrative cases of sixth grade students' interaction with the microworld, I demonstrate the strong interplay between the design of the microworld and their thinking about algebraic symbol and draw conclusions regarding its potential to develop symbol's meaning for generalization

keywords : pattern, generalization, polycube expression, symbol, variable

Student Number : 2011-21563

감사의 글

2년간의 석사과정 동안에 너무나도 많이 부족한 저를 가르쳐주시고 도와주신 많은 분들께 감사의 말씀을 드립니다. 우선 저의 연구의 방향을 잡아주시고 끊임없는 조언과 도움을 주신 조한혁 지도교수님께 감사의 말씀을 올립니다. 교수님의 깊은 은혜가 없었다면 저도 아마 이 자리에 없었을 것입니다. 아직까지 매일 수학교육에 대해 연구를 하시면서 항상 새로운 것을 가르쳐주셔서 정말 감사합니다. 또한 연구 방법에 대해 아무것도 몰랐던 저에게 중간심사와 최종심사에서 많은 충고와 조언을 주시고 뵐 때마다 누구보다도 따뜻하게 대해주신 권오남 교수님, 논문이 완성되기까지 부족한 부분에 대해 세심하게 지적해주시고 올바른 방향을 잡아주신 이경화 교수님께도 감사드립니다. 저의 부족함을 누구보다도 잘 알고 있기에 교수님들께 더욱 고개 숙여 감사드립니다. 수학교육에 대한 권오남 교수님과 이경화 교수님의 남다른 사랑과 열정은 항상 가슴 속 깊이 간직하면서 살아가겠습니다. 제가 수업은 듣지 못했지만 항상 멋진 교수님으로 기억에 남을 정상권 교수님과 최영기 교수님, 그리고 그래프 이론과 통계 수업을 통해 많은 가르침을 주신 멋진 김서령 교수님과 유연주 교수님께도 감사의 말씀을 드립니다. 한 학기동안 깊이 있는 수학교육과 인생에 대해 많은 가르침을 주신 홍진곤 교수님 감사합니다.

그리고 학부 시절 저희 학과 학생들 모두를 항상 사랑으로 가르쳐 주신 아버지 같은 김흥기 교수님 항상 존경하고 감사드립니다. 저에게 새로운 길을 밝혀주시고 바른길로 이끌어 주신 저의 멘토이시자 존경하는 이강섭 교수님 감사드립니다. 교수님께 감사의 말은 몇 백 장의 글로 담아도 담지 못할 것입니다. 저를 수학교육의 길로 이끌어주신 고상숙 교수님께

도 감사드립니다. 학부 때의 가르침으로 제가 수학교육을 평생의 길을 바라보도록 지도해주셨고 대학원 기간 동안에도 역시 저의 앞날에 끊임없는 조언을 주셔서 정말 감사합니다. 저뿐만 아니라 저희 학과 학생 모두에게 남들이 가장 어렵다고 하는 위상수학을 가장 재밌고 자신 있는 과목으로 가르쳐주신 김창일 교수님, 항상 저희 학과 학생들을 먼저 챙기시고 온화한 웃음으로 집합론과 복소해석학을 지도해주신 한길준 교수님, 학생들에게 대수를 더욱 쉽고 재밌게 가르치시기 위해 매일 노력하시고 수업 시간에 조크로 분위기를 밝게 이끌어주신 강동승 교수님, 그리고 저희 후배들에게 수학과 수학교육에 대해 꿈을 주시고 계신 장정욱 교수님과 한혜숙 교수님, 마지막으로 사석에서는 선배님처럼 강의실에서는 멋진 교수님으로 제게 많은 웃음과 가르침을 주신 고희정 교수님께도 깊은 감사의 말씀을 드립니다. 교수님들의 은혜는 평생 잊지 않고 두 배, 세 배로 베풀 수 있는 사람이 되도록 살겠습니다.

2년 동안 연구실에서 희로애락을 함께 나눈 내 동지 안성이, 많은 연구와 프로젝트를 하면서 조언을 주신 지윤누나, 최고로 열심히 인생을 살아온 슈퍼 우먼 지애와 1년간 만났지만 급격히 친해진 친구 찬민이, 항상 밝고 씩씩한 효명이까지 모두 고맙습니다. 우리 세미나 팀의 정신적 지주인 인간미가 넘치시는 김화경 선생님, 항상 친한 형처럼 저를 유쾌하게 대해주신 민호형, 그리고 제가 논문을 쓰는데 누구보다 많은 도움을 주신 김철호 선생님, 세미나를 함께 했던 지정은 선생님, 노창균 선생님, 장철희 선생님 모두 감사드립니다. 그리고 석사과정 끝에 만나 뵙게 되었지만 소중한 추억을 만들어 주신 문성애 선생님과 경진누나, 그리고 논문을 같이 쓰면서 고통과 기쁨을 함께 나눈 지희누나와 아미누나, 벌써부터 교수님 포스를 팍팍 풍기는 친구 진형이, 대학원 생활과 과사무실 조교하면서 많은 도움을 준 수연이 모두 고맙고 모두들 좋은 추억만 가지고 가게 해주셔서 감사합니다. 대학원 입학 초기 때부터 세미나에

참석해주셔서 많은 도움을 주신 이은정 선생님, 인간미 넘치고 카리스마가 남다르신 영주누님, 만나면 항상 밝게 웃어주시는 착한 민선누나, 친구인데 우연히 만나면 나도 모르게 계속 인사하는 미미, 수학교육에 대해 남다른 애정을 가지고 열심히 사는 진우, 졸업 논문 쓸 때 과사무실 조교를 하시면서 도와주신 조형미 선생님, 노현정 선생님 모두 감사합니다.

무엇보다 제가 세상에서 가장 사랑하는 아버지, 어머니, 누나 항상 저를 믿어주시고 든든하게 지원해주셔서 감사합니다.

2년이라는 짧지만 소중한 시간을 선물해준 대학원 과정 동안 많은 것을 배웠고, 많은 추억들을 주셔서 모두들에게 진심으로 감사드립니다. 제가 어디에 있든 여러분들이 주신 도움과 수학교육에 대한 열정을 항상 기억하겠습니다.

신 동 조