교육학석사학위논문

스토리텔링을 활용한 수학 수업에서의 담화 분석

2014년 2월

서울대학교 대학원

수학교육과

김 미 주

스토리텔링을 활용한 수학 수업에서 담화 분석

지도교수 권 오 남

이 논문을 교육학 석사학위논문으로 제출함

2013년 10월

서울대학교 대학원

수학교육과

김 미 주

김미주의 석사학위논문을 인준함

2013년 12월

위 원 장 ____________________ (인)

부 위 원 장 ____________________ (인)

위 원 ____________________ (인)

국문초록

스토리텔링을 활용한 수학 수업에서 담화 분석

수학 학습에서 스토리텔링의 활용은 학생들의 학습동기, 상상력, 수학적 태도 등을 신장시킨다는 것이 많은 연구를 통해 밝혀졌다. 그러나 스토리텔링의 인지적 도구로서의 역할에 대한 연구는 부족하다. 이 연구에서는 스토리텔링을 활용한 수학 수업에서 학생들의 학습 과정에 대한 실증적 분석을 시도하였다. 스토리텔링을 활용한 수학 수업 과정에서의 담화분석을 통하여 학생들의 스토리텔링을 통한 수학 학습 수준의 발전과정을 분석하고, 발전과정에서의 스토리텔링의 역할을 분석하였다.

권오남 등(2013)이 개발한 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』 중 확률단원을 수업자료로 사용하여 2013년 7월 중 매일 2시간씩, 총 3일간 수업을 실시하였다. 16명의 자원한 학생들이 방과 후 수업에 참여하였다. 수업은 모델교과서의 스토리를 통하여 제시된 과제에 대한 모둠별 논의와 전체 토의를 반복하는 방식으로 진행되었다. 그 과정에서 크게 ‘조건부 확률’, ‘독립과 종속’을 학습하였다.

『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』는 실제적인 상황을 통해 학생들의 비형식적인 해결 전략을 활발한 스토리텔링 과정에서 점진적으로 형식화해간다는 측면에서 RME와 유사하다. 따라서 학생들의 수학 학습의 발전 단계를 발생모델에 따라 학생들의 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준, 형식적 수준으로 수준화 하였다. 발생모델은 학생들이 이전 단계에 대한 성찰을 통해 수준을 상승시키며 비형식적 수학활동의 기호모델을 창조한다고 본다.

스토리텔링을 활용한 수학 수업에서 학생들은 스스로 스토리텔러가 되어 자신의 사고를 언어로 표출하도록 기대된다. 따라서 발생모델에서 제시하는 각 발전단계에 학생들의 학습 수준이 부합하는지의 여부는 학생

들의 담화 분석을 통해 확인하였다. 담화 분석 단계에서는 Sfard(2008)의 커머그너티브 관점을 취하였다. Sfard(2008)는 수학적 담화를 수학적 단어, 시각적 매개체, 루틴, 사실적 서술을 포함한 이야기로 본다. 서로 다른 수준의 담화 참여자들 사이에, 혹은 수준 상승과정의 개인 내부에서는 커머그너티브 갈등이 발생한다. 갈등의 해소는 이전 수준까지의 담화에 대한 성찰, 의사소통 참여자들 사이의 더 높은 수준으로의 합의 과정을 통하여 이루어진다. 또한 이를 통하여 수학적 담화는 메타수준에서 발전한다.

이 연구에서는 발생모델의 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준, 형식적 수준에 대한 수학적 단어, 시각적 매개체의 사용 용법, 루틴, 사실적 서술의 성격에 따라 각 담화의 수준을 판별하였다. 그 결과 스토리텔링을 활용한 수업에서 조건부 확률에 대한 담화는 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준과 형식적 수준의 공존 수준으로 발전함을, 독립과 종속에 대한 담화는 상황적 수준과 참조적 수준의 공존 수준, 일반적 수준과 형식적 수준의 공존 수준으로 발전함을 확인할 수 있었다.

스토리텔링에 활용된 스토리와 스토리텔링 교과서와 수업의 전개방식은 직접적, 간접적으로 커머그너티브 갈등을 유발하였다. 모델교과서의 개발 원리인 맥락성의 원리, 과정지향성의 원리, 다양성의 원리, 소통의 원리를 통해 학생들은 점진적으로 의례적 루틴을 탐색적 루틴으로 발전시키고 학습 내용을 내면화함을 알 수 있었다. 이는 학생들이 학습 수준을 메타수준에서 발전시켰음을 시사한다. 또한 플롯을 갖춘 스토리를 기반으로 한 소통의 원리는 학생들의 내러티브 사고를 촉진함을 알 수 있었다. 즉, 스토리텔링을 활용한 수업은 학생들이 수동적으로 수업에 임하는 것이 아니라, 수업 중에 그들의 커머그니션을 실제로 작동시키도록 하는 원동력이 되었다.

주요어: 스토리텔링(storytelling), 담화(discourse), 발생모델(emergent model), 커머그너티브 관점(commognitive framework), 확률(probability)
학번: 2010-21504

목 차

표 목 차

그 림 목 차

I. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

사람들은 스토리를 통해 자신의 생각을 타인에게 전달 할 뿐 아니라, 스토리에 대한 상호작용과 성찰을 통하여 의미를 형성한다. 스토리텔링은 언어를 통하여 자신, 타인, 세계에 대한 진실의 혹은 상상의 의미를 전달하도록 하는 인간 고유의 경험이다(McDrury & Alterio, 2003). 이에 스토리텔링은 사회 전 분야에 걸쳐서 타인의 공감을 얻어내고 상상력을 자극할 수 있는 효과적인 의사소통 수단으로서 활용되고 있다. 수학교육 분야에서도 스토리텔링을 적용한 교수-학습의 방법과 적용 효과에 대한 연구가 국내외에서 활발히 이루어지고 있다(Egan, 2005; Zazkis & Liljedahl, 2008; Balakrishnan, 2008; 백영미, 2007; 백조현, 박수홍, 강문숙, 2010, 권오남 등, 2012; 권오남 등, 2013; 권오남, 주미경, 박정숙, 박지현, 오혜미, 조형미, 2013).

Egan(2005)은 수학 교수학습 맥락에 활용되는 스토리텔링은 학생들의 언어적 기능을 발달시키며 수업 중의 학습 내용을 오랫동안 기억할 수 있도록 한다고 하였다. 또한 학습 동기를 유발하고 학생들의 자존감과 효능감을 개선하며, 학생들 효과적으로 몰입하고 상상력, 창의력, 공감력, 분석력, 문제해결력을 개발하는데 기여할 수 있다고 하였다. Zazkis와 Liljedahl(2008)는 스토리가 정보를 전달하고 감정을 자극하며 학생들의 불안을 해소하고, 흥미를 신장시켜 교사와 학생 사이의 레포(rapport)를 형성할 수 있게 한다고 하였다. 그들은 스토리의 역할을 수학적 배경을 이해하기 위한 것, 수학적 내용에 자연스럽게 연결되는 것, 수학적 내용과 잘 얽힐 수 있는 것, 수학적 내용의 도입을 위한 것, 수학적 개념 설명을 위한 것, 발문을 위한 것, 농담을 위한 것, 그리고 스토리의 창작 등으로 구분하고 예시를 제공하였다.

Balakrishnan(2008)는 Zazkis와 Liljedahl(2008)가 구분하고 예시로 제공

한 스토리를 각색하여 상상력을 자극하는 스토리텔링 기법을 고등학교 수업에서 적용하였다. 그 결과 스토리텔링은 교사-학생 간, 학생-학생 간 상호작용을 촉진하였으며, 학생들의 상상력을 자극하여 새로운 시각과 거시적 아이디어를 갖고 수학적 아이디어를 일반화할 수 있도록 하는 효과가 있음을 밝혔다. Egan(2005), Zazkis와 Liljedahl(2008), 그리고 Balakrishnan(2008)의 연구는 수학 수업에서 스토리텔링이 일반적으로 학생들의 수학에 대한 태도, 수학에 대한 학생들의 정의적, 창의적 영역의 역량을 개발하는데 도움이 됨을 시사한다.

백영미(2007)는 초등학교 5학년 학생의 수업에 수학 동화를 활용하여 스토리텔링을 적용한 수업을 실시하고 학생들의 학업 성취도 및 수학적 태도에 미치는 영향을 분석하였다. 학생들의 수학적 태도는 수업 실시 후에 전 영역에서 효과를 보였으나, 수학 학습 성취도에서는 큰 차이를 보이지 않았다. 이는 측정을 위해 사용한 평가 문항이 수학적 개념에 대한 깊이 있는 이해나 문제 해결 능력을 평가하기 보다는 피상적이고 차원이 높지 않은 수학적 능력에 치중했기 때문으로 분석된다.

이와 같은 수학 교수-학습에서의 스토리텔링에 대한 연구 결과를 바탕으로, 국내 수학교육계에 스토리텔링이 도입되고 있다. 2012년 1월 교육과학기술부는 현재의 입시 대비 변별력 확보를 위한 수학교육을 미래 사회에 대비하여 사고력과 창의력을 키우는 수학교육으로 개선하고, 수학에 대한 학생들의 흥미와 긍정적 인식을 높이기 위해 『수학교육 선진화 방안』을 발표하였다(교육과학기술부, 2012). 공식 암기와 문제풀이 위주의 수학수업이 초래하는 부정적인 측면을 개선하고 바람직한 수학교육을 학교 현장에 정착시키기 위한 대안으로 스토리텔링 수학 모델 교과서의 도입을 제안하였다.

이에 고등학교 수학 과정에서는 권오남 등(2013)은 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』의 개발 원리를 맥락성의 원리, 과정지향성의 원리, 다양성의 원리, 소통의 원리로 제안하고, 네 가지 원리에 따라 모델교과서를 개발하였다. 또한 이를 현장에 적용하여 설문과 인터뷰를 실시한 결과, 스토리텔링 모델교과서는 수학 학습의 흥미와 동기화에 긍정

적 역할을 했을 뿐만 아니라 학생들로 하여금 수학적 개념의 안과 밖을 연결하고 수학개념을 내적으로 구성할 수 있도록 이끈다는 면에서 긍정적인 효과를 확인하였다(권오남 등, 2013).

앞서 이루어진 스토리텔링을 적용한 교수-학습의 적용 효과에 대한 연구는 주로 학생들의 정의적 영역에서의 학습 효과를 밝히고 있다(Egan, 2005; Zazkis & Liljedahl, 2008; Balakrishnan, 2008; 백영미, 2007). 백조현, 박수홍, 강문숙(2010)은 고등학교 확률 통계 단원에서 수업설계모형 과정을 구체적으로 제시하였지만, 이를 현장에 적용하여 수업설계모형이 구체적으로 학생들의 수학 학습을 어떻게 돕는지 밝히지는 않았다. 권오남 등(2013)은 모델교과서를 이용한 수업을 시행한 후 그 효과를 설문과 인터뷰를 통하여 밝혔으며, 수업 과정중의 스토리텔링의 역할을 분석하지는 않았다. 따라서 수업 과정에서 스토리텔링을 통한 학생들의 인지적 영역에서의 발달 기제에 대한 탐구가 부족하다 할 수 있다. 즉, 학생들이 스토리텔링을 통하여 수학적 개념을 형성하는 과정에 대한 실증적 연구가 부족하다.

이에 이 연구에서는 스토리텔링을 활용한 수업에서 학생들이 수학적 개념을 형성하는 과정을 보다 구체적이고 실증적으로 탐구하고자 한다. 특히 수학 수업 과정에서의 담화 분석을 통하여 학생들의 수학 학습 과정을 탐구한다. 수업 중 학생들의 수학 학습의 수준이 발전하는 계기를 포착함으로써, 이에 개연성이 있는 스토리텔링의 역할을 논할 것이다. 이를 통하여 궁극적으로 스토리텔링이 현장에 적용될 때, 스토리텔링의 어떠한 특성이 강조되어야 하는지 살펴볼 수 있을 것이다.

2. 연구 문제

이 연구의 목적은 스토리텔링을 활용한 수학 수업에서의 학생들의 학습 과정을 분석하는 것이다. 이를 위하여 이 연구에서는 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』 중 ‘확률’ 단원을 수업자료로 사용하여 수업을 진행한다. 학습 과정에서 학생들의 담화를 분석한 후, 담화의 수준 상승 과정과 수준 상승의 기제를 탐구한다. 이를 통하여 궁극적으로 스

토리텔링이 학생들의 수학 학습을 어떻게 촉진하는지 알아보고자 한다.
이에 다음과 같이 연구 문제를 설정하였다.

첫째, 스토리텔링을 활용한 수학 수업에서 학생들의 담화는 어떻게 발전하는가?

둘째, 스토리텔링은 학생들의 수학 학습을 어떻게 촉진하는가?

Ⅱ. 이론적 배경

이 연구에서는 스토리텔링을 활용한 수학 수업에서 학생들의 학습 과정을 분석하여 스토리텔링이 학생들의 수학 학습을 어떻게 돕는가를 알아볼 것이다. 이를 보이기 위해서는 크게 세 부분에서의 이론적 배경이 필요하다. 먼저, 스토리텔링의 의미와 이 연구에서 사용하는 고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서의 개발원리를 살펴 학생들의 수학 학습을 돕는 스토리텔링의 성질에 대한 이론적 근거를 마련한다. 이후 발생모델의 이론을 살펴봄으로서, 이 연구에서 실시하는 스토리텔링을 활용한 수학 수업에서의 학습 과정을 발생모델로 설명할 수 있음에 대한 이론적 근거를 제시한다. 마지막으로 발생모델에서 제시하는 학습 수준을 식별하고 수준 상승과정을 설명하기 위한 분석도구로서 커머그너티브 관점에 대한 이론을 탐색한다.

1. 스토리텔링을 활용한 수학 수업

1.1. 스토리텔링

스토리텔링(storytelling)에 대한 관점은 인간 본성 및 세계의 인식 방식으로 이해되는 것과, 의사소통 수단 또는 일련의 사건을 설명하기 위한 내러티브적 관점의 표현기법으로 구분될 수 있다(박소화, 2012). Bruner(1986)는 이전까지 ‘패러다임적 사고’를 통해 단일한 객관적 지식의 구조를 지식의 본질로 파악한 자신의 인식론적 한계를 인정하면서, ‘내러티브 사고’형태를 통해 지식의 생성적 본질을 강조하였다. 내러티브 사고란 이야기를 만드는 마음의 인지적 작용을 의미하며(한승희, 1997), 내러티브는 우리가 의미를 만들기 위해 사용하는 구성의 도구이다(강현석, 2005). Bruner는 학교 교과목, 교육과정을 넘어서서 세계관을 창조할 수 있도록 도와주는 사고와 감정의 양식으로서 내러티브의 중요

성을 강조한다. 패러다임적인 지식은 개념이라 이름 지어진 개별적인 단어에 머물지만, 내러티브적 지식은 플롯을 지닌 이야기에서 형성된다(Polkinghorne, 1995).

스토리텔링은 스토리를 만들거나 스토리를 남들에게 표현ㆍ전달하는 행위를 지칭하는 것이라고 할 수 있다(류수열, 주미경, 조성준, 김은애, 2011). 이 때, 스토리를 모든 종류의 스토리로 해석하는 경우, 일반적인 거의 모든 수업에서 교사-학생 간, 학생-학생 간, 학생-교과서간의 스토리텔링이 이루어지고 있다고 볼 수 있다. 박소화(2012)는 교수ㆍ학습 맥락에서의 스토리텔링의 요소를 <표 Ⅱ-1>와 같이 여섯 가지로 도출하였고, 이 스토리텔링 요소가 교수 장면을 설계할 수 있도록 안내하는 역할을 할 것으로 기대 했다.

<표 Ⅱ-1> 교수ㆍ학습 맥락에서의 스토리텔링의 요소(박소화, 2012, p. 91)

요소	교수ㆍ학습 맥락에서의 정의 및 활용
페르소나	학습자에게 대입되는 인물, 성격 또는 패턴에 의해 주어진 역할이나 캐릭터
감정이입	학습자에게 투사하여 자신의 경험, 상상에 기초하여 동질감을 유발하도록 가공된 감정 경험
비유	주요 학습 내용의 메시지를 함의하고 있는 유사한 대상이나 아이디어가 상상, 연상될 수 있도록 시각화하는 속성
플롯	주요 학습 내용을 문제, 갈등 등으로 제시하여 이를 해결하는 과정으로 전환한 내용 진행상의 구조
경험	학습이 제공하는 물리적, 사회적, 문화적 환경 요소를 학습자 맥락에서 재가공, 재창출하는 학습 활동
시간성	주요 학습 내용을 과거, 현재, 미래 시간과 연결하여 맥락을 도입하거나 가정하거나 추론하는 내용 전달

권오남 등(2013)이 개발한 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』는 내러티브 사고를 반영하여 학습에서 결과적 지식을 제시하여 수용하

도록 하는 것 보다 텍스트나 지식을 맥락과 연결 지어 제시하여 학생들이 능동적으로 자신의 사고를 표출하고 다른 이의 사고를 경청하여 수학을 구성하도록 한다. 이를 위한 텍스트는 시작, 중간, 끝이 있으며, 플롯이 있고, 등장인물, 구조, 배경과 같은 장면이 존재하고 이 과정에서 수학적 경험을 구조화하는 해석적 구성과 순환이 이루어지도록 하였다.

1.2. 고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서의 개발 원리

Lauritzen 와 Jaeger(1997)는 내러티브를 단편적인 스토리와 구분하면서, 내러티브는 그것을 구성하는 짧은 이야기보다 훨씬 더 길고 광범위하면서 포괄적인 일종의 삶에 대한 이야기라고 지칭한다. 즉, 내러티브는 인간이 그들 자신에 대해 끊임없이 말하고 또 다시 말함으로써 경험에 대한 의미를 구성하는 방법이다. 이러한 내러티브는 기억을 위하여, 삶과 유사함을 관련시키기 위하여, 의미를 구성하기 위하여, 유의미한 맥락에서 학습하기 위하여, 개인차를 조정하기 위하여, 그리고 공동체에 참여하기 위하여 사용될 수 있다. Lauritzen 와 Jaeger(1997)에 의하면 내러티브 교육과정(narrative curriculum), 즉 내러티브에 기반을 둔 교육과정의 설계는 맥락에서 시작한다. 맥락은 학습이 일어나는 전체적인 상황이며, 학습자와 학습을 둘러싸고 있는 환경이다. 학생들은 맥락을 바탕으로 새로운 의미를 구성하고, 새롭게 구성된 의미에서 다시 맥락에 경험을 가져오는 회귀적 학습을 가능하도록 한다. 진정한 맥락은 실제 상황에서 일어나고, 인물을 포함한다. 또한 맥락을 통하여 질문을 제기하도록 하고, 해결책을 추구하기 때문에 그것들을 이해하게 하는 이야기의 특성을 지닌다.

권오남 등(2013)은 학생들이 수학교과에서 내러티브 사고를 신장하도록 하기 위한 모델 교과서 개발 원리를 제시하였다. Lauritzen 와 Jaeger(1997)가 제시하는 맥락성의 원리에 추가적으로 과정지향성의 원리, 소통의 원리, 다양성의 원리를 설정하고 이를 바탕으로 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』를 개발하였다.

맥락성의 원리는 학생들에게 익숙한 실세계의 소재를 바탕으로 실제적

경험과 수학적 개념 및 원리를 이해 가능한 형태로 조직화함으로써 추상적인 수학교과 지식을 구체화하고 학생들의 수학적 관점과 통합되어 의미충실하게 전체 맥락을 구성하며, 이해를 발전시켜 나갈 수 있는 과제와 학습 맥락을 제공하는 원리이다. Polkinghorne(1995)은 플롯을 갖춘 이야기는 내러티브 지식의 생성을 돕는다고 하였다. '플롯'은 주요 학습 내용을 복잡한 상황, 문제, 갈등 등으로 제시하며 이를 해결하는 과정으로 전환한 수업 진행상의 구조, 얼개를 뜻한다(박소화, 2012).

과정지향성의 원리는 수학교과지식을 구성해가는 과정에서 학생들이 능동적으로 자신에게 의미있는 방식으로 문제를 해결하고, 해결의 아이디어를 표현하는 원리이다. 이를 통하여 학습자 스스로의 목소리가 학습에 통합되며 학습목표에 해당되는 수학 지식으로 구체화 될 수 있도록 한다. 이러한 과정지향성 원리는 학습자가 수학적 경험에 대한 계속적 해석 활동에 기반을 두어 수학적 경험을 구조화하고, 소통하고, 궁극적으로 수학화에 이르는 과정으로 개념화되는 것을 의도한다. 특히 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』의 확률단원은 스토리텔링으로서 학생의 의사결정 역량을 신장시키는데 기여할 수 있도록 하는 '의사결정형' 유형으로 개발되었다(주미경 등, 2013). 의사결정과정은 학생이 직면한 문제 상황을 인식하고, 이를 조직화하는데 필요한 수학적 개념을 탐구한 후, 문제를 해결한 결과에 기초하여 판단하고 그 근거를 제시하는 것을 통해 이루어진다. 이에 따라 교과서의 전개가 "(1) 문제제기 (2) 수학적 개념 탐구 (3) 문제해결 (4) 판단과 정당화 그리고 (5) 성찰(주미경 등, 2013, p.210)"의 다섯 단계로 구성되었다.

소통의 원리는 학생들이 스스로 수학적 개념과 원리를 능동적으로 탐구하는 과정에서 각자의 탐구결과를 다른 학생들 그리고 교사와 함께 대화적 관계 속에서 협의할 수 있는 기회를 제공하기 위해 설정된 원리이다. 이에 따라 학생들은 스스로 수학을 구성하고 교사 및 친구들과 의견을 나누는 활동을 통해 지속적인 대화과정을 유지할 수 있다.『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』의 확률단원은 주인공 홍을 통해 국적을 초월하여 사회에 적응하는 과정에서 갈등하고 소통하는 내용을 다루었

다. 또한 교과서 전개에서 ‘생각정리’, ‘홍의 학습노트’를 이용하여 학습자 스스로 또는 상호간의 소통을 강조하였다.

다양성의 원리는 학습자의 지역, 계층, 인종, 종교, 성별, 연령 등의 배경적 특징과 분석적 사고, 통합적 사고, 대수적 사고, 기하적 사고 등의 인지적 방식에서 존재하는 다양성을 과제 개발에서 고려하고자 하는 원리이다. 이를 통해 학습자의 개인적인 차를 인정할 수 있도록 하고 다양한 배경을 고려한 다양한 소재, 표현을 활용하도록 한 것이다(권오남 등, 2013). 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』의 확률단원은 의도적으로 주인공을 베트남 학생으로 설정하여, 다문화교육의 다양성과 평등성을 학생들이 함께 느끼도록 하였다. 또한 확률의 곱셈정리와 같은 특정한 수학 개념을 순서도, 벤다이어그램, 그리고 기호와 같이 다양하게 표현하도록 하였다.

『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』개발의 원리 중 맥락성의 원리, 과정지향성의 원리 그리고 의사결정 과정에 기반을 둔 교과서 전개 방식은 실제적인 상황을 통해 학생들의 비형식적인 해결 전략을 활발한 스토리텔링 과정에서 점진적으로 형식화해간다는 측면에서 RME(Realistic Mathematics Education, 이하 RME) 와 유사하다[1]. 따라서 학생들의 수학 학습의 발전 단계를 학생들이 비형식적 수학활동의 기호 모델을 창조할 수 있다고 제안하는‘발생모델’(Emergent Model, Gravemeijer, 1997)로 분석하는 것이 적절하다고 할 수 있다.

1) 단, 스토리텔링을 활용한 수업의 경우 한 단원에 거쳐 플롯을 갖춘 스토리에 의하여 과제가 상황들이 유기적으로 연결되어 있기 때문에 한 단원의 내용 이해시 사고의 흐름이 연속적으로 이루어짐으로서 내러티브 지식을 생성할 수 있다는 점에서 RME와는 차별화 된다.

2. 발생모델

RME는 “인간 활동으로서의 수학”이라는 Freudenthal(1973, 1991) 의 관점에 뿌리를 두고, 점진적 수학화 과정을 통한 안내된 재발명을 강조한다. 수학은 현상을 그것의 본질로서 정리하고, 다시 그 본질이 현상이 되어 새로운 본질로 조직되는 과정으로 몇 개의 수준을 거쳐 발전된다. 따라서 학생들에게도 수학이 발명되는 과정과 유사한 과정을 경험할 수 있는 기회가 제공되어야 한다. 이 때, 처음에 현실세계에서 출발하여 수학화 과정을 거치고 다시 현실세계에 돌아올 수 있도록 하기 위한 맥락문제가 점진적 수학화의 토대가 된다. 학생들은 맥락문제를 토대로 비형식적 수학 활동의 기호모델을 창조할 수 있다(Gravemeijer, 1994).

Gravemeijer(1994)는 비형식적 지식에서 형식적 수학 사이로의 발전과정을 다음과 같이 네 수준의 모델로 설명하였다. 상황적 수준(situational level)에서 모델은 학교 밖의 일상적 생활의 상황에서의 탐구 상황이며, 학생들은 상황적 지식과 전략을 상황적 맥락에 맞게 사용하며 상황을 탐구한다. 참조적 수준(referential level)에서는 상황적 수준에서 제시된 상황을 학교내부의 교수학적 맥락에서 탐구한다. 이 때 모델은 상황과의 관계로부터 수치적 의미를 추출하고 상황 수준의 해결전략에 대응하는 비형식적인 전략을 뒷받침하는데 사용된다.

일반적 수준(general level)은 맥락에 대한 참조보다는 전략 자체에 수학적 초점이 놓인다. 따라서 모델의 역할이 변하고 전략은 수학적 시각으로 보아 더 이상 문제 상황과의 관계에 의존하지 않는다. 모델은 보다 일반적인 특징을 얻고 수학적 추론을 위한 기초로서 중요성을 가지게 되어 형식적 수학 수준을 위한 참조적 기초가 된다. 학생들은 상황과 독립적인 해석과 해결을 요하는 일반적 활동을 통해 추론을 위한 모델을 만들어나간다. 형식적 수준(formal level)에서는 일반적 수준에서의 탐구 내용을 형식적인 절차와 표기를 가지고 수행을 하는 기호화가 이루어진다.

참조적 수준에서의 모델은 상황의 모델(model of)이라 할 수 있으며 일반적 수준에서의 모델은 추론을 위한 모델(model for)이라고 할 수 있

다. 이 때, 상황의 모델에서 추론을 위한 모델로의 발전과정은 Sfard(1991)가 제시하는 실재화과정(reification)과 유사하다(Gravemeijer, 1999). Sfard(1991)는 수학적 과정(process)이 수학적 대상(object)으로 전이되는 과정을 실재화라고 보았으며, 수학은 역사적으로 이러한 실재화 과정을 통해 발전해왔다고 본다. 이러한 실재화는 이전 단계의 모델에 대한 성찰로 이루어질 수 있다. 즉, 참조적 수준에서 일반적 수준으로의 발전은 참조적 수준에 대한 성찰을 통한 실재화로 이루어지게 되며, 일반적 수준에서 형식적 수준으로의 발전은 일반적 수준에 대한 성찰을 통한 실재화로 이루어진다.

발생모델은 RME에 기반한 수학 수업과정에서 학생들의 학습 수준의 발전을 설명한다. 권오남, 주미경, 김영신(2003)은 RME원리를 반영한 대학 미분방정식 교실에서 학생들이 오일러 알고리즘을 재발명하는 과정을 탐구하였다. 그 결과 일련의 적절한 맥락 문제가 주어졌을 때 학생들은 교수의 발문을 통한 안내 하에 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준, 형식적 수준을 거치면서 오일러 알고리즘을 재발견할 수 있음을 밝힌 바 있다.

『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』는 실제적인 상황을 스토리로 제공한 후, 교과서 전개 방식에서 학생들의 비형식적인 해결 전략을 점진적으로 형식화하도록 한다는 측면에서 RME 와 유사하다. 스토리텔링 모델 교과서의 모든 과제는 맥락성의 원리에 따라 교실 밖의 실제적인 상황이 주어지기 때문에 학생들이 상황적 수준으로 부터 다음 수준들로 수준향상을 하면서 수학화의 경험을 하도록 한다. 스토리텔링 모델교과서에서 상황을 제시하는 것의 특징은 모든 실제적 상황들이 홍, 혜리, 루이의 갈등적 이야기 속에서 펼쳐지기 때문에 서로 유기적으로 연결되어 있다는 것이다. 과정지향성의 원리에 따라 스토리와 수학적 지식을 단순히 결과물로서 전달하는 것이 아니라 스토리를 통해 전달하고자 하는 것을 학생이 공감하고 탐구와 소통을 통해 공유된 의미체계를 구성해가는 과정을 전체적으로 경험하도록 한다. 또한 “(1) 문제제기 (2) 수학적 개념 탐구 (3) 문제해결 (4) 판단과 정당화 (5) 성찰” 의 5단계로 교과

서를 구성하여(주미경 등, 2013) 상황으로부터 점진적인 수학화를 통한 일반화가 가능한 토대를 제공한다.

따라서 이 연구에서는 스토리텔링을 활용한 수학 수업 과정에서 발생모델에서 제시하는 발전단계에 따라 학생들의 수학 학습의 발전을 포착하였다. 스토리텔링을 활용한 수학 수업에서는 자신들의 과제 해결 과정을 친구들과 함께 텔링하며 발전시켜나갈 것을 권장한다. 따라서 발생모델에서 제시하는 각 발전단계에 학생들의 학습 수준이 부합하는지, 수준의 상승과정은 어떠한지의 여부는 학생들의 담화 분석을 통해 이루어질 수 있다. 이 연구에서는 의사소통과 사고를 동일한 것으로 간주하며, 수학적 담화의 발전과정으로 수학학습을 설명하는 Sfard(2008)의 커머그니티브 관점으로 담화를 분석하였다.

3. 수학 학습에 대한 커머그니티브 관점

3.1. 수학적 담화

Sfard(2008)는 사고를 의사소통과 동일한 것으로 간주하여, 의사소통(communication)과 사고(cognitive)를 합성한 '커머그니션[2](commognition)'을 '사고=의사소통'을 의미하는 단어로 사용할 것을 제안한다. 의사소통이란 개인의 A라는 활동에 따르는 개인의 B라는 활동으로 패턴화되어 총괄적으로 수행되는 활동이라 할 수 있다. 활동 A는 의사소통적이라고 알려져 있는 잘 정의되어 있는 모든 집합체

2) 영단어 communication은 통상적으로 '의사소통'으로 번역된다. '의사소통(意思疏通)'을 한자어의 뜻으로 풀면 가지고 있는 생각이나 뜻이 서로 통한다는 것으로 영단어 communication에서 강조되는 '소통'뿐 아니라 생각, 뜻을 내포하고 있는 단어이다. 따라서 Commognition을 의사소통으로 번역하는 것을 고려할 수 있겠으나, Commognition은 Communication과 Cognition을 합성하여 의사소통과 사고를 동등하게 다루는데에 반하여 의사소통에서 '뜻(意)'과 '사고(思)'는 소통의 목적어로서 사용된다. 따라서 이 연구에서는 commognition을 번역하지 않고, 커머그니션으로 받아들이기로 한다.

(repertoire)에 속한 것이며, B는 A에 대응하는 반응들의 모든 집합체에 속한 것이다. 즉, A와 함께 주기적으로 관찰되는 행동들이다. B는 오로지 A에만 의존하는 행동은 아니며, A이전에 벌어진 일, A와 B가 수행되는 환경, A, B를 실행하는 사람의 특성 등에 의하여 영향을 받을 수 있다. 의사소통의 형태는 꼭 단어로 이루어질 필요는 없으며, 다른 사람과 또는 자기 자신과 행해질 수 있는 것이다. 담화는 의사소통의 특별한 종류로서, 커뮤니티를 정의할 수 있는 의사소통적 게임, 즉 일정한 규칙에 의하여 행해지는 것이라고 할 수 있다.

이러한 관점에서, 수학은 곧 수학적 대상으로 고려될 수 있는 것에 관한 담화이며, 수학적 담화(mathematical discourse)는 수학적 용어(mathematical word)의 사용, 시각적 매개체(visual mediator)의 사용, 담화를 통한 합의된 사실적 서술(endorsed narrative[3])) 도출, 담화 과정에서 반복적이고 패턴화된 루틴(routine)발생의 네 가지 특징을 갖는다는 면에서 일반적 담화와 구분된다(Sfard, 2008). 각 요소의 특징은 다음과 같다.

수학적 담화에는 양과 모양 등에 관련된 수학 용어가 포함된다. 학교에서의 수학적 담화에 참여하면서, 학생들은 '삼각형', '사각형'과 같은 일상적으로 접하던 용어 또는 '음수 2'와 같이 수학적 상황이 아니면 접해보지 못했었던 용어를 학습한다. 일상적인 담화에서 접하던 양과 모양 등에 관련된 단어들도, 수학적 담화에서는 고유의 의미를 갖는다. 각 담화자가 각 용어에 대하여 어떻게 이해하고 있는지에 따라서 커머그너티브 갈등이 발생할 수 있다(Sfard, 2007). 따라서 각 담화자가 수학적 용어에 대해 어떻게 이해하고 있는지 파악하는 것이 중요하다. 이는 수학적 기표(signifier)를 각 담화참여자가 어떻게 인식(realization)하는가를 파악하는 것을 의미한다. 기표는 담화참여자들의 표현에서 명사처럼 작용하는 용어 또는 기호를 의미한다. 기표에 대한 인식(realizations of the signifiers)은 수학적 서술을 입증하거나 창출하려는 시도 과정에

3) Sfard(2008)가 사용하는 'narrative'는 대상에 대한 묘사, 대상간의 관계, 활동 등을 묘사하는 구두 또는 서면의 모든 종류의 이야기로서, 담화를 통해 참 또는 거짓으로 판단된다. 이는 내러티브적 사고에서 의미의 구성 도구인 'narrative'와는 다른 의미이다.

서 수학적 대상에 대한 지각을 의미한다(Sfard, 2008).

Sfard(2008)는 아동의 수개념 형성과정을 분석하여 기표에 대한 인식 과정 중 수학적 용어의 사용이 수동적 사용(passive use), 루틴적 사용(routine-driven use), 문구적 사용(phrase-driven use), 대상적 사용(object-driven)의 4단계를 거쳐 내면화(individualization)된다는 가설을 세웠다. Caspi & Sfard(2012)도 학생들의 대수개념 형성과정을 통해 수학적 용어가 이 4단계를 거쳐 내면화하는 것을 보였다. 학생들은 처음에 용어를 직접적으로 언급하지 않고, 다른 담화 참여자들의 담화에 수동적으로 참여하는 수동적 사용을 한다. 다음 단계에서 학생들은 용어를 직접적으로 활발하게 언급하지만, 용어를 익힌 제한된 루틴에서만 사용한다. 익숙한 루틴에서는 단어를 활발히 사용하는 반면에 새로운 루틴이 필요한 상황에서는 용어의 의미를 제대로 파악하지 못한다. 다음으로 문구적 사용 단계에서는 용어를 어떠한 맥락에서도 확실하게 변함없는 문구로 의미있게 사용한다. 대상적 사용 단계에서는 수학적 기표가 투명해지면서(transparency of the signifier) 기표 자체가 즉각적으로 그에 대한 인식을 환기시킨다. 따라서 기표보다는 그에 대한 인식이 수학적 대상이 된다. 따라서 용어의 사용자들은 서로 다른 맥락에서도 적합성과 유용성에 따라 적절한 인식으로 단어를 사용한다.

시각적 매개체는 담화 참여자들이 자신들이 말하고 가리키는 대상에 대하여 인지하고 대화를 꾸려갈 수 있도록 하는 이미지 매개체이다. 일상적인 담화에서는 구체적인 명사 또는 대명사의 언급을 통해 바로 떠올릴 수 있는 각각이 독립적으로 존재하는 이미지가 시각적 매개체로 사용되는 반면에, 수학적 담화에서 시각적 매개체는 특정한 상황에서의 의사소통을 위하여 창조된 기호물인 경우가 많다. 예를 들어, 수식, 그래프, 그림, 다이어그램 등이 수학적 담화에서의 시각적 매개체가 된다. 시각적 매개체도 수학적 용어와 마찬가지로 기표에 대한 담화참여자의 인식을 파악하는 것이 중요하다.

담화 참여자에 따라 수학적 용어와 시각적 사용을 달리 할 수 있다. 즉, 같은 매개체라도 다른 의미로 사용될 수 있다. 예를 들어, ‘일차 함

수의 기울기’라는 수학적 기표를 담화자에 따라서 x앞의 계수, 또는 함숫값이 주어진 표에서 y값끼리의 차이 등과 같이 다른 시각적 매개체를 통하여 인식할 수 있다 서로 다른 인식으로 인한 담화의 차이는 커머그너티브 갈등을 야기할 수 있다.

‘사실적 서술(narrative)’은 대상에 대한 묘사, 대상간의 관계, 활동 등을 묘사하는 구두 또는 서면의 모든 종류의 것으로서, 담화를 통해 참 또는 거짓으로 판단된다. 수학적 담화를 통해 사실적 서술을 도출하는 것이 결국 수학 학습이라고 할 수 있다. 수학 학계에서의 사실적 서술은 정리, 정의, 증명 등으로 구성되는 이론이라고 할 수 있다. 수학적 서술(mathematical narrative)는 ‘$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$’, ‘삼각형의 내각의 합이 180도이다’와 같이 수학적 대상에 관한 이야기를 다루는 객체수준(object level)에서의 서술과 ‘괄호 안의 연산을 먼저 한다’와 같이 담화 자체에 대한 어떻게 수학이 행해지는가에 대한 메타수준(meta level)의 서술로 구분할 수 있다. 담화참여자들은 담화 과정을 통하여 합의된 사실적 서술(endorsed narrative)를 도출한다.

루틴은 대화참여자의 행동에서 보이는 반복적 패턴, 즉 수학적 과제의 수행 과정에서 드러나는 행동 양식이다. 예를 들어, 학생들이 과제를 접할 때 과제를 다루고, 인지하고, 증명하는 방법이 형성되는 것이다. 이런 반복 행위를 통해 위의 세 요소가 도출될 수 있기 때문에, 반복은 위의 세 요소를 아우르는 포괄적인 것이다. 루틴은 승인을 위해 도출되는 이야기를 입증 또는 기존의 수학적 지식을 회상하는 탐색(exploration), 환경과 행동을 변화시키는 행위(deed), 다른 사람과의 관계를 통해 상대적인 위치를 개선시켜나가는(scaffolded by others) 의례(ritual)와 같은 세 가지 유형으로 드러날 수 있다.

의사소통의 상황에서는 의례가 종종 발생하는데, 담화에 대한 참여를 수학 자체에 대한 몰입에 의해서라기보다는 의사소통 참여자간의 사회적, 상대적인 위치 때문에 하게 되는 것이다. 예를 들어, 부모와 함께 수블록을 통해 수개념을 형성해가는 상황에서, 학생들은 수블럭 자체에 관심이 있어서 부모님과의 활동에 참여하기보다는 부모의 상대적 권위 때

문에 참여하게 될 수도 있다. 이 때, 이런 의례적 루틴에서 탐색적 루틴으로의 전환이 잘 이루어진다면 수학 학습이 잘 일어날 수 있게 된다.

3.2. 수학 학습

Sfard(2008)는 수학 학습을 수학적 담화의 발전으로 보았다. 이 때, 두 가지 수준의 발전이 가능한데, 이미 존재하는 메타규칙(meta-rules)에 따라 이미 존재하는 대상, 기존에 사실적 서술을 기반으로 새로운 사실적 서술을 만들어가거나 용어를 확장시켜 기존의 틀에서 내생적으로 담화를 확장시키는 객체수준의 발전(object-level development)과 새로운 대상 자체를 추가하거나, 메타규칙을 변화시키고, 또는 용어에 대한 이해, 용법을 변화시켜서 외생적으로 담화를 확장시키는 메타수준의 발전(meta-level development)으로 나눌 수 있다. 예를 들어, 학생들이 이미 자연수가 무엇인지 알고 있는 상태에서, 자연수의 성질을 배우는 것은 객체수준의 학습이라고 할 수 있다. 이제, 자연수만 알던 상태에서 양과 음의 부호를 갖는 수로 담화의 전환을 갖게 되는 것은 메타수준의 학습이라고 할 수 있다. 담화가 메타수준의 수직적 발전은, 이전 수준의 담화에의 성찰을 통하여 이루어진다. 이는 이전 단계의 학습 상황에 대한 성찰을 통해 다음 수준으로 상승한다는 면에서 발생모델에서 제시하는 수준의 발전과도 일맥상통한다(Gravemeijer, 1999).

메타수준의 학습은 개인적인 수준에서 이루어지기 어려우며, Vygotsky(2009)가 말하는 것과 같은 적절한 비계설정이 필요하다. 이 때, 커머그너티브 갈등(commognitive conflict)은 메타수준의 학습을 촉진하게 된다. 커머그너티브 갈등은 수학적 담화에 참여하고 있는 의사소통 참여자들 사이에 발생하는 갈등이다. 담화 참여자들의 담화의 수준이 다른 경우, 담화에서 사용되는 수학적 용어에 대한 이해, 용법의 차이, 수학적 기표에 대한 인식으로 표출되는 시각적 매개체의 차이, 수학적 대상에 대한 서로 다른 메타규칙의 적용으로 서로 비교 불가한(incommensurable) 담화가 발생하게 되고 이는 커머그너티브 갈등으로

이어진다. 즉, 각 담화자들의 담화의 수준이 다른 경우, 커머그너티브 갈등이 발생할 수 있다. 이러한 갈등 상황의 극복을 통해 메타수준의 학습이 발생된다. 따라서 커머그너티브 갈등은 메타수준의 학습에 필수불가결한 요소이다. 커머그너티브 갈등은 서로 다른 담화 참여자 간에 발생하기도 하고, 한 사람의 내면에서 발생할 수도 있다. 보통 커머그너티브 갈등은 더 높은 수준에 있는 전문가의 역할을 할 수 있는 의사소통 참여자의 담화 방식에 점점 합의하고 그의 합리화를 수용하면서 해소된다. 커머그너티브 갈등은 인지적 갈등(cognitive conflict)과는 <표 Ⅱ-2>와 같이 비교할 수 있다.

<표 Ⅱ-2> 인지적 갈등과 커머그너티브 갈등의 비교(Sfard, 2008, p.258)

	인지적 갈등	커머그너티브 갈등
갈등의 주체	의사소통 참여자와 세계	비교 불가능한 담화
학습에서의 역할	오개념을 제거할 수 있는 한 방안	실질적으로 메타수준의 학습에 필수불가결한 요소
해결 방안	학생들의 합리화 노력	전문가와 같은 의사소통 참여자의 담화 방식의 합리화를 수용

인지적 갈등은 담화 참여자끼리의 갈등이 아닌 학습자 개인과 외부 세계와의 대립에서 발생하며, 이 때 발생하는 오개념을 제거할 수 있는 한 방안이 학습이다. 인지적 갈등은 학생들 스스로의 갈등에 대한 합리화 노력을 통해 해소된다.

3.3. 적용분야

커머그너티브 관점(commognitive framework)은 수학교육학의 다양한 연구 분야에서 수학 학습의 인지적(cognitive), 정서적(affective), 사회적(social) 측면을 통합하여 분석하는 개념적 틀로 사용되고 있다(Froman,, 2012; Sfard, 2012). Kim, Ferrini-Mundy, & Sfard(2012)는 한국어에서 ‘무한’은 일상적 용어로는 잘 사용되지 않고, 수학적 용어로만 사용되

는 반면에 영어에서 'infinity'는 일상적으로도 많이 사용되는 단어이므로 한국어를 사용하는 학생들과 영어를 사용하는 학생들의 무한에 대한 이해가 다를 것이라는 가설을 세웠다. 그들은 무한에 대한 담화의 수준을 무한 개념의 역사 발생적 원리에 따라 0수준에서 3수준까지로 분류하고, 각 수준에 속하는 담화 참여자들이 사용하는 수학적 용어, 시각적 매개체, 사실적 서술, 루틴을 바탕으로 담화 발전을 모델링하였다. 역사적으로 무한 개념의 발전은 과정으로서의 무한을 대상으로서의 무한으로 실재화(reification)[4]를 통한 수준 상승으로 볼 수 있기 때문이다. 이를 분석틀로 하여 한국어가 모국어인 학생들과 영어가 모국어인 학생들의 무한에 대한 수학적 담화의 수준과 특징을 비교하였다.

Wang(2011)은 Van Hiele의 기하수준이론을 커머그너티브 언어로 해석하였다. Van Hiele의 기하 수준의 각 단계별로 수학적 단어, 시각적 매개체, 루틴, 사실적 서술 각각이 보이는 특징을 정리하였다. 즉 Van Hiele의 기하 수준 이론을 커머그너티브 언어로 번역하였다. 기하 수준 이론에서도 각 수준의 상승을 이전 단계 수준에서의 기하적 대상에 대한 메타적 성찰에 의한 것으로 보기 때문에 이러한 번역이 타당하다고 보았다. Sinclair 와 Moss (2012)는 이 분석틀을 적용하여 동적기하가 학생들의 담화의 수준을 어떻게 상승시키는지 분석하였다.

이 연구에서도 발생모델의 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준, 형식적 수준을 커머그너티브 언어로 해석하여, 각 수준별로 수학적 단어, 시각적 매개체의 사용 용법, 루틴, 사실적 서술의 일반적 특징을 정리한다. 즉, 발생모델의 수준을 커머그너티브 언어로 번역하여 분석틀을 마련한다. 이후, 학생의 담화를 커머그너티브 분석틀을 이용하여 수준화한 후, 수준의 상승을 커머그너티브 관점과 발생모델에서의 메타 수준의 발전과정으로 설명한다. 그 결과 수준 상승 과정에서의 스토리텔링의 역할이 무엇인지 분석한다.

---

4) 과정에 대한 것에서 대상에 대한 것으로의 담화의 변화로 새로운 명사, 기호가 도입하게 된다. 예를 들어 '그는 몇 년을 배우고도 간단한 연산도 못해.'라는 문장을 '그는 학습 장애가 있어'라고 변화시키게 되는 것을 의미한다 (Sfard, 2008).

Ⅲ. 연구방법

1. 연구참여자

이 연구의 연구참여자는 서울특별시 소재 A 고등학교의 2학년 학생들이다. A 고등학교는 공립 고등학교로서 일부 교과에 특성화된 성향을 지니거나, 학업성취도가 매우 우수한 학생들을 선발한 학교가 아니기 때문에 고등학생들의 수학 학습을 관찰하기에 적절하다고 할 수 있다. 고등학교 2학년 2학기에 학습할 ‘확률’단원에 대한 교과 내용을 배워 본 적이 없어야 연구 목적을 달성할 수 있을 것이다. 따라서 연구를 위한 수업이 진행될 2013년 7월에 ‘확률’을 학습하지 않은 고등학교 2학년 학생들을 대상으로 모집 공고를 하였다.

이 연구의 연구 참여자는 고등학생이기 때문에 연구 참여에 대한 본인의 의사와 더불어 보호자의 동의를 얻은 경우에 연구에 참여하도록 하였다. 모집 공고에는 ‘스토리텔링 수학 교육’에 대한 간략한 설명을 덧붙여서 학생들이 연구 과정에서 받게 될 수업의 성격을 알도록 하고, 수업 참여 희망학생의 명단을 취합하였다. 이 연구에서 진행되는 수업은 모둠별 토론을 기반으로 하고 있다. 모둠별 토론식 수업에서 모둠원의 수는 3-5명 정도가 적절하며(Artzt & Newman, 1990) 모둠의 수를 4-5개 정도로 구성해야 관찰 및 분석이 가능하리라는 현실적인 판단에서 연구 참여자의 수를 20여명으로 정하였다.

연구 참여에 모집된 학생들은 총 16명으로 성적이 우수한 편에 속하는 자연계열의 여학생 15명과 인문계열의 여학생 1명이었다. 모둠 구성에서는 사전에 A 고등학교의 선생님으로부터 학생들의 전 과목 석차등급에 대한 정보를 득하여, 다양한 수준의 학생들이 한 모둠을 구성하도록 하였다. 단, 학생들에게는 교사가 임의로 모둠을 구성하였다고 알렸다. 한 모둠에 속한 학생들은 대부분 서로 다른 반에 소속되어 있었다. 하지만 이미 방과후 학습을 같이 한 경험이 많아, 서로 모두의 이름과 기본적

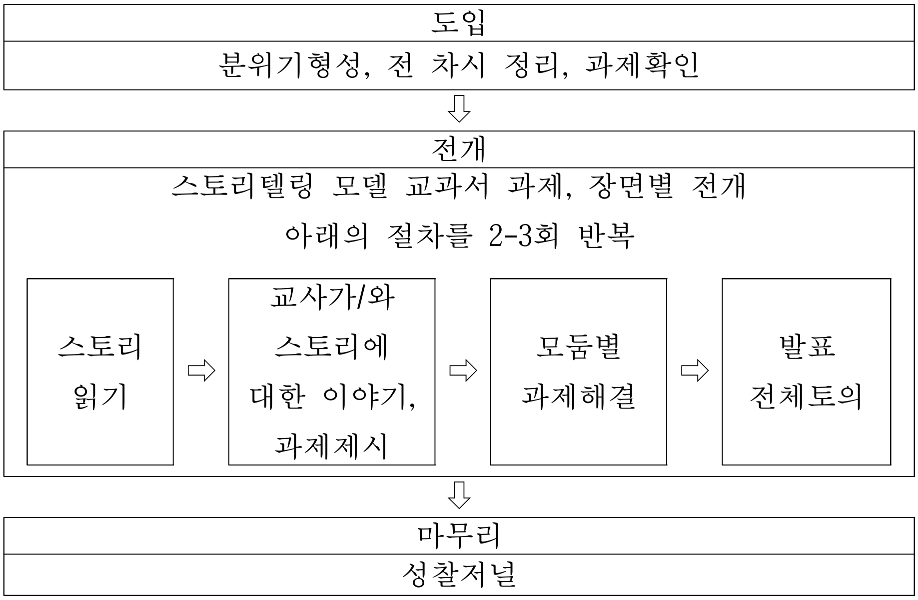
특성을 알고 있을 정도로 친근한 상황이었다.

2. 수업 설계 및 실행

수업은 2013년 7월 22일 월요일부터 2013년 7월 24일 목요일까지 3일간 13시 30분 ~ 15시 30분에 실시하였다. 수업 자료로는 권오남 등(2013)이 개발한 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』에 제시된 스토리와 과제를 활용하였다. 연구자는 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』개발 과정에서 “복소수와 이차방정식”단원의 연구 보조 및 집필에 참여하였다. 하지만 “확률”단원의 개발에는 직접적으로 참여하지 않았다. 따라서 스토리텔링의 교수-학습적 특징 및 교과서 전개 원리에 대하여 인지하고 있으면서, “확률”단원에 대해서는 객관적인 입장에서 수업을 할 수 있었다. 따라서 연구자가 직접 수업을 실시하기로 하였다. 연구자는 고등학교에서 교직경력이 8년차인 교사로서, A고등학교의 인근에 위치한 고등학교에 근무 중이다. 따라서 본 수업을 실시한 학생들과는 수업 이전에 서로 전혀 모르는 관계였다.

수업은 [그림 Ⅲ-1]와 같은 흐름으로 진행되었다. 수업의 도입에서는 일반적인 수업과 같이 분위기 형성, 전 차시의 정리, 과제 확인 등이 이루어졌다. 수업 전개 과정에서 일반적인 수업과 가장 다른 점은 학생들이 교과서의 스토리를 읽고, 교사와 스토리에 대한 이야기를 나누는 과정이 추가 되었다는 것이다. 스토리텔링 모델교과서는 플롯을 갖춘 스토리를 통해 내용을 전개하면서, 과제를 제시하고 과제를 통하여 학생들이 스스로 내용을 탐구하면서 수학적 사실을 도출하도록 서술되어있다.

교사는 각 과제별, 장면별로 학생들에게 스토리를 읽을 시간을 1~2분 정도 제공하였다. 이후에 교사는 교사의 직접, 간접 경험에 비추어 스토리에 대한 더 풍부한 맥락에 대한 설명을 추가하여 부연 설명을 하였다. 그리고 전체 토의의 형태로 학생들과 함께 스토리에 대한 간단한 의견을 나누었다. 그러면서 자연스럽게 모둠별로 해결해야 할 과제를 제시하였다. 3-4명의 4개 모둠을 구성하여 모둠별 탐구 및 토론을 기반으로 수업



[그림 Ⅲ-1] 수업의 흐름

을 실시하였는데, 교사의 개입은 지양하되 수시로 학생 활동을 관찰하면서 학생들이 어려움을 겪을 때에 최소의 도움을 주고자 하였다. 모둠별로 과제를 해결한 후에는 발표, 전체토의를 통하여 교실에서의 답을 합의 하고 수학적 지식을 도출하였다. 이후에는 성찰 저널을 작성하면서 수업을 마무리 하였다.

중간에 쉬는 시간을 10분 정도 포함하여 총 2시간여의 수업을 3회 반복하였다. 수업에서 다룬 주요 과제에 대한 스토리와 그에 따른 주요 논의 내용은 <표 Ⅲ-1>과 같다. 1~3차시에서 해결한 과제를 스토리의 흐름에 따라 순서대로 나열한 것이다.

이 연구에서 사용한 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』확률 편에는 총 네 명의 등장인물로 홍, 루이, 혜리, 선생님이 등장한다. 홍의 부모님은 베트남에서 한국으로 취업을 왔기 때문에, 홍이 한국 학교에 적응하는 것은 쉽지 않고, 성적도 중하위권이다. 홍은 자신이 좋아하는 보컬그룹인 레인의 메인 보컬인 루이의 팬 사이트에 ‘팬텀’이라는 가

<표 Ⅲ-1> 차시별 주요 과제에 대한 스토리와 논의 내용

차시-#	스토리	주요 논의 내용
1-1	- 등장인물 소개 - 홍이 수업을 마치고 집에 돌아와 오른쪽 내용의 과제 해결	- 2x2 바둑판 모양의 길에서 홍이 왼쪽 상단에서 오른쪽 하단으로 이동하는 경로의 수, 혜리가 오른쪽 하단에서 왼쪽 상단으로 이동하는 경로의 수 구하기 - 혜리와 홍이 만날 수 있는 지점과 확률 구하기 - 수학적 확률의 정의 복습
1-2	- 루이가 채팅창으로 홍에게 대화를 신청한 후, 함께 TV프로그램인 <도전 넘버원>에 동반 출연하여 첫 미션인 '몬티홀의 딜레마'를 해결할 것을 제안 - 홍은 망설이며 '몬티홀의 딜레마'에 대해 알아봄	- 메릴린 사반트(선택을 바꾸는 것의 확률이 높음)와 폴 에어디시(선택을 바꾸는 것에 의한 확률 변화 없음)의 의견 대립에 대한 이해 - 선택 과정에 대한 상황적 시뮬레이션(자바 애플릿)
1-3	- 홍이 자신의 생각을 정리한 후 수학선생님께 찾아가 관련 내용을 질문함 - 홍은 자신이 알게 된 내용을 루이에게 설명해줌 - 자신에 대한 부끄러운 마음에 루이의 출연 요청을 거절함	- 선택 과정에 대한 수학적 시뮬레이션(자바 애플릿) - 몬티홀 딜레마의 상황을 조건부 확률로 표현
2-1	- 루이가 아파서 입원을 하였으며, B형 간염일 수도 있어서 항체 검사를 받았다는 소식을 접함 - 홍은 루이가 예방접종을 하여야 하는 상황인지 알아보기로 함	- 간염예방접종주사 접종을 위하여 사전에 실시한 항체 검사 결과 예방접종을 해야 하는 경우를 기호로 표현 - $P(A\|B)$와 $P(A\cap B)$의 차이점 도출 - 예방접종을 해야 하는 상황의 확률 계산 - 확률의 곱셈정리 도출 - 독립, 종속 개념의 도입
2-2	- 루이는 홀로 <도전 넘버원> 촬영장으로 향함 - 루이로부터 개그맨 박씨가 A형 간염에 걸려 촬영이 중단되었다	- 실제 통계 자료에 근거하여 청소년에게 A형 간염과 성별의 독립, 종속여부 확인 - 독립, 종속의 정의 도출

	는 소식을 접하고 홍은 질병관리본부 홈페이지를 방문하여 우리나라 A형 간염의 발병 빈도를 알아봄	
3-1	- 홍과 혜리는 레인의 콘서트 티켓을 예매하는 과정에서 서로 같은 구역에 앉기 싫어서 다투게 됨 - 홍과 혜리가 서로 같은 구역에 앉게 될 확률을 계산해보기로 함	- 콘서트 티켓 예매 시에 홍과 혜리가 같은 구역의 자리를 뽑는 사건은 서로 독립인지 결정 - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$가 A, B가 독립인 것과 필요충분조건이라는 것을 도출
3-2	- 루이는 다시 한 번 홍에게 자신과 <도전 넘버원> 촬영장에 가줄 것을 부탁함 - 홍은 자신이 베트남인이라는 것을 루이가 모르기에 선뜻 촬영장에 간다고 대답을 못함 - 베트남에 대해 생각에 잠긴 홍은 신문에서 외국인 고용조사에 대한 기사를 접함	- 실제 통계 자료를 근거로 하여 한국에서 일하는 노동자들의 직종과 국적은 독립인지 결정
3-3	- 혜리는 ‘팬텀’이 루이와 동반 출연하지 않는다는 정보를 입수하고, 자신이 ‘팬텀’인 것처럼 가장하여 촬영장으로 향함 - 홍은 용기를 내어 촬영장으로 가서 혜리와의 수학 대결을 통해 자신이 ‘팬텀’임을 입증하고 루이와 함께 프로그램 촬영을 함 - 홍이 자신의 마음으로 세상을 정직하게 볼 것임을 마무리하는 에필로그로 수업 마무리	- 파스칼의 삼각형 모양의 관을 통하여 공을 낙하시킬 때 각 칸에 들어가게 되는 확률을 계산하고 일반화(왼쪽 오른쪽 확률이 같은 경우, 다른 경우) - 독립시행의 정리 도출

명으로 인기 팬픽을 연재하며, 홍의 학급 친구인 혜리 역시 루이의 열혈팬이면서 ‘팬텀’이 연재하는 팬픽의 구독자이다. 혜리는 홍이 팬텀이라는 것을 모른 채, 홍을 무시하면서 혜리와 홍 사이의 갈등이 발생한다. 수학 선생님은 홍의 수학적 잠재력을 눈여겨보아 홍의 질문에 친절하게 답해주시면서 홍의 수학적 역량과 자신감을 개발하고자 한다. 루이는 홍의 팬픽을 애독하면서 은근히 홍을 의지하게 된다. 이 네 명의 등장인물이 겪는 일을 스토리로 함께 경험하면서 학생들은 상황에 맞는 과

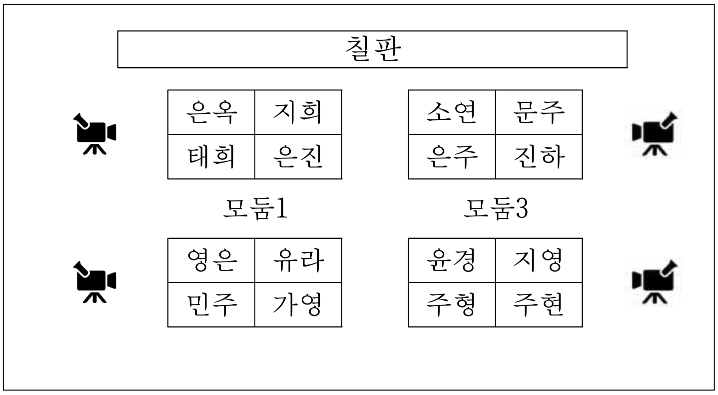
제를 해결하고, 그 과정에서 수학적 개념을 학습하게 된다.

이 연구에서 활용한 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』 확률 단원의 개발팀 중 한 분인 수학교육 전문가가 1일차 수업을 참관하였다. 수업 참관 후, 학생 수준에 맞는 수업 내용의 조직, 교과서 개발의 네 가지 원리가 잘 구현될 수 있도록 하는 수업의 발전 방향 등에 대한 적절한 조언함으로서, 스토리텔링 활용의 적절성, 향후 수업 방향 등을 점검할 수 있었다.

3. 자료의 수집 및 분석

3.1. 자료의 수집

수업의 교실 환경은 [그림Ⅲ-2]과 같이 세팅하였다. 모둠별로 착석하여 수업에서 제시되는 과제를 토론을 통해 해결하였으며, 각 모둠에 속한 학생을 [그림Ⅲ-2]에서와 같이 가명을 부여하였다. 총 3일간의 수업 중, 첫 째 날에는 모둠 1, 모둠2에 각 3명씩, 모둠3, 모둠4에 각 4명씩 총 14명이 참여하였다(태희, 가영불참). 둘째 날과 셋째 날에는 각 모둠에 4명씩 총 16명의 학생이 참여하였다. 모둠 3의 소연은 인문계열의, 다른 학생은 모두 자연계열의 여학생이었다.



교실 내에서 이루어지는 교사-학생 간 대화, 학생-학생 간 대화를 녹음하였다. 또한 대학생 신분의 연구보조원이 수업장면 촬영과 필드노트 작성을 도왔다. 수업이 종료된 후에는 녹음, 녹화된 자료를 바탕으로 모둠 토의 내용, 전체 토의 내용을 전사하였다. 또한 학생들이 학습과정에서 사용한 교과서를 모두 수거하여 분석에 활용하였다.

3.2. 자료의 분석

이 연구에서는 스토리텔링을 활용한 수학 수업이 학생들의 수학 학습을 어떻게 촉진하는가를 보고자 한다. 이를 위해 수업 중간에 학생들의 학습 수준의 발전이 이루어진 장면을 포착하여 발전을 촉진하는 스토리텔링의 역할을 분석하고자 한다. 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』는 실제적인 상황을 통해 학생들의 비형식적인 해결 전략을 활발한 스토리텔링 과정에서 형식화해간다는 측면에서 RME의 '발생모델' (Gravemeijer, 1997)로 학습을 수준화 할 수 있다. 따라서 이 연구에서는 발생모델에서 제시하는 학습 수준의 발전 단계에 따라 학생들의 수학 학습의 발전을 포착한다. 이 때, 학습의 발전 수준은 적절한 담화 분석을 통해 이루어 질 수 있다. 스토리텔링 교과서는 단원 전반에 걸친 스토리를 읽어나가면서 다양한 상황에서 주어진 과제를 해결하도록 하고 있다. 또한 소통의 원리에 따라 학생들이 내러티브적으로 생각하고 생각을 언어로 표출하도록 요구하고 있기에 학생들의 담화를 분석함으로서 수학 학습이 촉진되었는가를 분석하는 것이 가능하다. 따라서 수학적 담화의 발전을 수학 학습으로 보는 Sfard(2008)의 커머그너티브 관점을 취하는 것이 타당하다고 할 수 있다.

커머그너티브 관점에서 수학적 담화는 수학적 단어, 시각적 매개체, 루틴, 사실적 서술을 포함한 이야기이며 담화의 수직적 발전은 이전 담화를 기반으로 새로운 담화의 루틴을 창출해가는 메타수준의 발전으로 본다. 담화 참여자들이 사용하는 수학적 단어, 시각적 매개체는 서로 다른 수준에서 그 용법이 다르다. 또한 서로 다른 수준에서 루틴을 적용하는

규칙과 이로 인해 합의되는 사실적 서술의 성격이 다르다. 따라서 서로 다른 수준의 담화 참여자들 사이에, 혹은 수준 상승과정의 개인 내부에서는 커머그너티브 갈등이 발생한다. 이 경우 이전 수준까지의 담화에 대한 메타 수준의 담화, 즉 이전 수준까지의 담화에 대한 성찰(reflection)과 의사소통 참여자들간의 더 높은 수준으로의 합의 과정을 통하여 수학적 담화의 네 가지 요소를 변화시켜 담화가 메타수준에서 발전한다(Sfard, 2008; Sfard, 2012; Sinclair & Moss, 2012). 발생모델에서의 학습 수준의 향상 역시 이전 수준을 참조로 성찰을 통해 이루어진다는 면에서, 커머그너티브 관점과 발생모델의 학습 수준의 향상은 일맥상통하는 기제로 해석할 수 있다(Gravemeijer, 1999). 이 연구에서의 자료의 분석절차를 요약하면 〈표 III-2〉와 같다.

〈표 III-2〉 자료 분석 절차

담화의 수준 판별		담화수준 상승과정 분석
▪ 수준: 발생모델의 수준 ▪ 판별: 커머그너티브 관점의 수학적 용어, 시각적 매개체, 루틴, 사실적 서술	⇨	▪ 상승메커니즘: 발생모델/커머그너티브 관점의 메타수준의 학습 ▪ 상승과정에서 스토리텔링 활용 수업의 역할 분석

커머그너티브 관점에서 발생모델의 수준을 판별할 수 있는 분석틀은 〈표 III-3〉과 같이 한다. 상황적 수준에서 모델은 학교 밖의 일상적 생활의 상황에서의 탐구 상황이며, 학생들은 상황적 지식과 전략을 상황적 맥락에 맞게 사용하며 상황을 탐구한다. 따라서 학생들은 수학적 용어를 형식적으로 언급하기 어려우며, 교사가 언급하는 용어를 수동적으로 사용하거나 수학적 용어 대신 상황을 표현할 수 있는 일상적 용어를 사용하게 될 것이다. 시각적 매개체 역시, 상황을 구체적으로 표현하는 그림

<표 Ⅲ-3> 학습 수준의 분석틀

수준	용어		시각적 매개체	루틴	사실적 서술
	용어	용법의 변화		확률적 판단	
상황적 수준	-	용어를 직접적으로 언급하지 않음(수동적사용).	구체적으로 상황을 표현하는 그림	주관적, 상황적 판단	상황에 대한 서술
참조적 수준	조건부 확률 독립	익숙한 루틴에서는 단어를 활발히 사용하는 반면에 새로운 루틴이 필요한 상황에서는 용어의 의미를 제대로 파악하지 못함(루틴적사용).	수학 기호와 구체적 그림/일상적 언어표현의 혼재	수치적 정보에 근거하나 그에 대한 확신/정확성이 떨어짐 (의례적)	수치적 정보에 대한 서술
일반적 수준	조건부 확률 독립	용어를 어떠한 맥락에서도 확실하게 변함없는 문구로 인식하고 의미 있게 사용 (문구적 사용).	수학기호 사용, 벤다이어그램 같은 다양한 표현 도입	수치적 판단 (탐색적-회상, 구성, 입증)	수치적 정보의 일반화에 관한 서술
형식적 수준	조건부 확률 독립	수학적 기표가 투명해지고 기표에 대한 인식이 수학적 대상이 됨. 서로 다른 맥락에서 유용하고 적합한 인식을 사용함(대상적 사용).	어떠한 맥락에서도 적절한 수학적 기호 사용	형식적 판단, 적절한 전략의 선택 (탐색적-회상, 구성, 입증)	대상간의 관계, 기호화에 대한 서술

으로 나타낼 것이다. 상황 속에서 내용을 이해하기 때문에 그에 대한 인식이 수학적으로 이루어지기 보다는 구체적인 그림으로 드러난다. 확률적 판단에 대한 루틴은 수학적 과정을 배제한 채 상황, 개인의 신념에 근거한 주관적 성격을 지니며, 이로부터 상황에 대한 사실적 서술이 합의된다.

참조적 수준에서는 상황적 수준에서 제시된 상황을 교실에서의 교수학적 맥락에서 탐구한다. 이 때 수학적 모델은 상황과의 관계로부터 수치적 의미를 추출하고 상황 수준의 해결전략에 대응하는 비형식적인 전략은 뒷받침하는데 사용된다. 참조적 수준에서는 교수학적 맥락에서의 탐구가 이루어지기 때문에 각 용어를 인지하고 사용하지만, 주어진 맥락에서만 사용을 하며, 아직 일반화가 이루어지지 않은 상태이기 때문에 다른 루틴을 요하는 상황에서 용어를 사용하지 못할 수 있다. 즉, 용어에 대한 루틴적 수준의 이해를 한다. 교수학적 맥락에서 수치적 의미를 추출하기 때문에, 각 개념에 대하여 수학적 기호를 사용할 수 있으나, 일상적 그림, 언어적 표현과 혼재한다. 또한 각 수학적 기호에 대한 인식이 부정확할 수도 있다. 참조적 수준에서 사용하는 해결전략은 비형식적이다. 따라서 확률적 판단을 요하는 루틴에서 수치적인 판단에 근거하기는 하지만, 그 정확성이 떨어지며 일반화된 알고리즘을 적용하지 못한다. 따라서 이로부터 합의되는 사실적 서술 역시 수치적 정보에 대한 서술이다.

일반적 수준은 맥락에 대한 참조보다는 전략 자체에 수학적 초점이 놓인다. 따라서 모델의 역할이 변하고 전략은 수학적 시각으로 보아 더 이상 문제 상황과의 관계에 의존하지 않는다. 모델은 보다 일반적인 특징을 얻고 수학적 추론을 위한 기초로서 중요성을 가지게 되어 형식적 수학 수준을 위한 참조적 기초가 된다. 학생들은 상황과 독립적인 해석과 해결을 요하는 일반적 활동을 통해 추론을 위한 모델을 만들어나간다. 따라서 용어를 어떠한 맥락에서도 확실하게 변함없는 문구로 의미 있게 사용하며 수학 기호, 벤다이어그램 등 일반적 모델을 위한 다양한 시각적 표상을 도입한다. 참조적 수준까지의 루틴이 교사의 권위에 따라 답을 받아들이는 의례적인 것이었다면, 일반화수준에서는 본인의 입증, 회상, 구성을 통한 탐색적 성격의 루틴을 적용한다. 이로 인해 확률적 판단에서도 정확한 수치적 판단에 의거한 결정을 하며, 수치적 정보에 대한 연역적 추론에 근거한 일반화된 사실적 서술을 합의한다. 형식적 수준에서는 일반적 수준에서의 탐구 내용을 형식적인 절차와 표기를 가지

고 수행을 하는 기호화가 이루어진다. 각 용어의 의미에 대한 맥락적 적합성과 유용성을 알고 사용하므로 수학적 기표(signifier) 자체 보다 그에 대한 인식에 중점을 두고 단어를 사용한다. 예를 들어, 조건부 확률 개념에 대하여 조건부 확률이 무엇인지에 대한 생각의 과정 없이 조건부 확률은 곧 $P(A|B)$로 인식하고 이를 대상화하여 수학적 대상으로서 사용한다. 이렇게 인식한 수학적 기호를 시각적 매개체로 어떠한 맥락에서도 적절하게 사용할 수 있다. 확률적 판단을 요하는 상황에서 적절한 전략이 무엇인지를 파악하는 루틴을 적용할 수 있다. 이로부터 대상관의 관계를 파악하고, 이를 기호화하여 표현하는 사실적 서술을 합의한다.

<표 Ⅲ-1>에 제시된 수업 내용 중, 1차시의 첫 번째 과제(1-1)에 해당하는 것은 조건부 확률을 도입하기 전, 확률의 정의에 대한 복습 차원에서 제시된 것이기 때문에 자료의 분석 대상에서 제외하였다. 3차시의 세 번째 과제(3-3)는 독립시행의 정리에 관한 것인데, 사건의 독립과 종속에 대한 형식적 수준의 발전이 이루어진 상태에서 이를 실질적으로 확률의 계산에 적용하는 것이었기 때문에 분석이 불필요하다고 여겼다. 따라서 1-2부터 3-2까지의 담화를 분석하였다.

수업 전사자료, 비디오 녹화 자료, 학생들의 교과서 자료 등 다양한 경로를 통한 자료 수집의 삼각화를 시도하였다. 자료 분석 단계에서는 커머그너티브 관점을 취함으로서, 담화의 구성요소를 수학적 단어, 시각적 매개체, 루틴, 사실적 서술로 나누어 분석하였다. 이는 각 담화에 대해 네 가지 관점에서의 분석을 가능하게 하여 삼각화의 역할을 한다고 할 수 있다. 분석틀과 분석방법의 적절성은 분석틀의 적절성은 연구 동료와 전문가에 의하여 검증되었다.

Ⅳ. 연구 결과

첫 번째 연구 문제인 “스토리텔링을 활용한 수학 수업에서 학생들의 담화는 어떻게 발전하는가?”에 답하기 위하여 1절에서 학생들의 담화의 수준의 발전과정을 살펴볼 것이다. 이 연구에서 실시한 수업에서는 네 명의 등장인물이 겪는 일을 스토리로 함께 경험하면서 학생들은 상황에 맞는 과제를 해결하고, 그 과정에서 크게 ‘조건부 확률’, ‘독립과 종속’을 학습하였다. 3일간의 수업에서 각 개념은 플롯을 지닌 스토리를 기반으로 한 과제로부터 탐구되었다. 각 과제에 대한 학생들의 담화 분석을 근거로 학습 수준이 어떻게 발전되었는지 ‘조건부 확률’, ‘독립과 종속’의 각 개념 별로 서술할 것이다. 이 과정에서 수준 발전이 언제, 어떻게 이루어지는지 파악하여 2절에서 두 번째 연구 문제인 “스토리텔링은 학생들의 수학 학습을 어떻게 촉진하는가?”에 답할 것이다.

1. 담화의 발전

조건부 확률, 사건의 독립과 종속 각 개념의 수준의 발전과정을 수업의 흐름 순서에 맞추어 분석하였다. 조건부 확률의 경우 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준과 형식적 수준의 공존단계로 발전하였다. 사건의 독립과 종속의 경우 상황적 수준과 참조적 수준의 공존단계에서 일반적 수준과 형식적 수준의 공존단계로 발전하였다.

1.1. 조건부 확률

1일차 수업의 두 번째 과제에서 조건부 확률의 개념을 도입하게 되었다. 스토리에서 루이는 홍에게 함께 TV프로그램인 <도전 넘버원>에 출연하자고 제의하면서, 첫 번째 해결과제가 “몬티홀의 딜레마”라는 것을 알린다. 홍은 몬티홀의 딜레마가 무엇인지 찾아보는 과정에서 “메릴린 사반트(Marilyn von Savant)”와 “폴 에어디시(Paul Erdős)”의 대립

에 대해 접하게 된다. 메릴린 사반트는 [그림 Ⅳ-1]을 이용하여 문을 바꾸는 것이 당첨 확률을 2배로 높인다고 설명한 반면에, 폴 에어디시는 문을 바꾸는 것은 당첨 결과에 영향을 주지 않는다고 주장한다.

수업에서 교사는 학생들에게 자신이 홍이라면 프로그램에 나가겠냐는 질문을 하여 이에 대해 간단히 이야기 한 후, 몬티홀의 딜레마를 소개하였다. 몬티홀의 딜레마에 제시된 상황은 University of California, San Diego의 수학과 홈페이지에서 교과목 “Cryptography”의 활동 자료로 업로드 되어 있는 자바 애플릿[5]을 이용하여 학생들과 함께 시뮬레이션 하였다. 그 후, 학생들에게 교과서의 내용을 읽어가며 다음의 네 가지 질문에 대하여 생각해 보도록 하였다.

(1) 나라면 선택한 문을 바꾸었을까?
(2) 메릴린 사반트가 선택을 바꾸면 확률이 증가한다고 한 이유는 무엇일까?
(3) 폴 에어디시가 확률이 달라진다는 것에 반대한 이유는 무엇일까?
(4) 나는 누구의 의견에 동의하는가?

학생들은 주로 다음의 [그림 Ⅳ-1]을 보면서 논의를 진행하였다.

[그림 Ⅳ-1] 몬티홀 딜레마에 대한 그림 자료(권오남 등, 2013, p.11)

5) http://www.math.ucsd.edu/~crypto/Monty/monty.html

1.1.1. 상황적 수준

모둠1은 몬티홀의 딜레마의 상황은 이해하였으나, 이를 수학적으로 설명한 [그림 IV-1]을 제대로 이해하지 못하였다. 다음은 문제 상황에 대한 모둠1의 논의 내용 중 일부이다.

206	은진	그럼 2분의 1 아니야? 염소 택하는 거...
207	은진	아 이거 3분의 1 곱하기 2분의 1한거 아니야?
208	은옥	왜?
209	은진	위에서 세 개중에 한 개 고른 다음에 그 다음에 두 개 중에 하나 하는 건데 그게 염소면 1이니까...
210	은옥	근데, 난 3분의 1 자체가 이해가 안 돼
211	은진	응?
212	은옥	3분의 1이 자체가
213	은진	근데 그 문을 열기 전에 선택, 선택을 한 번 하잖아, 선택을 한 다음에 문을 열고 다시 고르라는 거 아니었...어?
214	은옥	그럼 6분의 일... 아 모르겠어
215	은진	아 모르겠어
216	은진	어...그럼 우린 왜 틀린 거지?
217	은옥	근데, 문을 하나 선택하면 선택한 거 외에서 염소가 있는 거 고르는 거지?
218	은진	아 진행자가 열때?
219	은진	그지
220	은진	그럼 차가 있는거 열어주겠어? 진행자가?
223	은진	뒤에 나오나 꼼꼼히 읽어보고 싶다. 답이 있을 것 같애.

은진은 처음에 잃을 확률이 $\frac{1}{2}$이라고 생각하다가 11쪽의 그림을 보고, 잃을 확률을 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}$임을 제안한다 하지만 은옥은 최초에 1번에 차가 있을 확률을 가정했다는 것을 제대로 인지하지 못했는지 $\frac{1}{3}$을 잘 이해하지 못한다. 이에 은진이 처음 선택도 확률로 계산해야 함을 설명하여 은옥이 납득하는 듯하였다. 자신들이 생각하는 확률인 이 틀렸다고 생각

되자, 그 원인을 파악하려고 은옥은 문제 상황에 놓친 것이 없는지 다시 짚어가다가 별다른 생각의 변화를 드러내지 않았다. 은진도 문제 상황을 되짚어가며 다시 생각을 정리해보려고 애쓰다가, 이내 뒤에 꼼꼼히 읽어 답을 찾아보고 싶다면서 생각을 포기한다. 논의가 어느 정도 진행된 이후 교사는 다음과 같이 전체 학생들에게 누구의 생각에 동의하는지 질문하고 모둠별로 논의를 지속하도록 하였다.

228	교사	문제 상황을 좀 이해를 했으면 우리 네 가지에 대해 생각을 해볼까요? 첫 번째는 아까 물어보긴 했죠~ 나라면 원래 어떻게 했을 것인가 메릴린은 왜 증가한다고 했고 폴은 왜 반대했고 나라면 어떻게 그러면 할 것인가
232	은진	난 안 바꿔
233	지희	폴이 같다 그랬지
234	은진	폴이 맞는 것 같은데
238	은진	음...1번을 선택하고~ 최초에 1번을...
240	은진	난 이분의 일...선택을 하니까
251	은옥	이분의 일...근데.. 1번을 선택했다 안 나오면 2번, 3번에 차가 있으면 그거 중에 한 가지잖아
252	은옥	2번, 3번에 차가 있으면..보여줄 염소는 하나고..이분의 일..
253	은진	응
257	지희	(11쪽의 메릴린 사반트의 자료를 보면서) 뭔가 이게 근데 뭔가 더 멋있어보여
258	은옥	근데 말은 안 돼
259	은옥	상식적으론 말이 안 돼
260	지희	어 상식적으로는 말이 안되는데
261	은옥	이론적으로는..
262	지희	어..
263	은옥	(옆 조를 바라보며) 이분의 일? 우리도 이분의 일이야 근데 설명을 못하겠어.

교사의 질문에 은진은 첫 선택을 바꾸지 않겠다고 하면서, 폴 에어디시의 입장을 지지하였다. 이어지는 은진의 발언에서 사회자가 염소가 있는 한 개의 문을 열어 준 상황에서 당첨될 확률이 라고 생각함을 알 수

있다. $\frac{1}{2}$을 수학적으로 해석한다면 문을 바꾸거나 바꾸지 않거나 당첨 여부는 같은 가능성을 갖게 된다. 하지만, 은진은 본인의 이러한 수학적 판단에도 불구하고 문을 바꾸지 않겠다는 입장을 보이고 있다. 즉, 확률적 판단에 대한 루틴에서 수치적 확률 의거하여 판단을 하기 보다는, 주관적, 심리적인 판단을 하고 있음을 알 수 있다. 지희와 은옥은 문을 바꿀지의 여부를 표현하지는 않았으나, 메릴린 사반트의 의견이 상식적으로 옳지 않을 것이라 생각한다. 당첨 확률이 $\frac{1}{2}$라는 것은 사회자가 문을 열어주고 난 후의 상황을 전사건으로 간주하였기 때문이다. 전사건을 어떻게 설정하는지에 따라서 확률이 달라진다는 것을 생각하지 못하고 있다. 즉, 모둠 1의 학생들은 전사건에 따라 확률이 달라질 수 있다는 것을 전혀 인식하지 못하고 있으며, 확률의 수치에 따라 의사 결정을 하기 보다는 주관적, 심리적 요인에 의한 판단을 한다. 또한 수학적 용어보다는 '이론적으로, 상식적으로' 와 같이 일상적이고 비형식적인 용어로 상황을 이해하고 있다. 수학적 기호의 사용보다는 상황을 구체적인 그림으로 표현한 [그림 Ⅳ-1]을 시각적 매개체로 한 대화를 이어가고 있다. 따라서 학생들의 수준이 상황적 수준에 머물러 있다고 볼 수 있다.

1.1.2. 참조적 수준으로의 발전

모둠 3의 학생들은 교사의 도움을 받아 [그림 Ⅳ-1]을 해석할 수 있었고, 이를 토대로 하여 조건부 확률에 대한 참조적 수준으로의 발전을 하였다. 다음은 모둠 3의 담화 내용이다.

1	소연	왜 육분의 일이야?
2	문주	여기서 총 이거 따지지 말고 여기서 이리로 바꾸는거, 하나 열어준다 했잖아 여기서 이리로 바꾸는거 여기서 이리로 바꾸는거 여섯 가지잖아 그중 내가 이거 선택했으니까 이거 하던가...이거 이거 하던가 이거...이렇게 바꿀 수 없었잖아 그러니까 육분의 일

4	문주	얘는, 어...이건 잃을 확률이니까...하나가 아니니까...아 이거 그거 아니야 자기가 가진게 하나니까 잃을 확률이...
5	진하	총 얘가 전체 경우의 수가 여섯 가지가 이렇게 이렇게...
6	진하	총 할 수 있는게 이렇게 되고 이렇게 되고

문주, 소연은 첫 번째 문을 고르고, 이후에 문을 바꾸는 시행에서 변경할 수 있는 모든 경우의 수를 계산한 뒤 차를 잃게 되는 경우, 얻게 되는 경우의 수를 세어 확률을 파악하려다가 다음과 같이 난관에 부딪혔다. 학생들이 생각하는 확률의 정의는 전체 경우의 수와 사건이 일어나는 경우의 수의 비율이기 때문이다 이에, 문주는 모둠 활동을 둘러보던 교사에게 다음과 같이 도움을 청하였다.

23	문주	선생님, 이거 왜 육분의 일이 나와요?
24	교사	육분의 일이 왜 나오는지 하나 하나 따져보면은 1번에 차가 있는 확률이 얼마지?
25	문주	삼분의 일
26	교사	그러면 진행자가 염소가 있는거 열 수 있는게 몇 가지지?
27	문주	두 가지
28	교사	그 중에서 하나를 여는거지 그러면 삼분의 일, 이분의 일 해서..
33	소연	얘는요?
34	교사	얘는 이제 너가 이해했으니까 설명을 좀..
35	문주	일단 얘가 차가 여기 있을 확률이 삼분의 일이고 여기서 두 가지로 갈리는데 얘가 문을 열거나..이렇게 문을 열잖아 둘중에 하나를 그런데 그 둘중에 하나를 연다는 의미하는거 자체가 얘를 선택하거나 얘를 선택하는거 두가지 경우를 의미하니까
36	소연	아~ 얘는?
37	문주	2번에 차가있을 경우...음..잠깐만..1번을 선택했다가..아 그럼 얘는 삼분의 일 아 미안 이거는 얘가 하나를 일단 선택하면 무조건 당첨되니까 그래서 삼분의 일이야
38	소연	그냥?
39	문주	응
40	소연	아 가운데 있으면 무조건?
41	문주	바꾸면 무조건 응 얘를 열든, 얘를 그니까 2번에 차가 있는 경우에는 얘가 열리잖아 그럼

다가 두 번째 차를...처음에 있는 차를 고를 확률이 삼분의 일이 잖아 없는 확률이 삼분의 이니까..그래가지고.

교사는 상황을 아직 학습하지 않은 곱셈정리를 이용하여 설명해주었으나, 문주는 개념을 바로 이해하여 35와 같이 소연에게 설명할 수 있게 되었다. 소연과 문주의 대화가 진행되는 가운데 혼자 골똘히 생각에 잠겨있던 은주는 자신의 생각을 수정하여 친구들에게 말하였고 곧이어 전체 토의가 진행되었다.

다음은 모둠별 논의에 이어진 전체 논의 내용이다.

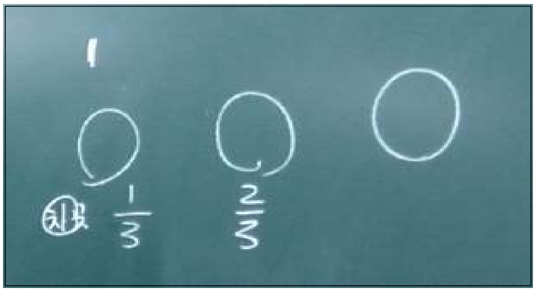
267 교사 그러니까 메릴린이 삼분의 2라고 했잖아요, 바꾸는 것이 더 유리하다 거기에 찬성하는 사람?

268 은주 (손들음)

269 교사 오..아까는 안 바꾸겠다고 그러더니

270 은주 아 이론적으로는..

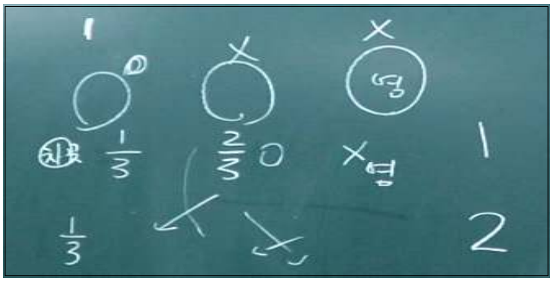
279 은주 (앞으로 나와 칠판에 문 세 개를 그리며) 문이 이렇게 이렇게 이렇게 있는데 여기에 차가 하나 이렇게 있는데 여기가 이게 차가 있는 곳을 확률 차가 있는 곳을 고를 확률이 삼분의 일인데 차가 없는 곳을 고를 확률의 삼분의 이니까..만약에,,,그냥 이렇게만.... 해도 되지 않아요?



[그림 Ⅳ-2] 담화 279에 사용된 은주의 시각적 매개체

280 교사 네?

281 은주 차가 있는 확률의 삼분의 일인데 차가 없는 곳은 삼분의 이니까 우리가 지금 얘를 한 번에 골라서 당첨되면 삼분의 일인데, 얘를 골랐을 때 당첨이 되려면 이렇게 바꿔야 되니까 그래서 얘가 더...높지 않을까요?



[그림 Ⅳ-3] 담화 281에 사용된 은주의 시각적 매개체

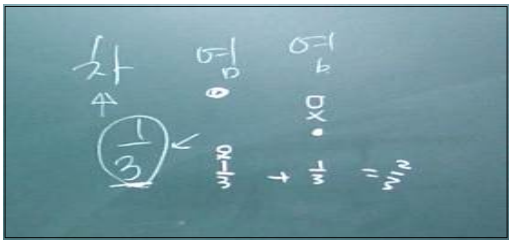
282 은주 이게첫번째고르는거고이게두번째고르는건데...만약에...차가...

283 교사 다시 잘 써보면은

284 은주 말로 표현을 못하겠어요

285 교사 말로 표현을 못하겠어요? 여기 차가있고, 염소가 있고, 염소가 있고 이렇게 되어 있었는데 처음에 여기를 고를 확률이 3분의 1이었다는 거죠, 이게 셋중에 하나가 있었다는 거니까 그리고 나서는요?

286 은주 그리고 없는데 고를 확률이 3분의 2인데 만약에 여기를 골랐으면은 문을 열때 여기를 열어주니까 그럼 여기가 아니라는걸 알잖아요 그러면 얘를 바꿔야지 차가나와서 그럼 이게 삼분의 일이고 만약 여기를 골랐으면 여기를 열어줘서 삼분의 일인데 두개를 더해서 삼분의 이고 만약 처음에 여기를 열었으면 삼분의 일밖에 안되니까 아무거나 골라도 바꾸는게 조금 더 유리한거..



[그림 Ⅳ-4] 담화 286에 사용된 은주의 시각적 매개체

287 교사 은주 이야기 혹시 이해 되셨어요? 들렸어요? 들렸어요? 들렸으나 듣지 않은것 같은데? 아 어떠셨어요?

290 민주 무슨 말 하는지는 알겠는데 잘..

291 교사 네..그래요, 나도 무슨 말 하는지 알겠는데 어 내가 정리해서 말해주진 않을게요 아직 우리가 할 활동이 몇 개 더 있거든요 그거 한 다음에, 은주가 이해했다는건 알겠어요. 그러니까 어떤 식으로 이해했는지 다시 한 번 생각을 해볼게요. 그럼 영은이는 왜 계속해서 폴이 맞는 것 같아요?

292 영은 어 이게, 문이 세 개인데 염소 있는거 하나 보여주잖아요 그러면 차하고 염소 있는 거 일대일이잖아요 그럼 둘중에 고를 수 다시.. 두 개 중에 하나 고르는 확률이 두 개 중에 하나니까 이분의 일이잖아요. 그래서요..

은주는 앞서서 자바애플릿 시뮬레이션 시에 다시 생각하기가 귀찮기 때문에 문의 선택을 바꾸지 않는다는 확률적 판단의 루틴을 보였던 상황이었다. 하지만, [그림 Ⅳ-1]을 해석하면서 자신의 생각을 정리한 결과, 메릴린 사반트의 의견에 동의하게 되었다. 모둠 내에서의 은주의 발언과, 전체 토의에서 은주의 초기 발언을 보면 처음에는 은주가 메릴린 사반트의 의견에 동의하는 이유를 명확히 설명하지는 못했다. 설명과정에서 시각적 매개체로 [그림 Ⅳ-2]와 같이 문을 동그라미로 형상화하고, 그 밑에 최초에 각 문을 고르게 될 확률만 표현하였다. 하지만, 거듭되는 교사의 질문에 의해 점점 자신의 생각을 정교화 하였다. 은주는 처음에 차가 있는 문을 고르면 두 번째 선택에서 바꾸지 않아야 당첨이 되고 처음에 차가 없는 문을 고르면 두 번째 선택에서 바꾸어야 된다는 사실을 인지하였다. 이번에는 [그림 Ⅳ-1]에 제시되었던 상황을 순서대로 과정적인 측면에 주목하여 시각적 매개체로 [그림 Ⅳ-3]과 같이 O, X기호를 이용하여 언제 당첨이 되고 안 되는지의 상황을 설명하였다. 그 후, 교사가 칠판에 ‘차 염 염’을 적으며 다시 설명할 것을 요청하자, [그림 Ⅳ-4]과 같이 각 단어 아래 벌어질 수 있는 상황을 O, X로 재정리하고, 각각에 해당하는 확률을 구하여 설명하였다(시각적 매개체). 즉, 당첨이 될 때 문을 바꾸었을 확률은 처음에 차가 없는 문을 선택했을 경우이므로 확률이 $\frac{2}{3}$으로 더 높다는 것이다.

이 경우 은주의 수학적 용어 사용은, 조건부 확률에 대한 명확한 정의를 알지는 못하는 상태이기 때문에 조건부 확률이라는 용어를 직접적으로 사용하지는 못한다. 하지만 비형식적으로 조건부 확률을 이해했다고 볼 수 있다. 전사건을 당첨이 된 경우로 생각하고 문을 바꿀 때와 바꾸지 않을 때의 당첨 확률을 비교했기 때문이다. 또한 확률적 판단의 루틴에서 비교적 설득력 있는 수치적 추론에 의한 판단을 하고 있다. 따라서

은주의 발전 수준은 상황적 수준에서 참조적 수준으로의 발전과정에 있다고 볼 수 있다.

한편, 영은은 앞서 모둠1에서의 은옥, 은진과 같이 사회자가 염소가 있는 한 개의 문을 열어 준 상황에서 당첨될 확률이 $\frac{1}{2}$라고 생각함을 알 수 있다. 메릴린 사반트와 폴 에어디시의 논쟁은 각기 생각하는 확률의 전사건에 대한 이해의 차이로 인한 커머그너티브 갈등에 의해 발생한 것이라고 생각할 수 있다. 교실 상황에서도 은진, 은옥은 폴 에어디시의 의견에 동의하였고, 은주가 메릴린 사반트에 동의하는 자신의 의견을 이야기 한 이후에도 영은이 여전히 폴 에어디시의 의견에 동의함을 알 수 있다. 이 갈등을 해결하기 위하여 교과서에서는 몬티홀의 상황에 대한 구체적인 시뮬레이션 과제를 제시한다.

교사는 교과서의 과제를 각색하여 다시 전체 활동을 통하여 앞서 사용했던 자바 애플릿을 이용하여 몬티홀의 문제를 시뮬레이션하였다. 그 결과에 따라 당첨된 사람들 중 한명을 선택했을 때, 그 사람이 첫 번째 선택을 변경했을 확률이 변경하지 않았을 확률의 2배가 됨을 구체적인 수치에 근거하여 확인하였다. 또한 거북수학 자바 애플릿에서도 몬티홀의 상황을 20회 시뮬레이션 하여 은주의 생각을 확인하였다[6]. 이후에는 조건부 확률을 다함께 정의하고 조건부 확률의 개념을 적용하여 문을 바꾸는 것이 두 배 더 유리하다는 것을 사실적 서술로 도출하였다.

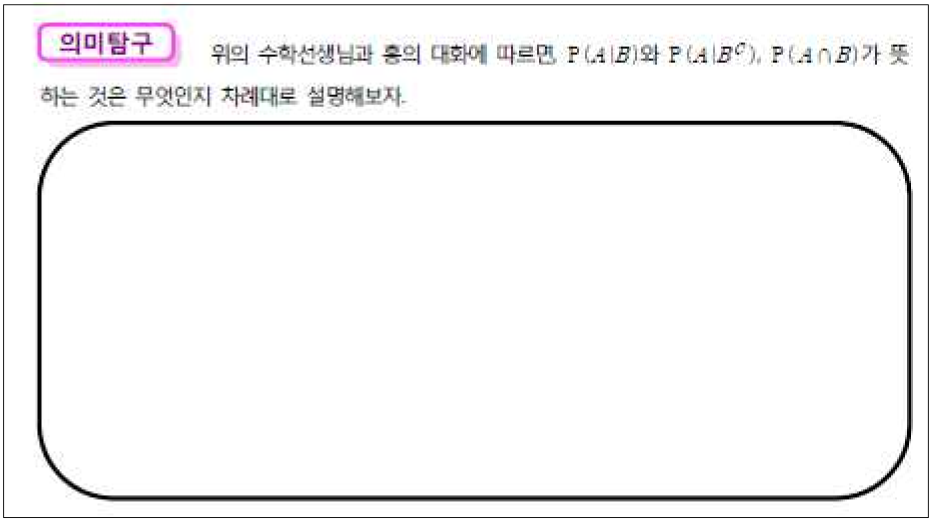
1.1.3. 일반적, 형식적 수준으로의 발전

2일차 수업은 1일차에 학습한 조건부 확률의 정의와, 조건부 확률을 이용한 몬티홀 딜레마의 해석을 교사의 주도로 다시 정리한 후 새로운 학습을 시작하였다. 홍은 루이가 아파서 입원을 하였으며, B형 간염일 수도 있어서 항체 검사를 받았다는 소식을 접하게 된다. 이에 홍은 루이가 예방접종을 하여야 하는지를 판단해보기로 하고, 학생들은 이 과정에

6) http://www.javamath.com/class/

동참하게 된다.

교사는 1일차 수업에서 몬티홀의 딜레마 상황이 충분히 설명되지 않아, 학생들의 학습이 제대로 이루어지지 않았음에 대한 고민과 성찰을 하였다. 따라서 교사는 학생들에게 교과서의 스토리를 읽도록 하는 것 이외에도 교사 본인의 경험을 살려 예방 주사의 메커니즘, 항체 등의 용어에 익숙해지도록 충분한 상황 설명을 하였다. 또한 교과서에 발문으로 제시된 '루이가 예방접종을 하지 않는 경우' 와 '예방접종을 하는 경우' 에 대해 모둠별로 이에 대해 이야기를 나누어보도록 하였다. 그 결과 논의를 통하여 항체가 있을 때 검사가 바르게 판정되는 경우와 항체가 없을 때 검사가 바르지 않게 판정되는 경우에 예방주사를 맞지 않아도 된다는 것을 파악하였다. 이후 [그림 Ⅳ-5]와 같은 교과서의 내용에 따라, 루이에게 항체가 있을 사건을 A라 하고, 항체검사가 바르게 판정될 사건을 B라고 할 때, $P(A|B)$, $P(A|B^c)$, 그리고 $P(A\cap B)$가 의미하는 것이 무엇인지를 모둠별로 논의하도록 했다.



[그림 Ⅳ-5] 예방접종여부에 대한 과제(권오남 등, 2013, p,35)

다음은 위의 문제에 대한 모둠 1의 담화 일부이다.

119	은진	그럼 <u>얘랑 얘랑 같은 건가?</u>
120	지희	어...그런...거 같은데...아닌가
121	은진	P(A) 랑..이거랑 이거랑 같은거야?
122	은옥	왜 같아?
123	태희	뭐..뭐가 같다는 거야? 아 그거랑 그거? 아니...왜 같아?
124	은옥	순서가...
125	태희	왜같아?
126	지희	<u>이렇게 나눈건데 아니..B로 나눈건데</u>
127	은진	<u>그지그지 나봐 이거 P(B)분에 P..이거 이렇게</u>
128	은옥	<u>순서가 다르잖아</u>
129	지희	이거는 이렇게...
130	은진	아...B가 있는 거 중에 A가 일어나고 얘는 A교집합 B가 있고
131	은옥	<u>아 근데 똑같은 말인데</u>
132	은진	그니까 얘는 B가일어난다는...
133	은옥	똑같애~
134	은진	B는 아래 존재하는거고, 그렇잖아

학생들은 1일차 수업에서 조건부 확률의 정의를 $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$로 배운 상태였기 때문에, 이 정의를 적용하여 $P(B|A)\neq P(A\cap B)$이 성립해야 함을 인정하지만(126, 127, 130), 주어진 상황에서 조건부 확률 $P(A|B)$와 두 사건의 곱사건에 대한 확률 $P(A\cap B)$가 다름을 설명하지 못하였다. 몬티홀의 딜레마에서와 다른 맥락에서의 조건부 확률이 주어지자 이를 제대로 해석하지 못하는 것이다. 즉 조건부 확률 용어에 대한 루틴적 이해를 하고 있다. 은옥은 처음에 $P(A|B)$를 B가 일어난 후, A도 일어나는 경우로 해석했는지 "순서가 다르다(128)" 고 하며 해석을 시도하다가 이내 두 확률이 똑같다고 생각하였다. 즉, 이들은 수식으로 표현되는 확률과 문장으로 표현되는 확률 사이의 커머그너티브 갈등을 겪게 되었다 이들은 이를 해결하기 위하여 지희는 다음과 같이 $P(A\cap B)$를 $P(A|B)$를 이용하여 언어적으로 표현할 수 있는 다른 방식을 탐구하였다.

160	은진	어 모르겠....괜찮은 생각인데
161	은진	맞는것 같기도 한데
162	은진	아 그럼 해보면되지 이거 식으로 세워서
163	지희	응
164	은진	아, 근데...
165	지희	응
166	은진	이거잖아
167	은진	그럼 이게 나오잖아
168	은진	안나올것 같지 않아? 그지
169	은진	이게 이거니깐 이건 이거잖아
170	지희	응
171	은진	그럼 합하면 이거나오잖아 근데 이게 안나올것 같아
172	지희	그럼 이거...이렇게 하면 뭔가...으음응
176	지희	이거 말로하면 괜찮지 않아?
177	지희	말로하면 검사가 바르게 되고
178	은옥	근데 p(AnB)는n(AuB)분에 n(AnB)지... A합 아니아니 n(S)
183	지희	둘이 합치면 막 이상하게 나와
190	은옥	야야 이거 있잖아 이게...이게이거지 P(A) 더하기 이거고 이게 이거고
191	은진	어어
192	은옥	그래서 어떻게 다르게?
193	은진	응
194	은옥	그러면 이거 아니양?
195	은진	그래서 내가...지희가 말한게 얘랑 P(B¦A)랑 합친게 교집합일거 같아서 한번 해봤거든? 근데 안나와.
196	은옥	뭐랑 합친게?
197	은진	얘랑 얘랑
198	은옥	뭐?
199	은진	합친게 왠지 느낌에 될거 같아서 해봤는데 근데 안나와
200	은옥	아닐거 같은데?

지희는 항체가 있고 항체검사를 바르게 받게 되는 것을, 항체가 있을 때 항체검사가 바르게 판정되는 것과 항체검사가 바르게 판정되었을 때, 항체가 있을 확률의 합으로 추측하고 $P(A\cap B)=P(B|A)+P(A|B)$라는 가설을 설정하였다. 그리고 각 조건부 확률의 수학적 정의로 부터 연역적인 과정을 거쳐 가설이 틀렸음을 확인하는 루틴을 보였다. 그럼에도 불

구하고 지희는 언어적으로 표현했을 때, $P(A \cap B) = P(B|A) + P(A|B)$이 성립한다고 생각한다(176).

지희의 위와 같은 추측으로 지희가 $P(B|A) \neq P(A \cap B)$임을 맥락적으로 받아들이지 못하는 이유를 추론할 수 있다. $P(A|B)$는 맥락적으로 항체 검사가 바르게 판정되었을 때, 항체가 있을 사건의 확률을 의미한다. 즉, 항체 검사가 바르게 판정된 사람들 중에서, 실제로 항체가 있는 사람의 비율을 의미한다. 반면에 $P(A \cap B)$는 항체가 있는 사람, 없는 사람을 모두 포함한 전체 집합에서 항체가 있으면서 검사가 바르게 판정된 사람의 비율을 의미한다. 모둠1 학생들의 조건부 확률에 대한 이해 수준은 아직 참조적인 수준에 머물고 있으며, 몬티홀 문제와 다른 맥락에서 전사건이 제한된다는 것을 전혀 인지하지 못하고 있다. 문장에서 표현되는 “항체 검사가 바르게 판정되었을 때”에서 “~었을 때”를 전사건을 제한하는 의미(Given condition that~)로 해석하지 않고, 한 사람, 예를 들어 루이의 입장에서 검사가 바르게 판정되는 시점(When/After~)로 , 즉 검사가 바르게 판정된 후, 알고 보니 실제로 항체가 있었을 때와 같은 순서관계에 의한 해석하기 때문이다. 이로 인해 항체가 있고 항체검사를 바르게 받게 되는 것을, 항체가 있을 때 항체검사가 바르게 판정되는 것과 항체검사가 바르게 판정되었을 때, 항체가 있을 확률의 합이라고 생각하게 되는 것이다.

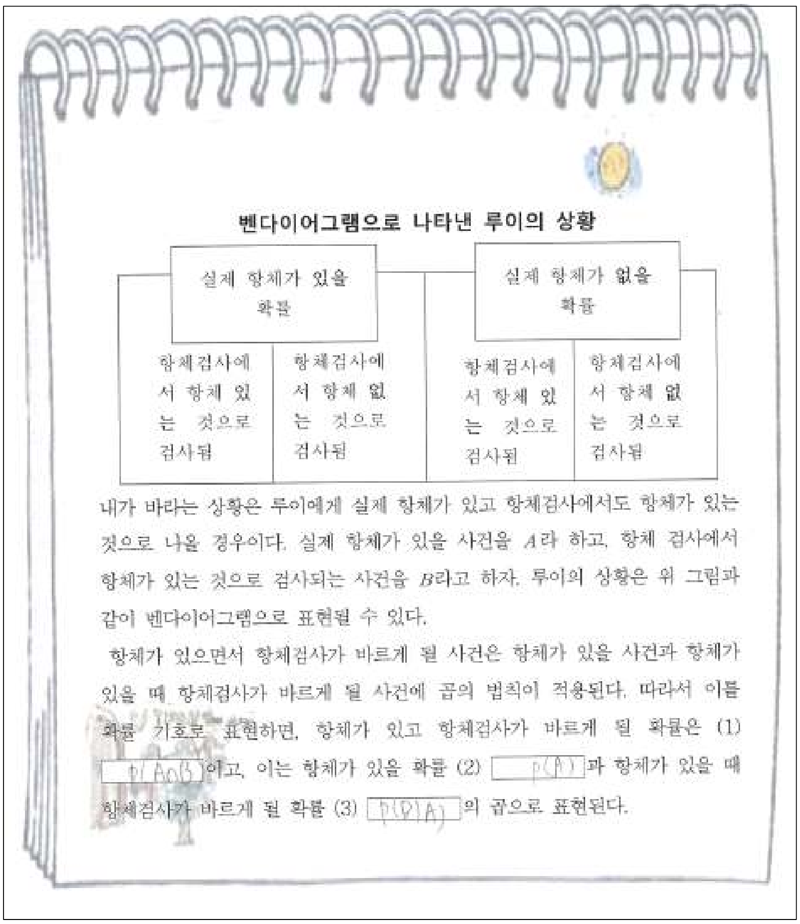
전체논의를 위하여 발표자를 선정하느라 교실이 시끄러웠음에도 계속 문제 상황에 몰입하던 은진과 지희는 다음과 같은 대화에 열중했다.

224	은진	이건 검사해서 옳게 된 케이스 중에서 항체가 있는 거고, 이건 검사가 올바르고! 항체가 있는 경우
227	지희	이게 말이 검사가 바르게 되있으면서 항체도 있는거
229	지희	이거랑 항체가 있을때 검사가 바르게 된 경우??? 이거랑...항체가 있을 때
230	은진	생각해보면 맞는것 같은데
232	지희	그림 그리면 똑같다

은진은 지희에게 “이건 검사해서 옳게 된 케이스 중에서 항체가 있는 거고, 이건 검사가 올바르고! 항체가 있는 경우”라고 하면서 적절한 언어적 표현을 유도하였다. 특히 검사해서 옳게 된 “케이스 중에서”라고 말하여, 전사건을 검사해서 옳게 된 경우로 제한하는 적절한 해석을 보였다. 또한 문제에서 요구하지 않았음에도 불구하고 각 확률을 벤다이어그램을 이용하여 표현해 보면서 사고를 확장하였다(232~236, 용어, 시각적 매개체). 단, 지희의 “그림 그리면 똑같다”라는 표현이 무엇과 무엇이 같다고 한 것인지는 불분명하다. 지희의 교과서 자료에도 그림을 그린 흔적이 남아 있지 않아 분석이 불가능하였다. 하지만, 조건부 확률을 다양한 수단으로 표현하며 개념을 이해하려고 시도했다는 점에서 지희의 발언은 의미가 있다. 하지만 조건부 확률의 개념을 탈맥락적 상황에서도 문구적으로 사용하는지, 즉 다른 맥락의 상황이 주어지더라도 그 의미에 대한 인식의 변화가 없이 사용할 수 있는지 지금까지의 담화만으로 확신할 수 없다. 따라서 일반적 수준으로의 발전을 확신할 수는 없는 수준이다.

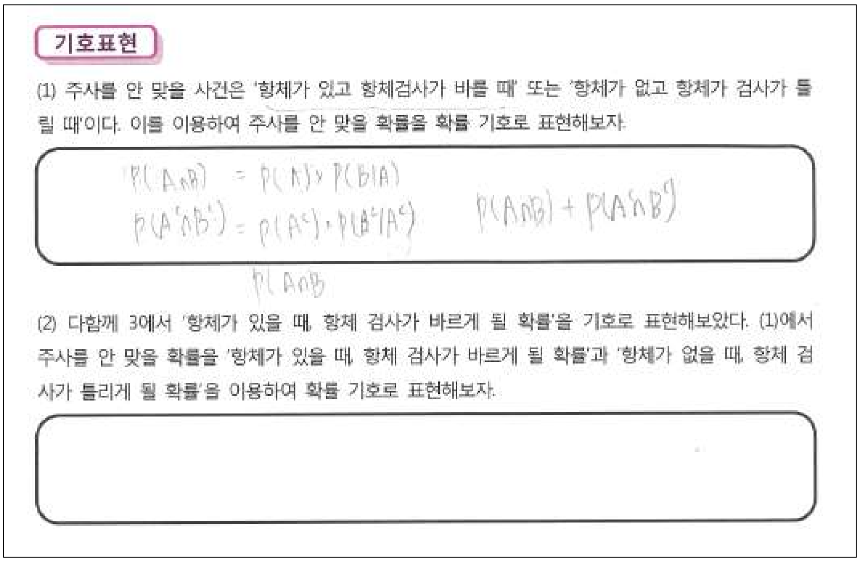
이어서 학생들은 [그림 Ⅳ-6]과 같이 모델교과서에서 유도하는 대로 확률의 곱셈정리를 도출하였다. 모델교과서에서는 루이가 예방주사를 맞게 되는 경우를 벤다이어그램으로 표현하였다. 이 벤다이어그램은 실제로 항체가 있는 경우, 없는 경우로 크게 경우를 나누고 그 안에서 항체 검사가 옳은 경우, 옳지 않은 경우로 나누어 경우의 수에서 적용했던 곱의 법칙과 같은 것을 확률에도 정의하도록 하면서 자연스럽게 곱의 법칙을 유도하도록 하는 역할을 하였다.

다음 과제는 주사를 안 맞을 사건을 확률 기호로 표현하고, 곱셈정리를 적용하여 주사를 맞지 않을 확률을 계산하는 것이었다. 먼저 “항체가 있고 항체검사가 바를 때 또는 항체가 없고 항체 검사가 틀릴 때”를 $P(A \cap B) + P(A^c \cap B^c)$로 표현한 후, 주사를 맞지 않을 확률을 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A)$, $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c|A^c)$로 나타내는 것이었다.



[그림 Ⅳ-6] 확률의 곱셈정리 도출 과제 (권오남 등, 2013, p,34)

은옥은 [그림 Ⅳ-7]와 같이 (1)에서 이미 확률의 곱셈정리까지 적용하였다. 은옥의 루틴이 어느정도 형식적이며, 적절한 전략을 선택하는 단계에 이르렀음을 알 수 있다. 단, 은옥은 의외로 합사건의 확률 계산에서 어려움을 겪었다. 모듬1의 학생들은 일단 사건을 집합 기호로 나타낸 후($(A \cap B) \cup (A^c \cap B^c)$) 집합의 원소의 개수를 전체 원소의 개수로 나누어 확률값을 계산하고자 하였다. 은옥은 확률을 집합으로 나타낼 수 있음을 알고는 있으나, 다른 학생들처럼 적극적으로 사건을 집합으로 표현하지는 않았다. 그래서인지 합사건의 확률을 서로 더하면 된다는 것을 쉽게 인지하지 못했다.


기호표현

(1) 주사를 안 맞을 사건은 '항체가 있고 항체검사가 바를 때' 또는 '항체가 없고 항체가 검사가 틀릴 때'이다. 이를 이용하여 주사를 안 맞을 확률을 확률 기호로 표현해보자.

$P(A\cap B) = P(A)\times P(B|A)$

$P(A^c\cap B^c) = P(A^c)\cdot P(B^c|A^c)$ $\quad P(A\cap B) + P(A^c\cap B^c)$

$P(A\cap B$

(2) 다함께 3에서 '항체가 있을 때, 항체 검사가 바르게 될 확률'을 기호로 표현해보았다. (1)에서 주사를 안 맞을 확률을 '항체가 있을 때, 항체 검사가 바르게 될 확률'과 '항체가 없을 때, 항체 검사가 틀리게 될 확률'을 이용하여 확률 기호로 표현해보자.

[그림 Ⅳ-7] 모델교과서 35쪽 은옥의 답안

다음은 은옥이 (1)에서

$$P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$$
$$P(A^c\cap B^c) = P(A^c)\cdot P(B^c|A^c)$$

을 기호화한 후, 두 사건의 확률을 더하면 된다는 것을 알게 되는 담화의 일부이다.

506	은옥	근데~그렇게 돼? 합쳐도 돼?
507	은진	그냥 맘대로 했어
508	은옥	아! 또는 이잖아 확률 합쳐도 되잖아
509	은진	어, 합 어차피 합집합이면 합하는거 아니야?
510	은옥	그러게 으하하하하하
511	태희	있을때...
512	태희	그냥 더해 그럼~

맞을 확률을 항체가 있을 때 항체검사가 바르게 될 확률과 항체가 없을 때 항체검사가 틀리게 될 확률을..이용하여 확률기호로 표시해보자...

521	은옥	이게 그냥 주사를 안맞을 확률 아니야?
522	교사	이 식은 어떻게 나왔어?
523	은옥	그거 똑같이
524	교사	그냥 그거 똑같이? 혹시 이거를 해석을 해 볼 수 있을까? 왜 이런 식이 나오는지?
525	은옥	항체가 있고, 항체가 있을 때 항체검사가 바른거 두개 곱한거 아니에요?
526	교사	음..
527	은옥	두 경우...교집합이니까?
528	교사	그 식에 의해서 그렇게 하지 말고 그냥 맥락적으로 혹시 생각해볼수는 없을까?
529	은옥	맥락적으로? 음...항체가 있는 확률 곱하기..그냥 말해도 되는데 항체가 있는 확률에서 항체가 있는 것 중에 검사가 바른거 곱해서 항체도 있고 항체검사가 바를 때로 나오지 않아요? 아닌가? 아 모르겠다 말하면서 햇갈려

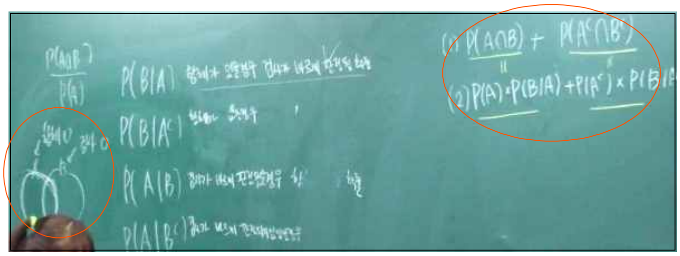
모둠활동을 지켜보던 교사는 은옥이 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$라고 쓴 부분을 가리키며, 식이 도출된 이유를 설명해볼 것을 요구하였다. 은옥이 확률의 곱셈정리를 조건부 확률의 정의로부터 제대로 이해하고 있는지, 아니면 교과서의 유도대로 단순히 구했는지를 묻기 위함이었다. 은옥은 “항체가 있는 확률에서 항체가 있는 것 중에 검사가 바른거 곱해서 항체도 있고 항체검사가 바를 때”라고 답을 통하여 은옥이 $P(B|A)$의 정의를 확실하게 이해하고 있음을 확인할 수 있었다. 또한 더이상 $P(A\cap B)=P(A|B)$라고 생각하지 않을 뿐 아니라, 조건부 확률이 형식적 정의로부터 연역적 과정을 통한 정리를 도출할 수 있음을 알 수 있다(루틴).

이후 이어진 전체 토의과정에서 은진 역시 곱셈정리를 제대로 이해하고 있음을 알 수 있다. 다음은 전체 토의 담화의 일부이다.

580	교사	지금 보면은 이거하고 뭐하고 똑같다는거야? 이거하고 이거하고 똑같다는 거죠? 왜 이거랑 이거랑 같은지는 알겠어요?

해볼 수 있을까? 자꾸 너희가 이제 식으로는 알겠는데 개념적으로 왜 다른지를 모른다고 하니까..얘랑 이걸 구하기 위해서 왜 이렇게 해야 하는지 이 상황에서 그냥 해석해 볼 수는 없을까요? 한번 이야기 해볼래요?

583 민주 그니까 P(AnB)는 아까 여기 이런 식으로 집합을 보면은 이 전체..이 집합 중에 여기 부분을 이야기 하는 거고 P(B¦A)는 똑같이 안에 부분을 이야기 하는 거기는 한데 A라는 전제하에 B를 이야기 하는 거니까 똑같이 안에 부분을 이야기 하는 거기는 한데 저희가 마음대로 원래 전체 집합 중에 이야기 하는 건데 저희가 마음대로 A를 전제로 깔아버리니까 바탕이 A로 좁혀져 버리잖아요



[그림 Ⅳ-8] 담화 583에 사용된 민주의 시각적 매개체

584 은진 아까 한 얘기 아니야? 너?

585 은옥 흠..

586 민주 그래가지고 앞에다가 P(A)를 곱해가지고 전체 집합을 만들어준..

587 교사 그럼 자꾸 미안한데, 아님 다른 친구가 답해도 되요 이 A, B를 기호로 말하지 말고 A가 나타내는 것이 원래 항체가 있는거를 나타내는거였잖아요. 이걸 말로 연결해 볼 수 있을까요?

588 은옥 그니까 먼저 A를 구하고 그 중에서..

589 민주 이걸 항체가 있다는 전제하에 검사가 옳은 확률에 항체가 있는걸 곱해준 거..

590 은진 아까 한 얘기랑 같다

교사는 민주에게 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B|A)$가 성립하는 이유를, 상황적으로 해석을 해보라고 요청한다. 는 주어진 상황에서의 문구(항체가 있다, 검사가 옳다 등)를 사용하지 않고, 이를 대체할 수 있는 기호를 이용하여 보다 일반적인 경우에서 공식이 성립함을 설명하였다. 또한 시각적 매개체로 교사가 앞의 토의 내용을 정리하며 그려두었던 [그림 Ⅳ-8]의

벤다이어그램을 활용하여, 확률의 곱셈정리가 갖는 의미를 체계적으로 설명하였다. 민주의 설명을 듣던 은진은, 민주의 발표가 앞서 은옥이 교사에게 했던 설명과 같음을 인지하고 이를 은옥에게 이야기 한다(584, 590). 은옥도 의 의견에 수긍하며 자신의 말을 다시 확인한다(588). 은옥과 은진 모두, 곱셈정리를 도출하고 적용하는 상황, 즉, 이전의 $P(A|B)$, $P(A\cap B)$를 언어적으로 해석하던 것과 다른 상황에서도 조건부 확률의 정의를 잘 파악하였다고 볼 수 있다. 이와 더불어 조건부 확률 개념에 대한 기호화를 완벽히 내면화했다고 볼 수 있다(용어, 시각적매개체). 따라서 학생들은 조건부 확률 용어에 대한 의미를 정확히 인지하고, 어떤 맥락에서도 의미의 변함이 없이 문구적인 사용을 하였으며, 논의 과정에서 다양한 시각적 매개체(벤다이어그램, 수학적 기호 등)을 사용하게 되었다. 학생들은 확률적 판단의 루틴에서 조건부 확률의 형식적 정의로부터 연역적 과정을 거쳐 확률의 곱셈정리를 유도했을 뿐 아니라, 이를 언어적 맥락에서도 설명할 수 있었다. 따라서 학생들이 일반적 수준과 형식적 수준의 공존 수준으로 발전했다고 볼 수 있다.

1.2. 독립과 종속

1.2.1. 상황적 수준과 참조적 수준의 공존

루이가 예방 접종 여부를 결정하는 과정에서 학생들은 루이가 간염 예방 주사를 안 맞아도 될 확률, 즉,

$$\begin{aligned} &P(A\cap B)+P(A^c\cap B^c)\\ &= P(A)\cdot P(B|A)+P(A^c)\cdot P(B^c|A^c) \end{aligned}$$

(A: 항체가 있을 사건, B: 검사가 옳을 사건)

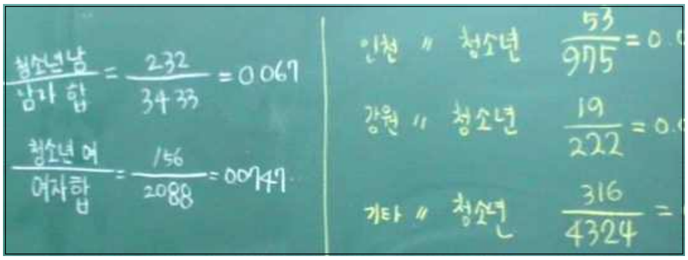
을 계산하였다. 교과서에는 항체 검사가 70%의 정확성을 가지고 있으며, 일반인 중 항체가 있을 확률이 0.05로 주어졌다. 따라서 학생들은 위의 확률을 계산하기 위하여   을 계산하였다. 교사는 학생

들에게 실생활에서 조건부 확률이 정의되는 예를 더 제시해주고자 교과서의 과제를 변형하였다. 이번에는 항체가 있을 때 있다고 옳다고 판정될 확률을 0.8, 항체가 없을 때 옳다고 판정될 확률을 0.9로 상황을 바꾸어 다시 생각해보도록 하였다. 학생들은 조건부 확률에 대한 이해 수준이 이미 일반적, 형식적 수준에 도달하여 별 무리 없이 새로운 확률을 계산할 수 있었다. 교사는 이 결과를 이용하여 다음 담화와 같이 독립과 종속의 개념을 도입하였다.

694	교사	그렇다면은 결국에 내가 문제로 되는거는 A가 있을때 검사가 옳은 것과 그니까 항체가 있을때 검사가 옳은 것과 항체가 없을때 검사가 옳은 것이 같을 수도 있고 다를 수도 있잖아요.. 이게 만약에 같다면 두 사건의 관계가 어떻다고 표현할 수 있을까? 아까 사실 너희가 이 표현을 썼거든요?
695	은옥	관련이 없다
696	교사	관련이 없다 그렇게 얘기를 할 수 있겠지? 만약에 이게 다르다면 이것처럼 다르다면 관련이 있다고 할 수 있겠지? 이 관련이 있다 없다를 나타낼 수 있는 용어가 있어요
697	교사	이렇게 서로 관련이 없는거..그거를 음..독립이라고 해요 그리고 관련이 있는것을 종속이라고 해요..종속적이다..그런거 알아요? 뭔지?
698	은옥	유전?
700	교사	네?
701	은옥	아니에요
702	교사	누가 독립이에요?
703	은옥	아니에요
704	교사	이니에요? 어..유관순?독립?
705	은옥	헉..
706	교사	그럼 만약에 두 사건이 A랑 B가 진짜 관련이 없다고 해보세요~ 그럼 이렇게 계산하는거랑 그냥 B를 계산하는거랑 어떨까?
707	학생들	같아요
708	교사	어 같죠 지금 사실 문제를 보면은 항체 검사가 70%의 정확성을 갖고 있다라고 표현을 했잖아요 그러니까 항체가 있을때 없을때라는 말 없이 항체 검사가 70%의 정확성을 갖고 있다라고 나왔고, 그래서 우리가 그걸 그냥 적용시켜서 쓴거였죠 무슨말인지 알겠어요? 그래서 요런관계가 성립이 된다면 두개가 독립이다 아니면 종속이다 라고 얘기를 해요 (를 판서)

학생들에게 항체가 있을 때 검사가 옳은 것과 항체가 없을 때 검사가 옳은 것이 같을 수도 있고 다를 수도 있겠지만, 만약에 같다면 두 사건의 관계가 어떻겠냐고 묻자 나온 답은 '관련이 없다' 였다. 두 사건이 서로 영향을 주고받지 않는다는 것으로, 학생들이 택한 용어는 일상적으로 많이 사용하는 '관련이 없다' 는 용어였다. 이에, 교사는 확률에서 '독립' 이라는 용어를 사용함을 알려주고, 일상적으로 '독립', '종속' 을 접한 경우가 있는지를 묻자, 학생들은 생물 시간에 학습한 유전 개념을 이야기 하였다. 생물 시간에 유전법칙에서 두 개의 유전인자 중 하나가 선택이 되는 것은 서로 독립이라는 것을 학습한 상태였기 때문이다. 교사는 수업 중에 교실 앞에 위치하여 은옥의 발언을 잘 듣지 못하여 이를 놓치고 누군가의 이름을 말한 줄 알고 유관순의 독립과 연결하여 농담처럼 학생의 답을 넘겼다(위의 담화를 기록한 녹음기는 은옥이 속한 모둠의 책상 가운데 위치). 이어서 교사는 두 사건 A, B가 독립인 것은 $P(A|B)=P(B)$를 의미함을 알려주었다.

다시 모델 교과서 내용으로 돌아와서 A형 간염에 대해서도 궁금해진 홍은, 우리나라 청소년들이 A형 간염에 걸리는 정도를 알아보기 위하여 질병관리본부 홈페이지에 들어가 본다. 그리고 A형 간염 환자 중 청소년일 확률이 성별에 따라, 지역에 따라 차이가 있는지 알아보기로 결심한다. 학생들은 홍의 추측의 진위를 확인하기 위한 한참의 논의를 하면서, 각 성별로 A형 간염에 걸린 청소년의 비율, 지역별로 A형 간염에 걸린 청소년의 비율을 계산하였다. 전체 토의에서 이야기한 다음 문주의 이야기는 모둠1 학생들의 활동 내용을 요약한다고 볼 수 있다. 학생들은 홍의 추측에서 'A형 간염환자 중에 청소년일 확률은 성별에 따라 다를 거야. 그러니까 남성 간염환자 중에서 청소년일 확률과 여성 간염환자 중에 청소년일 확률하고 다르게 나타날거야' 라는 문장 중 2번째 문장에 의거하여 단순히 두 수치의 비를 비교하여 서로 같은지 다른지를 비교하였다.



[그림 Ⅳ-9] 담화 819에 사용된 문주의 시각적 매개체

820	영은	지역 중에서니깐 저게 맞을 것 같은데
821	문주	왜 그렇게 했냐고요?
822	교사	네
823	문주	남자 중에 청소년이 총 몇 명인지 물어봐서
824	교사	아 그거 물어봐서 이렇게 직접적으로 계산 했어요?
825	교사	그러면 지금 결과를 보니까 둘이 어때요?
826	학생들	달라요
827	교사	남자가 약간...근데 소수 둘째자리까지 한다면 대략 비슷하다고 할 수 있죠? 그러면 이 결과를 어떻게 해석할 수 있을까? 청소년이..청소년일 비율이 남자인거랑 여자인거랑 비율이 차이가 있어요 없어요?
828	은옥	없어요
829	교사	차이가 거의 없다고 볼 수 있죠 그러면 지역은 어때요?
830	학생들	강원도가 많아요
831	은옥	지역은 차이가 있어...요
832	학생들	커요

교과서의 구성상, 이 과제는 독립의 개념을 형식적으로 도입하기 전에, 독립의 개념을 학습할 수 있는 상황을 제공하기 위해 제시된 것이었다. 하지만, 본 수업에서는 앞서서 교사가 학생들에게 조건부 확률의 의미를 더 알게 하고자 하는 과정에서 이미 독립의 정의를 도입한 상태였다. 교사는 앞서서 A, B가 독립인 것은 $P(A|B)=P(B)$를 의미함을 알려주었음에도 불구하고 학생들은 $P(A|B)=P(A)$를 형식적으로 사용하지 않고, 단순히 남자와 남자이면서 청소년인 수의 비율, 여자와 여자이면서 청소년인 수의 비율을 계산하였다. 학생들은 독립의 정의를 학습했지만, 아직 그 의미를 상황에 적용하지 못하고, 오로지 상황에만 근거하여 판단을 하는 것이다.

이에 교사는 문주에게 독립의 개념을 끌어내고자 왜 그런 계산을 하게 되었는지를 지속적으로 묻는다. 여기에서 교사와 문주의 커머그너티브 갈등을 볼 수 있다. 교사는 홍의 추측 ‘A형 간염환자 중에 청소년일 확률은 성별에 따라 다를 거야. 그러니까 남성 간염환자 중에서 청소년일 확률과 여성 간염환자 중에 청소년일 확률하고 다르게 나타날거야’ 중 첫 번째 문장에서 독립개념을 사용해야한다는 것을 인지하고 학생에게도 독립 개념을 사용할 것을 기대하였다. 하지만 아직 독립과 종속 개념의 일반적 수준에 도달하지 못한 상태였기 때문에, 문주는 이 문제 상황에 독립 개념을 적용해야 한다는 것을 전혀 생각하지 못하고 계속 남자 중에 청소년이 총 몇 명인지에 근거하여 계산을 했다고 답한다. 즉, 상황에 의거한 판단을 하고 있는 것이다.

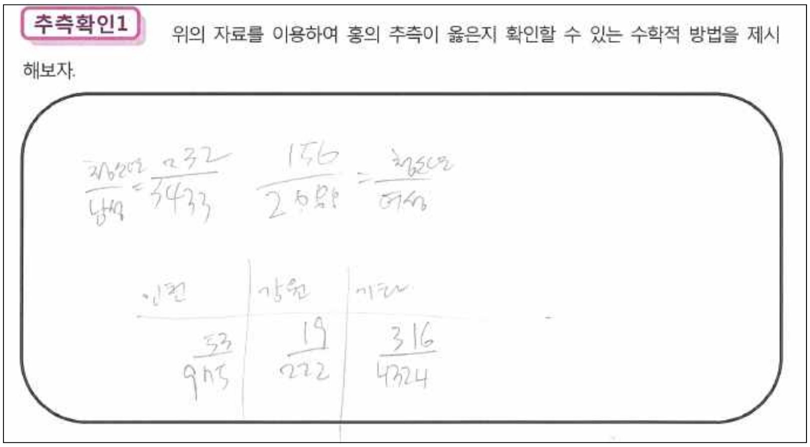
이에 다음과 같은 담화를 통하여 교사는 독립 개념을 다시 제시한다. 교사는 직접적으로 A형 간염환자 중 청소년인 것과 여자인 것이 독립인지를 묻고 은옥은 독립이라고 답한다. 독립인 이유를 묻자 은옥은 ‘서로 영향을 주지 않기’ 때문이라고 한다. $P(A|B)=P(A)$를 아는지 확인하고 싶었던 교사는 ‘전체도 혹시 0.07’인지를 묻고, 미처 그 값을 계산하지 않았던 학생들은 급히 계산을 하지만, 교사가 바로 서로 같음을 이야기 한다. 이어 A형 간염환자 중 지역이 어디인지의 여부와 청소년인 것은 서로 종속임을 확인하고 수업을 마무리하였다.

835	교사	어 그러면 총 우리 아까 독립 종속 내가 잠깐 얘기 했었잖아요 그럼 청소년하고 성별 그러니까 A형 간염 비율에 비율을 카테고리화 할 수 있는 것 중에서 그러니까 청소년 중에서 A형 간염인거랑 그다음에 남자 여자 중에서 A형 간염인거랑 두 사건을 봤을때 두 사건은 독립일까요 종속일까요?
836	은옥	청소년하고 여자?
837	은옥	독립
838	교사	독립이에요? 왜 독립이죠?
839	은옥	서로 영향을..
840	교사	서로 영향을 안주고 똑같이..전체도 혹시 0.07인가요 그러면? 그냥~ 청소년일 확률

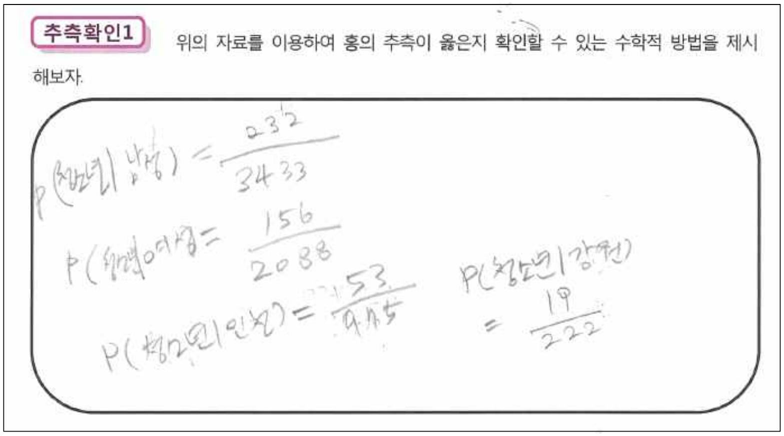
843	은옥	아~ 남녀 합중에?
844	은진	975더하기 222더하기..
845	교사	남녀 구분하지 않고 ,전체가 지금 5521명이잖아요 그 중에서 청소년에 들어가 있는 것이 388명이죠? 이거 계산하면 얼마 나와요? 이거 대략 0.07나와요
846	은옥	아~~
847	교사	그럼 남자이거나 여자이거나 그냥 청소년이거나 별로 영향이...
848	은옥	없어요
849	교사	어 독립이다..라고 볼수 있는거지
850	교사	이건 어때요?
851	은옥	영향 있어요
852	교사	어 조금 영향 있죠 지역에 따라서 지역인거랑 청소년인거랑 종속적이다 라고 얘기할 수 있겠죠? 넘겨보면 45쪽에 청소에게 A형 간염과 성별은 독립일까 종속일까 하면?
853	영은	독립
854	교사	음.. 그다음에 지역은?
855	소연	종속
856	교사	종속 그런식으로 된다고 볼 수 있겠지?
857	지희	나 독립 종속 잘 모르겠어

이 단계에서 학생들의 독립과 종속에 대한 이해 수준은 상황적 수준과 참조적 수준이 공존하는 단계라고 할 수 있다. 학생들의 용어의 사용 수준은 상황적 수준에 머문다고 볼 수 있다. 학생들은 '독립', '종속'이라는 용어 대신 '영향이 있다', '관계가 없다'와 같은 일상적인 용어를 사용하고 있다. '독립', '종속'은 교사와의 담화에서만 수동적으로 사용한다. 시각적 매채체와 루틴의 경우 참조적 수준에 있다고 볼 수 있다.

문주가 이 루틴을 적용면서 사용한 시각적 매개체는 [그림 Ⅳ-9], 은옥과 지희가 이 루틴을 적용면서 사용한 시각적 매개체는 각각 [그림 Ⅳ-10], [그림 Ⅳ-11]와 같다.



[그림 Ⅳ-10] 참조적 수준에서 은옥의 시각적 매개체



[그림 Ⅳ-11] 참조적 수준에서 지희의 시각적 매개체

문주, 은옥은 일상적 언어와 수학 기호를 혼재하여 사용하는 것을 볼 수 있으며, 지역별로 차이가 있는지를 명시적으로 잘 보기 위해서 표를 만들어 지역별 비율은 비교하였다. 문주, 은옥은 문제에서 제기된 방식 그대로 성별, 지역별로 A형 간염에 걸린 학생의 비율에 차이가 있는지를 계산하여 수치적으로 차이가 있는가를 보고자 하였다. 지희는 이미 조건부 확률 개념에서는 일반적, 형식적 수준에 도달한 상태이기 때문에, ‘성별, 지역별로 A형 간염에 걸린 학생의 비율’을 조건부 확률로 인식하고 각 값을 조건부 확률 기호를 이용하여 표현한 것을 볼 수 있다. 이

는 독립성을 판단하기 위한 참조적 수준의 근거가 된다. 즉, 나름의 수치적인 판단에 근거한 확률적 판단을 하는 루틴을 적용하였다. 그 결과로 A형 간염 환자 중 남녀 비율은 같고, 지역별 비율은 다르다는 사실적 서술을 도출하였다. 하지만 지희는 직접적으로 “나 독립 종속 잘 모르겠어”라고 언급하였다. 본인이 계산한 조건부 확률을 독립 개념과 잘 연관짓지 못하는 상태인 것이다. 즉, 독립 개념에 대한 일반적 수준의 단계로 발전하지 못한 상태이다. 또한 전체 토의 과정에서 독립의 정의를 적용한 독립성 판단 과정의 루틴에서는 학생들이 교사의 권위에 순응하면서, 전체 확률을 구해야 한다는 것을 받아들여가는 의례적 루틴의 성격을 지니고 있다.

1.2.2. 일반적, 형식적 수준으로의 발전

3차시에는 새로운 상황에서 독립과 종속 개념을 탐구하였다. 홍은 A형 간염이야기에 대해 선생님에게 질문을 하고, 선생님은 이에 대해 이야기하던 중 “두 개의 주사위를 던지는 실험에서 두 주사위 모두 짝수의 눈이 나오는 사건을 A, 두 주사위 모두 3이하의 눈이 나오는 사건을 B라 할 때, 두 사건이 서로 독립인가? 종속인가?”에 대해 논의해보도록 한다. 이에 홍과 혜리는 각자 독립, 종속여부에 대한 대립된 의견을 내놓으면서 싸우게 된다. 혜리는 “당연히 독립이죠 주사위는 서로가 서로한테 영향을 주지 않잖아”라고 말하며 홍은 “표면적으로 그렇게 말할 수는 없을 것 같아. 각각의 확률을 구해서 오늘 배운 내용으로 알아보면 종속인 것 같아”라고 이야기 한다. 혜리는 주사위를 반복적으로 던지는 시행 자체가 독립인 것에 주목을 하였고, 두 사건이 영향을 주지 않으리라는 일상적인 맥락에서 생각한 판단을 한 것이다. 즉, 혜리의 독립 개념에 대한 수준은 상황적 수준이라 할 수 있다. 홍은 두 사건의 독립에 정의에 의거하여 확률을 계산해봐야 함을 주장한다. 즉, 일반적 수준에서 생각한다고 볼 수 있다. 혜리와 홍은 서로 다른 수준에서 독립과 종속을 논의하기 때문에 서로 말이 통하지 않는다. 즉, 두 학생 간에 커머그너티브 갈등이 발생할 수밖에 없다. 두 학생의 의견을 읽기 전에 교실

의 학생들에게도 각자 어떻게 생각하는지를 물어보고 다음과 같이 교사와 전체 학생들이 이에 대해 논의하였다.

46	교사	홍이랑 혜리랑 싸웠다는거 이번에 에피소드네요 그래서 이제 홍이 다시 가면 이야기를 선생님한테 해보고 하고 그다음에 루이가 보내준 그런 얘기를 하면서 어~ 뭘 물어봤더니 수업시간에 이제 얘기를 같이 먼저 해주신 거에요 두 개의 주사위를 던지는 실험에서 두 주사위 모두 짝수의 눈이 나오는 걸 A라고 하고 그리고 3이하의 눈이 나오는 것을 B라고 할 때 두 사건은 서로 독립인가 종속인가 이렇게 얘기를 했거든요 그럼 이건 독립일까 종속일까?
47	교사	혹시 한번 생각해볼 수 있겠어요?
48	학생들	종속
49	학생들	왜 왜?
50	소연	종속
51	교사	종속이에요? 어 왜 종속이에요?
52	소연	어~
53	교사	네~
54	소연	3이하에 짝수가 있으니까
55	교사	아 짝이 아 3이하의 짝수가 있으니까 그러면은 독립이 될려면은 둘이 공통으로 일어나는 일은 없어야 되는 건가요?
56	영은	아니요~
57	은옥	아니 그건 아니잖아
58	영은	아니 독립 그걸 의미 하는 건 아닌데

교과서의 혜리처럼 답하리라는 교사의 예상과 다르게, 소연은 두 사건이 공통으로 일어날 수 있기 때문에 종속이라 답하였다. 혜리와 같은 방식은 아니었으나, 독립의 수학적 정의를 제대로 적용하지 못하고, 두 사건이 서로 '영향을 주지 않는다'를 '동시에 일어나지 않는다'로 잘못 해석한 결과이다. 즉, 두 사건의 독립성에 대한 일상적 용어 수준에서의 이해, 상황에 근거한 판단을 하는 상황적 수준에 머무른다고 볼 수 있다. 영은과 은옥은 이를 부인하였다. 이에 교사는 두 사건이 공통으로 발생하지 않는 것은 '배반사건'이라 부른다는 것을 알려주고 다시 다음과 같이 논의를 이어갔다.

		있는건 아닌거 같아요 두 개가 독립인지 아닌지 확인해 보려면 어떻게 해야 될까?
91		<u>확률을 구해야죠</u>
92	교사	확률을 구해봐요? 어 무슨 확률을 구해요?
93		음 그러면은
94	영은	P(AnB)
95	교사	P(AnB) 구할까요? 아 이거는 확률이 얼마죠?
96	학생들	6분에
97	교사	6분에
98	은진	일
99	교사	3씩 그러니까 여섯 개중에서 하나 공통으로 겹치는 거니까 그럼 그다음 뭐를 구해볼까요?
100	은옥	P A 교..
102	교사	이걸 구할까요? 이거? 요걸 구하려면은 .. 그럼 이거는 어떻게 구하면 되요?
104	두 학생	P(B) 분에 P(AnB)
105	교사	이거 구해보면 되죠? 그럼 얼마가 나오냐면 6분에 1분에 아니 육분의 일 아니죠
106	학생들	6분에 3분에..
107	교사	어 6분에 3분에 6분에 1 이렇게 되니까 결과가 3분에 1이다 요렇게 나오지 또 뭐 구해 봐야되요?
108	민주	P(A) ...
109	교사	어 P(A)를 구해보면은 P(A)는 짝수인 확률이 나오는 거니까 이거 2분에 1이죠 그러면은 두 개가 같은지 확인해 보면 되는데
110	소연	틀려요

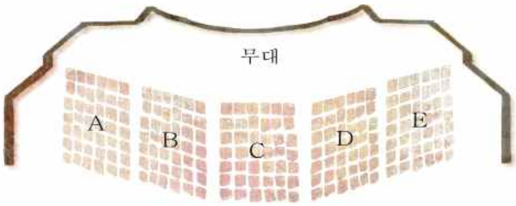
학생들은 이제 두 사건의 독립 여부를 판단하기 위해서 어떤 사건의 확률을 구해서 비교해야 하는지 인지하고 독립의 정의에 따라 확률을 계산하고 독립 여부를 판단할 것을 제안한다. 이러한 정확한 수치적 정보에 의한 확률적 판단을 하는 루틴은 일반적 수준으로의 발전과정을 의미한다. 단, 위의 교사와 학생들간의 대화에서 교사와 학생들 모두 순간적으로 주사위를 두 개 던지는 상황이 아닌 하나의 주사위를 던지는 상황에 대한 계산을 하게 되었다. 따라서 원래 교과서에서 의도하는 것과는 다른 계산을 하게 되었다.

앞에서 커머그너티브 갈등으로 인해 사이가 나빠진 홍과 혜리는 루이의 콘서트 때 같은 구역의 자리에 앉게 될까봐 서로 싸움을 한다. 이에, 홍은 막상 서로 같은 구역에 앉게 될 확률은 높지 않다고 하면서, 그 확률을 계산해보자고 제안한다. 좌석이 정해지는 규칙은 [그림 Ⅳ-12]과 같

이 제시되었다. 이에 주어진 문제는 다음과 같다.

(1) 홍과 혜리가 C구역을 뽑을 사건을 각각 A, B라고 할 때, 두 사람이 구하려는 확률을 기호로 표현해보다.
(2) 두 사건 A, B는 서로 독립인가 종속인가?
(3) 두 사건 A, B가 독립일 경우 2단원에서 배운 확률의 곱셈정리를 간단히 하면 어떻게 될까? 두 사건 A, B가 종속인 경우는?

학교를 마치고 홍과 혜리는 각자 콘서트 티켓을 예매하기 위해 부랴부랴 집으로 갔다. 예매 홈페이지에 들어가 보니 콘서트홀 구조와 예매 방법이 나와 있었다. 예매할 때 팬클럽 회원은 우선적으로 1층 좌석을 준다고 한다. 콘서트홀 1층의 모습은 아래와 같다.



콘서트홀 1층 단면

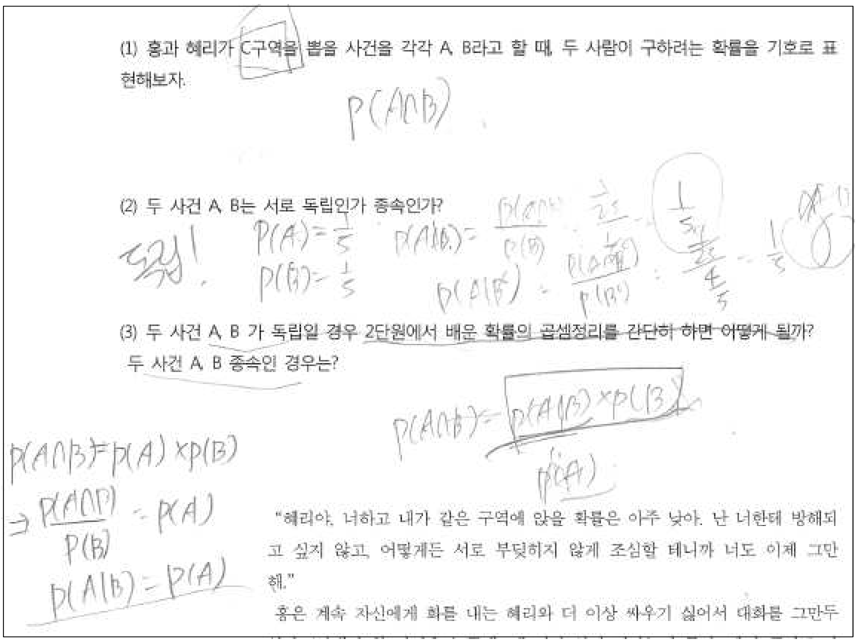
좌석번호를 뽑는 방식은 룰렛처럼 A, B, C, D, E가 돌아가면 클릭하는 순간 뽑은 구역이 나오고, 그 후에 뽑은 구역 중 남은 좌석 번호들이 같은 방법으로 돌아가면 클릭하는 순간 좌석번호가 뜬다고 한다. 현재까지 각 구역에 남은 좌석은 많고 C구역에는 첫 번째 줄에 4개, 여덟 번째 줄에 6개의 자리가 차있다.

[그림 IV-12] 독립성에 대한 과제(권오남 등, 2013, p,48)

학생들은 (1)번의 답이 $P(A \cap B)$임을 어렵지 않게 구하였다. (2)번의 해결 과정에서 문제 상황에서 룰렛이 돌아가면서 좌석을 선택하기 때문에 상황적으로 보았을 때, 일상적 언어로서 홍이의 선택과 혜리의 선택은 서로 관련이 없으리라는 것을 쉽게 예상할 수 있다. 하지만, 학생들은 다음의 담화와 같이 조건부 확률의 정의, 독립의 정의를 단계별로 적용해가면서 두 사건의 독립 여부를 판단하였다.

191	은진	A, B 는...그 독립이야 종속이야?
192	은진	P(A)는 5분에 1이고 P(B)는 5분에 1
193	은진	P(A¦B) 는 ..
194	은진	야 근데 P(A¦B)가
195	은옥	어
196	은진	헤리 혜리가 앉는다는 전제 C구역에 앉는 전제하에 홍도 C 구역에 앉는 전제야?
197	은옥	그러니까 5분에 1아니야?
198	태희	그냥 교집합?
199	은옥	P(B)분에 P(AnB)
200	태희	그럼 독립이야 종속이야?
201	은옥	독립같은데?
202	은진	아~진짜 5분에 1이네~
203	은옥	응~
204	은진	그러면 독립이야?
205	은진	구해봐야지 그러면 P(A¦B)
214	은진	아 잠깐만, 아닌가? 이거 어떻게 구해? $P(A\|B^c)$..어떻게 구해?
215	은옥	흐흐흐 몰라~
216	은옥	그러면 전체 25분에 4아니야?
217	은진	어?
218	은옥	전체 25분에 4아니야?
219	태희	뭐가 어떤게?
220	은진	$P(A\|B^c)$.. 25분에 4아니냐고
221	은진	모르겠어...
222	은진	아 5분에 4
223	은옥	전체가 25니까 25분에 4
224	은옥	전체가 25인가?
225	은진	그럼 5분에 1 맞네 독립이네. 독립

학생들은 독립의 의미를 $P(A)=P(A|B)=P(A|B^c)$로 인지하고, 이를 문구적, 대상적으로 사용하였다. 즉, 이전에 다룬 주사위 던지기와 다른 맥락에서 독립여부를 판단하게 되었음에도 두 사건의 독립과 종속이 무엇인지를 정확히 파악하고 독립의 의미를 파악하였다. 또한 용어의 의미를 맥락 내에서 적절하고 유용하게 사용하고 형식화하여 표현하였다. [그림 Ⅳ-13]은 은진이 이 문제를 해결하면서 사용한 시각적 매개체이다. 은진은 문제 맥락에 적합한 수학적 기호로 표현되는 시각적 매개체를 정확히


(1) 홍과 혜리가 C구역을 뽑을 사건을 각각 A, B라고 할 때, 두 사람이 구하려는 확률을 기호로 표현해보자.

$P(A\cap B)$

(2) 두 사건 A, B는 서로 독립인가 종속인가?

독립! $P(A)=\frac{1}{5}$ $P(B)=\frac{1}{5}$

(3) 두 사건 A, B 가 독립일 경우 2단원에서 배운 확률의 곱셈정리를 간단히 하면 어떻게 될까? 두 사건 A, B 종속인 경우는?

$P(A\cap B)=\boxed{P(A|B)\times P(B)}$

$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

$\Rightarrow \frac{P(A\cap B)}{P(B)}=P(A)$

$P(A|B)=P(A)$

"혜리야, 너하고 내가 같은 구역에 앉을 확률은 아주 낮아. 난 너한테 방해되고 싶지 않고, 어떻게든 서로 부딪히지 않게 조심할 테니까 너도 이제 그만 해."

홍은 계속 자신에게 화를 내는 혜리와 더 이상 싸우기 싫어서 대화를 그만두

[그림 IV-13] 일반적, 형식적 수준에서 은진의 시각적 매개체

사용하고 있다. 두 사건이 서로 독립인지를 판단하는 확률적 판단의 루틴에서 두 사건의 독립의 수학적 정의를 회상한 후 이를 적용하여 두 사건의 독립성을 연역적으로 입증하였다. $P(A\cap B)$를 $\frac{1}{25}$, 즉, 두 학생이 전체 선택 가능한 구역의 수인 25와 홍과 혜리가 같은 구역을 고르는 경우의 수 1의 비율로 계산하였다. 즉, 확률의 수학적 정의를 이용하여 계산하였다. $P(A)$, $P(B)$ 역시 수학적 정의를 적용하여 $\frac{1}{5}$로 계산하였으며, 이제 조건부 확률의 정의 $P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$에 이를 적용하여 $P(A|B)=P(A)$를 보였다. 또한 마찬가지 방법으로 $P(A|B^c)$ 를 계산하여 $P(A)=P(A|B)=P(A|B^c)$임을 확인하였다.

[그림 IV-12]에 이어서 제시된 (3)번 문제를 해결하면서 은옥과 은진은 다음과 같이 확률의 곱셈정리를 이용하여 이면, 임을 유도하였다.

226	은옥	확률의 곱셈정리를 간단히 하면?
227	은진	그거 하는거 아냐? 막 P(B)에다가 P(A¦B)곱하는거
228	은옥	그럼 P(AnB) 아니야?
229	은진	어 그거 말한거 아니야? 확률의 곱셈정리?
230	은옥	간단히 하면..그럼 그냥 제곱이잖아..간단히 하면..
231	태희	이게 왜 독립이야?
232	은진	두 개 같으니까 저거 했을 때 P(A) 랑 P(A¦B) 이거랑 같으면 독립이잖아
233	태희	응~
234	은진	계산할때 같아서
238	은옥	그러면 P(AnB) 가 P(A) 곱하기 P(B)?
239	태희	곱셈 정리가 뭐니
240	은진	음 아~
241	은진	저번에 배운거
242	은옥	P(A) 곱하기 P(B)?

먼저, 확률의 곱셈정리를 회상한 후(227~229), 곱셈정리에서 두 사건이 독립이면 $P(A|B)=P(A)$임을 이용하여 $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$임을 입증하였다. 확률의 곱셈정리라는 맥락에서도, 두 사건의 독립을 '$P(A|B)=P(A)$'으로 인식하여, $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$을 유도하였다.

정리하면, 은옥과 은진은 용어 사용에서 두 사건의 독립을 $P(A|B)=P(A)$로 인식하는 대상적 사용을 보였으며, 적절한 수학적 기호의 시각적 매개체를 사용하였다. '회상', '입증'의 성격을 지니는 루틴을 적용하였기 때문에 이들의 루틴은 탐색적이라고 할 수 있다. 또한 이로 인해 합의한 사실적 서술은 대상간의 관계에 대하여 기호화된 서술이다. 따라서 은옥과 은진은 독립과 종속에 대한 일반적, 형식적 수준에 도달했다고 볼 수 있다. 단, 태희와 지희는 아직 독립과 종속에 대한 일반적, 형식적 수준에 도달하지 못하였다. 위의 태희의 담화에서 태희는 은옥과 은진에게 두 사건이 독립인 이유를 직접적으로 질문함으로서 문제에 답하고 있다. 태희는 1일차 수업에 결석하고, 2일차부터 수업에 합류하게 되어 다른 친구들보다 조금씩 느리게 학습을 하는 상황이었다. 또한 지희는 2일차 수업이 종료되는 시점에서 직접적으로 "나 독립 종속 잘 모르겠어"라는 발언을 했으며, 3일차에 지각하여 [그림 Ⅳ-12]의 과제에 대한 논의가 시작되는 시점에 교실에 도착하였다. 즉, 독립과 종

속에 대한 홍과 혜리의 커머그너티브 갈등 과정을 함께 경험하지 못한 상태였다. 이에 지희는 다음과 같이 적극적으로 은진에게 독립과 종속을 질문하였다.

246	지희	나 까먹었어
247	은진	아 독립?
248	은진	지금 뭐지?
249	은진	얘가 홍이랑 혜리랑 싸워가지고 콘서트를 간대 루이 콘서트를 가는데
250	태희	왜 싸워 자꾸
251	은진	서로 같은 자리 앉기
252	은진	서로 같은 자리 않기 싫어가지구 막 혹시나 같이 앉을 확률이 있나 계산한거야 지금 그리고 만약 얘네가 C구역이 될자기 구역 자리래 만약에 C구역에 같은 구역에 앉을 확률을 구하는데...
		(중략)
271	교사	그렇죠 지희 나올까요?
272	지희	모르겠어요
273	교사	아모르겠어요?
275	은진	지희 알려주자
276	교사	지희 이해시켜 주세요 그러면
282	은진	아 여기 앞 페이지에 봐봐
284	은진	이게 지금 이 상황이 독립인가 종속인가를 홍이랑 혜리가 수업시간에 한 대~ 읽어봐

은진은 지희에게 독립과 종속의 개념을 설명해주기 위해서 홍과 혜리의 상황에서부터 출발하여 설명을 시작하였다(249). 중략된 과정에서 은옥과 은진은 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$에 대한 이야기를 좀 더 나눈다. 교사는 발표자를 선정하기 위해 지희에게 나올 것을 요청하나, 지희는 모르겠다면서 난감해하고 이에 은진은 지희를 이해시켜주기 위하여 다시 노력하였다. 이제는 현 문제의 상황을 설명할 뿐 아니라 홍과 혜리가 커머그너티브 갈등을 겪게 되었었던 상황으로 돌아가 두 사건의 독립과 종속을 이해시키고자 하였다. 다시 홍과 혜리의 싸움으로 돌아가 다음과 같이 다시 주사위를 던지는 상황에 대한 논의를 하였다.

293 지희 응 뭐라고?
295 은진 P(A) 가 일어나거는
296 은진 P(B) 분에 P...이거지 이거 공식 생각나? 기억나?
298 지희 근데 왜 6분에 3이야?
299 은진 어?
300 지희 주사위 6개중에
301 은진 두 주사위
302 은진 주사위? <u>두 주사위인데?</u>
303 지희 6분에 아니야?
304 은진 아? 근데 아까 6분에라고 그랬는데?

은진은 전체 논의에서 설명한 방식으로 개념을 설명해 주려 하지만, 다시 문제를 접하고 주사위가 2개였음을 알고, 이에 대한 계산을 다시 해보게 되었다. 하지만, 이내 [그림 Ⅳ-12]의 과제에 대한 전체 토의가 시작되어 두 학생은 토론을 이어가지 못했다. 따라서 지희는 여전히 독립과 종속의 개념을 이해하지 못했다. [그림 Ⅳ-12]의 과제에 대한 전체 토의 이후에는 $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$이면 두 사건 A, B가 독립이 되는지는 밝히는 증명을 한 후, 다음 [그림 Ⅳ-14]에 이어지는 과제에 대한 논의를 시작하였다.

홍은 표를 보며 한국에서 일하는 외국인의 수와 직업을 보며 한국 사람이 기피하는 3D 업종에 많이 종사하는 것 같다는 생각이 들었다.

[2012년 6월 내·외국인 고용현황]

(단위: 천명)

				외국인	내국인	계
15세 이상 인구	경제활동인구	취업자	관리자·전문가 및 관련 종사자	91	5,325	5,416
			사무 종사자	20	4,115	4,135
			서비스·판매 종사자	87	5,571	5,658
			농림어업 숙련 종사자	24	1,639	1,663
			기능원·기계조작 및 조립 종사자	330	5,168	5,498
			단순노무 종사자	239	3,299	3,538
			전체	791	25,117	25,908
		실업자		33	822	855
	비경제활동인구			290	15,622	15,912
	계			1,114	41,561	**42,675**

* 출처: 통계청 '2012 외국인 고용조사', '2012년 6월 고용동향' 보고서

[그림 Ⅳ-14] 모델교과서 52쪽 통계 자료

홍은 자신이 베트남인이어서 루이 앞에 당당히 나서지 못할것이라는

생각에 안타까운 생각에 잠기게 되고, 신문에서 한국내의 내국인과 외국인의 고용 현황에 대한 통계자료를 접하게 된다. 홍은 근로자의 업종과 국적 사이에는 차이가 있으리라는 추측을 하게 되고, 홍의 추측에 대한 탐구를 문항으로 제시하였다. [그림 Ⅳ-15]은 탐구 문항과 이에 대한 은진의 풀이 과정이다.

(1) 15세 이상의 사람 중 한국에서 관리자·전문가 관련 업종에 취업할 사건과 15세 이상의 사람 중 외국인일 사건은 서로 독립인가 종속인가? 종속

$P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{91}{1114}$

$P(A) = \frac{5416}{426115}$ $\frac{1114}{426115} = P(B)$ $P(B) = = \frac{1114}{426115}$

(2) 15세 이상의 사람 중 한국에서 단순노무에 종사할 사건은 15세 이상의 사람 중 외국인일 사건과 서로 독립인가 종속인가? 종속

$P(A) = \frac{3538}{426115}$ $P(B) = \frac{1114}{426115}$ $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{239}{1114}$

$P(B) = \frac{1114}{426115}$

(3) 위의 문제 (1)과 (2)의 결과를 비교하여 차이점을 찾고 그 이유에 대해 정치, 사회, 문화 등 다양한 자료를 찾아 설명해보자.

[그림 Ⅳ-15] 모델교과서 53쪽 탐구 문항

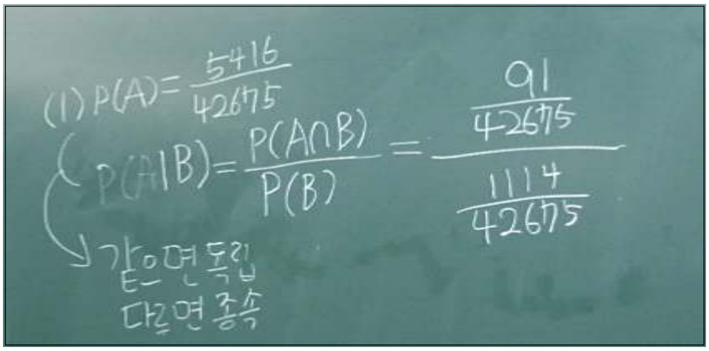
이에 대한 모둠1의 논의 중 일부는 아래의 담화와 같다.

737	은옥	P(A¦B)뭐나왔어?
738	은진	이거? 안했어
739	은옥	아니 첫 번째꺼
740	은진	천백..
741	은옥	음맞지맞지
742	지희	이거랑 이거랑 같은지 다른지 구하는거 아냐?
743	은진	어 그래서 막,막, P막..
744	지희	<u>근데 이거 왜 쓴거야?</u>
745	은진	계산을 해서 이걸 P(A)라 하고 이걸 P(B) 라고 하면

748	은진	합쳐서 42,675분에
749	지희	그건 아는데~ 이건 왜한거야? 갑자기 P..
750	은옥	아~ 아니 그게 못 믿겠으면 그걸로 해 는 P(A) 곱하기 P(B)
751	은진	응~
755	은옥	근데 이거 계산이..
756	은진	얘랑 얘랑 같으면 서로 독립이잖아 근데 얘를 구할라면 이게 P(B)분에 P(AnB)니까
757	태희	흐흐흐
758	은진	이걸 알아낼 수 있으니까
759	지희	아 그래서 그런거야?
760	태희	은진은진 P(A) 곱하기 P(B) 구했어?
763	태희	P(A) 곱하기 P(B)로 안 구했지?
764	은진	어! 난 그냥 그걸로 계산하는게 싫어

은옥과 은진은 이미 독립과 종속 개념에 대한 일반적, 형식적 수준에 도달하여 별 무리 없이 문제를 해결하였다. 이전 문항들과 다르게 이 문항에서는 두 사건이 기호화 되어있지 않았다. 하지만 은옥과 은진은 자연스럽게 관리자, 전문가 업종에 종사할 사건을 A, 외국인일 사건을 B라 하고 논의를 이어 갔다. 은진과 은옥은 독립의 정의를 이용하여 $P(A|B)$와 $P(A)$가 같은지를 확인하였고, 지희는 이 과정에서 비로소 독립의 개념을 이해하게 되었다(759). 은옥은 독립의 정의 대신 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$을 이용해도 된다는 것을 제안하였다(750). 태희는 $P(A)\times P(B)$를 구하여 $P(A\cap B)$와 같은지 확인하고자 하였으나(760), 은진은 그 계산이 복잡해서인지 싫다고 하면서 자신의 방법을 고수하였다. 즉, 은옥과 은진은 두 사건의 독립성을 결정하는 확률적 판단의 루틴에서, 형식화된 공식, 정의를 사용하였고, 맥락 내에서 자신의 계산상의 편의에 따라 적절한 전략을 선택하였다.

이어진 전체 토의에서 지희는 [그림 Ⅳ-16]을 시각적 매개체로 하여 발표하였다.



[그림 Ⅳ-16] 일반적, 형식적 수준에서 지희의 시각적 매개체

지희와 태희 모두 은옥과 은진과 같이 두 사건의 독립과 종속이 무엇인지를 파악하였다. 또한 용어의 의미를 맥락 내에서 적절하고 유용하게 사용하고 형식화하여 표현하였다. 지희는 문제 맥락에 적합한 수학적 기호로 표현되는 시각적 매개체를 정확히 사용하고 있다. 또한 두 사건이 서로 독립인지를 판단하는 확률적 판단의 루틴에 두 사건의 독립의 수학적 정의를 정확히 적용하였다. 따라서 지희도 독립 개념에 대한 일반적 수준, 형식적 수준의 공존단계로 발전했음을 볼 수 있다.

한편, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$을 이용하여 두 사건의 독립성을 판단한 모둠3, 모둠4에서는 $P(A \cap B) = 0.004$와 $P(A) \times P(B) = 0.003$으로 계산 되어 두 값의 차이가 어느 정도 벌어져야 둘이 다르다고 할 수 있을지에 대한 질문을 하였다. 이에 대해 교사는 다음과 같이 정리하였다.

870	교사	그런 얘기 같은 경우라서 그래서 이게 같으면 독립이고 다르면 종속인데 두 개가 다르게 나왔다고 해도 그 다음에 또 이걸 따진 경우가 있었어요 필요 충분조건 했으니까 P(A) 곱하기 P(B)가 그 다음에 P(AnB) 이게 다 그냥 등호를 확인을 해봤는데 얘를 곱하면은 0.003정도 나왔다고요? 얘 둘이는 0.004정도가 나온다 그러면은 이걸 과연 같다고 봐야될꺼냐 다르다고 봐야될꺼냐 라는 문제가 있는데 이런 거는 얘같은 경우는 사실 테스트를 알아보고 얘도 쫌 어떻게 보면 비슷한 값이라고 할 수 있잖아요 과연 이게 소수점 차이가 나는게 같냐 다르냐 라는 것은 나중에 너희가 대학에 가면은,

		이과면 의대 가면 통계학을 많이 볼꺼에요
873	은옥	갈일이 없어서
	은진	맞아
874	교사	그래서, 통계과학 우리 수교과 가는 친구 있죠 수학교육과 가는 친구도 아마 배울꺼고 어 그래서 보면 얘네가 통계적으로 봤을 때 의미하는 차이인지 아닌지 테스트하는 절차가 있는데 우리 수준에서 그냥 이제 직관적으로 보면 이렇다

대학 과정에서의 통계적 추론에서는 두 변수사이의 독립성을 추론하기 위하여 두 변수의 독립성을 가정했을 때의 예측 값과, 실제 관측 값의 차이의 유의미성을 카이스퀘어 분포를 이용하여 테스트한다. 이 알고리즘과 같지는 않지만, 0.004, 0.003의 차이를 같다고 보아야 할지 다르다고 보아야 할지에 대한 질문은 향후, 통계적 추론 개념 형성을 위한 토대가 될 수 있다. 즉, 이 자료는 통계적 추론에 대한 상황적 수준과 더 높은 수준간의 커머그너티브 갈등을 유발하였다고 볼 수 있다.

2. 스토리텔링의 역할

2절에서는 조건부 확률, 사건의 독립과 종속에서 학생들의 학습 수준의 발전과정을 요약하고, 각 발전과정에서의 스토리텔링의 역할을 서술한다. 각 수준별 발전과정에서의 스토리텔링의 역할을 살핀 후, 이를 종합하여 전반적인 스토리텔링의 역할을 서술한다.

2.1. 조건부 확률

2.1.1. 참조적 수준으로 발전과정에서 스토리텔링의 역할

학생들은 모델 교과서의 등장인물인 홍이 루이를 돕는 과정에서 몬티홀의 딜레마를 이해하기 위한 상황에 동참하면서 조건부 확률에 대한 개념을 형성하였다. 홍은 몬티홀 딜레마에 대한 인터넷 자료를 찾아보면서, 메릴린 사반트와 폴 에어디시가 각기 생각하는 확률의 전사건에 대

한 이해의 차이로 인한 커머그너티브 갈등을 접하였다. 수업 교실의 학생들도 폴 에어디시를 지지하다가 탐구 과정을 통해 메릴린 사반트의 의견을 지지하게 되거나(은주), 지속적으로 폴 에어디시를 지지하다가 시뮬레이션, 조건부 확률 도입 이후에 메릴린 사반트에 동의하는 등 두 의견 사이에 갈등을 겪게 되었다.

모둠2의 경우 [그림 Ⅳ-1]을 해석하는 데에 어려움을 겪고 교사에게 도움을 요청한다. 교사의 도움을 받아 문주, 소연은 상황을 잘 이해할 수 있었고 은주는 조건부 확률에 대한 비형식적 이해를 통해 참조적 수준으로의 수준 상승을 하였다. 특히 은주는 처음에는 말로 설명을 하지 못하겠다고 하다가, 교사의 지속적인 질문에 대답하면서 답변을 정교화 하였다. 이상에서 살펴본 조건부 확률개념에 대한 상황적 수준에서 참조적 수준으로의 발전과정을 정리하면 [그림 Ⅳ-17]와 같다.

몬티홀의 딜레마에서 자신은 어떤 선택을 할 것인가를 묻는 질문에 이어진 초기 담화에서 학생들은 확률 용어에서 전사건이 제한될 수 있다는 사실을 생각하지 못했다. 담화 과정에서 사용한 시각적 매개체는 교과서에 주어진 구체적 그림을 이용하는 수준이었으며, 확률적 판단에 이르지 못하고 주관적이고 자신이 생각하기에 상식이라고 느끼는 범위에서 판단하는 루틴을 보였다. 이로 인해 합의된 사실적 서술은 “상식적으로는 말이 안 돼” 정도의 상황에 근거한 것이었다.

메릴린 사반트의 의견을 접하고 두 의견 중 어떤 의견이 옳은지, 그리고 메릴린 사반트의 생각을 수학적으로 어떻게 해석할 수 있는지 탐구하는 과정에서 학생들의 수준은 참조적 수준으로 서서히 상승하였다. 확률에서 전사건이 달라지면 확률 값이 달라짐을 인지하며 조건부 확률의 필요성을 알게 되고 교사의 주도 하에 몬티홀의 딜레마의 맥락 내에서 조건부 확률의 정의를 알게 되었다. 내용을 설명하는 과정에서 시각적 매개체는 점점 기호화 되어갔다. 또한 정교하고 정확하지는 못하지만 나름의 수학적 해석을 덧붙인 확률적 판단을 하려는 루틴을 보였다. 전체 토의를 통해 주어진 맥락 내에서의 조건부 확률의 개념을 적용하여 문을 바꾸는 것이 두 배 더 유리하다는 것을 사실적 서술로 도출하였다.

참조적 수준		
	용어	조건부 확률을 엄밀히 정의하고 사용하지는 못해도, 전사건을 제한할 때 확률이 달라질 수 있음을 인지
	시각적 매개체	구체물이용, 판단의 과정을 기호로 표현 (예) 문, 염소, 차를 간단히 표현, 바꾸는 상황을 화살표로
	루틴	정확하진 않지만, 나름의 확률적 근거에 의한 판단 (예) 두개를 더해서 삼분의 이고 만약 처음에 여기를 열었으면 삼분의 일밖에 안되니까 아무거나 골라도 바꾸는게 조금 더 유리한거...,/ 두개 중에 하나 고르는 확률이 두개중에 하나니까 이분의 일이잖아요. 그래서요
	사실적 서술	수치적 정보에 대한 서술 (예) 문을 바꾸는 경우 당첨할 확률이 2/3 , 꽝일 확률 2/3

갈등의 해소
- 텔링을 통해 생각을 정교화
- 문을 바꾸는 것이 유리함을 조건부 확률로 설명

커머그너티브 갈등 발생
- 스토리에서 직접적으로 갈등 구조를 제시
- 메릴린 사반트: 바꾸는 것이 2배 유리함
  (당첨된 경우로 전사건 제한)
- 폴 에어디시: 바꾸는 것이 의미 없음
  (문을 열어 염소 한 마리를 보여준 이후의 사건 생각)

상황적 수준		
	용어	일상적, 구체적 용어 (예) 이론적으로/상식적으로 확률의 정의에서 전사건이 달라질 수 있음을 모름
	시각적 매개체	상황에 주어진 구체적인 시각적 매개체사용 (예) [그림 IV-1]
	루틴	상황과 개인의 주관적 생각에 의한 판단 (예) 이게 더 멋있어보여, 왠지
	사실적 서술	상황에 근거한 서술 (예) 상식적으로는 말이 안 돼

스토리에서 제시된 메릴린 사반트와 폴 에어디시의 커머그너티브 갈등은 학생들에게도 그대로 이어졌고, 이를 해결하는 과정에서 메릴린 사반트의 설명을 탐구하거나, 전문가인 교사의 의견에 동의하면서 다음 수준으로의 향상하였다. 즉, 메릴린 사반트와 폴 에어디시의 커머그너티브 갈등은 수준 향상을 위한 논의의 토대를 마련하였다.

2.1.2. 일반적, 형식적 수준으로의 발전과정에서 스토리텔링의 역할

스토리속의 루이는 B형 간염 예방주사를 맞아야 하는지의 여부를 알기 위해서 항체 검사를 받았다. 루이는 주사 맞는 것을 싫어하기 때문에 루이의 열혈팬인 홍은 루이가 간염 예방주사를 맞아야 하는지를 확률적으로 생각해보기로 하였고, 학생들은 이 과정에 동참하게 되었다.

먼저, 예방주사의 알고리즘을 파악하여, 항체가 있을 때 검사가 바르게 판정되는 경우와 항체가 없을 때 검사가 바르지 않게 판정되는 경우에 예방주사를 맞지 않아도 된다는 것을 논의를 통해 알게 되었다. 이후에 $P(A|B)$, $P(A|B^c)$, 그리고 $P(A\cap B)$가 의미하는 것이 무엇인지를 모둠별로 논의하는 과정에서 학생들은 $P(A|B)$와 $P(A\cap B)$가 수학적으로 다르다는 것을 알지만, 이것이 주어진 상황의 맥락 속에서 서로 다르게 표현된다는 것에 대한 갈등을 겪게 된다. 즉, 수학적 담화와 일상적 담화 사이의 갈등을 겪는다. 이 때, 수학적 담화는 조건부 확률을 기호로 나타낸 것으로서 조건부 확률 개념을 일반적, 형식적 수준으로 내면화하였을 때, 완벽히 이해할 수 있는 것이다. 일상적 담화는 조건부 확률에 대해 익숙한 루틴에서만 용어의 뜻을 이해하는 참조적 수준의 학생들이 사용하는 담화이다. 학생들은 교사의 설명을 통하여 조건부 확률의 정의가 $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(A)}$라는 것을 표면적으로는 알고 있었으나, 이 기호가 의미하는 것이 무엇인지는 정확히 내면화하지 못한 상태였다. 따라서 서로 다른 담화의 수준 차이로 인해 커머그너티브 갈등이 발생하게 된 것이다. 하지만, 이 갈등에 대해서 학생들은 1일차 수업에서 그랬던 것과 같

이 생각을 포기하려고 하지 않고, 다양한 수학적 시도를 통해 수학적 정의와 각각의 맥락적 의미간의 합의를 도출해내기 위한 노력을 하였다.

먼저, 항체가 있고 항체검사를 바르게 받게 되는 것을, 항체가 있을 때 항체검사가 바르게 판정되는 것과 항체검사가 바르게 판정되었을 때, 항체가 있을 확률의 합으로 추측하고 $P(A \cap B) = P(B|A) + P(A|B)$라는 가설을 설정하였다. 그리고 이를 각 확률의 수학적 정의에 의한 확인하는 과정을 통해 가설이 틀렸음을 확인하였다. 전체 토의를 시작하기 위하여 발표자를 선정하는 과정에서 교실이 매우 소란스러웠으나, 은진, 지희는 다시 한 번 조건부 확률의 의미를 생각하며 언어적 해석을 시도하여 두 확률이 다름에 대하여 두 학생끼리 승인하였다. 또한 문제에서 요구하지 않았음에도 불구하고 각 확률을 벤다이어그램을 이용하여 표현해 보면서 사고를 확장하였다.

이를 정리하면 [그림 Ⅳ-18]와 같다. 교과서에 제시된 $P(A|B)$와 $P(A \cap B)$가 의미하는 바를 쓰는 문항은, 학생들에게 수학적 담화(형식적 수준)와 일상적 담화(참조적 수준)사이의 대립이 되는 커머그너티브 갈등을 초래하였다. 조건부 정의의 개념을 참조적 수준으로 알고 있는 상태에서는 사실적 서술로서 조건부 확률의 정의를 도출하여 알고 있으나, 용어에 대해 루틴적 사용을 하고 있는 상태이기 때문에 다른 루틴을 요하며 형식적 기호에 대한 맥락적 적합성과 유용성을 이해해야 하는 상황에서 조건부 확률의 의미를 제대로 파악하지 못하여 갈등을 겪은 것이다. 하지만 학생들은 교과서, 교사의 권위를 인정하여 수학적 정의가 맞아야 함을 알고, 나름의 가설을 세워 입증을 해보고, 시각화를 해보고, 수학적 정의에 대한 지속적인 성찰을 하여 조건부 확률에 대한 일상적 담화와 수학적 담화의 합의를 끌어낸다.

참조적 수준에서 합의를 끌어내는 과정에서는 상황을 자세히 설명해주는 과정에서 교사의 도움이 필요했고, 조건부 확률의 정의를 합의하는 것도 교사에 의해서였다. 즉, 그 과정에서의 루틴은 의례적(ritual)이었다. 일반적 수준에서의 합의를 끌어내는 과정에서는 수학적 담화가 옳아야 함을 아는 과정은 의례적이라고 할 수 있으나, 그것에 합의하는 과정의

일반적, 형식적 수준		
	용어	조건부 확률의 수학적 정의를 정확히 인지하며, 일상적 상황에서 의미를 해석하는 맥락, 곱셈정리에서 의미를 해석하는 맥락 등 다양한 맥락에서 의미를 인지
	시각적 매개체	다양한 시각적 매개체 사용 (예) 수학적 기호, 벤다이어그램, 언어적 표현
	루틴	확률의 연산에 대한 연역적 증명, 탐색적 루틴 (예) 정의 회상, 가설 구성 및 입증, 확률곱셈정리 입증
	사실적 서술	대상관의 관계, 기호화를 통한 서술 (예)$P(A\|B)$는 검사해서 옳게 된 케이스 중에서 항체가 있는 거고, $P(A\cap B)$는 검사가 올바르고! 항체가 있는 경우 $P(A\cap B)=P(A)\times P(B\|A)$, $P(A\cap B)\neq P(A\|B)+P(B\|A)$)

갈등의 해소
- 수학적 정의가 맞음을 인정하고 언어적 표현에 대한 지속적인 성찰을 통해 조건부 확률의 의미를 구성
- 가설 설정 및 검증($P(A\cap B)=P(A|B)+P(B|A)$)
- 벤다이어 그램을 이용한 조건부 확률의 시각화 시도
- 확률의 곱셈정리 도출하고 이를 조건부 확률 개념을 이용하여 언어적으로 해석

커머그너티브 갈등 발생
- 조건부 확률에 대한 수학적 담화(형식적 수준)와 일상적 담화(참조적 수준) 사이의 갈등 발생

(수학적으로 $P(A\cap B)\neq P(A|B)$임을 알지만 이를 일상적으로 해석하지 못함)

참조적 수준		
	용어	전사건을 제한할 때 확률이 달라질 수 있음을 인지, 다른 루틴을 요하는 상황에서 용어를 제대로 사용하지 못함
	시각적 매개체	구체물, 수학적 과정을 기호로 표현
	루틴	정확하진 않지만, 나름의 확률적 근거에 의한 판단
	사실적 서술	조건부 수치적 정보에 대한 서술

루틴은 스스로 가설을 구성하여 이를 입증하고, 조건부 확률의 정의를 다시 회상해보고, 새로운 시각화를 시도하여 스스로 사실적 서술을 도출했기 때문에 탐색적(exploration)이었다고 할 수 있다. 즉, 의례적인 루틴에서 탐색적인 루틴으로의 발전이 일어났다고 할 수 있다.

확률의 곱셈정리를 유도하는 과정에서 학생들이 조건부 확률의 수학적 정의를 정확히 인지하며, 일상적 상황에서 의미를 해석하는 맥락, 곱셈정리에서 의미를 해석하는 맥락 등 다양한 맥락에서 의미를 인지하고 있음을 알 수 있었다. 또한 확률의 곱셈정리를 모두가 인정하는 사실적 서술로 도출할 수 있었다. 즉, 용어에 대한 문구적 사용 뿐 아니라 다양한 맥락에서 적절하고 유용한 인식적 이해를 보이는 대상적 사용을 했다고 할 수 있다.

교과서의 다양성의 원리에 의하여 조건부 확률을 언어적, 수학적 등 다양한 방법으로 표현하도록 하고, 과정지향성의 원리에 의하여 스스로 곱셈정리를 도출해보도록 하는 과정에서 학생들은 다양한 맥락에서 적용되는 조건부 확률의 의미를 탐색하고, 일반적인 수준과 더불어 형식적 수준으로의 발전이 가능하였다.

2.2. 독립과 종속: 일반적 수준, 형식적 수준으로의 발전에서 스토리텔링의 역할

두 사건의 독립성에 대한 수준은 [그림 IV-19]과 같이 상황적, 참조적 수준의 공존에서 일반적, 형식적 수준의 공존으로 발전하였다. 조건부 확률에 대한 일반적, 형식적 수준을 형성한 상태에서, 조건부 확률의 정의를 이용하여 두 사건의 독립성을 정리하였기 때문에, 상황적 수준과 참조적 수준은 자연스럽게 공존할 수 있었다. 하지만, 독립과 종속의 정의가 교사에 의한 설명방식으로 학생들 입장에서는 수동적으로 받아들여진 상황에서, 기호/정의의 도입에도 불구하고 학생들은 두 사건의 독립, 종속이라는 용어를 활발히 사용하지 않고 ‘영향이 있다/없다, 관련이 있다/없다’라는 일상 언어를 사용하였다. 두 사건의 독립성을 판단하는

일반적, 형식적 수준

용어	두 사건이 독립이라는 것을 $P(A\|B)=P(A)$로 인식함. 어떠한 맥락에서도 독립성의 정의를 파악할 수 있음
시각적 매개체	수학적 기호 (예) $P(A\|B), P(A)$
루틴	두 사건의 독립의 정의를 적용한 독립성 판단하는 필요성을 인지하고 이를 적용함. 두 사건의 독립성을 판단하기 위한 다양한 전략이 있음을 알고 전략을 선택.
사실적 서술	$P(A\|B)=P(A)$이기 때문에 두 사건이 독립이다. $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$과 $P(A\|B)=P(A)$는 필요충분조건이다

갈등의 해소
- 두 사건의 독립의 수학적 정의의 필요성 인지
- 독립사건의 정의를 숙지하고 다양한 맥락에 적용

두 사건이 독립이면 $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$
$P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$이면 독립임을 유도하면서 독립개념을 수학적으로 대상화
기호화가 전혀 이루어지지 않은 실제적 상황에서 독립성 판단을 요하는 과제 해결

커머그너티브 갈등 발생
- 홍의 가설 'A형 간염환자 중 청소년일 확률은 성별에 따라 다를 거야'에 대하여 이미 높은 수준의 교사는 '독립'의 수학적 정의를 적용할 것을 생각하고 학생들은 단순이 집단 간의 비율 비교만을 생각함으로서 의사소통상의 갈등 발생
- 독립과 종속에 대하여 홍은 일반적 수준으로, 혜리는 상황적 수준으로 이해하여 두 학생의 담화간 대립 발생

상황적, 참조적 수준

용어	'독립이다'라는 용어 대신 일상적, 구체적 용어 (예) 영향이 없다/관련이 없다
시각적 매개체	두 변수의 관련성을 직접적으로 볼 수 있는 것 (예) 표, 숫자, 단어
루틴	조건부 확률의 계산에 따른 확률적 판단을 하지만, 두 사건의 독립성을 판단하는 정보로서 정확하지 않음

루틴에서도 조건부 확률의 계산에 따른 확률적 판단을 하지만, 두 사건의 독립성의 정의에는 어긋나는 변인간의 수치 비교를 하는 수준이었다. 이 과정에서 조건부 확률 기호, 독립성의 정의를 나타내는 기호 보다는 표, 숫자, 단어 등 두 변수의 관련성을 직접적으로 볼 수 있는 시각적 매개체를 사용하였으며, 이로 인해 도출된 사실적 서술은 '확률 값에 차이가 있기 때문에 서로 독립이다. 서로 영향이 없기 때문에 독립이다.' 와 같이 상황, 수치적 정보에 대한 서술이었다.

이로 인해 연이은 두 사건의 독립, 종속을 판단하는 상황에서도 발전과정에서는 두 번의 커머그너티브 갈등이 발생하였다. 먼저, 홍의 가설 'A형 간염환자 중 청소년일 확률은 성별에 따라 다를 거야' 에 대하여 이미 높은 수준의 교사는 '독립' 의 수학적 정의를 적용할 것을 생각하고 학생들은 단순이 집단 간의 비율 비교만을 생각함으로서 갈등이 발생하였다. 또한 교과서 스토리에서 홍과 혜리는 직접적인 커머그너티브 갈등을 드러냈다. 독립과 종속에 대하여 홍은 일반적 수준으로, 혜리는 상황적 수준으로 이해함에 따른 갈등이 발생하였고 비슷한 갈등이 학생들에게도 전이되었다.

이 갈등의 해소를 위하여 전체 논의과정에서 두 사건의 독립, 종속 개념의 필요성을 인지하고 이를 정의하였다. 하지만 교사의 설명에 의한 독립, 종속 개념의 도입은 학생들에게 수동적으로 받아들여졌으며, 학생들은 다양한 맥락에서 두 사건의 독립성을 판단하면서 독립, 종속의 개념을 내면화하였다. 먼저, 비복원의 상황에서 두 학생이 자리를 추첨하는 사건을 통해 두 사건이 독립일 때, 두 사건의 곱사건의 확률을 계산하는 과제를 해결하였다. 또한 학생들은 모둠별 논의를 통하여 이를 일반화하여 두 사건이 독립이면 $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$, $P(A) \cdot P(B) = P(A \cap B)$이면 독립임을 유도하는 과정에서 확률의 연산에 대한 연역적 추론을 하였으며, 독립개념을 수학적으로 대상화하였다.

또한 기호화가 전혀 이루어지지 않은 실제적 상황에서 독립성판단을 요하는 과제를 해결하면서, 다시 상황적 수준의 과제에서 출발하여 수치화, 추론, 연역적 과정을 거친 논의를 하였으며 학생들이 일반적, 형식적

수준의 공존상태에 도달했음을 알 수 있었다. 학생들은 두 사건이 독립이라는 것을 $P(A|B)=P(A)$로 인식하여 어떠한 맥락에서도 독립성의 정의를 파악할 수 있었다. 설명 과정에서 시각적 매개체로 수학적 기호 ($P(A|B), P(A)$)를 사용하였으며, 두 사건의 독립의 정의를 적용한 독립성 판단하는 필요성을 인지하고 이를 적용하였다. 또한 두 사건의 독립성을 판단하기 위한 다양한 전략이 있음을 알고 적절한 전략을 선택하였다. 이로 인해 '$P(A|B)=P(A)$이기 때문에 두 사건이 독립이다.', '$P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$과 $P(A|B)=P(A)$는 필요충분조건이다.'와 같은 대상간의 관계, 기호화에 대한 사실적 서술을 합의하였다.

2.3. 정리

스토리텔링을 활용한 수업에서 조건부 확률에 대한 담화, 즉 학습 수준은 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준과 형식적 수준의 공존 수준으로 발전함을, 독립과 종속에 대한 학습수준은 상황적 수준과 참조적 수준의 공존 수준, 일반적 수준과 형식적 수준의 공존 수준으로 발전함을 확인할 수 있었다. 수준의 발전과정에서의 스토리텔링의 역할은 다음과 같이 정리할 수 있다.

첫째, 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』에 수록된 스토리의 플롯에 의한 스토리 등장인물들의 갈등은 학생들의 커머그너티브 갈등을 유발하였다. 이러한 갈등은 학생들의 커머그니션을 촉진시킴으로서 교실에서의 활발한 논의의 장을 마련해주었다. 교과서에 수록된 스토리는 플롯을 갖춘 것으로서, 플롯의 요소에는 갈등 구조가 포함된다(박소화, 2012). 조건부 확률 개념이 상황적 수준에서 참조적 수준으로 발전하는 과정에서 사용된 스토리에서 메릴린 사반트와 폴 에어디시는 확률의 전사건에 대한 정의의 차이로 인한 커머그너티브 갈등을 드러내었다. 두 사건의 독립과 종속 개념이 상황적, 참조적 수준에서 일반적, 형식적 수준으로 발전하는 과정에서 사용된 스토리에서 홍은 독립과 종속에 대한 일반적, 형식적 수준을, 혜리는 상황적, 참조적 수준의 이해를 함으로서 커머그너티브 갈등을 드러내었다. 이는 학생들에게도 자연스럽게 전이되

었고, 갈등의 해소과정에서 확률에서 전사건 제한의 필요성, 독립, 종속 개념의 수학적 정의의 필요성을 합의하게 되었다.

둘째, 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』의 전개에 적용된 맥락성의 원리, 과정지향성의 원리, 다양성의 원리, 소통의 원리 역시 학생들의 수준 상승의 촉진 작용을 하는 커머그너티브 갈등을 유발하고, 이를 학생들이 주도적으로 해소하도록 돕는 역할을 하였다. 맥락성의 원리에 의하여 제공된 실생활에 기반한 자료는 학생들이 일상적이고 구체적인 언어로부터 점진적으로 수학적 내용을 조직해갈 수 있는 실제적 경험의 토대를 마련해 주었다. 실제적인 상황에 대한 서로 다른 해석, 일상적 담화와 수학적 담화의 수준 차이 등은 커머그너티브 갈등을 유발하여 다음 수준으로의 발전을 촉진하였다.

B형 간염 주사를 맞아야 하는지의 여부를 판단하는 상황을 통해 조건부 확률 개념이 참조적 수준에서 일반적, 형식적 수준으로 발전하였다. 교과서에서는 $P(A|B)$와 $P(A \cap B)$가 의미하는 바를 주어진 상황에 맞추어 해석해보도록 하였다. 이는 학생들에게 수학적 담화(일반적, 형식적 수준)와 일상적 담화(참조적 수준)사이의 대립이 되는 커머그너티브 갈등을 초래하였다. 학생들은 교과서, 교사의 권위를 인정하여 수학적 정의가 맞아야 함을 알고, 나름의 가설을 세워 입증을 해보고, 시각화를 해보고, 수학적 정의에 대한 지속적인 성찰을 하여 조건부 확률에 대한 일상적 담화와 수학적 담화의 합의를 끌어냈다. 그리고 확률의 곱셈정리를 스스로 유도하면서 조건부 확률의 의미를 더욱 견고히 하였다.

참조적 수준에서 합의를 끌어내는 과정에서 적용된 루틴이 의례적(ritual)이었던 것과 대조적으로 일반적, 형식적 수준에서의 합의를 끌어내는 과정에서의 루틴은 스스로 가설을 구성하여 이를 입증하고, 조건부 확률의 정의를 다시 회상해보고, 새로운 시각화를 시도하여 스스로 사실적 서술을 도출했기 때문에 탐색적(exploration)이었다고 할 수 있다. 즉, 의례적인 루틴에서 탐색적인 루틴으로의 발전이 일어났다고 할 수 있다. 즉, 교과서의 다양성의 원리에 의하여 조건부 확률을 언어적, 수학적 등 다양한 방법으로 표현하도록 하고, 과정지향성의 원리에 의하여 스스로

곱셈정리를 도출해보도록 하는 과정에서 학생들은 다양한 맥락에서 적용되는 조건부 확률의 의미를 탐색하고, 일반적인 수준과 더불어 형식적 수준으로의 발전이 가능하였다.

독립, 종속 개념이 발전하는 과정에서는 학생들은 다양한 소재로부터 두 사건의 독립성을 판단함으로서 상황적, 참조적 수준에서 일반적, 형식적 수준으로 발전할 수 있었다. 이 과정에서 이미 높은 수준에 있는 교사와 학생들 사이의 커머그너티브 갈등이 발생하였다. 처음에는 전체 논의를 통해 교사의 주도로 독립, 종속 개념의 도입되었지만, 뒤이은 여러 맥락에서의 문제 해결과정을 통해 학생들은 조건부 확률의 개념발전에서 그랬던것 처럼 의례적 루틴을 탐색적 루틴으로 발전시켜갔다. 또한 교과서의 전개는 과정지향성의 원리에 따라 독립 개념을 학습하는 초반에는 문제 상황에서 어느 정도 학생들이 문제에서 주는 정보에 따라 문제를 해결하도록 하였다. 이 과정에서 학생들은 다양한 소재에서 독립성을 판단하게 되었고, 맥락에 따라 독립의 의미에 대한 용법 변화 없이 '독립'이라는 용어를 대상적으로 이해하게 되었다. 두 사건의 독립의 필요충분조건을 유도하는 과정에서 회상, 입증의 탐색적 루틴을 적용하였다. 필요충분조건이 유도된 이후에는 학생 스스로 상황을 기호화하고, 전략을 선택하게 하도록 하는 과제가 제시되었고, 학생들은 적절한 전략을 선택하는 루틴을 보였다.

셋째, 스토리텔링을 활용한 수업에서는 소통의 원리에 따라 학생들 스스로 스토리텔러로서의 역할을 하였다. 스토리텔링을 활용한 수업에서는 학생들 스스로 스토리텔러가 되어 서로 소통할 것을 강조한다. 학생들은 서로 소통하는 과정에서 생각을 정교화 할 뿐 아니라 각 과제의 상황을 유기적으로 연결하여 생각함을 알 수 있었다. 3일차 수업에 늦게 와서 독립, 종속의 개념을 제대로 발전시키지 못한 지희를 돕는 은진의 담화(Ⅳ의 1.2.2에 제시된 담화, "얘가 홍이랑 혜리랑 싸워가지고 콘서트를 간대 루이 콘서트를 가는데(249)", "이게 지금 이 상황이 독립인가 종속인가를 홍이랑 혜리가 수업시간에 한 대~ 읽어봐(284)")는 은진이 단순히 독립, 종속의 정의를 전달하는 것이 아니라, 홍과 혜리의 스

토리로부터 시작하여 개념을 설명해준다는 것을 의미한다. 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』의 스토리는 플롯을 갖추고 있으며, 각 상황의 소재는 다를지라도 그 상황이 주인공들의 스토리로 연결 되어있다. 때문에 학생들도 서로 텔링을 하는 과정에서 자연스럽게 스토리를 인용하고 스토리 속에서 개념을 익히도록 한 것이다.

위와 같이 스토리텔링에 활용된 스토리와 스토리텔링 교과서와 수업의 전개방식은 직접적, 간접적으로 커머그너티브 갈등을 유발함을 알 수 있다. 갈등의 해소 과정에서는 교사의 설명도 일부 포함된다. 하지만 맥락성의 원리, 과정지향성의 원리, 다양성의 원리, 소통의 원리를 통해 학생들은 점진적으로 의례적 루틴을 탐색적 루틴으로의 발전시키고 학습 내용을 내면화함을 알 수 있었다. 이전 단계의 담화를 기반으로 수학적 지식을 입증, 구성함으로서 메타수준의 학습을 하였으며, 이를 통해 발생모델에서의 학습 단계를 발전시켜 나간다는 것을 알 수 있다.

V. 요약 및 결론

1. 요약

이 연구에서는 스토리텔링을 활용한 수학 수업 과정에서의 담화 분석을 통하여 학생들의 스토리텔링을 통한 수학 학습 과정을 탐구하였다. 특히 학생들의 수학 학습의 수준이 발생모델의 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준, 형식적 수준에 따라 발전하는 계기를 포착함으로써, 이에 개연성이 있는 스토리텔링의 역할을 논하였다.

이를 위하여 권오남 등(2013)이 개발한 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』중 확률단원을 수업 자료로 이용하여 수업을 실시하였다. 권오남 등(2013)은 스토리텔링을 활용하여 학생들의 내러티브 사고를 촉진하도록 하는 스토리텔링 모델교과서를 개발하였다. 이 모델교과서에서는 스토리의 진행에 따라 실생활의 맥락에 기반을 둔 다양한 상황과 과제가 제시되고, 그 해결 결과가 다시 스토리에 영향을 주는 구조로 서술되었기 때문에 각 상황들은 서로 유기적으로 연결되어 있다. 과제 해결 과정에서 학생들은 학생-학생, 학생-교사, 학생-교과서 간의 활발한 스토리텔링을 하면서 상호작용을 통한 지식의 구성을 하도록 의도하고 있다. 이는 이 연구에서 정의하는 스토리텔링 활용 수업을 가능하도록 하기에, 『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』를 수업자료로 사용하면서 모델교과서에서 제시하는 스토리와 과제에 따라 수업을 진행하였다.

『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』는 실제적인 상황을 통해 학생들의 비형식적인 해결 전략을 활발한 스토리텔링 과정에서 점진적으로 형식화해간다는 측면에서 RME와 유사하다. 따라서 학생들의 수학 학습의 발전 단계를 학생들이 비형식적 수학 활동의 기호모델을 창조할 수 있다고 제안하는 발생모델로 분석하는 것이 적절하다고 보았다. 따라서 이 연구에서는 스토리텔링을 활용한 수학 수업 과정에서 발생모델에서 제시하는 발전단계에 따라 학생들의 담화를 수준화 하였다.

스토리텔링을 활용한 수학 수업에서 학생들은 스스로 스토리텔러가 되어 자신의 내러티브적 사고를 언어로 표출하도록 기대된다. 따라서 수업 시간 중에 많은 담화가 발생하며 학생들의 담화를 분석함으로서 수학 학습이 촉진되었는가를 분석하는 것이 가능하다. 따라서 발생모델에서 제시하는 각 발전단계에 학생들의 학습 수준이 부합하는지의 여부는 학생들의 담화 분석을 통해 확인되었다. 담화 분석 단계에서는 Sfard(2008)의 커머그너티브 관점을 취하였다.

Sfard(2008)는 수학적 담화를 수학적 단어, 시각적 매개체, 루틴, 사실적 서술을 포함한 담화로, 수학 학습은 수학적 담화의 발전으로, 수학적 담화의 발전은 이전 담화를 기반으로 새로운 담화의 루틴을 창출해가는 메타수준의 발전으로 본다. 수학적 담화의 발전에서 커머그너티브 갈등은 불가피하다. 서로 다른 수준의 담화 참여자들 사이에, 혹은 수준 상승과정의 개인 내부에서는 커머그너티브 갈등이 발생한다. 이 경우 이전 수준까지의 담화에 대한 메타 수준의 담화, 즉 이전 수준까지의 담화에 대한 성찰(reflection)과 의사소통 참여자들 사이에 더 높은 수준으로의 합의 과정을 통하여 수학적 담화의 네 가지 요소를 변화시킴으로서 담화가 메타수준에서 발전한다.

따라서 이 연구에서는 발생모델의 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준, 형식적 수준에 대한 수학적 단어, 시각적 매개체의 사용 용법, 루틴, 사실적 서술의 성격에 따라 각 담화의 수준을 판별하였다. 이후, 수준의 상승 과정을 커머그너티브 관점과 발생모델에서의 메타 수준의 발전과정으로 설명하였다. 그 결과 수준 상승 과정에서의 스토리텔링의 역할이 무엇인지 분석하였다.

〈표 V-1〉 조건부 확률 학습 수준의 발전 결과

수준	용어		시각적 매개체	루틴	사실적 서술
	용어	용법의 변화		확률적 판단	
상황적 수준	-	일상적, 구체적 용어 (예: 이론적으로, 상식적으로) 확률의 정의에서 전사건이 달라질 수 있음을 모름 (수동적 사용)	상황에 주어진 구체적인 시각적 매개체([그림 Ⅳ-1])사용	상황과 개인의 주관적 생각에 의한 판단 (예: 이게 더 멋있어보여, 왠지)	상황에 근거한 서술 (예: 상식적으로는 말이 안 돼)
참조적 수준	조건부 확률	조건부 확률을 엄밀히 정의하고 사용하지는 못해도, 전사건을 제한할 때 확률이 달라질 수 있음을 인지 다른 루틴을 요하는 상황에서 용어를 제대로 사용하지 못함(루틴적 사용).	구체물(예: 문, 염소, 차를 간단히 표현, 바꾸는 상황을 화살표로 표현), 판단의 과정을 기호(예: 화살표)로 표현	정확하진 않지만, 나름의 확률적 근거에 의한 판단 (예: 두개를 더해서 삼분의 이고 만약 처음에 여기를 열었으면 삼분의 일밖에 안되니까 아무거나 골라도 바꾸는 게 조금 더 유리한 거.. / 두 개 중에 하나 고르는 확률이 두 개 중에 하나니까 이분의 일이잖아요. 그래서요..)	수치적 정보에 대한 서술 (예: 문을 바꾸는 경우 당첨할 확률이 2/3 , 꽝일 확률 2/3)
일반적, 형식적 수준	조건부 확률	조건부 확률의 수학적 정의를 정확히 인지하며, 일상적 상황에서 의미를 해석하는 맥락, 곱셈정리에서 의미를 해석하는 맥락 등 다양한 맥락에서 의미를 인지(문구적, 대상적 사용)	수학적 기호, 벤다이어그램, 언어적 표현 등 다양한 시각적 매개체 사용	확률의 연산(확률의 곱셈정리, 스스로 구성한 가설) 에 대한 연역적 증명	대상관의 관계, 기호화를 통한 서술(예: 는 검사해서 옳게 된 케이스 중에서 항체가 있는 것, $P(A \cap B)$는 검사가 올바르고 항체가 있는 경우 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B \mid A)$, $P(A \cap B) \neq P(A \mid B) + P(B \mid A)$)

<표 V-2> 독립, 종속 학습 수준의 발전 결과

수준	용어		시각적 매개체	루틴	사실적 서술
	용어	용법의 변화		확률적 판단	
상황적, 참조적 수준	독립, 종속	‘독립이다’라는 용어 대신 일상적, 구체적 용어(예: 영향이 없다/관련이 없다)를 사용	표, 숫자, 단어 등 두 변수의 관련성을 직접적으로 볼 수 있는 시각적 매개체 사용	조건부 확률의 계산에 따른 확률적 판단을 하지만, 두 사건의 독립성을 판단하는 정보로서 정확하지 않음	상황, 수치적 정보에 대한 서술(예: 확률 값에 차이가 있기 때문에 서로 독립이다. 서로 영향이 없기 때문에 독립이다.)
일반적, 형식적 수준	독립, 종속	두 사건이 독립이라는 것을 $P(A\|B)=P(A)$로 인식함. 어떠한 맥락에서도 독립성의 정의를 파악할 수 있음	수학적 기호 (예: $P(A\|B), P(A)$)사용	두 사건의 독립의 정의를 적용한 독립성 판단하는 필요성을 인지하고 이를 적용함. 두 사건의 독립성을 판단하기 위한 다양한 전략이 있음을 알고 전략을 선택.	대상간의 관계, 기호화를 통한 서술 (예: $P(A\|B)=P(A)$이기 때문에 두 사건이 독립이다. $P(A)\cdot P(B)=P(A\cap B)$과 $P(A\|B)=P(A)$는 필요충분조건이다)

분석 결과, 스토리텔링을 활용한 수업에서 조건부 확률에 대한 담화의 발전과정은 <표 V-1>, 사건의 독립과 종속에 대한 담화의 발전과정은 <표 V-2>와 같이 요약할 수 있다. <표 V-1>, <표 V-2>의 각 행은 수준의 발전 단계를, 각 열은 담화가 각 수준에 있음을 증명할 수 있는 담화의 요소를 나타낸 것이다. 각 행과 열이 만나는 곳에는, 분석의 틀에서 제시했던 각 수준에 부합하는 각 담화 요소의 일반적 특징과 함께 이 연구에서 나타난 담화의 예를 적었다. 분석의 틀에 따라서 각 담화의 용어, 시각적 매개체, 루틴, 사실적 서술을 살핀 결과 조건부 확률에 대한 담화는 상황적 수준, 참조적 수준, 일반적 수준과 형식적 수준의 공존 수준으로 발전함을, 독립과 종속에 대한 담화는 상황적 수준과 참조적 수준의 공존 수준, 일반적 수준과 형식적 수준의 공존 수준으로 발전함을 확인할 수 있었다.

발전과정에서의 스토리텔링의 역할은 다음과 같이 정리할 수 있다. 스토리텔링에 활용된 스토리와 스토리텔링 교과서와 수업의 전개방식은 직접적, 간접적으로 커머그너티브 갈등을 유발하였다. 갈등의 해소 과정에서는 교사의 설명도 일부 포함되었다. 하지만 맥락성의 원리, 과정지향성의 원리, 다양성의 원리, 소통의 원리를 통해 학생들은 점진적으로 의례적 루틴을 탐색적 루틴으로의 발전시키고 학습 내용을 내면화함을 알 수 있었다. 이를 통한 메타수준의 학습으로 학습 수준을 발전시킨다는 것을 할 수 있었다. 또한 플롯을 갖춘 스토리를 기반으로 한 소통의 원리는 학생들의 내러티브 사고를 촉진함을 알 수 있었다. 즉, 스토리텔링을 활용한 수업은 학생들이 수동적으로 수업에 임하는 것이 아니라, 수업 중에 그들의 커머그니션을 실제로 작동시키도록 하는 원동력이 되었다.

2. 의의 및 제언

이 연구는 다음과 같은 의의를 지니고 있다.

첫째, 이 연구에서는 스토리텔링을 활용한 수업에서 학생들의 학습과정이 어떻게 발전하는지를 탐색하였다. 또한 발전과정에서 스토리텔링의 역할을 탐색하였다. 그 결과 스토리텔링에 활용된 스토리와 내용 전개방식은 직접적으로 또는 간접적으로 커머그너티브 갈등을 유발함을 알 수 있었다. 갈등의 해소는 낮은 수준에서는 교사의 설명에 의하여 이루어졌지만, 맥락성의 원리, 과정지향성의 원리, 다양성의 원리, 소통의 원리를 통해 학생들은 점진적으로 의례적 루틴을 탐색적 루틴으로의 발전시키고 학습 내용을 내면화함을 알 수 있었다. 즉, 학생들은 점진적으로 메타수준의 학습으로 학습 수준을 발전시킨다는 것을 알 수 있다. 정리하면, 스토리텔링은 커머그너티브 갈등 상황을 적극적으로 조장하고 이를 해결하도록 하면서 학생들이 스스로 생각하고 이를 표현하도록 하였다. 이로 인하여 학생들은 수동적으로 수업에 임하는 것이 아니라, 수업 중에 그들의 커머그니션을 실제로 작동시키도록 하는 원동력이 되었다고 할 수 있다.

둘째, 학습 수준의 분석과 수준 상승의 메커니즘을 분석하기 위한 도구로서 커머그너티브 관점을 취함으로서 스토리텔링을 활용한 수업에서의 학생들의 학습 수준의 발전을 실증적으로 입증할 수 있었다. 커머그너티브 관점에서서로 다른 수준의 의사소통 참여자들끼리는 용어, 시각적 매개체의 사용방식 등에 의한 차이로 커머그너티브 갈등이 발생할 수 있다. 더 높은 수준의 담화 참여자의 의견에 설득당하는 과정에서 갈등이 해소되면, 더 높은 수준의 담화는 이전 수준 담화의 성찰의 결과이다. 즉, 이전 수준은 다음 수준으로의 발전을 위한 참조적 기준이 된다. 이는 발생모델에서 설명하는 학습 수준의 발전과 일치하기 때문에, 커머그너티브 관점으로 발생모델의 학습 수준 발전을 설명할 수 있었다. 커머그너티브 관점에서는 각 수준에서의 용어, 시각적 매개체, 루틴, 사실적 서술에 대한 분석을 통해 각 요소들에서 학생들이 수준에 부합하는지

를 확인한다. 따라서 자료를 다양한 관점에서 분석하게 되고, 이 자체가 자료 분석의 타당성 입증을 위한 삼각화의 토대가 된다고 할 수 있다.

하지만, 이 연구에서 실행한 수업에서는 학습 수준의 발전과정 중, 일반적 수준에서 형식적 수준으로의 발전을 체계적으로 보기 어려웠다는 한계가 있었다. 이 연구의 수업에서는 커머그너티브 갈등의 해소가 일차적으로 교사의 설명에 의하여 이루어졌고, 그 과정에서 교사의 주도하에 기호화가 이루어졌다. 학생들은 추후에 탐색적 루틴을 통하여 기호를 내면화하여 형식적 수준까지 발전을 했다고는 할 수 있으나, 일반적 수준을 참조로한 형식적 수준으로의 학생 주도의 발전을 관찰할 수 없었다.

일반적 수준에서의 탐구 내용에 의한 수치적 추론을 형식적인 절차와 표기를 가지고 수행을 하는 기호화, 공리화하여 형식적 수준으로의 발전은 것은 중요한 수학적 과정이다. 따라서 이를 세밀하게 관찰하고 그 발전 기제를 설명할 수 있는 후속 연구가 이루어질 수 있을 것이다.

이 연구에서 스토리텔링을 활용한 수업은 학생들이 수동적으로 수업에 임하는 것이 아니라, 수업 중에 그들의 커머그니션을 실제로 작동시키도록 하는 원동력이 되었다고 하였다. 하지만, 교육현장에서는 스토리텔링의 도입에 대한 우려가 많으며, 사교육시장에서는 스토리텔링을 마케팅의 전략으로 사용하고 있다. 이 연구에서의 수업은 2009 개정교육과정을 기반으로 하지만, 스토리텔링을 활용하기 위하여 학습 내용 전개의 순서를 변형하기도 한『고등학교 수학 스토리텔링 모델교과서』를 활용하였으며(권오남 등, 2013) , 수업 후의 평가 방법에 대한 우려가 없었다. 또한 스토리텔링 수업을 구현하고자 하는 의지가 강한 교사가 수업을 진행하였다. 교육의 변화는 교과서 뿐 아니라, 교육과정, 교육평가, 교사의 변화로부터 이루어진다. 스토리텔링이 전면적으로 고등학교 교육과정으로 들어오기 위해서는 이를 잘 구현할 수 있는 교육과정, 교육평가, 교사의 변화가 선행되어야 할 것이다.

참고문헌

강현석 (2005). 합리주의적 교육과정체제에서 배제된 내러티브 교육과정의 가능성과 교과목 개발의 방향 탐색, **교육과정연구, 23**(2), 한국교육과정학회, 83-115.

교육과학기술부 (2012). **수학교육 선진화방안**. 교육과학기술부.

권오남, 박규홍, 김지선, 박지현, 김아미, 주미경, ..., 전철 (2013). **고등학교 스토리텔링 모델 교과서 개발 최종보고서 (한국과학창의재단 2013-8)**. 한국과학창의재단

권오남, 주미경, 박정숙, 박지현, 오혜미, 조형미(2013). 스토리텔링 수학 모델 교과서의 개발 원리와 현장적용 가능성에 대한 연구. **한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육논문집>, 27**(3), 249-266.

권오남, 주미경, 김영신 (2003). 오일러 알고리즘의 안내된 재 발명, **한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>, 42**(3), 387-402.

류수열, 주미경, 조성준, 김은애 (2011). **스토리텔링과 교과서 편찬 연구**. 서울: ㈜금성출판사.

박소화 (2012). **스토리텔링 기반 교수설계 원리 및 모형 탐색**. 서울대학교 박사학위논문.

백영미 (2007). **스토리텔링을 적용한 수학수업이 초등학교 학생의 학업성취도 및 수학적 태도에 미치는 영향**. 청주교육대학교 교육대학원 석사학위논문

백조현, 박수홍, 강문숙 (2010). 스토리텔링 기반 수학과 수업 설계 전략 모형 개발 -확률통계를 중심으로, **교육혁신 연구 20**(1), 113-141.

주미경, 박정숙, 오혜미, 김영기, 박윤근 (2012). “의사결정형” 스토리텔링 수학 모델 교과서의 개발 원리: 조건부 확률 단원을 중심으로, **한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육논문집>, 27**(3), 205-220.

한승희 (1997). 내러티브 사고 양식의 교육적 의미. **교육과정연구, 15**(1), 400-423.

Vygotsky, L. S. (2009). **마인드 인 소사이어티** (정희욱, 옮김). 서울: 학이시습.

Artzt, A. F. and Newman, C.M.(1990). *How to use cooperative learning in the mathematics class*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, INC.

Balakrishnan, C. (2008). *Teaching secondary school mathematics through storytelling,* Unpublished doctoral dissertation. Simon Fraser University.

Bruner, J. (1996). *The culture of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.

Caspi, S., & Sfard, A. (2012). Spontaneous meta-arithmetic as a first step toward school algebra, *International Journal of Educational Research, 51-52,* 45-65.

Egan, K. (2005). *An Imaginative Approach to Teaching*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, The Netherlands: Reidel.

Freuenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education*. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.

Froman, E. A. (2012). Commentary: Expanding and clarifying the commognitive framework, *International Journal of Educational Research, 51-52*, 151-154.

Gravemeijer, K. (1999). How emergent models may foster the constitution of formal mathematics. *Mathematical Thinking and learning, 1*(2), 155-177.

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrect: CD-β Press.

Heyd-Metzuyanim, E. & Sfard, A. (2012). Identity struggles in the mathematics classroom: On learning mathematics as an interplay of mathematizing and identifying, *International Journal of Educational Research, 51-52*, 128-145.

Kim, D. J., Ferrini-Mundy, J., & Sfard, A. (2012). How does language impact the learning of mathematics? Comparison of English and Korean speaking university students' discourse on infinity, *International Journal of Educational Research, 51-52,* 86-108.

Lauritzen, C. & Jaeger, M. (1997). *Integrating learning through story: the narrative curriculum*. NY: Delmar Publishers

McDrury, J., & Alterio, M. (2003) *Learning through storytelling in higher education: using reflection and experience to improve learning.* London: Kogan Page.

Polkinghorne, D. E. (1995). Narrative configuration in qualitative analysis. In J. A. Hatch & R. Wisniewski (Eds.), *Life history and narrative* (pp. 3–25). London: Falmer.

Sinclair, N., & Moss, J. (2012). The more it changes, the more it becomes the same: The development of the routine of shape identification in dynamic geometry environment, *International Journal of Educational Research, 51-52*, 28-44.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematics conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint, *Journal of Learning Science, 16*(4), 563-613.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

Sfard, A. (2012). Introduction: Developing mathematical discourse—Some insights from communicational research, *International Journal of*

Educational Research, 51-52, 1-9.

Wang, S. (2011). *The Van Hiele theory through the discursive lens: Prospective teachers' geometric discourses*. (Published doctoral dissertation). Michigan State University, East Lansing, MI.

Wood, M. B., & Kalinec, C. A. (2012). Student talk and opportunities for mathematical learning in small group interactions, *International Journal of Educational Research, 51-52*, 109-127.

Zazkis, R., & Liljedahl, P. (2008). *Teaching mathematics as storytelling*. Rotterdam: Sense Publishers.

ABSTRACT

Storytelling as a cognitive tool for learning the probability

Kim, Mi Ju
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

Storytelling has been shown to be a promising tool for promoting classroom interaction and students' motivation, yet researchers have not focused on how students actually learn in classroom implemented based on storytelling. This research investigates how mathematical discourses develop while students learn probability based on storytelling.

The six hours of lessons about conditional probability and independence of events were implemented using a model mathematics textbook based on storytelling developed by Kwon et al (2013). Starting from the specific contextualize situation offered by the plotted story, students can gradually formalize their informal strategies through the tasks in the model textbook. Thus, the learning process can be explained by emergent model suggested by Gravemeijer(1994).

Since students are expected to act as storytellers who express their thinking and understanding, the learning process can be investigated by analyzing the discourses. The classroom discourses were analyzed through the lens of the commognitive framework in which cognition is considered to be same as communicating. In this view, mathematical discourses are composed by mathematical words, visual mediators, routines, and endorsed narratives. Commognitive conflict may arise wherever different interlocutors are acting according to differing discursive rules. Interlocutors accept of the discursive ways of an expert interlocutor. While they rationalize the discursive rules by reflecting on existing discourses, the discourses develop in meta level.

Analyzing classroom discourses through the lens of commognitive framework reveals that storytelling may promote Students' progressive mathematization on the concept of conditional probability and independence of events. The stories, problems and discussions contained the model textbooks arise commognitive conflicts between students, between students and the textbook, or between students and the teacher.

As students try to resolve the commognitive conflicts caused by the stories or problems, their discourses on conditional probability develop from situational level to referential level and to general/formal level. And the discourses on independence of events develop from situational/referential level to general/formal level. It suggests the possibilities of storytelling as a commognitive tool, since the storytelling enables students actually operate their commognition and formalize their mathematical concepts while they actively participated in discussions to resolve the commognitive conflicts driven by the storytelling.

Keywords: storytelling, discourse, emergent model, commognitive framework, probability
Student number: 2010-21504