교육학석사학위논문

실행 가능한 표현을 통한 이항 분포 구성 활동에 관한 연구

2015년 8월

서울대학교 대학원
수학교육과
박 천 기

실행 가능한 표현을 통한 이항 분포 구성 활동에 관한 연구

지도교수 조 한 혁

이 논문을 교육학 석사학위논문으로 제출함

2015년 8월

서울대학교 대학원
수학교육과
박 천 기

박천기의 석사학위논문을 인준함
2015년 7월

위 원 장 ___김 서 령 (인)___
부위원장 ___이 경 화 (인)___
위 원 ___조 한 혁 (인)___

국문 초록

최근 들어 전 세계적으로 코딩 교육에 대한 중요도가 높아짐에 따라 computational thinking 역량 강화를 위한 학습 환경 설계 연구가 활발히 진행되고 있다. 특히 확률이라는 분야는 공식을 통한 연역적 방식에서 벗어나 현상에 대한 모델링과 사고 실험이 동반된 학습 환경이 필요하다는 인식이 공감을 얻기 시작하면서 그 해결점을 테크놀로지 기반 프로그래밍 언어를 통한 확률 학습 환경으로 두고 있다. 하지만 이러한 학습 환경은 프로그래밍 언어 자체에 초점을 맞추어 너무 난해하게 제시가 되거나 혹은 학습자에게 쉽게 다가가고자 난수 생성과 같은 요소 이외의 다른 언어 표현 체계를 생략하여 제공되었다는 점이 지적되어 왔다. 본 연구에서는 이러한 프로그래밍 언어 기반 확률 학습 환경의 방향성에 동참하면서도 위의 상반되는 두 가지의 환경의 중간에 위치하고자 한다. 즉, 충분히 학습자가 의사소통의 수단으로 사용할 수 있으면서도 다양한 현상을 모델링하고 시뮬레이션 할 수 있는 언어 체계가 필요하다는 전제로 출발한다.

이에 본 연구에서는 실행 가능한 표현 기반 이항 분포 학습 환경을 설계하였다. 실행 가능한 표현이란 테크놀로지 환경에서의 언어 표현 체계와 즉각적인 피드백을 핵심 요소로 삼고 있다. 이를 위해서 본 연구에서는 computational thinking 역량 강화와 더불어 학습 환경에서 선택한 확률 구조인 이항 분포와 관련한 현상의 모델링이 가능한 언어 표현 체계를 제공하여 이를 통해 학습자와 현상 사이의 중개자 역할을 하도록 하였다. 그 표현 체계는 거북이라는 에이전트의 기본적인 움직임을 바탕으로 한 일상 언어와 수식을 이용하여 constructionism 기반 학습 환경의 설계 원칙에 따르고자 하였다. 또한 JavaMAL 마이크로월드라는 환경에서 이러한 실행 가능한 표현에 대한 즉각적인 피드백을 제공하기 위해 ‘랜덤 워크’라는 요소를 기초로 다양한 요소들을 통해 시뮬레이션 결

과창을 제공함으로써 학습자가 스스로 현상에 대해 ‘What if?’ 전략을 세우고 다양한 확률 실험을 할 수 있도록 설계하고자 하였다. 이러한 실행 가능한 표현 체계를 통해 다양한 이항 분포 현상에 대한 모델링 및 시뮬레이션을 가능하게 할 뿐만 아니라 그 표현 자체가 학습자와 교사, 학습자와 컴퓨터 사이의 의사소통의 도구로 쓰일 수 있도록 설계를 하였다.

이항 분포 학습 환경에 구성 요소인 실행 가능한 표현 체계를 재해석하고 정리하여 이를 통해 학습자가 직접 모델링 할 수 있는 다양한 이항 분포 현상들을 선정하였다. 그리고 이러한 학습 환경이 좀 더 큰 힘을 발휘할 수 있는 수업 형태로써 거꾸로 교실을 채택, 이를 통해 해당 학습 환경이 가장 유의미하게 적용될 수 있는 학습 지도안을 설계하였다. 그리고 두 번에 거친 적용 연구를 통해 해당 학습 환경에 따른 학습자의 의사소통 과정과 확률적 사고의 변화를 관찰하고자 하였다. 그리고 이를 통해 본 연구의 학습 환경의 개선 방향과 실행 가능한 표현 기반 확률 코딩 학습 환경에 대한 가능성을 살펴보았다.

본 연구의 목표는 기존의 학교 수학에서의 확률 교육에서 지적되고 있는 점, 즉 현상에 바탕을 둔 사고 실험의 부재를 개선해 줄 수 있는 도구를 제시함과 동시에 computational thinking 역량 강화라는 시대적 과제에 부응하는 확률 학습 환경을 제시하는 것으로 둔다. 거북이의 움직임으로 무작위 경로를 생성하는 ‘몸짓 언어’에 기초한 실행 가능한 표현은 에이전트 기반 모델링 및 체화된 시뮬레이션을 동반한 확률 실험으로 학습자에게 유의미한 변화를 느끼게 해 줄 수 있도록 학습 환경 설계 방향을 잡고자 하였다.

주요어 : Computational thinking, 이항 분포, 실행 가능한 표현 (Executable expression), 거꾸로 교실(Flipped learning)
학번 : 2012-23501

목 차

표 목 차

그 림 목 차

Ⅰ. 서론

1. 연구의 배경

본 연구를 진행하게 된 배경은 크게 두 가지가 있다. 하나는 확률이라는 분야에 대한 학습을 증진시키기 위해선 기존의 접근 방식에 대한 개선이 필요하며 테크놀로지 환경이 그 역할을 해 줄 수 있다는 목소리가 높아지고 있다는 점이다. 다른 하나는 소프트웨어 교육이 학교 현장 속으로 들어와야 한다는 목소리가 높아지면서 이와 관련된 computational thinking 역량 강화를 위한 노력이 계속되고 있다는 점이다.

확률 및 통계라는 수학 분야는 21세기를 살아감에 있어서 다른 수학 분야보다도 필요한 분야로 인식되고 있다. 그 이유는 지금 이 시대는 지속적으로 의사 결정 여부를 확률적으로 판단하고 전략을 세우며 서로 의사소통하는 시대이기 때문이다. 이에 학습자에게 확률 현상에서 자료를 얻고 이를 통해 자신의 의사를 확신하고 정당화하기 위한 확률 실험 학습 환경에 대한 필요성이 대두되고 있다.

하지만 학교 수학에서는 정작 이러한 확률 및 통계라고 하는 분야에 대하여 연역적인 알고리즘을 제시하는 방식으로 접근을 하고 있다. 확률은 그 자체가 지닌 모호성 때문에 이해하기 어려웠고 가르치기 어려운 대상으로 생각되었기 때문에 확률 개념은 계산 패턴에 따라 확률을 구하는 알고리즘을 중심으로 지도 되어 왔었다(우정호, 2007).

이러한 확률 사고 실험에 기초한 학습 환경에서는 컴퓨터를 통한 시뮬레이션을 일으킬 표현 체계에 대한 요구가 필연적으로 생겨났으며 이는 테크놀로지 기반 확률 학습 환경의 구체적인 설계 연구로 이어졌다. 특히 테크놀로지 기반 학습 환경은 적절한 확률 현상에 대해 모델링하고 이를 시뮬레이션 할 수 있는 프로그래밍 언어를 제공해 줄 수 있다는 점은 기존의 확률 학습의 방식과는 다른 경험을 학습자에게 부여할 수 있

다.
 이러한 움직임은 최근 들어 다양한 소프트웨어의 발전과 맞물려 다양한 방식으로 구현되고 있다. 한 포털 사이트에서는 '소프트웨어 교육' 산업과 관련하여 하나의 예시로 동전을 100번 던지는 확률적 상황에 대한 프로그래밍 과정을 제시하고 있다. 또한 여러 확률 교육 연구에서 R 언어 및 Fathom과 같은 확률 시뮬레이션 프로그래밍 환경을 학교 수학에 도입해야 한다는 주장을 펼치고 있다. 이 흐름은 최근에 각광 받고 있는 코딩 교육 열풍, 즉 computational thinking에 대한 연구들과 같은 방향으로 나아간다.
 현재 영국에서는 2012년도부터 ICT 교과과정이 시대에 뒤떨어져 있으며 이에 교과과정 개혁을 통한 창의적인 소프트웨어 인재를 양성해야 한다는 목소리와 함께 2014년도 9월부터 세계 최초로 의무화된 컴퓨팅 교육을 시행하였다. 영역은 컴퓨터 공학(computer science), 정보 기술(information technology), 디지털 리터러시(digital literacy)이며 Microsoft, Google 그리고 게임업계의 전문가들이 적극적으로 자문을 하여 엄청난 규모의 교육 개혁 프로그램을 진행 중에 있다.
 또한 핀란드에서는 computational thinking 역량 강화를 위한 교육을 4세에서 10세 정도 되는 어린 아이에게 접목하여 '코딩 교육' 열풍을 일으키고 있다. 어른들도 힘들어하는 컴퓨터 프로그래밍을 아이들의 눈높이에 맞추어 제시함으로써 학습자들의 호기심을 자극하고 있으며 핀란드 교육당국도 2016년도부터 코딩 교육을 초등학교 정규 통합교육 과정에 포함시키기로 하면서 코딩 교육이 선택이 아닌 필수가 되어 가고 있다.
 우리나라에서도 이러한 노력을 기울이고 있다. 한국과학창의재단에서는 'SW교육과 computational thinking'이라는 주제로 여러 분야의 전문가들이 모여 '컴퓨터 언어'와 '코딩 교육'에 대한 필요성을 공감하였다. 또한 미래창조과학부에서는 2015년부터 대한민국에서도 소프트웨어 교육을 의무화하기로 하면서 '소프트웨어 선도 학교'를 지정하는 등 다양한 방식으로 코딩 교육을 활성화하기 위한 방안을 마련하고 있다.

현재 computational thinking 기반 학습 환경을 발전시켜 학교 현장에 도입하기 위한 방향성을 제시하는 연구(Barr & Stephenson, 2011)가 진행 중에 있다. 이러한 노력은 수학 교육 분야에 있어서 코딩 기반 학습 환경이 종전에 할 수 없었던 창의적인 학습을 가능하게 해 줄 것이라는 믿음에서 시작한다.

본 연구에서는 기존의 확률 교육 방식에 대해 문제점을 인식하고 이를 테크놀로지 기반 시뮬레이션 프로그램에서 개선점을 찾고자 한다. 기존의 프로그래밍 언어 기반 확률 학습 환경의 문제점을 고찰하고 이를 개선할 수 있는 코딩 기반 확률 학습 환경을 설계하고자 한다. 이를 통해 좀 더 학습자 중심의 적극적인 확률 학습을 이끌어냄과 동시에 computational thinking 역량 강화에 도움이 될 수 있는 확률 학습 환경을 설계해 보고자 한다.

2. 연구의 필요성 및 목적

확률 교육 분야에서 테크놀로지 환경에 도움을 받아 시뮬레이션 프로그램을 제작하여 학습자에게 제공되는 것이 유의미한 변화를 가져올 수 있다는 것은 여러 연구에서 주장되어 왔다. Wilensky(1993)는 학생들의 확률적 직관이 부족한 이유로 선천적인 이유도 있지만 다수를 대상으로 한 실험, 인구 조사와 같이 적절한 피드백이 공존하는 확률 측정 실험을 경험한 적이 없다고 지적하고 있다. 이에 그는 컴퓨터 프로그램 기반 확률 실험 시뮬레이션 프로그램을 통해 학습자의 확률 편향성이 적절한 확률 직관으로 바뀔 수 있다고 주장한다. Shaughnessy & Bergman(1993)은 확률 지도에 시뮬레이션을 활용함으로써 학생들의 확률 오개념을 교정할 수 있다고 지적하였다(신보미, 이경화, 2008a 재인용).

이에 다양한 연구들이 테크놀로지 기반 확률 시뮬레이션 프로그램을 설계하고 이를 적용하는 연구를 진행하였다. 하지만 이러한 테크놀로지 기

반 확률 학습 환경의 한계점이 지적되어 왔다. 실제로 학교 현장에 적용되고 있는 시뮬레이션 프로그램은 대체적으로 확률 값에 변화를 주고 이를 잘 만들어져 있는(well made) 프로그램에 입력한 후 실행 버튼을 눌러 결과창의 시뮬레이션한 분포를 확인하는 수준에 그치고 있다. 또한 현재 통계 연구에서 많이 쓰이고 있는 확률 언어 기반 프로그래밍 환경인 R 언어나 Fathom과 같은 학습 환경은 그 언어 체계가 고등학교 학생들을 대상으로 적용하기에는 굉장히 난해하여 학교 수학에 도입하기에 적절하지 않다는 평가가 있다.

본 연구에서는 기존의 확률 학습 환경에 대한 개선점으로 실행 가능한 표현(executable expression)이라는 표현 도구를 전면에 내세운다. 실행 가능한 표현이란 테크놀로지 환경에서 즉각적인 피드백을 만들 수 있는 표현 체계를 말한다. 일반적으로 실행 가능한 표현은 마우스 조작을 통하여 직접 실행 가능한 아이콘이나 GUI(Graphical User Interface)와 같은 것들, 혹은 프로그래밍 언어와 같이 문자 언어로 이루어져 있어서 키보드를 통해 입력을 하고 실행할 수 있는 표현 체계를 포함한다(우안성, 2013). 본 연구는 앞서 언급한 두 가지의 대조되는 확률 학습 환경의 상반된 문제점 즉, 기존의 학교 수학 내에서의 확률 시뮬레이션의 문제점인 언어 표현의 부재, 그리고 R 언어나 Fathom과 같은 확률 프로그래밍 환경의 적용할 때의 난해함이라는 두 가지의 문제점을 해결하기 위한 연구이다. 이에 본 연구는 실행 가능한 표현을 이 두 가지의 프로그램의 중간 위치에서 좀 더 쉽고 학습자에게 전이가 빠른 언어 체계를 통해 적극적인 시뮬레이션 환경을 설계하고자 한다. 이에 앞서 언급한 실행 가능한 표현에서 본 연구는 후자에 초점을 맞추어 연구를 진행한다.

실행 가능한 표현은 Papert의 constructionism에 그 기초를 두고 있다. Papert의 constructionism은 constructivism과 구별이 된다. Constructivism과 Papert의 constructionism은 모두 지식이란 학습자가 복잡한 지식의 구조를 쌓아가는 것으로, 학습자가 의미를 찾으려고 노력할 때 의미가 만들어진다고 보고 있으나, constructivism은 인지이론에

가까운 반면, constructionism은 실제적이고 교육적인 방법이다(김화경, 2006). 김화경(2006)은 constructionism에서 학습이 성공적으로 이루어지기 위해서는 구성활동과 이에 대한 반성이 일어날 수 있는 환경 설계가 필수적으로 일어나야 한다고 하였다.

Papert는 이러한 구성 활동과 반성의 과정을 유도할 수 있는 도구를 제안하였는데 그것이 바로 '가자' 및 '돌자'라는 기본 행동 명령을 통해 거북이가 실제로 움직이게 하여 수학적 개념을 구성하고 반성하게 할 수 있는 LOGO라는 프로그래밍 언어 기반 환경이다. 가장 기본적인 두 가지의 '몸짓 언어'로 평면 도형에 대한 탐구를 할 수 있는 이 프로그램은 그 아이디어가 강력(powerful)하기에 다른 분야에도 쉽게 응용이 될 수 있다. Papert는 이러한 환경을 통해 모국어를 학습하듯 실행 가능한 표현 체계를 학습, 이를 통해 다양한 수학 분야를 직접 구성할 수 있는 도구의 역할이 될 수 있다고 주장했다. 본 연구에서는 이러한 배경을 바탕으로 학습자에게 확률 상황을 쉽게 모델링할 수 있는 '몸짓 언어' 기반 실행 가능한 표현을 설계하고자 하였다. 그리고 LOGO에 바탕을 둔 JavaMAL 마이크로월드(조한혁, 2003)에 위의 언어 표현 체계를 구성하고 실행하게 하여 시뮬레이션을 통해 확률을 탐구할 수 있는 학습 환경을 구성하고자 하였다.

이러한 확률 학습 환경을 통해 이루고자 하는 목표는 확률 개념에 대한 올바른 학습을 유도하는 것과 더불어 computational thinking 역량 강화를 이루어 내는 것이다. Computational thinking의 핵심적 요소는 추상화와 자동화이다. Computational thinking 역량을 강화하기 위한 언어 체계는 학습자가 수학적 현상을 스스로 추상화 할 수 있도록 쉬우면서도 그 안의 수학적 구조가 함축되어 있는 코딩 언어 체계가 존재해야 한다. 그리고 이러한 언어 체계는 각각 실행(executable)을 전제로 하고 있어 자동적으로 실행되어 학습자의 사고를 변화시킬 시뮬레이션 요소가 즉각적으로 결과물로 제시되어야 한다. Computational thinking 에서는 언어 체계를 강조하고 있으며 그 언어 체계는 위와 같은 역할을 충분히 할 수

있게 구성이 되어야 한다.

본 연구에서는 위와 같은 목적과 배경으로 학습 환경을 설계할 확률 분야의 요소로 '이항 분포'를 선정했다. 이항 분포는 확률론의 다른 개념들보다 훨씬 더 실생활에 밀접하게 연관이 되어 있는 확률적 개념이라고 할 수 있다. 한 사건의 발생 유무와 관련된 확률적 의사 결정 현상은 우리의 삶 속에서 쉽게 찾아낼 수 있는 상황이다. 학교 수학에서는 복권에 당첨 유무의 가능성을 고려하는 현상과 같은 여러 실생활 문제를 통해 이항 분포의 확률적 개념을 다루고 있다. 또한 이러한 아이디어는 최근 경제 심리학에서 각광받고 있는 게임 이론(game theory)과도 관련이 깊다. 게임 이론이란 두 의사 결정자가 서로 상호 작용하는 현상에 대한 이해를 돕는데 필요한 일련의 분석 도구를 연구하는 학문이다(Osborne, 1994). 해당 전략의 선택 유무를 결정하는 현상에 대해 연구하는 이 이론은 결국 이항적 사항에 대한 확률적 판단을 요구하고 있으며 이는 자연스럽게 이항 분포와 관련이 깊다.

이항 분포의 핵심적인 요소, 즉 해당 사건이 발생 유무를 적절히 시뮬레이션 할 수 있는 실행 가능한 표현을 도구로 학생들에게 제공한다면 확률적 오개념을 개선하는 데 기여할 수 있을 것이다. 본 연구도 이러한 전제를 기초로 시작하고자 하였다.

본 연구에서는 학습자가 구성 활동을 전개할 수 있는 실행 가능한 표현을 JavaMAL 마이크로월드에 맞추어 제공하기 위해 이항 분포의 핵심적인 요소를 거북이라는 에이전트의 '몸짓 언어'로 모델링한다. 사건의 발생 유무를 '위로 간다.', '아래로 간다.'와 같은 대조적인 '몸짓 언어'를 기초로 하여 거북이의 움직임으로 시뮬레이션 결과를 만들어 낼 수 있는 일상 언어 체계와 수식 체계를 확보하고자 하였다. 이를 위해 이항 분포 현상에 대한 확률 코딩이 가능한 세 가지의 실행 가능한 표현을 고안하였다. '린덴마이어(Lindenmayer) 확률 표현', '도수분포준비 및 반복' 그리고 '자연 빈도수(natural frequencies)' 가 이에 해당한다. 이를 통해 현상을 모델링할 수 있는 '수학적 언어 표현' 체계와 마이크로월드 상에 이

러한 현상을 거북이의 무작위 경로로 시뮬레이션 하여 이를 시각적으로 피드백을 부여하는 '분포의 시각적 표현'을 동시에 학습자의 사고 도구로 제시하는 것이 본 연구의 핵심적 목표이다.

정리하면 본 연구에서는 JavaMAL 마이크로월드 상에 거북이의 '몸짓 언어'를 기초로 한 실행 가능한 표현을 도구로 제시, 이를 통해 computational thinking 역량 강화와 동시에 종전의 확률 학습 환경에서 제공하지 못한 현상에 대한 확률 실험 도구와 이를 정당화 할 언어 표현 체계를 제공하는 것을 목표로 한다. 이러한 실행 가능한 표현은 학습자가 다른 동료, 교사 혹은 컴퓨터와의 유연한 의사소통을 도울 도구임과 동시에 자신의 올바른 확률적 사고를 현상으로부터 귀납적으로 얻어가는 색다른 경험이 될 것이라 기대하고 있다. 학습자가 직접 실행 가능한 표현 체계로 거북이의 움직임을 구현하면 그 움직임이 마이크로월드에 시뮬레이션으로 피드백을 받는 방식을 설계 방침으로 세우고자 한다. 이를 통해 학습자가 거북이의 입장이 되어 현상을 체화하면서 'What if?' 전략을 세우고 자신의 사고를 수정하고 확인 받는 체화된 설계 기반 학습을 가능하게 하고자 한다.

본 연구에서는 주요한 실행 가능한 표현 체계인 세 가지의 실행식을 시작으로 다양한 이항 분포 현상을 모델링하고 이를 통해 확률적 개념을 조기에 학습할 수 있도록 설계할 것이다. 학습자에게 유의미하게 다가갈 수 있는 실험 및 현상들을 정리하여 하나의 학습 지도안과 같은 방식으로 수업 설계를 하고자 한다. 또한 본 학습 환경은 인터넷 기반 웹 사이트에서 설계가 된 바, 본 학습 환경의 장점을 가장 극대화 할 수 있는 수업 형태를 제시해 보고 이러한 수업 형태가 학습 환경 설계의 설계 방침과 어울릴 수 있는 지를 확인하고자 한다.

실행 가능한 표현 기반 학습 환경은 학습자가 자신의 확률 코딩을 얼마든지 수정 및 보완이 가능하다. 두 차례에 거친 학습 환경 적용 연구를 통해 이러한 구성 활동이 학생들의 확률 개념에 어떠한 영향을 미치는지를 살펴보고 이를 통해 본 학습 환경에서 얻을 수 있는 유의미한 변화를

살피고자 한다.

3. 연구 문제

이상의 연구의 필요성과 목적에 따라서 본 연구에서는 다음과 같이 연구문제를 설정하였다.

연구 문제 1. 실행 가능한 표현 기반 이항 분포 학습 환경을 어떻게 설계할 수 있는가?

연구 문제 2. 실행 가능한 표현 기반 이항 분포 학습 환경을 통해 어떠한 수업을 제시할 수 있는가?

연구 문제 3. 실행 가능한 표현 기반 이항 분포 학습 환경은 기존의 확률 학습 환경과 비교하여 어떠한 의의가 있는가?

4. 용어 정리

(1) 린덴마이어(Lindenmayer) 확률 표현

헝가리의 생물학자인 린덴마이어(Lindenmayer)는 식물의 생장을 표현하기 위해 하나의 표현 체계를 구성하였다. 그는 다양한 식물의 성장 패턴을 연구하여 이를 기호의 병렬변환 시스템으로 표현하는 체계, 일명 L-system을 만들었다. 성장한 경우를 1, 성장하지 않은 경우를 0으로 변환, 식물의 생장 패턴을 이 두 가지 패턴의 일련으로 파악하여 다양한 식물의 성장 패턴을 탐구하였다. 본 연구에서 구성한 탐구 프로그램의 핵심은 식물의 생장과 같이 확률적인 상황을 일련의 표현 체계로 서로

의사소통할 수 있는 언어체계이며 이에 JavaMAL 마이크로월드 기반 확률 언어 체계를 구성하였다. 이를 '린덴마이어 확률 표현'이라고 정의하고 이를 쌓기 나무 표현, 거북이의 경로 표현 등 다양한 표현에서 적용하였다.

(2) 자연 빈도수 (Natural frequencies)

확률 교육에서 조건부 확률 등 복잡한 구조의 확률적 개념은 알고리즘으로 다가가게 되면 다양한 오개념을 불러일으킬 수 있다. 즉, 확률 교육에서 해당 상황을 직접 원하는 만큼 반복하여 시행하는 확률 실험이 가능하다면 확률 계산이 아닌 해당 변수들의 누적 빈도수로 확률을 학습할 수 있는 기회를 제공할 수 있다. 소수 혹은 분수로 확률을 계산하는 것이 아닌 자연 빈도수로 다가간다면 확률 계산의 대상이 누적 빈도수가 되어 좀 더 학생들이 다가가기가 자연스럽다. 이미 베이즈 공식을 학습하는 상황에 적용하여 확률 형태로 학습하는 것 보다 자연 빈도수 형태로 학습하는 것이 좀 더 학생들이 학습하기에 유의미한 이점이 있다는 선행 연구도 존재한다(Gigerenzer, G., & Hoffrage, U., 1995). 본 연구에서는 이 점에 초점을 맞추어 탐구 프로그램 내에 자연 빈도수 자체가 확률 사고의 대상이 될 수 있도록 하는 실행식을 구성하여 학생들에게 이를 재료로 제시한다.

(3) JavaMAL 마이크로월드

조한혁(2001)은 기술공학적 교구의 사용에 대해 teaching보다 학생의 learning을 중심이 되도록 하고 또한 인터넷과 네트워크 기반의 콘텐츠를 강조하는 원칙을 제시하고, 또 거북 기하학습 환경과 움직이는 기하학습 환경을 하나로 통합하여 인터넷에서 연결하여 쓸 수 있도록 자바로 구현한 Java 수학 마이크로월드를 설계하였다. 본 마이크로월드는

constructionism의 기본 취지에 따라 직접 명령을 사용하고 이를 통한 구성 활동을 통해 대상물과 상호작용하고, 수학적 내용을 구성할 수 있는 강력한 아이디어를 제공한다. 이러한 거북 마이크로월드는 기존 2차원 기하를 다룰 수 있는 환경에서 발전하여, 현재는 3차원 기하 및 패턴 연구가 가능한 쌓기 나무 마이크로월드(Cho 등, 2010), LOGO와 GSP의 기능을 통합하여 기하뿐만 아니라 대수, 확률 분야에서도 응용이 가능한 통합 마이크로월드인 JavaMAL 마이크로월드(조한혁, 2003)로 발전하여 현재까지 다양한 분야의 연구에서 쓰이는 도구로 자리매김하였다.

Ⅱ. 이론적 배경

1. 프로그래밍 언어 기반 확률 학습 환경

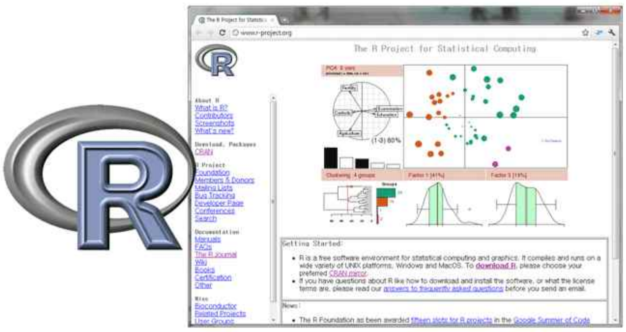
이 장에서는 알고리즘 중심의 연역적 학교 확률 수업의 개선을 목적으로 설계된 기존의 테크놀로지 기반 확률 학습 환경에 대해 살펴본다. 다양한 테크놀로지 기반 확률 학습 환경 중 확률 상황을 모델링 할 수 있는 코딩 기반 환경, 즉 프로그래밍 언어 기반 확률 학습 환경에 초점을 두어 살펴본다. 그리고 이러한 환경들의 장단점을 파악하고 개선해야 할 점을 정리함으로써 본 연구에서 설계하고자 하는 학습 환경의 방향성을 설정하고자 한다.

1.1. 기존의 프로그래밍 확률 학습 환경

현재 학교 수학에서 확률 개념은 주로 고전적 관점(수학적 확률)에서 다루어지며 부분적으로 빈도적 관점(통계적 확률)과 공리적 관점이 도입되고 있다. 그러나 고전적 관점만으로는 확률 개념의 본질을 드러내는 데에는 부족함이 있기에 빈도적 관점, 곧 통계적 확률 개념을 부각시키기 위해서 실험적 접근이 필수적이다(신보미, & 이경화, 2006). 이러한 접근 방식을 위해서는 방대한 데이터를 다룰 수 있고 이러한 데이터를 실험하고 분석할 수 있는 학습 형태가 필요했으며 이러한 형태는 지필 환경 내에서 진행하기엔 한계점이 명확한 학습 방식이었다. 테크놀로지의 힘을 빌린 프로그래밍 언어 기반 확률 및 통계 분석 프로그램은 이러한 한계점을 해결할 수 있을 것이란 기대를 받고 태어났다.

테크놀로지 기반 프로그래밍 확률 학습 프로그램은 대표적으로 R 언어(Ihaka & Gentleman, 1996), SPSS(Levesque, 2005), 그리고 Fathom(Meletiou-Mavrotheris & Lee, 2005) 등이 있다.

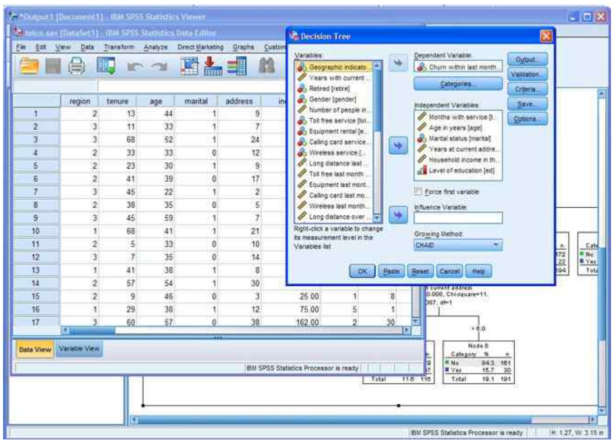
먼저 R 언어(Ihaka & Gentleman, 1996)는 통계 계산과 그래픽을 위한 프로그래밍 언어이자 소프트웨어 환경이다. 현재 통계 소프트웨어 개발과 자료 분석에 널리 사용되고 있으며 패키지 개발이 용이하여 통계학자들 사이에서 통계 소프트웨어 개발에 많이 쓰이고 있다. 방대한 양의 통계적 자료를 해당 프로그램에 넣고 이를 프로그래밍 언어를 통해 분석 도구를 코딩함으로써 다양한 통계 기법과 수치적 해석 기법을 제공한다. 해당 분석 결과에 대한 분포 그래프를 제공한다는 점도 이 프로그램의 장점 중 하나이다. 하지만 이 프로그램은 해당 자료의 파악 및 분석을 위해선 전문가 수준의 높은 프로그래밍 언어의 습득을 요하는 바 통계학자 및 대학원생 수준의 학생의 자료 분석 소프트웨어로 활용이 되고 있는 프로그램이다.



[그림 Ⅱ-1] R 언어 패키지

이를 좀 더 쉽게 보완한 프로그램으로 등장한 것이 SPSS(Levesque, 2005)이다. 이 프로그램은 현재 다양한 양적 분석 연구의 통계적 분석 자료로 쓰이고 있는 프로그램이다. 통계학 분야에서 다루고 있는 거의 대부분의 통계적 분석 방법 및 다양한 그래픽 환경을 제공하고 있다. 또한 이러한 분석 과정을 프로그래밍 언어만이 아닌 간단한 버튼 실행 및 자료 대입을 통해서도 가능하게 할 수 있다는 점이 큰 장점이다. 간단한 매뉴얼, 그리고 스프레드시트로 잘 정리 된 대량의 데이터만 존재한다면 손쉽게 통계 분석 및 학습이 가능한 프로그램이다.

다양한 수학 교육 연구에서는 이러한 통계 프로그램을 학교 현장에 도입하여 좀 더 학습자 중심으로 실험에 기초한 확률 통계 교육을 시도하자는 목소리가 높아지고 있다. 하지만 이 두 프로그램은 기본적으로 통계학을 전공한 전문가들이 빅 데이터를 분석하기 위한 목적으로 만든 프로그램으로 높은 수준의 통계학 지식과 코딩 능력을 요하는 소프트웨어이다. 따라서 해당 학습 환경을 좀 더 학교 현장 내의 학습자에 맞게, 그리고 학교 교육과정과도 어울리게 보완을 하여 학습자에게 제시되어야 할 필요성이 있다.

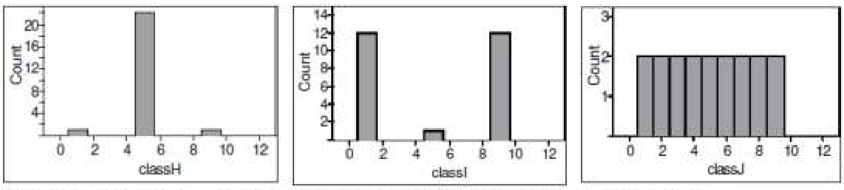


[그림 Ⅱ-2] SPSS 프로그램

Fathom(Meletiou-Mavrotheris & Lee, 2005)은 앞서 언급한 두 소프트웨어보다 학교 현장에 도입할 수 있도록 만든 통계 교육용 프로그램이다. Fathom은 GSP를 만든 Key Curriculum Press에서 만든 프로그램으로서 Collection, Case table, Graph, Text, 슬라이드 등의 개체로 구성되어 있다. 통계 소프트웨어 Fathom은 공식에 의해 값을 구하기보다는 이해와 실험을 통하여 실질적으로 확률과 통계를 알게 하는 교육용 프로그램으로서 자료를 정리하는 과정 없이 분석, 해석할 수 있어 통계를 계산하는 쪽보다는 이해하는 쪽으로 가르치고 배우는 데 많은 도움이 되는

프로그램이라 할 수 있다(권소영, 2009).

학교 현장에 도입하기 위한 교육용 소프트웨어의 목적으로 제작되었기 때문에 쉽고 간편하면서도 다양한 시각적 결과물을 도출하여 적극적인 실험 위주의 학습 설계가 가능하기에 국내에서도 다양한 연구에서 이 환경을 활용한 다양한 수업 콘텐츠를 제작하는 연구를 진행하였다. 또한 Meletiou-Mavrotheris & Lee(2005)는 이 프로그램을 통해 학습자에게 산포도에 대한 학습 상황을 비교 분석하여, 유의미한 통계적 결과를 얻기도 하였다.



Q1. The data presented in the histograms is given below in the following table:

Rating	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Class ___ count	0	3	1	5	7	2	4	2	0
Class ___ count	1	2	3	4	5	4	3	2	1
Class ___ count	1	0	0	0	22	0	0	0	1
Class ___ count	12	0	0	0	1	0	0	0	12
Class ___ count	2	2	2	2	2	2	2	2	2

Please fill out the table by putting down the name of the class corresponding to each of the five sets of counts in the table.

Q2. Judging from the tables and histograms, take a guess as to which has more variability between classes F and G.

Q4. Use Fathom and the data in HypoValue.ftm to check that you filled the table correctly.

Q5. Use Fathom and the data in HypoValue.ftm to calculate the range, interquartile range, and standard deviation of the ratings for each class. Record the results in the table:

Q6. Judging from these statistics, which measure spread, does class F or G have more variability? Was your expectation in (2) correct?

[그림 Ⅱ-3] Meletiou-Mavrotheris & Lee (2005)의 과제

이 연구에서는 Fathom을 기초로 한 학습 환경에서 학습자가 직접 히스토그램의 요소를 조작해 보고 자료를 분석해 보는 작업을 해보는 것이 분산과 표준편차와 같은 확률적 구조에 대한 관점의 변화를 줄 것이라고 가정한다. 이 연구에서는 먼저 지필 환경에서 해당 자료를 히스토그램으로 해 보고 이를 통해 분산에 대한 대답을 들어보는 작업을 선행한 뒤에

Fathom을 이용한 테크놀로지 단계에서 다시 같은 과제를 주고 비교해 보는 작업을 담고 있다. 이를 통해 Meletiou-Mavrotheris & Lee(2005)는 테크놀로지 기반 구성 활동은 히스토그램이라는 시각적 모델을 보는 눈을 달라지게 하며 이와 동시에 산포도에 대한 확률적 사고의 신장을 가져오게 할 수 있다고 강조한다.

하지만 Fathom을 이용한 대부분의 연구는 학습자가 직접 시행하는 구성 활동이 프로그래밍 언어 기반 코딩 활동과는 동떨어져 있다. 이는 Fathom을 이용한 활동 중에서 어떠한 요소가 결과물에 영향을 주었는지에 대한 정당화하기 힘들다는 것을 의미한다. 교육용 소프트웨어의 목적으로 만들어져 있기에 대부분의 소프트웨어 활용 방식이 드래그 및 실행으로 진행되었기에 프로그래밍 과정에서의 언어 체계가 상당히 부실해졌다. 이러한 점은 학습자가 해당 현상을 파악함에 있어서 어떠한 요소가 중요한 요소로 작용했는지를 스스로 파악하지 못하며 다른 사람과의 의사소통도 극히 제한적으로 이루어 질 수밖에 없게 만든다.

1.2. ABM(Agent Based Modeling) 기반 환경

확률 학습은 기본적으로 귀납적인 학습을 전제로 한다. 즉 해당 현상에서 출발하여 현상에 대한 모델링을 할 수 있는 환경에서 이를 분석하고 실험하는 활동이 기초가 되어야 한다. 많은 연구들이 computational 모델링에 관심을 갖기 시작한 것은 이 때문이다.

Computational 모델링은 학습자들에게 자연 환경 혹은 사회와 같은 현상에 대한 해석을 표현하고 실험할 수 있게 해주는 도구를 부여할 수 있는 잠재력이 있다(Wilensky, 2014). 그는 모델링이 현상을 묘사하고 설명할 수 있는 가장 강력한 방식임을 강조하면서 전통적으로 방정식이나 일상 언어를 통해 모델링 했던 방식에서 computational 모델링으로의 전환은 좀 더 다른 이점을 부여할 수 있을 것이라고 강조하고 있다. Wilensky(2014)는 computational 모델링의 이점을 실행 가능함

(executable)을 통해 실험을 진행할 수 있다는 점, 이러한 실험을 통해 학습자가 세운 가설에 대한 확인을 통해 정밀한 구조를 향해 갈 있다는 점, 그리고 computational 모델링은 매우 명료하기 때문에 학습자가 자신의 가설을 쉽게 탐구하고 이해할 수 있다는 점으로 정리하고 있다.

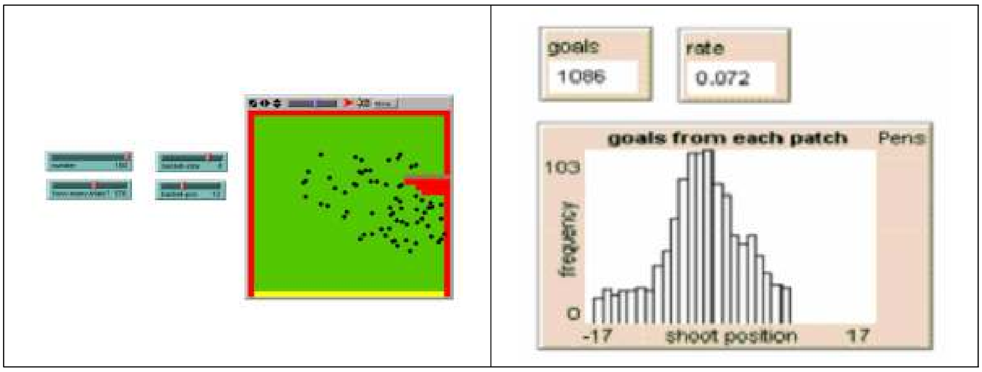
<표 Ⅱ-1> ABM 학습 환경(Wilensky, 2014)

Content Area	Agent	Emergent Phenomenon	Audience	Collaborator(s)
ProbLab (Prob/stats)	Random outcomes	Statistical distribution	Elementary/Middle school	Dor Abrahamson
GasLab (Statist Mechanics)	Molecules	Pressure, heat, velocity distributions	Mid/High school	Walter Stroup, Ed Hazzard, Seth Tisue, Sharona Levy, Mike Novak
Connected Chemistry	Molecules, atoms	Equilibrium, reactions	Mid/High school/university	Sharona Levy, Mike Steiff, Michael Novak, Corey Brady
BEAGLE (evolution & pop. bio)	Organisms	Adaptation, Speciation	Elementary - university	Michael Novak, Aditi Wagh, Mike Horn, Corey Brady
NIELS (electricity and magnetism)	Electrons, ions	Current, resistance, Electrical/magnetic field	Mid/High School /undergrads	Pratim Sengupta
EconLab (economics)	Humans	Market dynamics	High school/ Undergrad/grad	Spiro Maroulis, Stan Reiter
MaterialSim (materials science)	Atoms	Solidification, Grain growth	Undergraduates	Paulo Blikstein
Cities (urban studies)	Humans, land features	City development, sprawl	Undergrads/grads	Ben Watson, Bill Rand, Martin Felsen
Calculus	Differential elements	integrals	High School	Michelle Wilkerson
Cognitive Psychology	Cognitive agents	Learning/thinking	High/Undergrads/grads	Paulo Blikstein, Dor Abrahamson
Social Psychology	Humans	Social Learning	Undergrads/grads	Dor Abrahamson, Jim Levin, Michael Cole
Educational Policy	Humans, schools	Enrollment/achievement	Undergrads/grads	Spiro Maroulis, Louis Gomez, Luis Amaral, Ethan Bakshy
Linguistics	Phonemes/speakers	Language	Undergrads/grads	Celia Troutman, Matt Goldrick 30

이러한 흐름에 맞춰 다양한 연구들이 computational 모델링 도구로 ‘에이전트 기반 모델링(agent-based modeling)’에 초점을 맞추고 있다. 에이전트 기반 모델링 (이하 ABM)은 자연 환경과 사회 환경이 에이전트에 간단한 행동 규칙을 부여함으로써 모델화 할 수 있다는 아이디어에서 시작하였다(Wilensky, 2014). 이러한 모델링 방식은 수학, 과학 및 여러 분야의 현상들을 에이전트의 움직임으로 모델링할 수 있는 프로그래밍 언어를 제공, 학습자의 수준에 맞는 다양한 학습 환경을 제공하고 있다. Wilensky(2014)는 이러한 여러 가지 ABM 학습 환경을 해당 에이전트와 학습 대상자에 맞추어 <표 Ⅱ-1>와 같이 정리하였다.

확률 현상은 다양한 요소들이 각각 서로 다른 확률적 상황으로 작용을 하는 현상을 기초로 한다는 점에서 ABM 학습 환경 방식에 적용하기 용이하다. 이러한 점을 바탕으로 실제로 많은 연구들이 확률 학습에 있어서 이러한 ABM 학습 환경을 기초로 한 다양한 프로그램을 제시하고 있다.

Wilensky & Resnick(1999)은 확률적 오개념이 학생들의 형식적 학습에서 오는 어려움뿐만 아니라 그들의 일상생활에서의 경험에 대한 오해에서 발생한다고 가정, StarLogo라는 학습 환경을 제시한다. StarLogo의 모델링 언어는 학생들에게 다단계의 현상에 대한 모델을 설계하고 이를 통해 단계에 대한 개념을 탐색할 수 있게 하는 징검다리가 될 수 있다(Wilensky & Resnick, 1999).

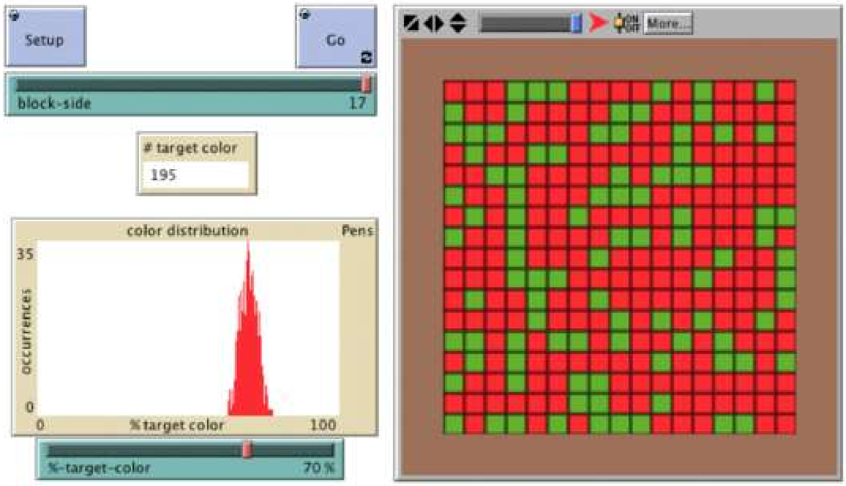


[그림 Ⅱ-4] NetLogo 기반 확률 학습 환경

이 StarLogo에 보완해야 할 점을 반영하여 등장한 학습 환경, NetLogo가 새로운 확률 학습 환경으로 제시되었다. NetLogo는 에이전트 프로그래밍 언어이자 사회, 과학 현상을 시뮬레이션하기 위한 모델링 환경이다(Tisue, & Wilensky, 2004). 수천 개의 독립된 “에이전트”가 만들어 내는 마이크로월드를 통해 computational 모델링을 할 수 있는 도구이다.

Pratt & Prodromou(2004)은 이 NetLogo 환경 내에서 새로운 현상에서의 확률 분포를 설명할 마이크로월드 설계 연구를 진행하였다. 이 연구에서는 학생들이 새로운 현상에 직면했을 때 이 현상의 확률 분포를

설명하기 위해 어떻게 자신들의 지식을 사용하는가를 알아내기 위한 새로운 마이크로월드를 구성하였다. 현상 속의 수많은 확률적 사건(random events)을 에이전트에 담아 이를 통해 이론적 그리고 실천적인 관점에서 확률 분포에 대한 학습자의 사고방식을 밝히고자 했다. NetLogo는 확률 및 통계 영역을 포함하여 거의 모든 분야의 현상을 모델링할 수 있다. 하지만 프로그래밍 언어를 익히는 것이 어렵고 시간이 많이 소요되기 때문에 학부생 정도의 수준에 적합하다(최인용, 2014).



[그림 Ⅱ-5] ProbLab과 Stochastic Patchwork (Abrahamson & Wilensky, 2005)

이러한 환경을 좀 더 중·고등학교 학생들에게 적합하게 제공하기 위해 새롭게 고안된 환경이 바로 ProbLab이다. ProbLab은 NetLogo에 의해 고안되어 적절한 컴퓨터 기반 상호작용 모델을 포함하고 있는 중학교에서의 확률과 통계 교육용 실험 도구이다(Abrahamson & Wilensky, 2005). 그들은 테크놀로지 기반 학습 환경에서 활동하면서 확률을 학습할 때 중요한 요소를 지적한다. 바로 학습자는 확률이라는 영역을 상징적인 형태로 나타낼 때뿐만 아니라 확률적 경험을 통해 찾아낸 것을 계산하고 의사소통하는 것을 통해 공식화하는 데에 선천적으로 확률적 시

뮬레이션을 기초로 한다는 점이다. 그리고 이러한 가정에 따라 학교 수학에 ProbLab 학습 환경을 적용해 보는 연구를 통해 주어진 환경이 시간 기반 확률적 사건과 공간 기반 지각적 판단 사이의 다리 역할을 하는 도구가 될 수 있음을 밝혔다.

StarLogo, NetLogo 그리고 ProbLab으로 이어지는 에이전트 기반 확률 학습 환경은 서로 다른 조건들이 혼합된 현상에 대한 확률 실험을 다룰 수 있는 통합 인터페이스 기능을 보유하고 있어 다양한 확률 시뮬레이션이 가능하다는 장점이 있다. 다만 NetLogo는 프로그래밍 언어 자체가 초·중등학교 학생을 대상으로 하기엔 난해함이 있으며 ProbLab은 이를 보완하고자 완성형으로 설계를 한 바 학생들에게 마이크로월드를 설계하면서 느낄 수 있는 hard fun을 느끼지 못하게 할 가능성이 있다.

이 장에서는 기존의 테크놀로지 기반 확률 학습 환경, 즉 프로그래밍 언어 기반 확률 학습 환경과 ABM 기반 확률 학습 환경의 장단점을 살펴보았다. 정리하면 코딩을 기반으로 한 확률 학습 환경은 학습자에게 연역적인 공식에서 벗어난 실험을 통해 방대한 자료를 처리하고 이를 분석할 수 있는 일련의 언어 체계와 다양한 시각적 출력물을 제시한다. 또한 ABM 기반 확률 학습 환경은 거의 대부분의 확률 학습 환경을 학습자가 스스로 모델링 하고 이를 computational device에 실행하게 함으로써 다양한 사고 실험을 할 수 있는 가능성이 있다는 것을 여러 연구에서 밝혀왔다.

본 연구에서는 이러한 확률 학습 환경의 장점을 받아들여 두 가지의 학습 환경을 접목한 ABM 기반 확률 코딩 학습 환경을 설계하는 것을 목표로 한다. 단, 앞에서 언급한 단점을 보완해서 좀 더 학교 현장에 맞는 환경을 제공해야 할 필요성이 있다. 먼저 교육용이 아닌 통계 분석을 목적으로 만든 프로그래밍 언어 환경은 대부분 그 언어 체계가 전문가 수준에게 맞추어져 있어 학습자가 다루기에 매우 난해하다는 점이 지적되어 왔다. 이에 좀 더 학습자에게 쉽게 다가가기 위한 교육용 소

프트웨어는 쉽고 간편함이라는 요소에 초점을 맞추다 보니 직접 프로그래밍을 이용한 언어 체계의 구성이 아닌 실행, 버튼 누르기, 숫자 입력하기 등의 활동으로 활동 영역을 제한하고 있다. 이러한 환경은 공통적으로 난수생성(random) 이외의 확률 현상을 모델링하기 위한 문자 표현 체계를 제공하고 있지 않다(최인용, 2014). 신보미 & 이경화 (2006)는 이러한 환경에서는 자신의 사고의 확인 수준에 머무르게 되어 확률에 대한 직관적인 수준에 머물러 있게 할 가능성이 있다고 언급하고 있다.

본 연구에서는 서로 대조적인 두 가지의 단점을 개선하면서 위에서 소개한 두 가지의 환경의 장점을 살릴 수 있는 방법으로 '실행 가능한 표현(executable)'을 통해서 현상을 모델링 할 언어 체계를 부각시키는 방안을 고안하였다. 다음 장에서는 이 요소의 정의와 배경에 대해 자세히 살펴보고자 한다.

2. 실행 가능한 표현(Executable expression)

이 장에서는 앞 장에서 언급한 문제점을 해결할 수 있는 도구로 본 연구에서 제시될 '실행 가능한 표현'에 대하여 알아본다. 이 코딩 도구가 가져야 할 조건에 대한 큰 틀이 될 수 있는 computational thinking에 대해 고찰하고 또한 이 도구의 등장 배경인 constructionism에 대해 살펴봄으로써 이러한 흐름 속에서 '실행 가능한 표현'의 의의를 밝힌다.

2.1. Computational thinking

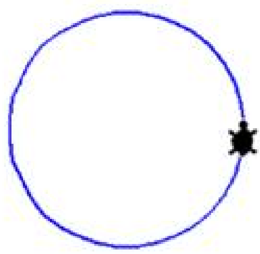
Computational thinking에 대한 많은 연구들은 학생들이 현대 사회에 있어서 가장 필수적이라 할 수 있는 컴퓨터와 함께 하는 구성 활동 도중에 발현되는 사고력에 대해 구체화 하고자 노력하였다. Computational thinking은 문제 해결, 체제 설계, 그리고 인간의 행동 이해와 같은 것을 컴퓨터 과학에 기초하여 해당 개념들에 접근해가는 사고 방법이다(Wing, 2006). Wing(2006)은 이 computational thinking(이하 CT)의 특징을 총 여섯 가지로 정리하고 있다.

첫째. 프로그래밍이 아닌 개념화하기이다.
둘째. 기계적인 암기 기술이 아닌 기초적인 것이다.
셋째. 컴퓨터 하는 것이 아닌 인간의 방식으로 생각하는 것이다.
넷째. 수학적 사고와 엔지니어링(engineering) 사고를 보충하고 결합하는 것이다.
다섯째. 인공물이 아닌 아이디어이다.
여섯째. 모두에게 어디에서나 사고할 수 있는 것이다.

컴퓨터 과학자인 그가 정의한 이 특징들에 의하면 computational thinking은 단순한 프로그래밍 교육을 지정된 몇몇 학생들에게 기능적으로 익히는 것으로 정의한 것이 아닌 어떠한 학습자에게도, 어떠한 분야에서도 적용될 수 있는 사고이며 이는 기능적 사고가 아닌 그 기저에 내포된 기초적 개념을 인간이 스스로 찾아내게 해 주는 열린 사고이다. 이러한 정의는 수학 교육에 주는 영향이 적지 않다. CT 기반 학습 환경을 설계함에 있어서는 고차원적인 컴퓨터 인터페이스의 기능이나 프로그래밍 언어를 기반으로 하여 학생을 엔지니어로 만드는 것을 지양하고 그 설계를 통해 학생들에게 제공하고자 하는 아이디어를 누구에게나 쉽고 익숙하게 구성할 수 있도록 해야 함을 시사한다.

CT의 핵심적인 요소는 바로 컴퓨터 사용 과정에서의 추상화(abstraction)와 자동화(automation)이다. CT에서의 추상화란 학습자가 컴퓨터와 함께 학습하면서 구성활동을 함에 있어서 어떠한 개념을 기호 등의 여러 표현 체계로 나타내어 컴퓨터가 이를 실행할 수 있도록 하게 함을 의미한다. CT에서의 추상화란 상징적이기 때문에 매우 일반적인

개념이다(Wing, 2008). Wing(2008)은 CT에서의 추상화는 수학과 물리 과학에서의 추상화보다 훨씬 더 풍성하고 복잡한 경향이 있다고 언급하였다. 그 이유는 CT에서의 추상화는 실수 체계나 집합과 같은 명백하게 잘 정련된 혹은 쉽게 정의할 수 있는 수학적 추상화의 대수적 원리를 다루어야 할 필요는 없다는 점, 또 다른 하나는 추상화가 궁극적으로 물질계의 제약조건 하에서 실행되기 때문에 가장 최악의 경우나 실패했을 경우 등을 다양하게 고려해야 한다는 점이다(Wing, 2008). 잘 설계된 컴퓨터 기반 구성 환경은 학생들이 활동을 하면서 자연스럽게 추상화 과정이 발현될 수 있는 환경이며 그 추상화 과정이 잘 정돈된 수학적 개념이 아닌 좀 더 다양하면서 풍성한 수학적 구조를 다룰 수 있는 환경일 때 의미가 있다. 자동화란 우리의 추상화를 컴퓨터에서 실행해 보는 것이다. 컴퓨터 활용이란 우리의 추상화의 자동화이다(Wing, 2008). 학생들은 자신이 스스로 사고하고 이를 구성한 수학적 과정을 마이크로월드에서 자동적으로 구현할 수 있다. 이를 통해 자신의 추상화 과정에서의 사고에 대해 자동적으로 피드백을 받을 수 있고 이에 대한 조절과정을 통해 고차원적인 수학적 구조를 파악할 수 있게 된다.

추상화	자동화
반복 36 { 가자 5; 돌자 10}	

[그림 Ⅱ-6] Computational thinking의 추상화와 자동화

<표 Ⅱ-2> Computational thinking의 핵심적인 개념과 구성 요소 (Barr & Stephenson, 2011)

구성요소	컴퓨터 과학	수학
데이터 수집	문제 영역의 데이터 자료를 찾기	문제 영역의 데이터 자료를 찾기, 예를 들어, 동전을 떨어뜨리거나 주사위를 던지기
데이터 분석	데이터 집합에 대한 기초적인 통계적 계산을 수행할 프로그램을 쓰기	동전 떨어뜨리기, 주사위 던지기의 사건의 횟수를 세고 결과 분석
데이터 표현	배열, 연결 리스트, 스택, 대기행렬, 그래프, 해시 테이블 등의 데이터 구조를 사용	데이터를 표현하기 위해 히스토그램, 파이 차트, 막대그래프를 이용함; 집합, 리스트, 그래프, 등을 이용함. 데이터를 포함시킴
문제 분해	목적과 방법을 정의; 주요한 것과 기능적인 것을 정의	주어진 표현을 작동시킬 명령에 적용
추상화	기능을 수행하는 자주 반복되는 명령 모음을 요약하기 위해 절차를 사용; 조건, 회로, 귀납 등을 사용	대수에서의 변수 이용; 문장제 문제에서의 필수적인 요소를 식별해냄; 대수에서의 함수와 프로그래밍에서의 기능과 비교 연구; 문장제 문제를 해결하기 위해 반복을 사용
알고리즘과 절차	대표적인 알고리즘을 연구; 문제 영역을 위한 알고리즘을 실시함	장제법, 인수분해를 실행; 빽셈, 덧셈을 실행
자동화		다음과 같은 도구를 사용: GSP(Geometer Sketch Pad), Star logo; python code snippets
평형화	병렬로 처리하는 방식과 같이 데이터나 과제를 쓰레딩, 파이프 라이닝, 그리고 분도하기.	선형 체계를 해결; 행렬 곱셈을 시행
시뮬레이션	알고리즘 애니메이션, 매개 변수 바라보기.	데카르트 평면에 함수의 그래프를 그리고 변수의 값을 변경해 봄

LOGO 환경에서 원을 그리는 과정을 예로 들어보자. 학습자들은 어떻

게 원을 그려낼 수 있을 것인가를 길이와 각으로 사고하여 이를 ‘가자’와 ‘돌자’라는 명령으로 추상화 할 것이다. 적당한 길이만큼 가고 방향을 바꾸는 과정을 반복하게 되면 원을 구성할 수 있다는 이 추상화 과정을 학생들은 LOGO언어로 표현하여 거북이에게 실행시킬 준비를 할 것이다. 프로그래밍 언어는 컴퓨터를 활용하는 과정에서 쓰이는 문자열의 집합의 추상화이다(Wing, 2008). 이를 실행하면 거북이는 마이크로월드에 자동적으로 원을 구성하게 될 것이다. 자동화 과정은 자신이 추상화한 LOGO 언어의 자동적인 실행을 통해 해당 수학적 개념을 구현하게 해주는 마이크로월드이다.

우리는 현재 컴퓨터를 가지고 이메일을 보내거나 웹 브라우징, 워드 작업, 그리고 게임을 하는 데 쓴다. 하지만 CT의 혁명은 그것들 보다 훨씬 더 깊은 아이디어가 숨어 있다. 이는 생각하는 방식을 바꾸어 준다. 컴퓨터 관련 개념들(computational concepts)은 가설과 이론을 묘사할 수 있는 새로운 언어를 제공한다(Bundy, 2007). 이 언어를 통한 다양한 사고과정이 누구에게나 쉽고 그리고 어떠한 수학적 개념에서도 적용이 가능한 과정으로써 학습이 용이하게(learnable) 설계가 되어야 한다. 언어는 어떠한 학생들이건 필기도구처럼 사용될 수 있게 필요한 요소만을 통해 쉽게 구성될 수 있도록 해야 할 것이며 이 언어를 에이전트에게 처리하도록 함으로써 구성하는 computational process 안에는 나도 모르게 학습할 수 있는 구조가 들어가 있어야 한다. 즉 CT에서는 추상화 및 자동화 과정 속에 강력한 아이디어(powerful idea)가 내재된 코딩 언어 체계를 강조하는 사고력이라고 할 수 있다.

CT 역량 강화와 코딩 교육의 중요성이 전 세계적으로 강조되고 있는 현 시점에서 이러한 시대적 흐름이 수학 교육이라는 분야에 시사하고 있는 점에 대해 고찰할 필요가 있다. 많은 연구들은 CT을 수학 학습의 측면에서 살펴보고자 하였으며 구체적인 학습 환경 설계 연구로 나아갔다.

Barr & Stephenson(2011)은 CT라는 사고력을 K-12 학년 대상 학교 현장에 적용하기 위한 노력을 기울이면서 이를 위한 CT의 요소들을 세

분화 하였다. 그리고 이를 컴퓨터 과학, 수학, 언어학 등의 다양한 분야에 대하여 각각의 구성요소가 어떠한 과정을 의미하는지를 예시를 통해 제시하였다. <표 Ⅱ-2>는 그와 관련하여 수학이라는 교과에 CT 구성 요소들이 접목되었을 때의 예시이다.

CT 역량 강화를 위한 수학 학습 연구에서 자주 언급한 요소 중에 하나는 바로 Brennan & Resnick(2002)이 명시한 '시험하기 그리고 디버깅하기 (testing and debugging)'라는 과정이다. CT 기반 도구의 가장 큰 특징은 자신이 구성한 개념을 시험해 보고 즉각적인 피드백을 받을 수 있다는 점이다. 그리고 만약에 이 시험에 오류가 발생하면 이를 수정해서 다시 해보는 과정을 스스로 시행해 볼 수 있다는 점이다. 이러한 점은 기존의 교육 환경에서는 구현할 수 없는 구체적인 구성 활동이며 수학 학습 환경을 설계함에 있어서도 이러한 요소가 적극적으로 반영되도록 설계가 되어야 할 것이다.

2.2. Constructionism과 실행 가능한 표현

Constructionism은 Piaget의 constructivism과 유사하지만 학습자가 구체적으로 어떻게 활동하느냐 하는 것에 초점을 맞춘 실천적인 교육이론이다(송민호, 2010). 그에게 있어서는 유의미한(learnable) 학습 환경을 학생들에게 제시함으로써 학생이 기존의 자신의 현 상황에 맞게 지식을 구성할 수 있게 해줘야 함을 주장하고 있으며 이에 이를 실현시키기 위한 도구를 강조해왔다. 여기서 이를 실현시키기 위한 도구는 바로 '컴퓨터가 풍부한 교육환경'이다. Papert의 '컴퓨터가 풍부한 교육 환경'은 학습자가 적절한 소재를 조작하는 활동을 통하여 다양한 수학적 지식을 습득할 수 있는 환경이다(송민호, 2010).

Papert는 컴퓨터를 통하여 학습자의 사고력을 기르고, 지식을 접근하는 방식에 대한 변혁을 꾀하였다. Papert는 어린이가 컴퓨터에 프로그램을 공급함으로써 우수하고도 초현대적인 지식을 습득할 수 있고 과학과 수

학 그리고 지식의 모형체인 예술 같은 데에서 얻어지는 심오한 개념에 접근할 수 있으리라 생각하였다(Papert, 1990. p. 13). 이에 그는 어린아이가 직접 프로그래머가 되어 컴퓨터에 ‘수학을 말하게 하는’ 도구는 어떠한 형태가 되어야 할 것인지를 고민하였다. 그 도구가 바로 LOGO라는 프로그램에서 제공하는 명령어이며 이를 통해 마이크로월드에서 학습자와 함께할 ‘동반사고의 대상’은 바로 ‘거북이(turtle)’다.

LOGO는 길이를 만드는 ‘가자’와 각도를 만드는 ‘돌자’라는 두 개의 신체 동조적 명령어를 기본으로 하여 다양한 명령어를 학생들이 직접 구성하여 이를 실행하면 ‘동반사고의 대상’인 거북이가 해당 마이크로월드에 이를 구현하여 학생들과 컴퓨터의 상호작용을 돕는 프로그램이다. 컴퓨터와의 상호작용하는 활동의 견인력, 그리고 컴퓨터가 학습자의 사고에 미칠 영향력에 대해 깊이 생각하여 왔던 Papert는 기본적으로 LOGO의 명령어라는 언어를 통해 컴퓨터를 필기도구로 사용할 수 있도록 환경을 구축하였다. 이는 constructionism 학습관에 따른 도구, 즉 컴퓨터가 제공하는 단순한 조작을 수동적으로 따라하면서 지식을 수용하는 종래의 방식이 아닌 컴퓨터를 하나의 연습장으로, 프로그래밍 언어를 필기구로 삼아 자신이 스스로 능동적인 구성활동을 하고 이를 마이크로월드에 구성해 봄으로써 학습자에게 의미 있도록 지식을 조직할 수 있게 해 주는 도구인 것이다.

조한혁(2003)은 컴퓨터의 등장은 교육이 추구하는 목표로 ‘know what′, ‘know how′ 보다는 정보화 tool을 이용한 ‘know with’를 강조하게 되었으며 이러한 변화에서는 ‘know with′를 강조하는 정보화 시대에 맞는 새로운 마이크로월드 수학교육과정이 등장하게 될 것이라고 하였다. 또한 폭발적인 지식의 증가와 지식 수명의 단축은 지식의 소유(to have)보다 지식 만듦(to make)을 강조하게 되었다(조한혁, 2003). LOGO는 ‘know with′, 즉 ‘컴퓨터와 함께하는 학습’이자 ′to make′, 다시 말해 Papert(1991)가 정의한 ‘learning by making′을 할 수 있는 실천적 도구이다.

Papert는 LOGO라는 프로그램을 통해 모국어와 같이 언어 체계를 학습하고 이를 통해 다양한 수학적 영역을 탐구 할 수 있기를 기대하였다. '가자'와 '돌자'라는 기본적인 '몸짓 언어'를 기초로 하여 학습자가 쉽고 편하게 다가갈 수 있으면서도 그 안에 수학적 구조에 대한 강력한 아이디어가 숨겨져 있는 'black box'[1](Resnick, 2000)의 역할을 해야 한다고 하였다. 실행 가능함(executable)에 기초한 이러한 언어 체계는 학습자에게 자신의 사고 과정을 거북이의 '몸짓 언어'로 구성해 보고 이를 실행함으로써 자신의 전략에 대한 반성 및 수정이 가능한 표현이다. 즉, 거북이의 '몸짓 언어'로 구성된 '실행 가능한 표현(executable expression)이라고 정의할 수 있다.

실행 가능한 표현이란 문제 해결을 위해 실행 가능함(executable)을 가정하고 있는 언어 체계를 의미한다. 문제 해결을 위해 학습자가 구성해야 하는 어떠한 표현 체계, 그리고 표현 체계에 대한 즉각적인 피드백의 실행은 실행 가능한 표현의 핵심적인 특징이며 이는 다양한 학습 환경 설계 연구로의 적용으로 이어졌다. 실행 가능한 체계는 학습자와 과제의 현상 사이에 위치하여 둘 사이의 중개자 역할을 해야 하며, 이를 위해선 학습자가 표현하기 용이한 표현 체계를 선택하여 이를 자유롭게 조작하고 디버깅하며 시각화 하는 과정 속에 학습이 이루어질 수 있도록 설계되어야 한다.

조한혁 & 송민호(2014)는 텍스트 형태의 실행 가능한 표현에 대한 세 가지의 일반적인 특징을 다음과 같이 제시하였다.

첫 번째, 실행 가능한 표현에 사용되는 기호는 대상 또는 조작을 명시적으로 지칭하고 있다.

---

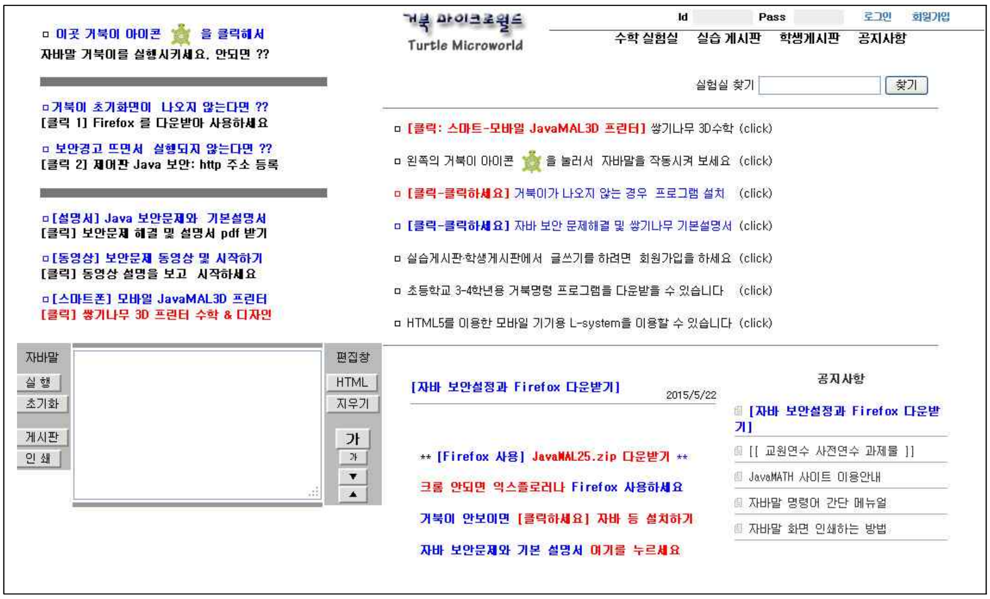
1) 학습자에 의한 지식의 구성이 잘 일어나기 위해서는 지식의 구조를 정교하게 조직하고 조직된 지식의 구조를 학습자에게 의미 있는 활동의 형태로 변형하여야 한다(송민호, 2010). 우리는 이런 지식의 구조가 암묵적으로 들어가 있는 의미 있는 활동의 형태로 변형된 것을 'black-box'라고 한다. 오늘날 'black-box'는 좀 더 초보자들에게도 전문적인 과학적 경험을 하게 하기 위한 데이터 수집 또는 측정하기 등의 학습에 효과적이지만 이와 동시에 이는 '불명료(opaque)'(그들의 내부 구조는 감추어져 있어서 사용자들이 바로 이해하기는 힘든)하고 또 겉모습은 '부드러운(bland)'형태를 취한다(Resnick, 2000).

두 번째, 실행 가능한 표현의 사용은 학습자의 내면에 실행(executable) 할 수 있는 약속된 현상을 제시한다.

세 번째, 실행 가능한 표현은 학습자의 내부뿐만 아니라 외부 환경에서도 기호 작용에 따른 결과물을 피드백으로 제시할 수 있다.

실행 가능한 표현 기반 학습 환경은 위의 세 가지의 특징이 전면에 드러날 수 있도록 제시되어야 한다. 즉, 주어진 학습 대상에 대한 언어 표현체계가 적절한 외부 환경 내의 결과물로 피드백 되어야함과 동시에 내적으로도 실행될 수 있는 충분한 표현력을 보유해야 한다. 표현력은 어떤 프로그래밍 구조나 언어가 주어진 문제를 표현할 수 있는 능력을 말하는 것으로 학습 환경이 표현력이 풍부한 표현 체계를 가지고 있다는 것은 학습 목표에 관해 학생들이 사고하고 탐구할 수 있는 형태를 가지고 있어야 하는 것을 말한다(우안성, 2013).

실행 가능한 표현 체계에 대해 자세하게 언급한 Noss & Holyes(1996)의 연구에서는 컴퓨터에 기초한 실행 가능한 표현의 역할에 대해 강조한다. 컴퓨터가 없는 환경에서 두 학습자 사이의 서로의 아이디어를 의사소통하기 위한 언어로 학습자는 자연 언어와 수학 언어 사이에서 선택을 해야 한다. 전자는 일반적으로 의사소통에는 좋으나 수학과 같은 좀 더 정확하고 정밀한 담화를 이끌지는 못한다. 후자는 서로 반대된 특징을 지닌다. 컴퓨터는 의사소통과 정밀함이 서로 만날 수 있도록 하는 중간 세계이다(Noss & Holyes, 1996). 그가 강조한 실행 가능한 표현 체계의 중개자적 역할은 수학 언어와 자연 언어 체계 사이의 중개자 역할 뿐만이 아니라 학습자와 컴퓨터 사이의 혹은 학습자와 현상 사이의 중간 매개체 역할을 강조한다. 실행 가능한 표현은 그 자체가 현상의 모델링을 위한 언어 체계이자 학습자 간에 혹은 교사와 학습자, 현상과 학습자 간에 의사소통의 도구가 된다.



[그림 Ⅱ-7] JavaMAL 마이크로월드

본 연구에서 LOGO 기반 JavaMAL 마이크로월드를 학습 환경의 배경으로 선택한다. JavaMAL 마이크로월드 기반 학습 환경에서는 우선 학습자가 마이크로월드에서의 대상을 조작하여 인공물을 구성하기 위한 표현 체계로써 프로그래밍 언어(programming language)의 사용을 중요하게 여긴다. LOGO에서는 '가자'와 '돌자' 명령이 기본적인 프로그래밍 언어가 된다. 학생들이 키보드를 사용하여 명령어를 입력하면 그 입력에 해당하는 것을 컴퓨터가 실행하여 화면에 시각적인 대상을 만들게 된다. 이렇게 수학 학습 환경으로 보면 프로그래밍 언어는 전문적인 지식을 요하는 것이라기보다는 학습자와 마이크로월드가 상호 작용 할 수 있게 하는 문자 표현이 된다(우안성, 2013).

이러한 특징을 가진 LOGO 기반 학습 환경에서는 거북이라는 에이전트를 움직일 '몸짓 언어' 기반 프로그래밍 언어 자체가 위에서 언급한 실행 가능한 표현의 특징을 극명하게 드러나게 할 도구가 된다. LOGO 기반 마이크로월드 환경에서 실행 가능한 표현은 즉각적인 피드백을 거북이의

움직임으로 제시해 줄 뿐만 아니라 그 언어 그 자체로 학습자와 학습자, 학습자와 컴퓨터, 학습자와 현상, 그리고 수학 세계와 일상 언어 사이의 상호 작용을 돕는 중요한 역할을 한다.

Noss & Hoyles(1996)는 주어진 일반적인 현상에서 아이디어를 표현하기 위해 충분히 일반적이지만 학습자가 조종할 수 있고 친숙한 형태의 표현으로 정돈해서 학습자에게 도구로 제시되어야 유의미한 학습 환경을 가져올 수 있음을 강조한다. 적절한 현상을 선택, 이를 통해 중재자 역할의 언어체계로 학습자와의 매개 역할을 할 실행 가능한 체계의 선택은 computational thinking 역량 강화와 더불어 학습자 스스로 현상을 설계해가는 즐거움을 줄 수 있을 것이다.

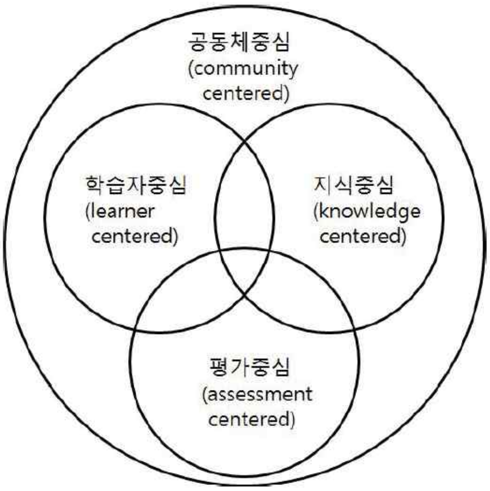
3. 거꾸로 교실(Flipped learning)

3.1. 학습 환경에 관한 네 가지 관점

Bransford et al(2000)은 효과적인 학습 환경 설계를 위한 네 가지 학습 설계의 원리로 공동체 중심 원리, 학습자 중심 원리, 지식 중심 원리, 평가 중심 원리를 제시하였다. 본 학습 환경을 활용한 수업 형태는 이러한 원리를 지키면서 효과를 극대화 할 수 있는 형태로 제시되어야 한다. 이 절에서는 본 연구에서 제시하는 실행 가능한 표현 기반 이항 분포 탐구 프로그램을 위의 학습 설계 원리를 바탕으로 하여 그 의의를 찾아본다.

첫 번째로 학습자 중심 원리는 교육 상황에서 학습자의 지식, 기술, 태도, 믿음 등에 특별히 주의를 기울이는 것을 말한다(Bransford et al, 2000). 학습자 중심의 환경에서 주요한 전략은 학습자로 하여금 다양한 상황에 대해 예측해 보도록 하고, 예측 이유에 대해 설명하도록 함으로써 자신의 지식 구조를 설명하고 발달시키도록 촉진하는 것이다(최인용, 2014). 이를 위해서는 수업 형태를 만들 때 학습자의 선행경험을 이해하

고 이를 시작점으로 하여 스스로 구성활동을 할 수 있는 도구를 적절히 제시하는 것이다. Branford et al(2000)은 학습자 중심 환경에서 교사의 역할은 학생의 흥미와 열정뿐만 아니라 학생이 무엇을 알고 있고 무엇을 할 수 있는지, 즉 각 학생이 무엇을 알고 있는지, 무엇을 걱정하는지, 무엇을 할 수 있고, 무엇을 하기를 원하는가를 알기 위해 노력해야 한다고 주장하고 있다. 수업 형태를 설계함에 있어서 본 실행 가능한 표현 기반 학습 환경은 개별적인 도구와 개별적인 피드백이 가능한 환경이다. 교사는 학습자가 환경과 상호 작용하면서 학습자의 현재 지식 그리고 학습자 스스로 구성해가는 지식 등을 고려하여 적절한 비계(scaffolding)를 제시해야 한다.



[그림 Ⅱ-8] 학습 환경에 대한 관점(Bransford et al, 2000)

두 번째로, 지식 중심 환경에서는 심도 깊은 이해와 이후 계속되는 학습전이 과정을 거쳐 학생의 지식이 더욱 풍부해지도록 도와줘야 한다는 점을 견지하고 있다(Bransford et al, 2000). 이에 본 프로그램을 활용한 수업에서는 학습자가 개별적으로 지식을 구성하지만 그 구성 활동이 단순한 코딩 활동으로 끝나지 않게 하는 수업 형태를 제시해야 한다. 현상을 스스로 해석하고 이를 통해 피드백을 받아 스스로 'What if?' 전략을

세우며 활동을 했다면, 교사는 개별적으로 혹은 학습자간의 상호 작용을 통해서라도 그 전략 속에 담겨진 수학적 구조를 끌어낼 수 있도록 도와야 한다. 본 학습 환경을 통해 배우고자 하는 수학적 지식은 이항 분포와 관련한 확률적 지식이다. 학습자의 수준을 고려하여 치밀하게 과제와 도구를 선택하고 이를 구성활동을 하게 함과 동시에 현재 소유하고 있는 지식에 맞추어 정리해주는 수업 형태가 필요하다. 또한 이항 분포의 핵심 요소인 시행 횟수와 사건의 발생 확률 두 가지에 대한 심도 있는 사고를 위해 학습자가 설계한 실행식 내의 두 요소에 해당하는 부분을 자유롭게 바꾸어 보고 'What if?' 전략을 세워 핵심 요소의 수학적 의미를 찾아갈 수 있는 과제를 제시할 수 도 있다.

세 번째로, 학습자 중심 및 지식 중심과 더불어 효과적으로 설계된 환경은 평가중심이어야 한다. 평가의 주요 원리는 피드백과 수정의 기회를 제공해야 한다는 것과 평가의 대상이 학습목표와 일치되어야 한다는 것이다(Bransford et al, 2000). 본 연구의 학습 환경은 실행 가능한 표현을 기초로 하기에 즉각적인 피드백과 언어 체계의 계속적인 수정 과정이 핵심이 되는 환경이다. 실행 가능한 표현 기반 학습 환경은 기본적으로 평가 중심 원리를 지키기에 수월한 학습 환경이다. 수업 형태 내에서 고려해야 할 점은 이러한 바탕에 이항 정리와 관련한 수학적 사고의 변화를 효과적으로 평가할 수 있는 과제들을 구축하는 것이다. 학습자가 모델링 할 수 있는 적절한 현상을 찾아야 하며 이를 바탕으로 학습자의 표현 및 수행 능력을 평가할 수 있는 형성평가 및 종합평가가 필요하다. 철저히 현상에 기초로 한 확률적 상황을 제시해야 하며 학습자의 실행식 체계 및 수행 평가지 등을 통해 지속적으로 평가를 해야 한다. 학습자간의 토론 수업 형태 및 댓글 형태의 상호 교류를 통해 학습자의 사고의 변화를 평가할 수도 있다.

마지막으로, 공동체중심의 환경이 고려되어야 한다. 학습이론의 발달은 환경이 어느 정도 공동체 중심인가가 학습에 중요하다는 점을 시사하고 있다(Bransford et al, 2000). 이상적으로 학생, 교사 그리고 관련된 모든

사람이 학습활동과 학습에 대한 높은 기준을 중시하는 규범을 공유해야 한다. 이러한 규범은 사람이 상호작용할 수 있는 기회를 증가시키고, 피드백을 주고 학습하게 한다(최인용, 2014). 본 프로그램은 인터넷 환경을 기초로 하고 있어 의사소통의 장소를 충분히 마련해 줄 수 있다. 본 학습 환경을 이용한 수업 형태는 이 점을 충분히 활용할 수 있어야 한다. 즉, 해당 과제에 대한 학습자 사이의 댓글 혹은 채팅창과 같은 의사소통의 장을 통해 서로의 생각을 공유하고, 실행 가능한 표현이라는 수학 언어 체계를 통해 자유롭게 그 체계를 게시판에 서로 공유하고 확인하는 작업을 통해 풍부한 의사소통을 이끌어 낼 수 있는 수업 형태를 제시할 수 있게 된다. 컴퓨터와의 상호 작용뿐만 아니라 웹 기반 환경을 충분히 활용한 구성원들 사이의 상호 작용이 가능하며 수업 형태는 이러한 점을 충분히 반영한 토론 수업 혹은 협동 수업 형태가 진행되어야 한다.

3.2. 거꾸로 학습을 기초한 수업

Bransford et al(2000)이 제시한 학습 환경의 네 가지 관점, 즉 학습자 중심, 지식 중심, 평가 중심 환경을 공동체 중심 환경에 기초한 학습 환경을 본 연구의 학습 환경을 바탕으로 설계하기 위해선 실행 가능한 표현 기반 학습 환경의 장점을 극대화할 수 있는 통일된 수업 형태가 필요하다. 이를 위해서 본 연구에서 제시하는 수업 형태는 웹 기반 학습 환경의 발달과 더불어 최근 관심의 대상이 된 수업 형태인 거꾸로 교실(flipped learning)을 살펴본다.

Bergmann & Sams(2012)는 거꾸로 교실이란 기본적이고 핵심적인 교과내용을 교사가 제작한 동영상을 통해 학생들이 수업 전에 미리 보고 오게 하고 수업시간에는 질의·응답이나 토론, 또래학습, 팀별 활동 등 학생 중심 학습으로 바꿈으로써 기존의 수업형식을 뒤집은 것이라고 하였다(이민경, 2014 재인용). 거꾸로 교실은 특정한 교수 방법이 아니라 교실 수업에 접근하는 새로운 인식 체계 또는 사고 체계, 즉 패러다임이다.

거꾸로 교실은 학생의 배움이 중심이 되도록 전통적 수업 패러다임을 완전히 뒤집어서 다양한 학생 개개인이 자신의 학습 능력, 방법, 속도에 맞추어 스스로 배울 수 있도록 접근하는 새로운 '패러다임'이다(박상준, 2015).

<표 Ⅱ-3> 수업 패러다임의 전환(박상준, 2015)

전통적 수업 패러다임	거꾸로 교실 패러다임
○ 교사 중심의 수업(교사 주도의 획일적 강의 → 학생의 수동적 학습)	○ 학생 중심의 학습(교사의 학습 지원 → 학생의 자기 주도적 학습 및 능동적 ·자율적 학습)
○ 교사, 수업의 전달자 또는 통제자 ○ 학생, 수동적 학습자	○ 교사, 수업의 안내자 또는 학습의 친구 ○ 학생, 자기 학습의 통제권 행사
○ 지식의 전달 및 이해	○ 지식의 활용 및 고차적 사고력 신장
○ 강의식 수업 또는 직접 교수법 ○ 중간층 학생 대상 획일적 수업	○ 개별학습/ 개별 보충 학습/ 자기 속도 맞춤 학습 ○ 탐구, 보충학습 등 다양한 활동의 비동시적 수행
○ 개인별 학습 속도의 조절 곤란	○ 개인별 학습 속도의 조절 가능
○ 대집단 학습	○ 소집단 학습/ 개별 학습

Bergmann & Sams(2012)는 이러한 패러다임의 구체적인 교실 모형으로 두 가지를 제시한다. 하나는 모든 학생이 집에서 '똑같은' 수업 비디오를 본 후에, 교실 수업에서 '동일한' 과제나 실험을 똑같이 수행하는 방식인 '거꾸로' 교실 기본 모형(a regular flipped model)이다. 하지만 이러한 모형은 모든 학생이 똑같은 내용의 수업 비디오를 시청하고, 교실에서도 '동일한' 과제를 부여받고, '똑같은 방법과 속도'에 맞추어 '동일한' 활동을 수행했기 때문에, 학생의 수준에 맞는 배움이 실질적으로 일어나지 못한다(박상준, 2015).

<표 Ⅱ-4> 거꾸로 교실과 거꾸로 완전 교실의 비교 (박상준, 2015)

<table>
<tr><th>구 분</th><th>거꾸로 교실 기본 모형</th><th>거꾸로 완전 교실 모형</th></tr>
<tr><td>공통점</td><td colspan="2">○ 모든 학생에게 동일한 학습목표와 내용이 제시된다.
○ 학습 활동의 과정은 유사하다(교실 밖 예습 → 질의·응답 → 모둠 활동 → 평가)
○ 모둠에서는 학생들은 서로 협력하여 과제를 완성한다.
○ 교사는 교실을 순회하며 지도한다.</td></tr>
<tr><td>수업 자료</td><td>○ 하나의 비디오 제공 : 학생에게 똑같은 비디오 한 가지만 제공한다.
○ 같은 비디오의 시청 : 학생은 비디오를 같은 날 동일하게 시청한다.</td><td>○ 다양한 수업 자료의 제공 : 학생에게 비디오, 교재, 과제물 등 수업자료를 다양하게 제공한다.
○ 자료의 선택권 : 학생은 자신의 학습 능력과 속도에 맞는 수업자료를 선택해 학습할 수 있다.</td></tr>
<tr><td>교실 활동</td><td>○ 동일한 활동 과제의 부여 : 교실 수업에서 모든 학생에게 동일한 활동 과제가 부여된다.
○ 동시적인 활동 수행 : 모든 학생이 똑같은 학습 속도로 활동한다.</td><td>○ 다양한 활동 과제 : 학생의 수준과 능력에 따라 '서로 다른'활동 과제를 부여한다.
○ 비동시적인 활동 수행 : 각 학생은 이해도와 학습 능력과 속도에 맞추어 서로 다른 활동을 비동시적으로 수행한다.
○ 개인 맞춤형 보충 학습 : 내용을 이해 못한 학생들에게는 개별적으로 보충학습의 기회를 주고, 다시 설명해 준다.</td></tr>
<tr><td>평 가</td><td>○ 동일한 평가 방식 : 모든 학생이 동일한 시험문제로 동시에 똑같이 평가를 받는다.
○ 한 번의 시험 기회 : 모든 학생이 같은 날 똑같은 총괄평가 시험을 친다.</td><td>○ 다양한 평가 : 학습목표의 달성도를 측정하기 위해 평가는 다양한 방식으로 실시된다.
○ 평가방식의 선택 허용 : 다양한 평가 방식 중에서 학생이 선택하여 총괄평가를 받을 수 있다.
○ 재시험 : 학생은 자기 능력에 따라 서로 다른 버전의 시험을 치고, 보충학습을 통해 재시험을 칠 수 있다.</td></tr>
</table>

이에 Bergmann & Sam(2012)은 Bloom의 완전 학습 모형, 즉 모든 학생이 각자 '자신의 학습 속도에 맞추어' 학습 목표에 도달할 수 있다는 가정하의 모형에 이 거꾸로 교실을 결합한 '거꾸로 완전 교실 모형(flipped-mastery classroom model)'을 제안한다. 이 모형의 기본 전제는 학습자의 개별적 능력과 속도에 맞추어 모든 자료와 활동 그리고 평가를

다양하게 제시해야 한다는 것이다. 이러한 방식은 수업시간에 학생들이 자신의 학습 능력과 속도에 맞는 다양한 활동을 서로 다르게 수행한다. 즉, 어떤 학생은 수업 비디오를 보면서 다시 공부하고, 어떤 학생은 실험이나 탐구 활동을 하고, 다른 학생은 모둠에서 활동하거나 컴퓨터로 형성평가 시험을 치기도 한다.

이러한 패러다임의 생성은 위에서 언급한 Bransford et al(2000)의 네 가지 학습 과학의 관점과도 일치된다. 즉, 이 패러다임의 핵심은 교실에서 진행되는 교사 중심의 수업에서 학습자 중심 학습으로의 전환을 꾀하고 있다는 점이다. 이와 더불어 단순한 지식의 습득이 아닌 이를 이용한 다양한 활용과 현상으로의 적용을 그 목적으로 한다. 그렇기 때문에 지식 중심 환경이다.

교육적 테크놀로지는 거꾸로 교실을 구성하는 핵심적인 요소이다(이민경, 2014). Bergmann & Sam(2012)의 기본적인 거꾸로 교실 모형도 테크놀로지 기반 환경이나 동영상 등을 이용한 형태이다. 이는 기본적으로 즉각적인 피드백이 가능한 환경임과 동시에 교실 수업에서의 평가의 역할을 좀 더 강조할 수 있는 환경을 기초로 한다. 또한 테크놀로지의 풍부한 의사소통 능력 및 교실 환경 내의 협동 학습이 가능하게 하는 이 패러다임은 공동체 중심 학습 환경의 원칙에도 부합한다.

정리하면 거꾸로 교실은 현재 획일적인 교실 환경 패러다임에서는 구현할 수 없는 진정한 학습자 중심의 학습 환경을 전제로 하는 패러다임이다. 테크놀로지의 힘을 빌려 교실 내에서 행해지는 학습을 학습자 스스로 하게 한 후 교실 환경에서 이러한 구성 활동이 좀 더 풍부하게 열매맺도록 하는 다양한 정리 활동과 평가 활동 및 토론 학습을 진행하게 함으로써 Bransford et al(2000)에 부합하는 수업 형태가 가능해 질 수 있게 된 것이다.

Ⅲ. 실행 가능한 표현 기반 이항 분포 탐구 수업 지도안

이 장에서는 이항 분포라는 확률 구조에 대한 구성 활동을 설계하고 이를 통해 제시할 수 있는 수업 지도안을 고찰한다. 이러한 설계는 실행 가능한 표현이라는 도구를 통해 확률 실험을 하고 서로 의사소통하는 과정을 통해 학교 현장의 학습자에게도 유의미한 확률 코딩 기반 학습 환경을 제시하는 것을 목표로 한다.

본 연구는 총 두 번에 거친 설계 과정을 통해 완성되었다. 먼저 중학생을 대상으로 한 이항 분포 탐구 프로그램을 설계한 후 이 환경에서 보완해야 할 점을 개선하여 초등학생 대상 이항 분포 탐구 프로그램을 재차 설계하여 적용해 보았다.

이 때 초등학생 대상 이항 분포 탐구 프로그램에서 제시하는 실행 가능한 표현은 이항 분포의 현상을 간단한 '몸짓 언어'로 모델링 할 수 잇도록 설계되었다. 이에 다양한 현상을 학습자에게 모델링의 대상으로 제공할 수 있으며 이에 따른 다양한 사고 실험을 진행할 수 있다.

이 장에서는 이러한 현상 과제를 바탕으로 한 수업 지도안을 제안한다. 그리고 이러한 학습을 유의미하게 진행할 수 있게 할 수업 형태로 '거꾸로 교실'의 패러다임에 맞춘 수업 형태를 살펴본다.

1. 이항 분포 탐구 프로그램 설계

앞서 살펴본 이론적 배경을 기초하여 이항 분포에 대한 구성 활동을 설계하고 이를 통해 실행 가능한 표현 기반 학습 환경의 효용성을 연구한다. 본 연구에서는 총 두 번에 거친 적용 연구를 진행되었다. 먼저 중학생을 대상으로 이항 분포 학습 환경을 설계하여 적용하였다. 그리고 이

환경의 부족한 점을 고찰한 후 이를 통해 초등학생을 대상으로 할 학습 환경에 필요할 실행 가능한 표현들을 설계하였다.

Constructionism 기반 학습 환경의 핵심은 학생들이 직접 자신의 생각을 실행 가능한 (executable expression)으로 구성해 보고 이를 자동적으로 에이전트에게 실행하게 하는 마이크로월드가 갖추어진 환경을 구축하는 것이다. 이에 본 프로그램의 설계를 위해선 이항 분포의 핵심 요소들을 학생들이 코딩할 수 있게 하는 실행식이 필요하였다. 이러한 실행식을 통해 이항 분포 현상을 모델링하고 이를 시뮬레이션 할 수 있는 학습 환경을 설계한다.

1.1. 중학생 대상 탐구 프로그램

중학생들을 대상으로 제시한 이항 분포 탐구 프로그램은 조합론(combinatorics)이라고 불리는 수학 분야에서 도로망 방법(block walking method)이라는 하나의 방법론에서 착안하였다. 이 방법은 경우의 수 뿐만 아니라 파스칼의 삼각형 혹은 이항 정리와 같은 다양한 수학적 분야를 스토리텔링 방법으로 제시하고 있다. 초기 확률 학습 환경은 위의 방법론이 중학교 학생들에게도 적용이 될 수 있는 스토리이며 이를 먼저 선행 지식으로 보유하고 있다면 랜덤 워크 모델을 제시했을 때 사고 실험 결과 분석 및 정당화가 좀 더 유의미하게 다가갈 것이라는 전제에서 시작한다. 이 절에서는 초기 확률 학습 환경의 이론적 배경이 도로망 방법에 대해 간단히 다루고 이를 바탕으로 설계된 Random Block Walking(이하 RBW)에 대하여 살펴보겠다.

1.1.1. 도로망 방법(block walking method)

조합론이란 유한한 집합에서의 대상들을 선택하고 배열하는 것을 포함하는 계산의 원리로 정의할 수 있을 것이다(English, 2005). 이 분야는

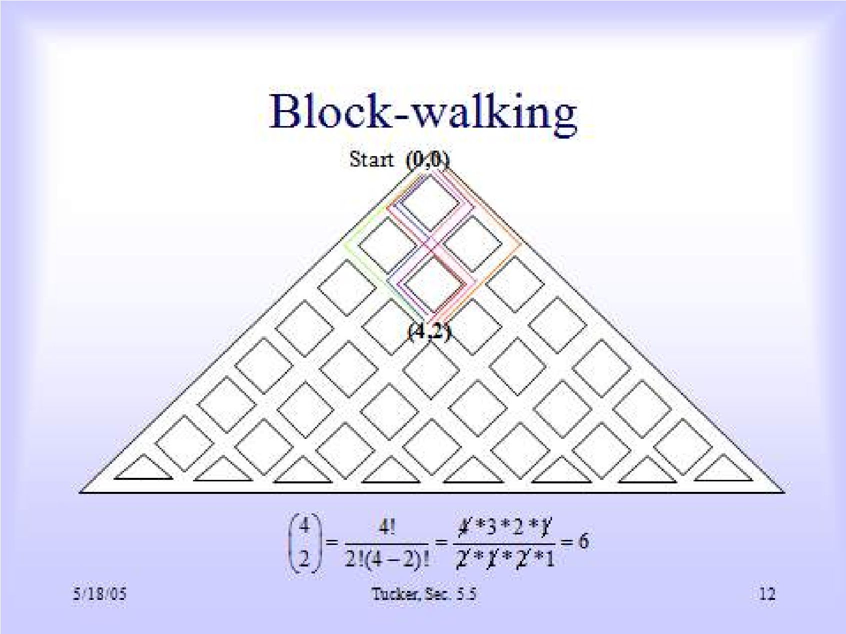
우리나라에서 제 7차 교육과정의 ‘이산수학’ 교과에서 심도 있게 다루어졌으나, 현행 교육과정에서는 이산수학 교과의 폐지로 인해, 그 비중이 많이 줄어든 상태이다. 하지만 조합론적 사고의 강력한 아이디어는 학교수학에서 조합론적 사고를 증진시켜야 하는 필요성을 대두시켰다. 수학교육자들은 오래 전부터 이산수학의 가치와 학교교육과정에서 조합론적 사고를 육성하는 가치를 인식하여 왔다(김서령 외 2인, 2007).

세기 문제는 그 문제의 특성상 단순한 계산적(computational)인 방식으로 유의미한 문제 해결 학습을 이룰 수 없다. 주어진 세기 문제의 본성에 의해 적절한 상황과 문제를 연결시킬 수 있는 능력이 바로 성공적인 학습자가 가져야 할 필수적인 관점이다(Lockwood, 2011). 즉, 세기 문제와 동형이면서도 학습자에게 익숙한 상황을 제공하되 이 동형 구조를 쉽게 파악할 수 있도록 상황을 잘 설계하여 학습자에게 제공해야만 조합론적 사고를 증진시킬 수 있다. 조합론에서 다루고 있는 문제들은 이야기적(narrative)인 요소를 보유하고 있고 컴퓨터 프로그래밍을 접목했을 때 해당 내용을 학습이 용이하게(learnable)하게 만들어 줄 수 있다는 특징이 있다.

이러한 조합론적 사고 모델과 더불어 조합론 분야에서 이러한 사고를 신장시킴과 동시에 이항 분포의 현상을 조합론적 논증(combinatorial proof) 방식으로 이야기하듯 학습할 수 있는 방법론인 도로망 방법(block walking method)을 제시하고 있다.

도로망 방법은 [그림 Ⅲ-2]와 같은 도로망에서 출발점에서 특정 지점까지 가는 경로의 수를 다루는 조합론적 논증이다. 출발점에서 특정지점까지 가는 경로의 수는 “출발점에서 n번 내려왔을 때, 그 중 r번 오른쪽 대각선으로 내려오는 지점을 선택하는 경우의 수”로 연결이 되며, 결국은 해당 경로의 수는 ‘조합(combination)’의 수, ${}_nC_r$라고 하는 경우의 수로 재해석된다. Tucker(2002)는 주어진 도로망을 움직이는 경로에 대한 특징을 수학적 구조로 재해석을 하여 다양한 공식들을 정당화하고 있는데 조합의 기본 성질부터 ‘이항 항등식(binomial identity)’ 그리고 ‘파스

칼의 삼각형(Pascal's triangle)' 등이 도출된다. 예를 들면 [그림 Ⅲ-2]에서 $(4,1)$지점까지 오는 경로의 수는 총 4가지인데 이는 $(4,3)$지점까지 오는 경로의 수와 일치한다. 그 이유는 '4번 내려왔을 때 그 중 한번만 오른쪽으로 내려오는 경로의 수'와 '4번 내려왔을 때 그 중 한번만 왼쪽으로 내려오는 경로의 수'가 둘 다 4가지 중 1가지를 선택하는 방법의 수인 ${}_4C_1$로 동일한 상황인데 전자가 $(4,1)$지점, 후자가 $(4,3)$지점이기 때문이다. 이를 재해석하면 '${}_4C_1 = {}_4C_3$'이라는 공식을 도출할 수 있다.



[그림 Ⅲ-1] 도로망 방법 (Block walking method)의 모델 (Tucker, 2002)

1.1.2. Random Block Walking(RBW)

Tucker(2002)가 제시한 도로망 방법은 본 연구에 취지에 좀 더 맞는 학습 환경을 설계하기 위해 세 가지의 개선점이 요망된다. 첫 번째는 해당

도로망의 지점에 해당하는 부분이 명확하지 않다. [그림 Ⅳ-10]을 보면 출발점에서 움직이는 도로에 시각적으로 초점을 맞추었으며 어느 부분이 지점을 나타내는 지에 대해서는 시각적으로 모호하다. 두 번째는 출발점에서 도로망을 움직이는 대상이 존재하지 않는다는 점이다. 학습자의 의도대로 출발점에 위치하여 해당 도로망을 직접 움직일 행위 대행자, 즉, 에이전트의 부재는 학습자가 행동 시뮬레이션을 할 수 있는 대상의 부재를 의미하기 때문에 자칫하면 도로망의 움직임과 학습자의 인지과정의 괴리를 불러일으킬 가능성이 있다. 마지막으로는 해당 경로를 표현해 줄 수 있는 문자로 된 표현 체계가 존재하지 않는다. 즉, 학생들이 해당 도로망에서 경로의 특징을 찾아보려고 해도 자신이 생각하고 있는 경로를 나타낼 수 있는 표상이 존재하지 않는다. 이는 학습자의 추상화 과정에 도움을 줄 수 있는 상징체계가 존재하지 않음을 의미한다.

<표 Ⅲ-1> 도로망 구성 프로그램의 black-box

번호	실행 가능한 표현	실행 가능한 표현의 해석	설계 의도
1	X = ‘L+[2], R+[2]’ do 4X	왼쪽 대각선 두 번, 오른쪽 대각선 두 번으로 총 네 번 아래로 내려오는 경로는 $(4,2)$지점에 항상 도착	${}_4C_2$
2	X = ‘L+[3], R+[1]’ do 4X X = ‘L+[1], R+[3]’ do 4X	$(4,1)$지점과 $(4,3)$지점으로 가는 경로의 수는 4번 내려가는 도중 한 번의 왼쪽을 선택하는 경우와 한 번의 오른쪽을 선택하는 경우이다.	${}_4C_1 = {}_4C_3$
3	X = ‘L, R’ do 4X	왼쪽, 오른쪽 둘 중 하나를 선택하여 총 네 번을 무작위로 선택하여 내려가게 되면 거북이가 4번째 가로줄에 있는 지점에 무작위로 도착하게 된다.	${}_4C_0 + {}_4C_1 + \cdots + {}_4C_4 = 2^4$

본 연구에서는 위의 세 가지의 개선점을 해결해 줄 수 있는 학습 환경을 JavaMAL 마이크로월드에서 찾고자 하였다. 즉, 거북이라는 에이전트

에게 해당 도로망의 지점을 마음껏 움직이게 하고 이를 통해 구성된 경로를 ‘가자’ 및 ‘돌자’라는 신체 동조적 명령어를 기반으로 한 기호 체계를 통해 추상화할 수 있도록 한 후 이를 자동적으로 실행하게 하여 수학적 구조를 올바르게 추상화 하고 자신의 생각을 반성해 볼 수 있는 학습 환경을 구성하고자 한다.

초기의 이항 분포 탐구 프로그램은 위의 도로망을 점으로 간단히 도식화 한 후에 에이전트의 움직임을 두 가지의 선택사항, 즉 도로망 방법에서 제시하고 있는 ‘왼쪽 대각선’ 과 ‘오른쪽 대각선’ 두 가지의 사항으로 한정하여 도로망을 움직일 수 있게 하는 환경을 제시하였다. 이는 약속 명령을 통해 각각 L과 R이라는 실행식으로 구현하였다. 이를 바탕으로 자신이 원하는 경로를 구성해 봄으로써 다양한 조합론적 논증이 가능할 수 있도록 설계하였다.

이 학습 환경에서 사용될 실행 가능한 표현들은 Tucker(2002)가 제시한 도로망 방법의 조합론적 논증을 시도하도록 암묵적으로 이끌 black-box 이다. 학생들이 치환 문자 및 린덴마이어 표현을 적용 명령 체계를 만들어보고 이를 실행했을 때 나타나는 경로들은 각각 설계자의 의도가 들어간 체계로 설계자는 이를 드러내지 않은 채 학습자가 직접 그 의미를 파악할 수 있도록 즉각적인 피드백을 마이크로월드 상에 구현해 낸다<표 Ⅲ-1>.

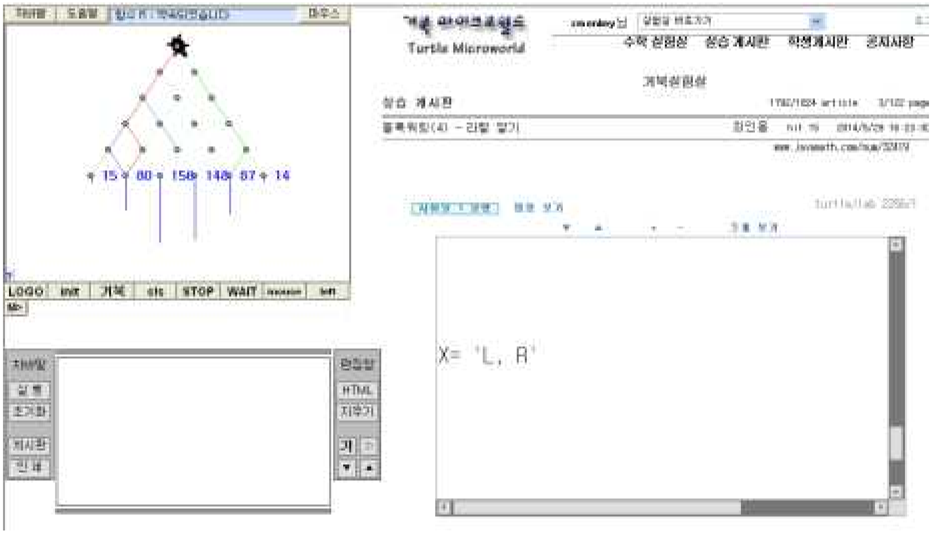
<표 Ⅲ-2> RBW에 도입된 실행 가능한 표현

번호	실행 가능한 표현	표현의 의미
1	약속 표 { n = xc+ 100 ;ary_n=ary_n + 1 ;tt blue; move 0,-0.1*ary_n }	최종 종착지에 도착한 경로의 횟수를 도수분포표로 만드시오.
2	반복 500 {do ([##random])5X 표 ([0#25])}	도로망 프로그램에 구현된 경로 명령어를 500번 반복 실행하시오.

이러한 도로망 방법 탐구 프로그램 환경에서 학습자가 구성한 경우의 수 활동을 좀 더 발전시켜 확률적 상황에 대한 사고 실험이 가능할 수

있도록 확장할 수 있는 아이디어를 적용하여 Random Block Walking(이하 RBW)을 설계하였다.

기존의 도로망 방법 탐구 프로그램에 랜덤 워크의 취지를 반영하기 위해, 즉 무작위로 표현되는 경로의 분배 상황을 나타내 주고 종착지에 도착하는 경로의 개수를 통해 확률적 상황을 학생 스스로 구성해 볼 수 있는 환경을 설계하기 위해 두 가지 명령 체계를 포함시켜야 한다. 하나는 해당 거북이가 실행 가능한 표현을 반복적으로 실행하게 하여 해당 경로의 분포를 파악하도록 하는 체계, 또 다른 하나는 이 경로들의 도착하는 종착지의 횟수를 표현하게 하여 종착지에 도착하는 경로의 수를 가지고 확률적 상황을 탐구할 수 있게 하는 체계이다. JavaMAL 마이크로월드 상에서는 이 두 요소가 모두 가능한 실행 가능한 표현이 존재한다. 즉, 거북이가 경로를 만드는 작업을 반복적으로 실행할 수 있도록 '반복' 명령을 도입하여 학생들이 추상화한 실행 가능한 표현을 반복하도록 하였으며, 종착지에 거북이의 도착 횟수를 학생들이 탐구할 수 있도록 도수분포형식의 막대그래프를 생성하는 '표'라는 명령을 도입하였다<표 Ⅲ-2>.



[그림 Ⅲ-2] RBW 학습 환경 프로그램

RBW 학습 환경의 목표는 학생들이 도로망 방법 탐구 프로그램에서 얻은 경로에 대한 시뮬레이션을 그대로 확률 상황에 적용할 수 있도록 하는 것이다. 따라서 도로망 방법 탐구 프로그램에서 사용했던 마이크로월드 상의 도로망을 그대로 유지하여 종전의 경험이 RBW 프로그램에도 영향을 줄 수 있도록 설계하였다. 또한 학생들이 [그림 Ⅲ-3]에 표시된 확률식의 확률을 다양하게 바꾸어 봄으로써, 다양한 확률상황에 대해 적용할 수 있도록 하였다.

1.1.3. 중학생 대상 학습 환경의 보완해야 할 점

중학생 대상 이항 분포 탐구 환경인 도로망 탐구 프로그램과 RBW 모델을 직접 적용해 봄으로써 본 연구에서는 이 환경에 대해 보완해야 할 점을 정하였다.

먼저 해당 학습 환경은 치환문자 X와 실행 명령 do를 제외하고는 학생들이 실질적으로 다룰 수 있는 실행식이 존재하지 않았다. 즉, 해당 경로의 두 가지 선택사항에 대한 학습자의 구성 활동은 가능하나 그 밖에 사항에 대해서는 이미 만들어진(ready made)된 환경이라는 것이다. 게다가 해당 현상의 경우의 수를 파악할 수 있는 도로망 탐구 프로그램과 현상의 확률적 사고를 신장시킬 RBW 환경이 서로 다른 게시판에 만들어져 있는 형태로 제시되어 있기 때문에 두 가지의 수학적 구조 사이의 괴리가 생길 수 있다. 이에 본 연구의 취지에 부합하려면 좀 더 실행식에 초점을 맞추어 이에 대한 보완이 필요하였으며 경우의 수 상황이 그대로 확률 상황과 연결시킬 수 있도록 학습자가 직접 설계할 수 있는 재료를 제시하여야 한다. 이에 '린덴마이어 확률 표현', '도수분포준비'와 '반복' 그리고 '값'이라는 실행식을 기초로 하여 확률 학습 환경을 직접 학습자가 디자인 할 수 있도록 보완하였다. 이 실행식을 기초로 하여 학생들이 구성 활동을 하고 학습자 스스로 새롭게 해당 학습 환경을 새롭게 바꾸어 보려는 욕구에 따라 새로운 실행식을 학습자에게 재료로 추가해 주는

방식으로 확률 학습 환경을 보완하고자 하였다.

두 번째 보완점은 초기의 이항 분포 탐구 프로그램은 도로망 방법에서 착안한 경로를 선택하였기 때문에 파스칼의 삼각형을 기초로 한 도로망 내에서 거북 경로가 생성이 되었기 때문에 경유지가 고정화 되어 있다는 점이었다. 이는 에이전트가 출발 지점에서 아래로 내려오는 형태로 경로를 만들게 되며 경유지는 파스칼의 삼각형 모양에서 고정이 된 채 진행이 되어야만 했다. '랜덤 워크 모델'이라는 시각적 모델에서 아이디어를 착안한 본 확률 학습 환경에서는 '오른쪽 대각선', '왼쪽 대각선'이라는 두 가지 선택사항 보다는 '위', '아래'라고 하는 선택 사항이 좀 더 자연스럽다. 동전의 앞, 뒷면과 같이 좀 더 어린 학생들에게도 자연스럽게 다가갈 수 있는 거북 경로를 생성하기 위해 출발점을 왼쪽으로 놓고 오른쪽으로 가면서 '위', '아래'라는 선택 사항으로 하여 학습 환경을 수정하였다. 이는 Pearson(1905)이 최초로 제시한 '랜덤 워크 모델'과도 일치하는 모형으로 경제학이나 주가 그래프의 모형과 같은 형태를 취하면서 좀 더 자연스럽게 학생들에게 다가갈 수 있는 형태이다. 이와 같은 도로망의 변경으로 기존의 조합론적 논증을 이용한 확률 학습은 불가능하게 되었지만 초등학생을 대상으로 도로망 방법을 적용하기에는 난이도가 높다는 점을 감안하여 수정된 도로망을 초등학생에게 제시하였다.

마지막으로 도로망 방법에서 쓰이는 도로망으로 거북 경로를 생성하면 경로의 길이 자체가 무리수를 기초로 하게 된다. 이는 경로의 길이나 혹은 중간 경유지를 학습자가 다르게 설계를 하려고 했을 때 어려움이 따르게 된다. 즉, 해당 도로망이 고정이 된 상태에서 구성 활동이 진행될 수밖에 없다. 이를 보완하기 위해서 경로 길이 자체를 무리수를 기초로 하지 않은 자연수를 기초로 하는 평행 이동의 개념으로써 구성할 수 있게 수정하였다. 이는 move명령이 그 역할을 해 주었다. 왼쪽에서 오른쪽으로 움직이는 도로망에서 두 가지의 선택사항, 즉, 'a(above)'와 'b(below)'를 'move 10, 10', 'move 10, -10'으로 약속하였다. 초등학생 대상 확률 학습 환경은 격자점이 제시되어 있으며 한 칸의 길이를 10으로 하

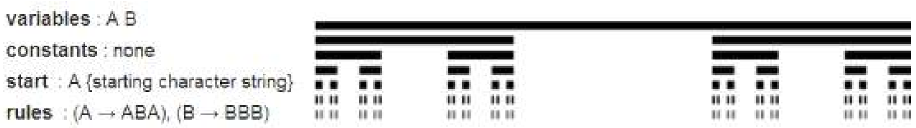
여 구조화되어있다. 위의 약속 명령은 해당 경로를 길이가 자연수인 평행 이동 기반 경로로 하여 학습자가 원한다면 해당 평행이동의 길이를 바꾸어 경로의 모양을 얼마든지 새롭게 설계할 수 있도록 보완하였다.

1.2. 초등학생 대상 탐구 프로그램

중학생 대상 이항 분포 탐구 프로그램의 몇 가지 보완점을 바탕으로 초등학생 대상 확률 학습 환경을 설계하기 위해선 기초적인 실행 가능한 표현을 바탕으로 좀 더 적극적이고 실천적인 구성 활동 설계가 필요하였다.

이 절에서는 초등학생 대상 확률 학습 환경에 기초가 된 세 가지의 실행 가능한 표현을 소개하고 이 실행식의 이론적 배경과 이를 통해 학습자에게 제시된 기본 확률 학습 환경을 살펴본다.

1.2.1. 린덴마이어 확률 표현

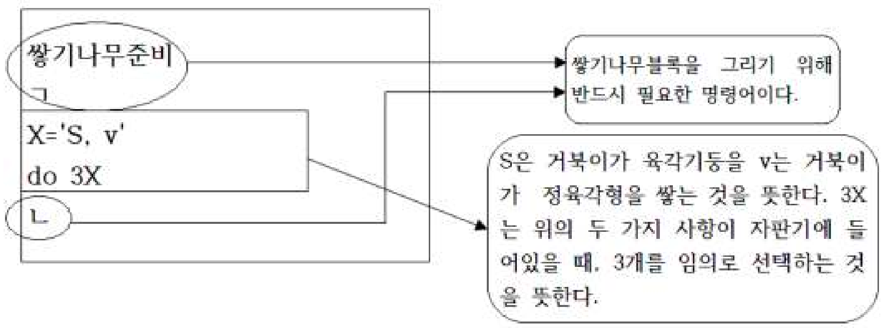


[그림 Ⅲ-3] L-system을 이용한 칸토어 집합

첫 번째 실행식인 린덴마이어 확률 표현은 헝가리의 생물학자인 린덴마이어(Arstid Lindenmayer, 1925-1985)가 제안한 Lindenmayer system(L-system)에서 착안하였다. Lindenmayer는 이 시스템을 이용해 초기 조건과 간단한 규칙을 통해 복잡한 식물의 생장 과정을 모델링하고 시뮬레이션 하고자 하였다(박찬민, 2014). 이 시스템의 기본 요소는 변수(variable), 초기 조건(axiom), 규칙(rule)의 세 가지로 구성되어 있다. 이

세 가지의 요소가 만들어 내는 단계별 생장 패턴은 생물학에서도 생장의 모델링을 할 수 있는 이점이 있을 뿐만 아니라 하나의 수학적 형식 체계로서 프랙털과 같은 다양한 수학적 구조를 표현할 수 있는 체계로 자리 잡고 있다.

예를 들어 [그림 Ⅲ-3]은 L-system을 이용하여 칸토어 집합(Cantor dust)을 표현한 것이다. 변수 A와 B 두 가지만을 가지고 규칙을 [그림 Ⅲ-4] 과 같이 부여한다면 해당 단계의 문자열은 칸토어 집합의 단계와 일치하는 체계를 가지게 된다. 이 때 해당 문자열의 치환 규칙이 항상 똑같이 적용되는 경우를 '결정론적' L-system 이라고 하고 만약 해당 치환 규칙이 확률적으로 다르게 적용되는 규칙을 보유한다면 해당 L-system을 '확률론적' 이라고 불린다. 즉 L-system은 그 규칙이 어떻게 정해지느냐에 따라 그 생장 패턴을 확률적으로 조절할 수 있으며 이는 확률 교육에서 새로운 아이디어를 제시할 수 있는 원동력이 될 수 있는 것이다.

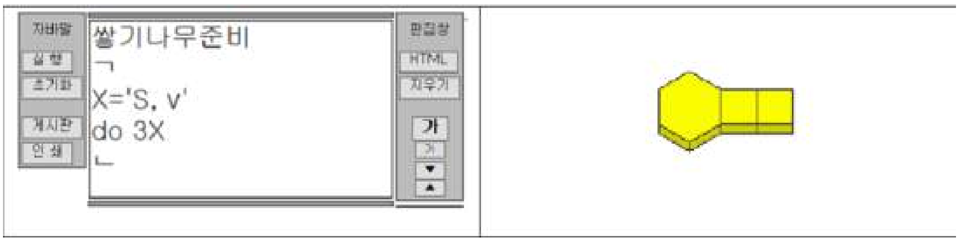


명령어	뜻
쌓기나무준비 ㄱ .... ㄴ	쌓기나무가 나타날 수 있는 기본 설정을 한다. ㄱ 과 ㄴ 사이의 명령을 실행한다.
X= 'S, v'	S와 v를 임의로 선택하는 랜덤상자 X
do 3X	X를 3번 실행한다.

[그림 Ⅲ-4] 쌓기 나무 마이크로월드 기반 L-system의 적용

본 프로그램의 시작을 위해선 이항 분포의 핵심 아이디어, 즉 해당 사건이 발생하느냐 하지 않느냐에 대한 두 가지의 사항이 확률적으로 다르게 발생시킬 실행식이 필요하였다. L-system에 아이디어를 이용하면 이러한 규칙성은 문자 X을 두 가지의 명령체계를 확률적으로 발생시킬 수 있는 치환문자로 설정을 한 뒤에 이를 원하는 단계만큼 반복해서 실행을 해 주면 된다.

[그림 Ⅲ-4]와 같이 쌓기 나무 마이크로월드에 위와 같은 실행식을 실행하면 치환 문자 X는 육각기둥(S)과 정육면체 (v) 둘 중 하나를 동등한 확률로 무작위로 실행하게 되며 do 3X를 통해 이를 세 번 연속으로 실행하게 되면 총 8가지의 경우가 실행 할 때마다 동등한 확률로 나타나게 된다. 만약 이항 분포 과제에서 한 사건의 발생 유무를 이 두 가지의 쌓기 나무로 모델링이 가능하다면 이 실행식은 현상의 모든 경우의 수를 하나의 실행 가능한 표현으로 모델링하게 해 줄 것이다. 이러한 실행 가능한 표현을 본문에서는 '린덴마이어 확률 표현'이라고 일컫겠다.



[그림 Ⅲ-5] 쌓기 나무 마이크로월드 기반 린덴마이어 확률 표현

본 연구의 탐구 프로그램을 설계하기 위해선 위의 L-system을 이용한 실행 가능한 표현을 거북이의 움직임으로 모델링하여 현상을 거북이의 경로 상황으로 코딩할 수 있도록 하여야 했다. 이에 해당 치환 문자 X의 두 가지의 선택 사항을 거북이가 경로를 생성해 가는 과정에서의 선택 사항으로 설계하였다. 아래의 [그림 Ⅲ-5]에서 '도수분포준비'라는 명령어가 기초가 되는 실행식에서는 a는 위로, b는 아래로 한 칸 움직이는

명령으로 약속이 되어 있게 된다. 이를 치환 문자 X에 넣어주면 거북이는 두 가지의 선택 사항을 확률적으로 연속으로 선택하게 하여 무작위의 경로를 생성하게 한다. 이를 통해 해당 거북이의 경로의 형태 그리고 거북이의 도착지가 학생들의 사고 대상이 되어 현상을 체화할 수 있도록 설계하고자 하였다. 이 '도수분포준비' 환경에 대해서는 다음 절에서 자세히 다룬다.

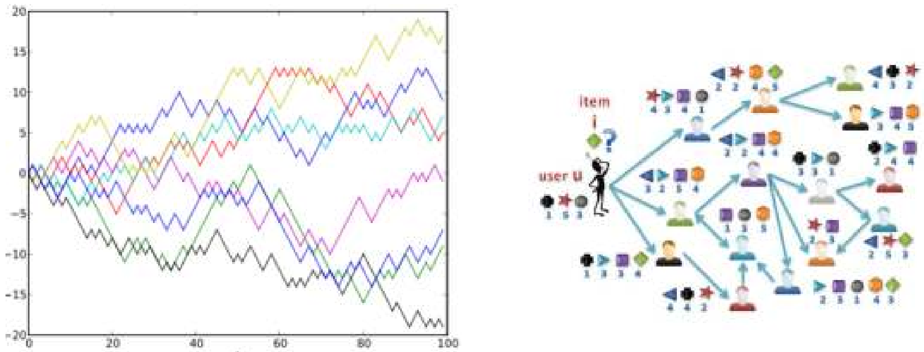
'린덴마이어 확률 표현'은 현상의 발생 유무를 실행 가능한 표현으로 모델링하는 하나의 메타 퍼이다. 이 코딩 방식은 두 가지의 메타퍼를 구현 가능하게 해준다. 즉, 두 가지의 선택사항이 버튼을 누를 때마다 무작위로 한 가지가 구현이 되어 나오는 '자판기 메타퍼'의 의미를 지니기도 하지만 주머니 안에 두 가지 재료를 원하는 만큼 집어넣어 이를 하나씩 꺼내는 '주머니 메타퍼'가 가능하다. 예를 들어 X = 'a+++, b++'라고 하면 위로 가는 명령은 총 3번까지 아래로 가는 명령은 두 번 까지만 가능하다. 즉, 주머니 안에 위로 가는 공이 3개 아래로 가는 공이 2개 있는 상황에서 하나씩 꺼내는 '주머니 메타퍼'로써 종전의 '자판기 메타퍼'인 X = 'a, b'와는 다른 의미를 지닌다. 실행되는 경로의 모습 역시 다른 모습이 될 것이며 확률적으로도 다른 의미를 지닌다. '린덴마이어 확률 표현'은 치환 문자 X의 치환 형태를 얼마든지 바꾸어 줌으로써 여러 확률적 개념을 다룰 수 있다는 장점이 있다.

1.2.2. 도수분포준비 및 반복

이항 분포의 핵심 아이디어, 즉 한 사건의 발생 유무가 확률적으로 나타나는 현상을 내가 원하는 횟수만큼 진행하여 해당 사건의 발생 횟수를 사고의 대상으로 끌어오기 위해서는 위의 린덴마이어 확률 표현을 좀 더 보완할 마이크로월드 상의 하나의 환경이 필요하였다. 즉, 앞 절에서 제시한 린덴마이어 확률 표현은 이항 분포 과제의 모든 경우의 수를 하나씩 확률적으로 실행함으로써 모든 경우의 수를 파악할 수 있게는 해 주

지만 이항 분포의 사고의 대상, 즉 해당 사건의 발생 횟수를 시각적으로 한 번에 보여주고 있지는 않다. 이를 위해선 이항 분포와 관련된 모든 현상을 하나의 현상으로 모델링하여 사고의 대상을 ‘사건의 발생 횟수’로 수렴될 수 있도록 하는 학습 환경이 동시에 제공이 되어야 한다.

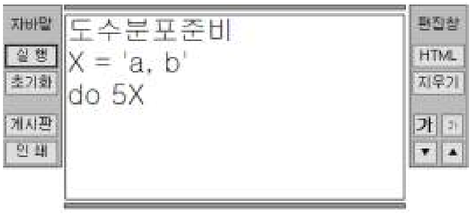
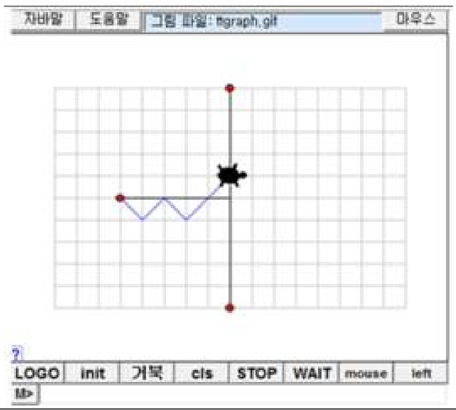
이와 같은 아이디어를 본 연구에서는 ‘랜덤 워크(random walk)’에서 착안하였다. 랜덤워크란 무작위 단계의 일련으로 이루어진 경로를 수학적으로 형식화한 수학적 표현으로 생물의 생장이나 물리적 상황을 모델링 할 뿐만 아니라 경제학에서도 널리 쓰이는 방식이다(Pearson, 1905). 랜덤 워크 모델은 위, 아래라는 두 가지의 선택사항과 그 경로의 길이를 무작위로 선택하게 함으로써 다양한 현상을 모델링 할 수 있다. 이러한 랜덤 워크 모델은 우리가 예측하고 있는 것에 대한 신뢰도를 부여할 뿐만 아니라 이 결과를 설명하고 정당화 할 수 있게 한다(Jamali, M., & Ester, M., 2009). 현상을 하나의 랜덤 워크 모델로 모델링 할 수 있는 적절한 징검다리와 코딩 체계만 있다면 이 모델은 무작위의 상황에 대한 결과를 예측해보고 이를 증명할 수 있는 하나의 사고 실험 활동으로서 역할을 할 수 있다.



[그림 Ⅲ-6] 랜덤 워크 모델의 예

위의 랜덤 워크 모델을 접목하여 해당 확률 현상의 사고 대상을 실제 이항 분포에서 확률 변수로 쓰이고 있는 ‘사건의 횟수’로 돌릴 수 있는 확률 학습 환경을 설계하기 위하여 두 가지의 실행식을 구성하였다. 하

나는 ‘도수분포준비’라는 실행식이고 다른 하나는 ‘반복’이라는 명령이다.

	
명령창	결과창

[그림 Ⅲ-7] 도수분포준비 실행식 환경

먼저 ‘반복’ 명령부터 살펴보겠다. ‘반복’이라는 명령은 내가 구성한 실행식을 원하는 만큼 반복해서 실행시켜 준다. 즉, 학습자가 구성한 ‘린덴마이어 확률 표현’ 기반 거북 경로를 내가 원하는 만큼 반복하여 경로를 구성하게 해 준다. 이 명령을 통해 해당 경로를 하나씩 시각화 할 수밖에 없었던 환경의 한계점을 극복하게 해준다. 즉 무작위의 경로를 원하는 만큼 하나의 마이크로월드 안에 반복하게 해 줌으로써 다양한 경우의 수를 한 눈에 파악할 수 있게 해 준다. JavaMAL 마이크로월드 안의 에이전트가 하나밖에 있지 않다는 점을 극복하여 NetLogo와 같이 한꺼번에 많은 에이전트들이 확률적으로 움직이는 것과 같은 모습을 구현한다. ‘도수분포준비’는 여러 가지 명령이 약속이 되어 있는 실행식이다. 먼저 해당 에이전트가 출발점에서 격자 위를 움직이는 모습을 구현한다. 해당 격자는 한 칸이 10이라는 길이로 기억이 되어 있는 격자점이다. 이 격자점 내에서 해당 에이전트는 두 가지의 선택 사항을 가지고 경로를 생성해 내는데 이는 a(above)와 b(below)이다. 즉 a는 앞으로 가면서 위로 올라가는 경로를 생각하며 이는 move 10, 10 즉, 앞으로 한 칸, 위로 한 칸이라는 명령이 약속되어 있는 것이다. 반대로 b는 move 10, -10 즉,

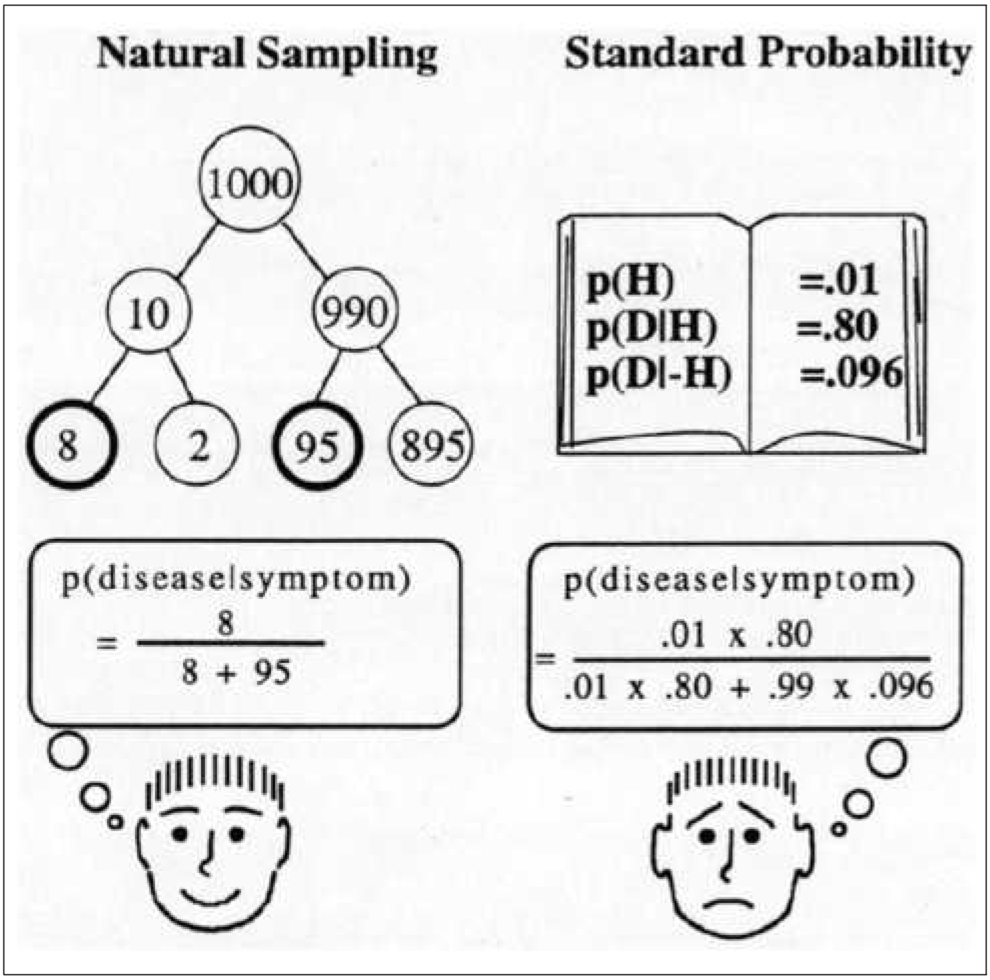
앞으로 한 칸, 아래로 한 칸이라는 명령이 약속되어 있다. 그리고 해당 격자에는 y축이 출발점에서 총 5칸 오른쪽으로 그어져 있는데 이는 거북이가 총 5번 움직였을 때의 도착지에 해당되는 기준점이 된다.

이 명령의 가장 큰 특징은 해당 거북 경로의 도착지의 도착 횟수를 누적도수로 에이전트가 기억할 수 있도록 하는 것이다. 거북 경로 하나하나를 해당 이항 분포 현상의 경우의 수라고 한다면 이 거북 경로의 도착지는 에이전트가 움직인 횟수 중에서 총 몇 번을 위로 움직였는지, 다시 말하면 해당 시행 횟수에서 몇 번 사건이 발생했는지에 대한 횟수를 의미한다. 경로를 통해 경우의 수를 확인함과 동시에 이항 분포의 확률 변수를 동시에 시각적으로 보여주는 환경 설계가 가능해 진 것이다. 그 확률적인 개념은 반복 명령을 통해 반복된 무작위 경로의 도착 횟수를 에이전트가 기억하게 함으로써 가능해진다.

1.2.3. 자연 빈도수(Natural frequencies)

마지막 실행식은 도수분포준비 실행식을 통해 무작위의 경로의 도착 누적 도수를 에이전트가 기억하고 있는 상황에서 이를 시각적으로 표현해 줄 수 있는 명령이다. 많은 확률 교육 연구에서 학생들이 조건부 확률과 같은 확률 알고리즘을 어려워하는 이유로 해당 확률을 그 확률 값을 직접 공식에 대입하여 계산하게 하는 과정 자체가 학습자에게 어려울 수 있다는 점을 지적하고 이를 비율이 아닌 자연수의 값으로 계산을 하는 것이 이를 극복할 수 있는 방안이 될 수 있음을 지적하고 있다. Gigerenzer et al(1995)은 자연 빈도수(natural frequencies)를 이용하여 확률 문제를 다루는 것이 기존의 사건의 확률을 토대로 계산을 하는 방식보다 더욱 간단하게 문제 상황을 해결할 수 있음을 주장한다. 그는 베이즈 공식을 예로 들어 베이즈 공식 자체에 확률 비율을 집어넣어 확률 문제를 해결하는 학생을 자연 빈도수를 이용하여 해결하는 학생과 비교하는 연구를 진행하였다. 그 결과 자연 빈도수를 이용하여 공식을 연습

한 학생이 그렇지 않는 학생에 비해서 장기적으로 과제를 능숙하게 해결하는 모습을 보였다고 밝히고 있다. 한 사건의 확률 대신 그 사건의 빈도수를, 절대적 위험 대신 상대적 위험을, 조건부 확률 대신 자연 빈도수를 가지고 확률을 파악하는 것이 좀 더 학생들에게는 유의미하게 확률적 사고를 하게 할 수 있는 원동력이 된다(Gigerenzer et al, 2007).



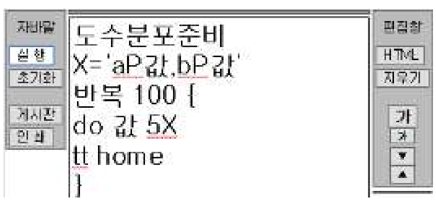
[그림 Ⅲ-8] 자연 빈도수를 통한 확률적 사고 (Gigerenzer et al, 1995)

해당 누적 빈도수를 시각화할 수 있는 방법은 여러 가지가 있다. 즉, 도수분포표처럼 막대그래프와 같이 표로 표시하는 방법, 해당 도착지의 확

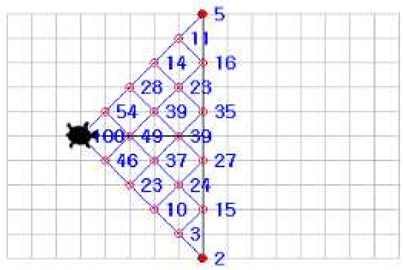
률을 계산하여 옆에 표시하는 방법 등이 있다. 본 연구에서 선택한 방법은 도착지의 누적 빈도수를 자연수로 표시하여 도착지 옆에 라벨처럼 부착하는 형태를 취했다. 이를 통해 위의 아이디어처럼 학생들이 직접 자연 빈도수를 이용하여 확률적 사고를 할 수 있도록 유도하여 좀 더 올바른 학습이 가능하도록 설계하였다. 이러한 역할을 '값'이라는 실행식을 통해 구현하였다.

이 '값'이라는 실행식은 해당 실행식의 위치에 따라 누적 빈도수가 도착지뿐만 아니라 경로의 중간 경유지에도 그 자연 빈도수를 표시할 수 있도록 설계되어 있다. 이를 통해 에이전트가 경로의 경유지를 몇 번 경유했는가를 자연 빈도수를 통해 파악하고 이를 통해 해당 사건이 진행되는 중간 과정의 의미를 학습할 수 있도록 설계하였다.

'린덴마이어 확률 표현', '도수분포준비'와 '반복' 그리고 '값'이라는 명령을 통해 기본적인 이항 분포 탐구 프로그램을 설계하였다. 그리고 이를 기반으로 하여 더욱 더 다양한 확률 코딩이 가능할 수 있도록 실행식을 좀 더 보완하는 방식으로 하여 일련의 이항 분포 학습 환경을 구성하고자 하였다.



명령창



결과창

[그림 Ⅲ-9] 실행식 '값'을 통한 중간 경유지의 자연 빈도수

본 설계 프로그램은 거북이라는 대리인이 해당 지점들을 움직이는 경로 자체가 학생들의 구성 활동 속에서 시뮬레이션 되어 이를 통해 마이크로 월드에 표현된 현상을 파악할 수 있도록 제작된 '체화된 모델링

(embodied modeling)'이다. 체화된 모델링 접근이란 필수적으로 '대리인 기반 모델링(agent-based modeling)'으로 묘사될 수 있다(Soylu, 2013). 도로망 현상에 대리인의 움직임을 학생들이 체화했을 때 그 움직임에 대한 학습자의 체화된 경험이 발현된다면 이 도로망 현상에 대한 체화된 모델링은 가능해 질 수 있으며 이는 실행 가능한 표현으로써 나타나게 되는 일련의 현상, 즉 체화된 모델링은 이 프로그램의 설계의 기준이 된다.

2. 이항 분포 탐구를 위한 학습 환경

초등학생 대상 이항 분포 탐구 프로그램은 세 가지의 실행식 체계를 코딩 체계의 기본으로 하여 다양한 언어 체계를 학습자에게 제공함으로써 다양한 현상을 모델링하고 의사소통 할 수 있는 코딩 언어로 구성되어 있다. 본 연구에서 쓰인 이항 분포 탐구를 위한 실행 가능한 표현에 대해 재해석해 보고 이를 통해 기대하는 바를 고찰하는 것은 본 연구에서 제시하는 학습 환경을 통한 수업 지도안 제시에 필요한 과정일 것이다. 또한 이러한 실행 가능한 표현을 통해 실제 학교 현장에서도 적용해 볼 수 있는 확률 현상을 선정해 보고 이를 통해 본 학습 환경으로 구성할 수 있는 수업의 모습을 살펴본다.

2.1. 이항 분포 탐구를 위한 실행 가능한 표현

Noss & Holyes(1996)가 강조하는 점은 컴퓨터의 중재자로서의 역할이다. 즉, 학습자가 사고할 대상이 되는 문제 상황과 이를 표현할 수학적 언어 체계 사이의 중재자 역할을 컴퓨터라는 매개체를 통한 프로그래밍을 통해 가능하다는 점을 주장한다. 기존 수학적 언어 표현 바탕의 표현 체계는 학습자에게 주어진 언어 체계의 숨겨진 구조를 보는 눈을 제공하

지 않는다. 문제 해결을 위해 수학적 언어 체계로 표현을 하였다 하더라도 이 표현을 대한 적절한 상황에 재차 적용해보고 실험해보는 경험의 부재는 형식적 언어의 단점으로 지적되고 있는 바, 실행 가능한 표현은 이러한 점을 극복하게 해 준다. 실행 가능한 표현 자체가 가지고 있는 친숙한 언어 체계, 그리고 이를 실행에 옮김으로써 컴퓨터가 제시하는 하나의 메타퍼, 이 둘의 결합은 학습자의 수학적 의미가 행동에 옮겨지게 하는 중개자 역할로 학습자에게 유의미한 학습을 가능하게 할 것이다.

본 연구의 학습 환경 역시 이러한 점을 기초로 하여 설계되었다. 즉 실행식이라는 표현체계를 통해 이항분포의 핵심 사항을 친숙한 수학 언어 체계로 표현할 수 있는 도구를 제시하고, 이를 마이크로월드에서 시뮬레이션을 자동적으로 실행하게 함으로써 분포를 시각적으로 표현하게 하는 체계를 통해 상황을 분석할 수 있는 표현체계를 제공하고자 하였다. 즉, 본 프로그램에서 실행 가능한 표현은 학습자들이 상황을 모델링 할 수학적 언어의 표현이자 시뮬레이션을 통한 해당 분포를 분석함으로써 상황을 재해석할 수 있는 시각적 분포의 표현이라고 할 수 있다.

이항 분포 상황에 대한 모델링을 가능하게 할 '수학적 언어 체계'로 본 탐구 프로그램에서는 거북이의 움직임을 수식 기호로 표현할 '몸짓 언어'와 시뮬레이션을 구성할 순서도를 만들게 하는 '코딩 언어'로 구성하였다. 이항 분포 상황을 모델링하기 위해서 필요한 필수 요소들을 수식으로 기호화하고 이를 거북이의 움직임과 자연 빈도수 및 도표라는 시각적 요소를 제작해 낼 일상 코딩 언어를 동시에 제공, 실행 가능한 표현을 통한 현상의 해석을 학습자 스스로 할 수 있도록 하는 것이 본 프로그램의 핵심 목표이다.

본 프로그램은 먼저 이항 분포 상황을 수식으로 표현할 '수학적 언어 체계'를 '위, 아래'라는 거북이의 '몸짓 언어'로 시작하였다. 모든 이항 분포 상황에 핵심은 주어진 사건의 '발생함', '발생 하지 않음'이라는 양분된 두 가지의 사안을 '위로 간다.', '아래로 간다.' 라는 두 가지의 '몸짓

언어'로 모델링하고 이를 수식으로 'a, b'로 나타내었다. 이 'a, b'라는 수식은 'move x, y', 즉, 오른쪽으로 x만큼, 위 아래로 y만큼 움직이라는 명령 체계가 약속이 되어 있는 실행식이다. 이러한 표현 체계는 기본적으로는 a는 'move 10, 10', b는 'move 10, -10'으로 약속되어 있어 5번의 움직임으로 도착지에 도착할 수 있도록 길이가 설계되어 있다. 두 가지의 몸짓 언어를 기초로 하여 여러 가지 상황과 다양한 분포를 구성할 수 있는, 즉, 최소한의 표현으로 다양한 확률의 세계를 그려낼 수 있게 하는 것이 위의 실행식의 역할이다.

<표 Ⅲ-3> 이항 분포 탐구 프로그램의 수학적 언어 표현

실행식	관련된 명령	실행식의 의미	현상으로의 해석
a	약속 $a\{move$ $10, 10\}$	오른쪽으로 10, 위로 10 이동	사건의 발생
b	약속 $b\{move$ $10,\ -10\}$	오른쪽으로 10, 아래로 10 이동	사건이 발생하지 않음
X	$X = 'a,\ b'$	위, 아래 둘 중 하나를 같은 가능성으로 실행	사건의 발생 여부를 동확률로 나타남.
$p:$	$X = 'p : a,\ b'$	위를 선택할 확률이 p, 아래를 선택할 확률이 $1-p$	사건의 발생할 확률이 p
$do\ 5X$	$do\,XXXXX$	다섯 번을 움직여 경로를 생성	다섯 번을 시행함.
bX	$X = 'a,\ bX'$ do_2X	위를 선택하면 시행 종료, 아래를 선택하면 한 번 더 움직임	사건이 발생하면 시행 종료, 발생하지 않는다면 다시 시행.

이 두 가지의 결정론적인 수식 체계를 확률론적 체계로 전환하기 위한 수식 체계로 치환문자 X을 통한 '린덴마이어 확률 표현'이 쓰였다. 주어진 상황을 확률적으로 발현하게 할 수 있는 도구로써 이를 통해 원하는 만큼 X을 실행시키면 확률적 상황을 학생이 직접 구성해 볼 수 있는 확률 경로가 완성된다. '린덴마이어 확률 표현'은 기본적으로 X가 담고 있는 두 가지의 사항이 동확률로 설계가 되어 있지만 이를 'p : ' 라는 수식 체계를 통해 '몸짓 언어'의 실행 확률을 다르게 구현할 수 있다. 뿐만 아니라, 치환 문자 내에 재차 치환 문자를 삽입하여, 귀납적인 패턴의 경로를 구현해 낼 수도 있다. 예를 들어 $X=$ 'a, bX' 라고 하면 아래로 움직이는 상황에 대한 귀납적 표현, 즉, 아래로 내려갔을 때에는 치환 문자가 재차 실행이 되어야 하는 상황으로 해석이 될 수 있다. 다양한 '린덴마이어 확률 표현'의 표현 체계는 주어진 사건의 발생 유무와 관련한 다양한 현상을 모델링 할 수 있게 한다<표 Ⅲ-3>.

<표 Ⅲ-4> 이항 분포 탐구 프로그램의 코딩 언어

실행식	실행식의 의미
도수분포준비	랜덤워크 기반 사고 실험 환경의 구현
약속 a { }	a라는 명령을 { }와 같이 약속. 즉, a을 실행하면 { }의 명령이 실행됨.
반복 500 { }	{ }의 명령을 반복하여 500번 실행
tt home	거북이라는 에이전트를 출발 지점으로 오게 함.
값	도착지의 자연 빈도수를 자연수로 하여 라벨로 도착지 옆에 붙여서 표현
표	도착지의 자연 빈도수를 막대그래프로 표현

Computational thinking의 역량 강화에 대한 목소리가 높아지면서 적절한 computational device를 이용한 학습자 스스로의 코딩 활동은 이제 필수적인 사고력으로 인식되고 있다. 본 프로그램에서는 <표 Ⅲ-3>과 같은 수학적 기호와 더불어 직접 학습자가 시뮬레이션을 제작할 수 있도록 하는 코딩 언어를 제공한다. 기존 Java나 Basic과 같은 프로그래밍 언어에 대한 단점으로 지적되고 있는 난해한 언어를 보완, 일상 언어를 기반으로 알고리즘과 순서도를 스스로 구성할 수 있도록 실행 가능한 표현을 제공하였다. 이와 관련한 실행식으로는 기본적으로 랜덤워크를 기초로 한 사고 실험 환경을 만드는 '도수분포준비'와 더불어 에이전트를 제자리로 돌아오게 하는 'tt home', 해당 경로를 반복적으로 생성하게 해주는 '반복' 등이 있다. 앞서 언급했듯이 기본 행동 명령인 a와 b는 경로의 길이가 가로·세로로 각각 10으로 설계가 되어있다. 이를 '약속'이라는 명령을 통해 경로의 길이에 변화를 줄 수 있다. 해당 사고 실험의 결과물로는 해당 도착지의 자연 빈도수를 자연수로 라벨처럼 표현하는 '값'과 더불어 해당 빈도수를 도수 분포표처럼 표시하게 해 주는 '표'라는 실행식을 학습자에게 도구로 제시할 수 있다<표 Ⅲ-4>.

학습자가 현상을 해석하고 이를 수학적 기호와 코딩 언어를 통해 이 현상에 대한 사고 실험을 스스로 코딩하고 마이크로월드라는 환경에서 즉각적 피드백을 받아 디버깅하는 일련의 과정은 확률 학습에서의 현상의 모델링과 사고 실험을 가능하게 해 줌과 더불어 코딩 교육의 강화를 가져올 것이다. 이 때 학습자가 '몸짓 언어'로 제작하는 '실행 가능한 표현'은 현상을 거북이의 행동 언어로 적어가는 학습자의 '언어적 모델링 표현'이며, 마이크로월드에 시각화되는 거북이의 움직임을 랜덤워크 기반 사고실험을 결과물로 제시하는 '분포의 시각적 표현'이라고 할 수 있다. 본 연구에서는 이러한 두 가지의 표현 체계를 동시에 구현할 수 있는 학습 환경을 제시하며 중개자 역할을 하는 언어 체계로 현상을 효과적으로 모델링할 수 있도록 하는 도구이다.

이러한 실행 가능한 표현이라는 도구를 통해 학습자는 두 가지의 학습

활동을 할 수 있게 된다. 먼저, 현상에서 출발하는 확률 실험을 가능하게 한다. 주어진 실행 가능한 표현은 이항 분포와 관련된 현상에서 핵심적인 요소를 뽑아 이를 모델링 할 수 있는 도구이다. 학습자는 이러한 모델링 과정 속에 어떠한 요소의 변화를 주고 이를 실행함으로써 현상에 대한 추측을 하고 이를 확인받을 수 있다. 'What if?' 전략에 기초한 확률 실험은 본 연구의 학습 환경의 주된 목적으로 그동안 학교 수학에서 진행되어 온 연역적 방식을 벗어난 실험 위주의 학습 패러다임을 가져올 수 있다. 이항 분포의 두 가지 핵심 아이디어, 즉 '시행 횟수'(n)와 '사건의 발생 확률'(p)이라는 요소에 대한 언어 체계를 본 실행 가능한 표현 속에 거북이의 '움직이는 횟수'와 '선택 확률'로 모델링하게 함으로써 분포를 확인하고 실험할 수 있게 하였다. 이는 기존의 학교 현장에서의 수업 방식을 거꾸로 진행하는 수업 형태라고 할 수 있다.

또한 이러한 실행 가능한 표현을 통해 기존의 난해한 확률 프로그래밍 언어에서 구현하지 못한 명령 언어 체계를 통한 의사소통이 가능해 진다. 기본적으로 웹 기반 환경에서 학습자에게 친숙한 언어 체계를 통해 코딩할 수 있게 하는 본 학습 환경은 프로그래밍 언어 체계 자체를 의사소통의 도구로 전면에 내세울 수 있게 한다. 웹 기반 환경에서의 다양한 대화의 장[2]을 활용할 수 있는 적절한 수업 형태를 제시한다면 학습자는 실행 가능한 표현을 직접 코딩하고 이를 주변 동료들과 이야기하면서 함께 현상을 모델링 할 수 있게 된다. 기존의 R 언어나 SPSS 등의 프로그래밍 언어와 같은 전문적인 확률 코딩 언어를 다루는 것이 아닌 간단한 순서도나 설계도와 같은 언어 체계를 통해 학습자는 다른 학습자와, 교사와, 혹은 컴퓨터와 원활한 의사소통을 진행 할 수 있게 된다.

2.2. 본 프로그램을 통한 모델링의 예시

2) 본 학습 환경의 JavaMAL 마이크로월드는 다양한 게시글 및 댓글 그리고 그룹 채팅 등이 가능한 환경으로 다양한 방식으로 대화의 장을 제공하고 있다.

이항 분포 탐구 프로그램에서 쓰인 실행 가능한 표현들을 통해 학습자들은 다양한 현상을 모델링하여 실험할 수 있다. 학교 수학에서 다루고 있는 이항 분포와 관련한 확률 현상은 기본적으로 독립 시행을 정해진 횟수만큼 시행한 후에 이에 따른 사건의 발생 여부를 확인하여 발생 횟수를 가지고 확률 분포를 다룬다. 즉, '독립 시행의 횟수(n)'와 '사건의 발생 확률(p)'이라는 결정적인 두 가지 요소를 바탕으로 현상을 분석하여 다양한 확률적 구조를 파악한다.

하지만 학교 수학에서는 이러한 두 가지 요소에 대한 접근을 현상으로부터 출발하는 것이 아닌, n과 p로 이루어진 알고리즘을 이용하여 공식화하고 이 공식으로 현상을 직접 파악하려 한다. 본 학습 환경은 이러한 흐름을 역행하여 현상에서 출발한 실험으로 주어진 알고리즘의 의미를 학습자 스스로 파악할 수 있도록 하는 귀납적 접근 방식을 선택한다. 이 절에서는 본 학습 환경을 활용하여 학교 수학에 제시할 수 있는 구성 활동에 대한 예시를 소개하고자 한다.

2.2.1. 독립 시행의 확률에 대한 오개념 극복 활동

이항 분포의 확률 변수는 독립 시행 중 '사건의 발생 횟수'이다. 그리고 각각의 확률 변수에 따른 확률은 '독립 시행의 확률'이라는 명칭으로 학교 수학에서 가르치고 있다. 학교 수학에서는 이 확률을 다룸에 있어서 주사위 던지기나 동전 던지기와 같은 현상에서 '경우 나누기'와 확률 계산을 통해 지필 환경에서 연역적으로 가르친 후에 바로 정리 후 다른 현상으로 적용해서 계산해 보도록 하고 있다.

이러한 방식은 현상에서 출발하는 적극적인 실험과 모델링의 부재로 인해 다양한 오개념을 낳을 수 있다. 실질적으로 학생들에게는 ${}_nC_r$이라는 경우의 수와 '독립 시행의 확률' 사이의 연결을 잘 하지 못한다. 이러한 오개념은 다른 연구들에서도 많이 연구된 오개념으로 확률 변수인 '사건의 발생 횟수'에 대한 확률을 모두 같은 것으로 판단하는 경향이 있다는

것이 밝혀진 바 있다.

1의 눈이 나오는 경우를 ○, 1의 눈이 나오지 않는 경우를 ×로 나타내면 한 개의 주사위를 다섯 번 던지는 독립시행에서 1의 눈이 두 번 나오는 경우는 오른쪽 표와 같이 ${}_5C_2 = 10$(가지)이다.

1회	2회	3회	4회	5회
○	○	×	×	×
○	×	○	×	×
○	×	×	○	×
○	×	×	×	○
×	○	○	×	×
×	○	×	○	×
×	○	×	×	○
×	×	○	○	×
×	×	○	×	○
×	×	×	○	○

이때 각 사건은 서로 독립이고 ○의 확률은 $\frac{1}{6}$, ×의 확률은 $\frac{5}{6}$이므로 각 경우가 일어날 확률은 모두 $\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3$이다.

그리고 ${}_5C_2 = 10$(가지)의 사건은 서로 배반사건이므로 다섯 번의 독립시행에서 1의 눈이 두 번 나올 확률의 덧셈정리에 의하여 다음이 성립한다.

$${}_5C_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{625}{3888}$$

일반적으로 독립시행에 대하여 다음이 성립한다.

>>> 독립시행의 확률

어떤 시행에서 사건 A가 일어날 확률이 p일 때, 이 시행을 n회 반복한 독립시행에서 사건 A가 r회 일어날 확률은

$${}_nC_r p^r (1-p)^{n-r} \quad (r = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

[그림 Ⅲ-10] 학교 수학에서의 독립 시행의 확률

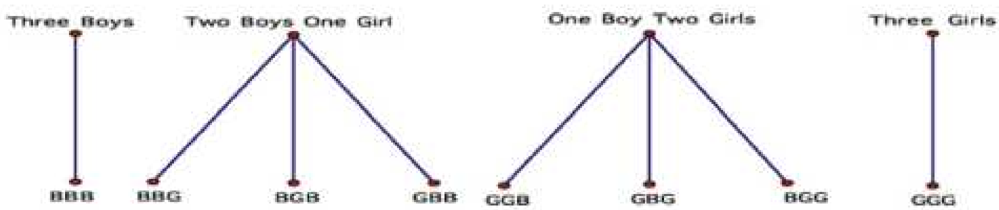
Peard(1996)는 학습자들이 확률 학습을 함에 있어서 자연스럽게 발생할 수 있는 몇 가지의 대표적인 확률적 오개념을 발표하였다. 이는 아래와 같다.

1) 대표성과 이용성에 대하여 발견술을 사용하는 것 (the use of the heuristics of representativeness and availability)

2) 같은 확률로 잘못 가정하는 것 (the false assumption of equal likelihood)
3) 독립 사건 (independence of events)
4) 반직관론적 확률에 대한 깨달음(awareness of counter-intuitive probabilities)
5) 다른 오류들에 대한 맹신 (belief in other fallacies)

이들 중 스스로 설정한 표본 공간에 있는 요소를 모두 '같은 확률'이라고 가정을 하는 오개념은 굉장히 강력한 오개념으로 인식되고 있다. 즉 자신이 선정한 표본 공간에 있는 모든 확률 변수를 같은 확률로 가정하는 것이다. 특히나 동전 던지기나 주사위 던지기와 같은 이항 분포 현상에서 이러한 오개념은 자주 발생한다. Chernoff & Zazkis(2011) 역시 아래와 같은 이항 분포 현상에 관한 문제에 대해 연구하였고 이를 통해 위 오개념에 대한 극복 방안을 연구하였다.

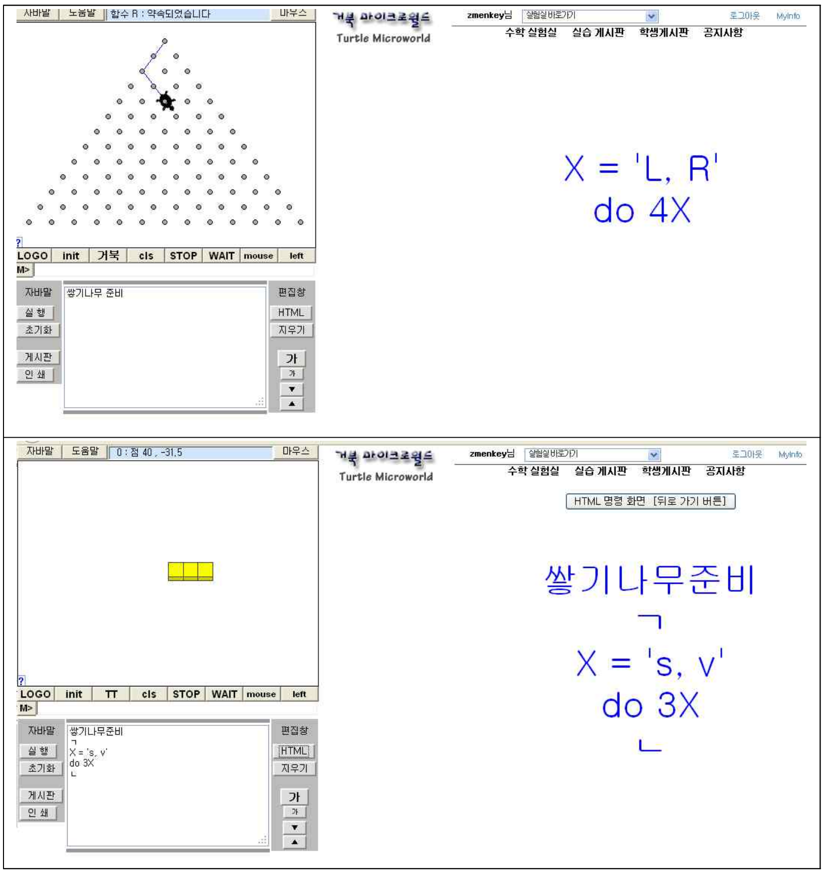
[문제]
3명의 아이가 있는 가족에서 이 3명의 아이가 남자 아이가 두 명, 여자 아이가 한 명일 확률은 얼마인가?



[그림 Ⅲ-11] 표본 공간과 표본 집합 (Chernoff & Zazkis, 2011)

초등학교 학교 선생님을 포함 대다수의 연구 참여자는 해당 확률을 $\frac{1}{4}$로 대답하였다. 이는 Peard(1996)이 제시한 오개념과 동등한 것으로 표본 공간을 총 4가지[3)]로 놓은 후 이 네 가지의 경우를 모두 같은 확률로

가정하고 문제를 해결한 것으로 분석된다. Chernoff & Zazkis(2011)는 이에 대한 극복 방안으로 표본 공간이라는 개념 이외에 '표본 집합'이라는 개념을 더하여 해당 표본 공간이 같은 확률이 아니라는 것을 인식시키고자 하였다. 즉, 남자 아이 두 명과 여자 아이 한 명 이라는 표본 공간 내의 요소가 총 3가지가 있다는 것을 수형도를 이용한 표본 집합으로 나타내서 극복을 하고자 하는 연구를 진행하였다[그림 Ⅲ-11].



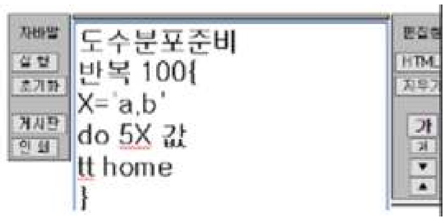
[그림 Ⅲ-12] 표본 집합을 파악하기 위한 실행 가능한 표현 활동

본 연구에서의 학습 환경은 이러한 '표본 집합'이라는 개념에 대한 구성 활동을 진행할 수 있다. 즉 이항 분포의 핵심인 '독립 시행의 확률'을 다

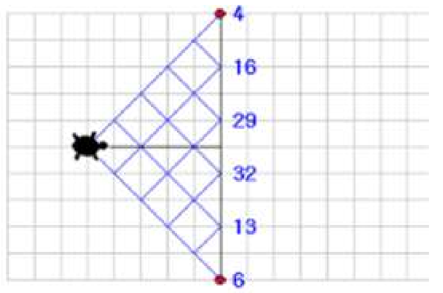
3) 남자 세 명, 남자 두 명과 여자 한 명, 남자 한 명과 여자 두 명, 여자 세 명

룸에 있어서 $_nC_r$이라고 하는 경우의 수의 의미가 무엇인지를 파악할 수 있는 경험을 할 수 있게 한다.

먼저 중학생 대상 이항 분포 탐구 프로그램은 표본 공간에 대한 '표본 집합'으로 해당 도착지에 대한 '경로의 수'라는 아이디어를 제시한다. 학습자는 실행 가능한 표현을 통해 해당 도착지까지 가는 언어 표현을 만들고 이를 통해 해당 도착지까지 가는 경로의 수를 세어보는 활동을 이항 분포 학습 전에 선행으로 진행할 수 있다. 이는 도착지에 도착할 확률을 도착지의 '경로의 수'와 연결시키기 위한 실험이다. 초등학생 대상 이항 분포 탐구 프로그램은 이러한 활동을 '린덴마이어 확률 표현'을 통한 '쌍기나무' 만들기 활동으로 대체한다. 이항 분포 모델링의 핵심 실행식인 '린덴마이어 확률 표현'을 통한 시뮬레이션 활동을 진행하기 전 이에 대한 모든 '경우의 수'를 실행해보고 이를 나누어 보는 활동을 한다. 이를 통해 자신이 구성한 언어 체계의 의미와 이에 따른 '경우의 수'를 파악함으로써 '독립 시행의 확률'에 대한 근거를 얻는다.



명령창



결과창

[그림 Ⅲ-13] 독립 시행의 확률 탐구를 위한 실행 가능한 표현

이러한 활동은 그 뒤에 진행될 '린덴마이어 확률 표현' 에 대한 시뮬레이션 활동에서 정당화의 조건이 될 수 있다. 중학생 및 초등학생 대상 이항 분포 프로그램에 있어서 도착지의 횟수는 결국 두 가지의 선택 사항이 내재된 확률 경로의 도착 횟수로서 '이항 분포'의 확률 변수의 역할을 한다. 학습자는 이 도착지에 '자연 빈도수'가 서로 같지 않다는 점을

실행 가능한 표현을 통해 확인할 수 있다. 학습자는 자신이 최초 추측한 도착지의 확률이 같지 않다는 점에 대한 정당화 조건을 찾게 될 것이며 그 근거를 도착지에 대한 ‘경우의 수’ 에서 찾을 수 있게 된다. 중학생 대상 프로그램에서는 도착지에 ‘경로의 수’라고 하는 조합론적 논증 방식으로, 초등학생 대상 프로그램에서는 ‘린덴마이어 확률 표현’에 대한 ‘쌍기나무’ 형상화를 통해 모든 경우의 수를 시각화 해 봄으로써 의미를 찾을 수 있다.

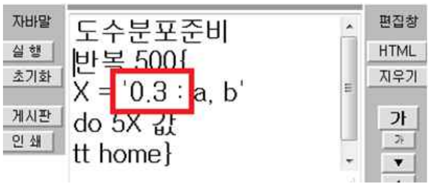
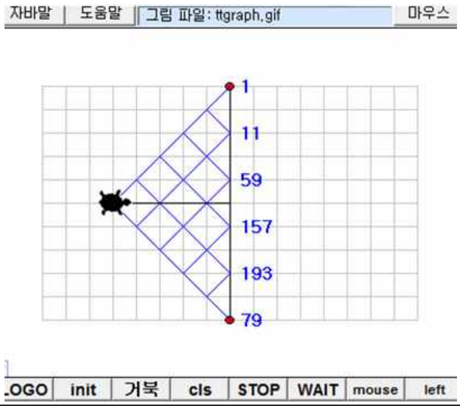
이러한 경험은 이항 분포의 확률 변수라는 ‘표본 공간’ 속에서 ‘표본 집합’에 대한 선행 경험을 부여함으로써 각각의 변수에 확률을 따로 부여할 수 있게 하며 그 근거를 경우의 수로 놓게 함으로써 독립 시행의 확률 공식에서의 ${}_nC_r$이라고 하는 요소에 대한 의미를 갖게 할 것이다. 어린 학습자에게는 적어도 ‘이항 분포’ 상황에서의 ‘사건의 발생 횟수’는 가운데에서 가능성이 가장 높다는 것을 위의 경험을 통해 정당화하는 구성 활동이 가능할 것이다.

2.2.2. 시행 횟수와 사건의 발생 확률에 대한 활동

본 연구에서 제시하는 실행 가능한 표현의 가장 큰 장점은 현상을 모델링 할 수 있는 언어를 제시함과 동시에 현상에 대한 ‘분포’를 마이크로월드에 시각적으로 표현해 준다는 점이다. 이러한 장점은 학습자에게 해당 현상에 대한 추측을 스스로 해 보고 이를 본 프로그램을 통해 피드백을 받으며 스스로 자신의 추측을 정정해 나아가는 'What if' 전략에 기초한 학습 설계가 가능해 진다는 점이다. 본 프로그램은 현상을 분포로 시각화하여 만드는 학습 도구와 그 분포를 분석할 수 있는 학습 도구의 제공이 가능한 환경이다.

이러한 실행 가능한 표현 중 ‘린덴마이어 확률 표현’은 기본적으로 확률적인 상황을 표현하기 위해 제시되는 도구이다. 사건의 발생 유무를 치환문자인 X라는 수식을 이용해 무작위로 발현하게 함으로써 해당 에이

전트가 경로를 생성함에 있어서 확률적으로 생성하게 하는 일종의 '확률 에이전트 기반 모델링'이다.

수학적 언어 표현	분포의 시각적 표현
	

[그림 Ⅲ-14] 확률 에이전트 기반 이항 분포 실행 가능한 표현

'p : '라고 하는 명령은 치환문자의 두 가지의 선택사항의 확률을 동확률이 아닌 다른 확률 상황으로 바꿀 수 있다. 즉, 사건의 발생 확률과 발생하지 않은 확률이 다르게 주어진 상황을 확률 에이전트에 의해 모델링 할 수 있는 도구로써 '린덴마이어 확률 표현'이 확장될 수 있는 것이다. 학습자가 이러한 표현을 통해 현상을 실행 가능한 표현을 통해 '수학적 언어 표현'으로 구성했다면 마이크로월드는 이 언어 표현 체계가 모델링 한 현상의 '분포의 시각적 표현'이다. 학습자는 현상에 대한 확률적 상황에 대하여 스스로 확률적 사고를 한 후 자신이 제시한 실행 가능한 표현 체계와 마이크로월드상의 시각적 결과물을 통해 이를 확인받고 실험할 기회를 얻는다. '린덴마이어 확률 표현'을 통한 확률 에이전트의 생성은 이항 분포와 관련한 어떠한 현상도 거북이의 '몸짓 언어'로 모델링과 시뮬레이션이 가능하다는 장점을 가지고 있다.

학교 수학에서 이항 분포를 판단함에 있어서 가장 중요한 요소로 제시되고 있는 것은 시행 횟수 n과 사건의 발생 확률 p이다. 학교 수학에서

는 이를 이용하여 평균 및 분산에 대한 알고리즘을 제공하고 있지만, 현상을 통해 이 공식을 정당화하는 과정은 제공하고 있지 않다. 학교 수학에서는 특정한 시행횟수를 기초로 하여 직접 연역적으로 증명을 한 후 바로 이를 일반화하여 공식을 제공한다. 학습자들은 공식에 대입하여 해당 분포를 파악하기 때문에 해당 분포에 대한 정규성 및 평균과 산포도와 같은 분포의 구조를 느끼지 못한다. 해당 실행 가능한 표현은 이러한 두 가지 핵심 요소를 수식으로 표현, 분포를 즉각적으로 시각화함으로서 이항 분포에 대한 사고 실험을 가능하게 해 준다.

예를 들어 확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(3,\ p)$를 따를 때, X의 확률분포를 표로 나타내면 다음과 같다. (단, $q=1-p$)

X	0	1	2	3	합계
$\mathrm{P}(X=x)$	q^3	$3pq^2$	$3p^2q$	p^3	1

따라서 X의 평균과 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

$$\mathrm{E}(X)=0\times q^3+1\times 3pq^2+2\times 3p^2q+3\times p^3$$
$$=3p(p+q)^2=3p$$
$$\mathrm{V}(X)=0^2\times q^3+1^2\times 3pq^2+2^2\times 3p^2q+3^2\times p^3-(3p)^2$$
$$=3p(p+q)(3p+q)-9p^2=3pq$$
$$\sigma(X)=\sqrt{3pq}$$

일반적으로 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따르는 확률변수 X의 평균과 분산 및 표준편차는 다음과 같다.

>>> 이항분포의 평균과 분산 및 표준편차

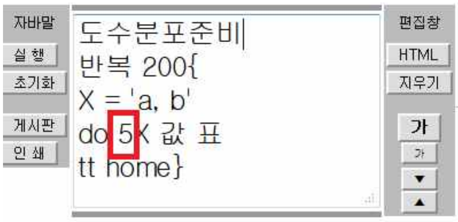
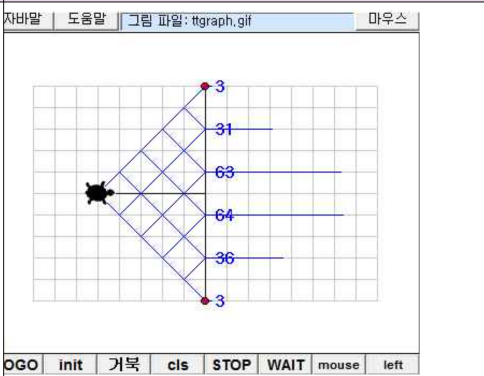
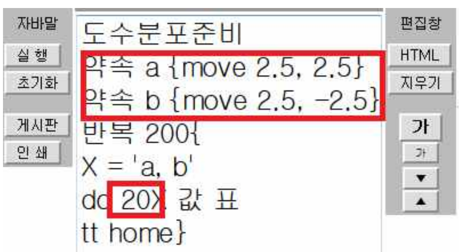
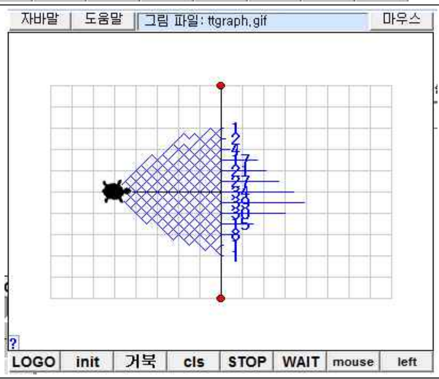
확률변수 X가 이항분포 $\mathrm{B}(n,\ p)$를 따를 때,

$$\mathrm{E}(X)=np,\ \mathrm{V}(X)=npq,\ \sigma(X)=\sqrt{npq}\quad (\text{단, } q=1-p)$$

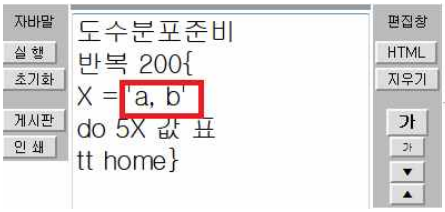
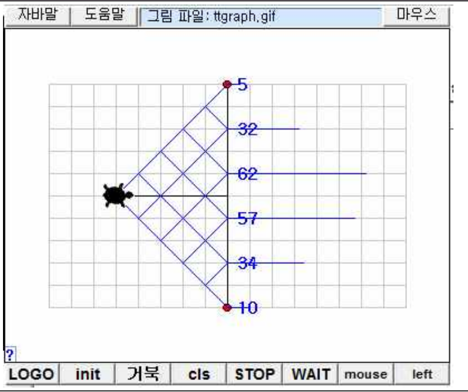
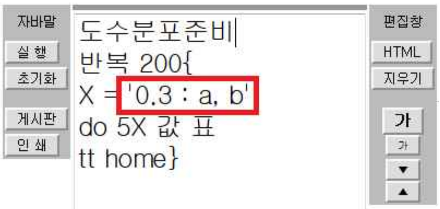
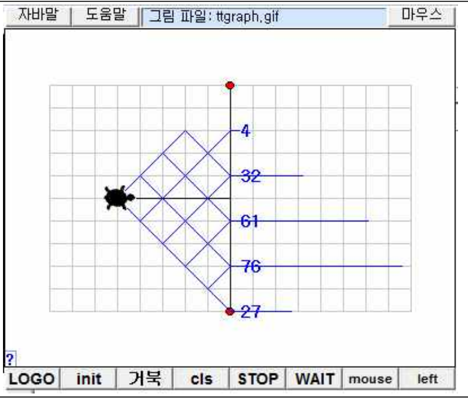
[그림 Ⅲ-15] 학교 수학에서의 이항 분포 공식

실행 가능한 표현 기반 이항 분포 탐구 프로그램에서 제시하는 수식 중 ‘시행 횟수’와 관련이 있는 수식은 바로 치환문자 X의 ‘실행 횟수’이다. 학습자는 실행식을 구성함에 있어서 이 치환문자를 원하는 만큼 늘이거

나 줄여서 시뮬레이션을 구성할 수 있다. 하지만 기존의 분포와의 비교를 위해선 해당경로의 도착지를 같은 선상에 도착할 수 있도록 해야 한다. 이는 본 프로그램에서 제공하는 코딩 언어 중 ‘약속’ 언어를 통해 경로의 길이를 스스로 줄이거나 늘이는 코딩을 통해 가능하다. 학습자 스스로 시행 횟수를 바꾸었을 때, 자신의 확률적 사고를 정립하고 치환문자 X의 실행 횟수를 바꾸어 이를 확인받을 수 있는 환경을 설계한다. 그리고 이에 맞추어 경로의 길이를 조절함으로써 해당 도착지 내의 분포도를 ‘값’이나 ‘표’로 비교해 보는 과정을 통해 시행 횟수에 따른 이항 분포를 표현해 볼 수 있으며 이를 통해 산포도의 특징을 유추해 볼 수 있다.

수학적 언어 표현	분포의 시각적 표현
	
	

[그림 Ⅲ-16] 시행 횟수에 따른 이항 분포 시뮬레이션

수학적 언어 표현	분포의 시각적 표현
	
	

[그림 Ⅲ-17] 사건의 발생 확률에 따른 이항 분포 확률 시뮬레이션

앞서 '린덴마이어 확률 표현'을 통해 다양한 확률 에이전트를 생성할 수 있음을 언급하였다. 이를 통해 사건의 발생 횟수에 따른 분포의 특징을 '표'라는 명령을 통해 확인할 수 있다. 해당 현상에서 주어진 사건의 확률을 파악한 후 이를 가지고 분포의 모습을 추측한 후에 이를 확률 시뮬레이션으로 확인하여 보는 작업을 통해 사건의 발생 횟수라고 하는 확률변수의 확률, 평균 및 산포도 등을 파악해 볼 수 있다.

이항 분포 현상의 핵심적 요소, 즉 시행 횟수와 사건의 발생 확률에 대한 수학적 표현 도구를 제공하고 이를 거북이의 움직임으로 분포도를 표현하게 해 주는 본 프로그램은 '현상을 분포로 시각화하여 만들기' 과정을 통해 자신이 구성한 실행식이란 언어에 의미를 부여한다. 이는 우리

학교 수학에서는 철저하게 배재되어 왔던 현상에서 출발한 실험 기반 확률 학습이다. 학습자는 해당 현상을 언어 체계로 모델링함과 동시에 이 언어의 핵심 요소 두 가지의 의미를 파악하고 이를 변형해 실행하는 활동을 통해 자신의 추측을 만들고 'What if?' 전략으로 이를 탐구하는 적극적인 학습을 가능하게 할 수 있다.

2.3. 거꾸로 학습(Flipped learning)을 기초한 수업 모델

이항 분포 탐구 학습 환경에서 학습자의 도구로서 역할을 하는 실행 가능한 표현은 두 가지의 효과를 얻을 수 있다. 첫 번째는 이 언어체계를 통해 학습자는 자신 주위의 여러 요소들과 활발하게 의사소통할 수 있다는 점이다. 자신이 직접 구성한 언어 표현, 그리고 이를 실행함으로써 얻어지는 결과물 두 가지는 모두 이항 분포 현상에 대해 의사소통 하는 데 쓰일 수 있는 표현 체계이다. 본 연구에서는 이러한 점을 강조하기 위해 이항 분포 현상의 핵심적인 부분만을 가지고 간단히 코딩해 볼 수 있는 일상 언어로 설계하고자 노력하였다. 기존의 확률 프로그래밍 프로그램이 보유하지 못한 친숙함과 간편함, 교육용 확률 프로그램이 보유하지 못한 현상을 모델링 할 수 있는 다양한 언어 체계, 이 두 가지는 학습자와 교사, 학습자 사이, 혹은 컴퓨터와 활발한 의사소통을 이끌면서 자신의 사고를 다져갈 수 있다.

두 번째로는 확률 사고 실험에 기초한 수업을 구성할 수 있다는 점이다. 이항 분포 현상을 거북이의 '몸짓 언어'로 표현, 이를 즉각 실험함으로써 피드백을 얻어 자신의 사고를 수정하고 다시금 실험하는 일련의 과정은 그동안 학교 수학에서는 다루지 못한 실험 기반 수업을 가능하게 한다. 즉 학습자에게 적절한 현상과 과제만 주어진다면 학습자는 직접 학습 환경에 자신만의 언어로 표현하고 'What if?' 전략을 세워 자신의 언어 체계를 수정해보고 보완해보는 실험을 통해 다양한 확률 개념을 얻어낼 수 있다. 이러한 사고 실험은 학습자가 직접 현상에 대한 탐구를

할 수 있는 충분한 시간이 필요하며 이는 학교 지필 현장에서는 한계점이 명확한 형태의 수업이 될 수 있다.

이에 본 연구에서는 이항 분포 학습 환경을 적용할 수업 모델 중 위에서 언급한 효과를 가장 크게 얻을 수 있는 수업 모델로 ‘거꾸로 교실’을 기초로 한 수업 모델을 제시한다. 즉, 교실 환경에서는 제공해 줄 수 없는 다양한 의사소통과 충분한 사고 실험 활동 시간을 학습자가 스스로 온라인상에서 해보고, 이를 토대로 교실에서는 다양한 토론 학습과 의견 수렵 및 이론화를 하는 방식이다.

<교수학적 의도가 담긴 확률 문제 상황>

초기 추측 단계 : 주어진 확률 문제 상황의 적용을 위한 초기 추측 및 판단

↓

시뮬레이션 실행 단계 : 주어진 확률 문제 상황과 관련된 자료 수집 및 분석

↓

오개념 인식 단계 : 초기 추측과 시뮬레이션 결과를 비교, 초기 추측의 적절성 평가 및 오개념 인식

↓

이론화 단계 : 오개념 교정 및 시뮬레이션 결과 설명을 위한 이론적 수학적 접근

[그림 Ⅲ-18] 확률 오개념 극복 교수학적 상황 진행 단계(신보미 & 이경화, 2006)

여기에 제시할 수업 모델은 신보미 & 이경화(2006)가 제시한 ‘확률 오

개념 극복 교수학적 상황을 위한 국소적 수업 이론'에서 착안하였다. 시뮬레이션을 이용한 확률 교육이 강점이 있음을 주장한 신보미 & 이경화(2006)는 확률 학습에서는 교수학적 의도가 충분히 포함된 새로운 교수학적 현상을 설정하여 제공해야 함을 주장한다. 그리고 이 현상에서 출발하여 확률 오개념을 극복할 교수학적 수업 이론으로 '초기 추측 단계', '시뮬레이션 실행 단계', '오개념 인식 단계', '이론화 단계'로 이어지는 모델을 제시한다.

초기 추측 단계에서 학생들은 주어진 문제 상황에 대해 초기 추측 및 판단을 내린다. 그리고 학습자는 시뮬레이션을 통해 확률 지식의 배경화/개인화 과정을 적극적으로 반성하고 자신의 확률 오개념을 탈배경화/탈개인화 하려고 노력한다. 오개념을 인식한 후 이론화 단계에서 교사는 교수학적 의도를 가능한 숨기고 학생 스스로 문제 상황에 적응하여 초기 추측의 적절성을 평가함으로써 시뮬레이션 결과를 이론화 할 수 있도록 한다(신보미 & 이경화, 2006).

본 연구에서는 거꾸로 교실 패러다임을 기초로 하여 '확률 오개념 극복 교수학적 상황을 위한 국소적 수업 이론'을 적극 활용한 수업 모델을 [그림 Ⅲ-19]와 같이 제시한다. 먼저 교실 밖에서 '이론화 단계' 전까지의 모든 구성 활동을 시행한다. 먼저 학습 환경을 활용하기 위한 실행 가능한 표현 학습을 웹 기반 동영상 개재 및 게시판 과제로 대체하고, 게시판에 직접 현상을 제시함으로써 학습자에게 초기 추측을 유도한다. 그리고 이를 JavaMAL 마이크로월드에 제시된 이항 분포 학습 환경에 직접 실행식으로 표현해 보고, 시뮬레이션을 구현해 보는 작업을 통해 자신의 초기 추측과 관련한 피드백을 받는다. 그리고 오개념을 인식한 후에 'What if?' 전략을 적용하여 자신의 사고를 수정한 후 재차 실험을 하면서 지속적인 피드백을 받는다. 이 때, 교사는 그룹 채팅, 댓글 및 게시글 등을 이용하여 학습자 사이에 혹은 교사와 학습자 사이의 의사소통을 원활하게 진행할 수 있다. 교실 안에서는 이러한 과정을 거쳐 자신의 확률적 사고를 보유한 여러 학습자 사이의 토론 수업을 통해 다양한 의사 표

<교수학적 의도가 담긴 확률 문제 상황>

<교실 밖 수업 활동>

실행 가능한 표현 학습 단계 : 동영상 자료 및 게시판을 통해 이항 분포 탐구 활동을 위한 실행 가능한 표현 익히기

↓

초기 추측 단계 : 주어진 확률 문제 상황의 적용을 위한 초기 추측 및 판단

↓

시뮬레이션 실행 단계 : 주어진 확률 문제 상황과 관련된 실행 가능한 표현 구성 및 실행, 시뮬레이션을 피드백으로 받기

↓

오개념 인식 단계 : 초기 추측과 시뮬레이션 결과를 비교, 초기 추측의 적절성 평가 및 오개념 인식

↓

의사소통 및 재차 사고 실험 단계 : 다른 학습자와의 의사소통(그룹 채팅, 게시글, 댓글), 자신의 사고 수정 및 재실험

↓

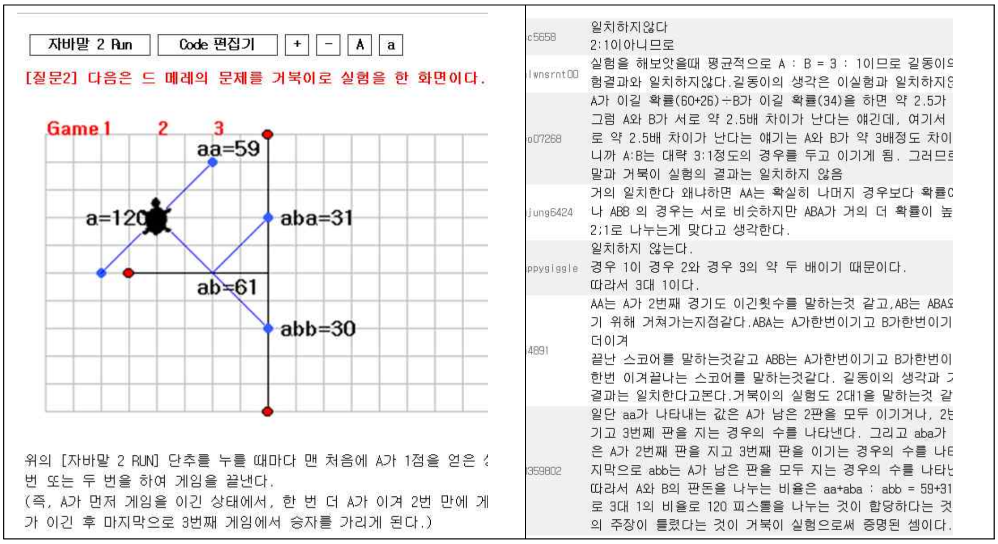
<교실 안 수업 활동>

토론 수업 및 이론화 단계 : 교실 환경에서 학습자와 토론 학습 및 협동 학습, 오개념 교정 및 시뮬레이션 결과 설명을 위한 이론적 수학적 접근

[그림 Ⅲ-19] 이항 분포 탐구 학습 환경을 활용한 수업 모델

현을 할 수 있도록 유도한다. 이론화 단계에서는 교사가 직접 학습자의 이론화 과정을 돕되 교수학적 의도를 가능한 숨긴 상황에서 다양한 의사소통과 사고 실험을 통해 함께 이론화 할 수 있도록 수업을 진행한다.

웹 기반 JavaMAL 마이크로월드에서 설계된 본 학습 환경은 거꾸로 교실의 패러다임에 맞는 수업 형태를 제시할 수 있는 기반이 되어 있으며 학습자는 다양한 현상에 대한 사고 실험을 스스로 구성하는 활동을 통해 교실 학습에서의 추후 학습을 풍부하게 해 줄 수 있다.



[그림 Ⅲ-20] 거꾸로 교실 모형과 학습자 간의 상호 의사소통

이러한 수업 모델에 근간하여 S시 영재원 멘토링 사이트 (mentoring.snu.ac.kr)에서는 이러한 이항 분포 탐구 프로그램을 이용한 거꾸로 교실의 시도가 있었다. 즉 교실 환경에서 벗어나 학습자에게 현상을 제시하고 이를 거북이의 '몸짓 언어'로 모델링 할 수 있는 실행식을 부여, 이를 통해 확률 구성 활동을 할 수 있는 인터넷 기반 학습 자료를 제시하였다. 학습자들은 인터넷 기반 학습 환경에서 실험하고 자신의 피드백을 댓글을 달면서 컴퓨터와 상호작용 하였다. '드 메레의 문제'라는 현상을 과제로 제시한 창의 콘테스트 과제는 해당 현상과 이 문제에 대한 서로 다른 해석들을 제시한다. 그리고 랜덤워크를 기반 확률 사고실

험을 제시, 학습자의 실험을 통해 어떠한 해석을 지지하는 지를 댓글을 통해 제시하도록 하면서 교사와 학습자의 상호 작용을 하였다. 이러한 수업 형태는 교실 환경에서의 시간 및 공간상의 한계를 극복하고 경험과 조작 위주의 확률 통계 교육을 가능하게 할 것이다.

동영상 게시, 랜덤워크 기반 확률 실험 환경, 댓글 및 그룹 채팅 등의 풍부한 테크놀로지의 요소들을 이용하여 현상에 대한 풍부한 경험과 조작을 시공간에 구애받지 않고 해 볼 수 있다. 그리고 교실 환경에서 토론 수업 및 실행 가능한 표현에 대한 학습자와 교사 간의 의사소통을 통해 자신의 의사 결정에 대한 어떠한 확률적 사고를 다양하게 해 볼 수 있는 수업 형태로 학습자의 구성 활동을 정리한다. 거꾸로 교실 모형은 본 연구에서 제시하는 실행 가능한 표현 기반 학습 환경에 기초한 수업 형태를 제시함에 있어서 가장 알맞은 패러다임이자 동시에 테크놀로지 기반 본 학습 환경이 추구하는 확률 통계 교육의 방향성과 일치한다. 개별적 현상 제공, 그리고 개별적인 학습 및 평가는 거꾸로 교실 완전 모형을 가능하게 하며 학습자의 능력과 선호도를 고려한 학습자 중심의 수업이 가능할 것이다.

Ⅳ. 확률 학습 환경의 적용

이 장에서는 총 두 번에 거친 본 연구의 학습 환경 적용 결과를 살펴본다. 본 연구는 중학생 대상 이항 분포 프로그램과 초등학생 대상 이항 분포 프로그램을 각각 대상에 수업 형식으로 활동하고 이에 대한 결과를 얻고자 하였다. 하지만 본 연구는 시간과 공간적 어려움으로 인하여 앞에서 제시한 거꾸로 교실 수업 모델이 아닌 교실 환경에서 진행이 되었으며 몇 가지 한정된 현상에 대해서만 사고 실험을 해 보는 적용 연구를 하였다. 따라서 결과도 상당히 협소한 결과를 얻었다. 하지만 이러한 협소한 결과 안에서도 학습자의 확률 사고 과정의 변화를 확인할 수 있었으며 프로그래밍 언어를 통한 의사소통이 가능한 수업 환경을 보여줄 수 있었다. 이에 간단하게 적용 과정 및 결과를 이 장에 다룬다.

1. 연구 대상

본 연구에는 총 두 번의 수업 연구로 진행이 되었다. 먼저 S시 소재 모 중학교 영재학급 2학년 학생들을 대상으로 도로망 방법(Block Walking)이라는 조합론 분야의 수학적 내용을 바탕으로 하여 확률 사고 실험으로 넘어가는 Random Block Walking(이하 RBW) 학습 설계 연구를 진행하였다. 이를 바탕으로 초등학교 학생들에게도 제시할 수 있는 확률 학습 환경을 설계 하여 S 대학교 시흥 영재원 초등학생 60명을 대상으로 하여 2차 연구를 진행하였다.

RBW 학습 설계 연구는 먼저 해당 학습 환경에 대한 효용성 및 학생들의 피드백을 미리 얻고자 사전 수업을 실시한 후 본 수업을 진행하였다. 사전 수업은 S시의 중등영재교육원 학생들 20명을 대상으로 2014년 4월 19일 및 5월 24일에 실시하였다. 이 학생들은 S시 소재 중학교 1학년에 재학 중인 학생들로 이 학생들에게는 180분의 1차시 수업을 진행하였다.

본 수업은 S시 모 중학교의 영재학급 학생들 20명을 대상으로 실시하였으며 이 학생들은 해당 중학교의 2학년에 재학 중인 학생들이었다. 이 학생들은 사전 수업에서의 피드백을 바탕으로 재차 설계된 수업을 180분씩 총 4차시를 진행하였으며 2014년 5월 12일부터 일주일간 한 차시씩 진행하였다.

초등학생을 위한 확률 학습 환경은 2015년 1월 17일 및 1월 19일에 S대학교 내에서 실시하였다. 20명씩 3개의 조로 움직여 같은 확률 학습 환경을 양일에 걸쳐서 활동하였다. 총 2차시로 진행이 되었으며 총 수업 시간은 150분이었다.

2. 연구 절차

본 연구는 앞서 제시한 이론적 배경을 바탕으로 하여 이항 분포 상황에 대하여 학생들에게 직접 구성할 수 있는 재료를 설계하여 제시하는 것에 그 목적이 있다. 먼저 JavaMAL 마이크로월드 환경에서의 이항 분포에 대한 구성활동 프로그램을 설계하기 위해 확률 학습 설계 이론과 확률 교육에 대한 선행 연구들을 검토하였다. 또한 검토한 문헌들을 이론적 배경으로 하여 중학생 그리고 초등학생에게 알맞은 이항 분포 학습 환경을 제시하기 위한 아이디어를 린덴마이어 확률 표현에서 찾고자 하였으며 이를 랜덤 워크 및 도수 분포표라는 핵심적인 아이디어를 통해 스스로 구성할 수 있는 JavaMAL 기반 확률 표현식을 구성하였다.

먼저 RBW 확률 학습 환경은 조별로 토론할 수 있는 교실 환경에서 조별 수업과 개별 수업을 병행하여 진행되었다. 조별로 사용 가능한 컴퓨터를 2대씩 준비하였으며 조별 인원은 2명에서 3명 정도로 하여 총 9개의 조로 구성하여 수업을 진행하였다. 학생들은 사전/사후 검사를 실시 연구자에 의해 분석이 실시되었으며 각 활동에 과제마다 활동지를 만들어 학생들의 피드백을 얻고자 하였다. 또한 학생들이 실제로 실시한 과제와 구성한 명령어 체계는 해당 환경의 게시판에 저장되어 분석에 사용

되었으며 일부 학생들을 대상으로 개별 면접을 진행 인터뷰 결과를 연구자가 분석하였다.

초등학교 영재원 학생들을 대상으로 진행한 설계 연구에서는 개별로 컴퓨터가 한 대씩 사용할 수 있는 컴퓨터실에서 진행을 하였으며, 사전/사후 검사를 실시하여 연구자에 의해 분석이 실시되었다. 또한 학생들의 피드백을 얻고자 활동지를 병행하여 실시하였다.

<표 Ⅳ-1> 연구 절차

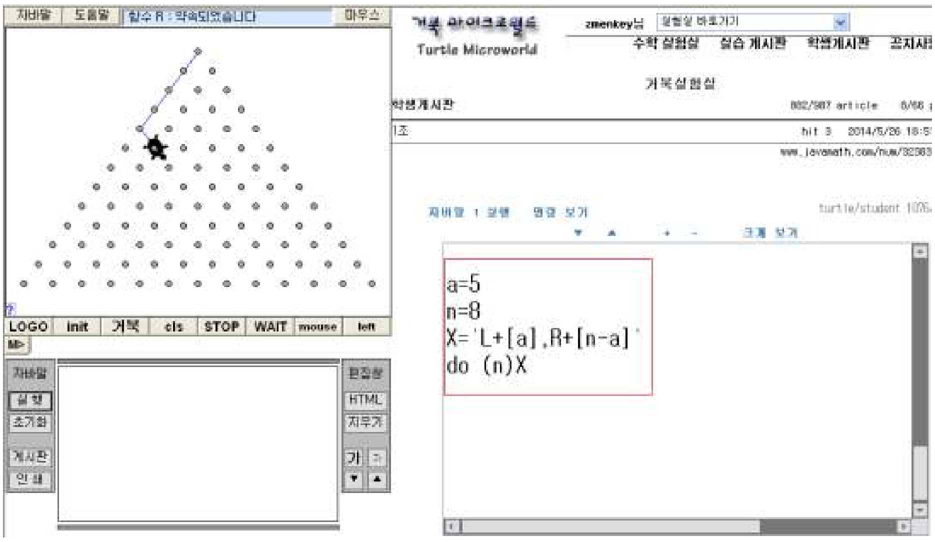
일시	연구 절차
2014년 1월 ~ 4월	관련 문헌 검토
2014년 4월 12일	사전 수업 대상 학생 사전 검사 실시
2014년 4월 19일	사전 수업 실시
2014년 4월 ~ 5월	사전 수업에 대한 학생들의 피드백 분석 및 해당 학습 설계의 보완 작업, RBW 학습 환경 설계
2014년 5월 12일 ~ 2014년 6월 2일	RBW 학습 환경 구성 활동 (4차시) 진행, 개별 면접 및 사후 검사 실시
2014년 6월 ~	검사지·수업 분석 자료 분석 실시 및 이를 바탕으로 초등학생 확률 학습 환경 설계
2015년 1월 17일 ~ 2015년 1월 19일	S 대학교 영재원 초등학생 대상 확률 학습 환경 구성 활동 실시
2015년 2월 ~	결과 분석 및 결론 도출

3. 자료 수집 및 방법

먼저 중학교 학생들을 대상으로 실시한 사전 수업에서는 먼저 학생들의 이항 분포 단원에 대한 선행 지식의 유무 및 기본적인 조합 문제에 대한 학생들의 해결 방법을 알아보기 위한 사전 검사를 실시하였다. 또한 해당 구성 활동을 시행 전과 후를 비교 분석하기 위해 동일한 과제를 구성 활동 전과 후에 모두 부여한 후 수행 활동지를 작성하도록 하였다. 학생

들이 해당 과제에 대한 발표를 진행할 때에는 이를 녹화하여 추후에 분석하였다. 그리고 이를 바탕으로 해당 환경을 보완하고 RBW 구성 활동 환경을 설계하였다.

본 수업에서는 사전 수업에서와 동일한 조합 단원 선행 지식 유무 판단 검사와 더불어 확률 상황에 대한 판단 문제를 추가한 사전 검사를 실시하였다. 각 차시별 수업은 조별로 활동한 내용을 녹취되어 연구 분석에 이용하였다. 각 차시별 주어진 과제에 대하여선 사전 수업과 마찬가지로 구성 활동 전후 수행 활동지를 작성하도록 하였으며 해당 과제에 대한 학생의 반응이 심층적인 분석을 요하는 학생들은 일대일로 학생과 면접관이 있을 수 있는 교실 환경에서의 개별 면담이 진행되었다. 개별 면담의 내용은 녹취되어 연구 분석에 사용되었다. 또한 사전 검사와 비슷한 유형 및 추가 유형을 덧붙인 사후 검사를 실시하여 연구 분석에 사용하였다.



[그림 Ⅳ-1] JavaMAL 마이크로월드 환경 내의 학생 게시판

초등학교 학생들을 대상으로 실시한 수업에서는 중학교 학생들을 대상으로 한 확률 학습 환경을 바탕으로 보완점을 좀 더 추가하여 새로운 학

습 환경을 도구로 제시하였다. 사전 검사는 좀 더 이항 분포와 관련된 내용으로 초점을 맞추어 진행하였으며 학생들의 피드백을 학습지를 통해 관찰하고자 하였다. 그리고 사후 검사는 사전 검사와 동일한 유형으로 하여 학생들에게 제시하여 학생들의 확률적 사고의 변화를 관찰하고자 하였다.

본 연구의 목적은 constructionism 기반 학생들이 직접 구성할 실행 가능한 표현을 관찰해야 하는 바 [그림 Ⅳ-1]과 같이 구성 활동 환경 내에 있는 '학생 게시판'에 자신이 작성한 명령 체계를 설계 환경 내에 저장이 가능하도록 구성하였다. 이 저장된 게시판의 내용은 본인이 직접 들어가 작성한 명령어를 수정하고 다시 실행해 볼 수 있는 환경을 제공함과 동시에 인터넷을 기초로 하였기 때문에 다른 학생들도 같이 게시물을 보면서 서로 간의 조정 및 합의가 가능하도록 하였다. 추후에 이 명령 체계를 분석하여 학생들의 추상화 과정에 대해 분석을 하였다.

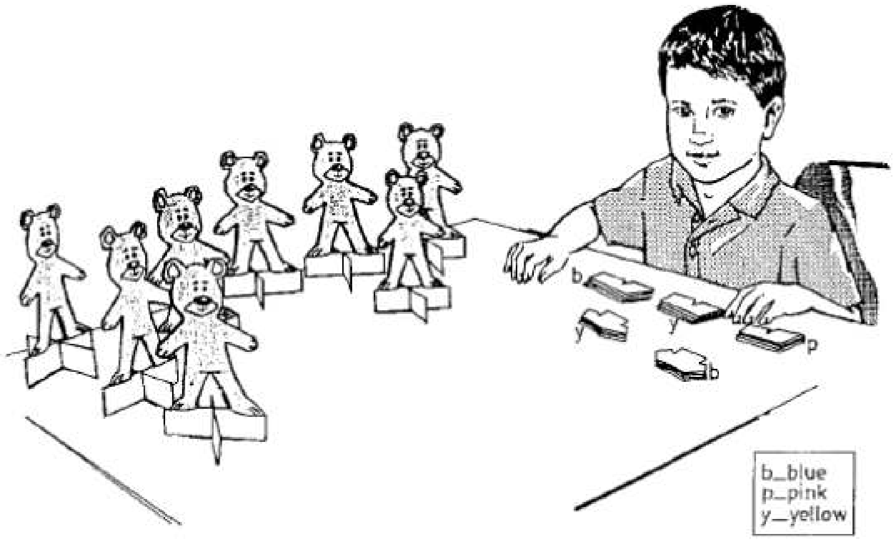
4. 이항 분포 탐구 프로그램 적용 결과

4.1. 중학생 대상 탐구 프로그램 적용 결과

중학교 학생 대상 탐구 프로그램은 도로망 방법(block walking method)라는 조합론의 방법론과 파스칼의 삼각형이 학습자의 구성 활동에 영향을 주도록 설계되었다. 따라서 먼저 해당 구성 활동에서 조합론에서 제시하는 몇몇 조합론적 논증(combinatorial proof) 과제를 제시하여 구성활동을 유도하고 그 뒤에 RBW 프로그램을 제시함으로써 선행으로 배운 아이디어가 확률적 판단에 쓰일 수 있도록 유도하고자 하였다.

Lockwood(2013)은 조합론에서 다루는 '세기 문제'와 관련하여 조합론적 사고에 대한 모델로 '공식/표현', '세기 과정' 그리고 '결과들의 집합'의 상호 작용 모델을 제시하였다. 즉 효과적인 경우의 수 학습을 위해서는 위

의 세 가지의 요소가 활발하게 상호작용할 수 있는 학습 환경을 제시하여야 한다. 특히 '결과들의 집합'이 갖는 역할은 매우 중요하다. English(1991)는 특히 어린 학생일수록 학생들이 직접 하나하나 셀 수 있는 [그림 Ⅳ-2]와 같은 '결과들의 집합'을 제시하여 이를 통해 과정을 알아가는 과정이 필요하며, 이는 지적 수준이 낮은 학생일수록 더욱 중요함을 강조한다. 본 수업의 대상 학생들도 주어진 프로그램 내의 수학적 구조에 대한 사전 지식이 없는 학생인 바 이들에게 적절한 '결과들의 집합'을 제시하고 이를 통해 '세기 과정'을 알게 하는 과정이 필요했다. 학교 교육과정에서는 '세기 과정'만을 공식화 하여 경우의 수를 다룰 뿐 직접 경우를 세 보아야 할 그 대상을 제공해주지는 않고 있다.



[그림 Ⅳ-2] English(1991)의 '결과들의 집합'

L과 R 그리고 치환 문자 등의 기본적인 경로 실행식을 학생들에게 제공하고 JavaMAL 마이크로월드에 구현해 보는 활동을 진행한 후 동일한 과제에 대하여 동일한 학습지를 제시한 결과 다른 반응이 나오게 되었다. '세기 과정'에서 '결과들의 집합'인 경로 자체를 코딩해 보고 이를 통

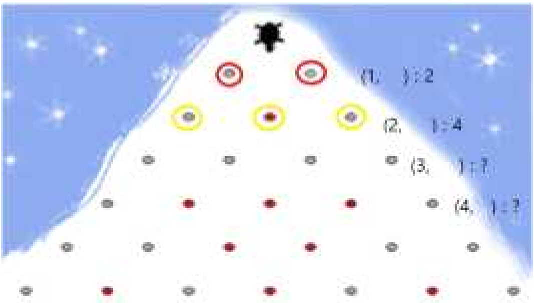
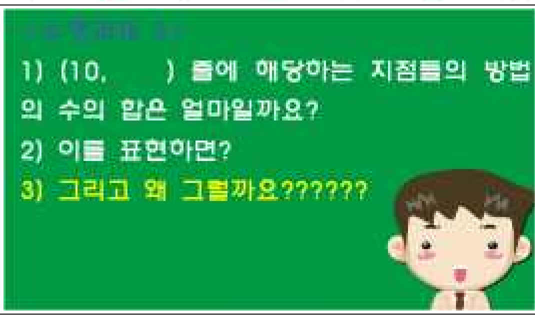
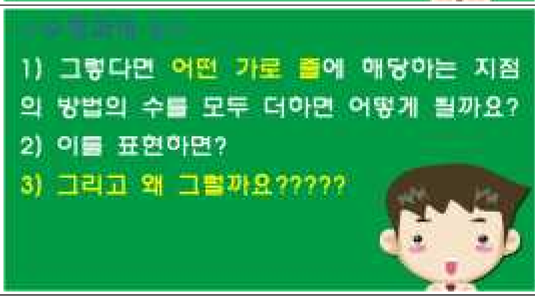
해 구조를 파악하고자 하는 모습이 보였다<표 Ⅳ-2>. 몇몇 학생들이 보여준 이러한 변화는 경로 자체를 실행식이라는 상징체계로 코딩하고 이를 나열하는 작업을 통해 그 특징을 판별하게 함으로써 그 경로들의 집합을 통해 과정을 찾아내게 하는 경험이 가능하다는 것을 보여주었다. 즉, '결과들의 집합'과 '세기 과정' 사이의 상호작용을 촉진시킬 수 있는 매개체로써 실행식이 그 역할을 할 수 있다는 가능성을 보여주었다.

<표 Ⅳ-2> 도로망 탐구 프로그램 도입 활동 후 학생들의 반응

학생	구성 활동 전	구성 활동 후
S1	1) 한 점으로 가는 경우의 수는 그 점의 바로 위에 있는 두 점의 경우의 수의 합이다. 2) 가장 자리의 점으로 가는 경우의 수는 모두 일이다.	1) 한 방향으로만 가면 가장자리에 있다. 2) 같은 문자 사이에 다른 문자가 있으면 거북이의 위치는 많은 문자의 방향인 가장자리에서 다른 문자의 방향으로 그 개수만큼 움직인다. 3) 문자의 개수가 각각 같으면 거북이는 홀수 줄의 중앙에 있다. 4) 거북이의 위치는 문자의 순서가 아닌 개수로 알 수 있다.
S2	잘 모르겠다.	1) def L, def R (유닛벡터)의 뜻은 L+를 실행하면 내 입장에서 오른쪽으로 1칸 아래로 1칸 가고 R+를 실행하면 왼쪽 1칸, 아래쪽 1칸을 가는 것. 2) X = 'R, L'이라 정의하면 무작위로 정해지지 않은 만큼 왼쪽, 오른쪽으로 간다. 이 때 Do aX라 하면 거북이가 무작위로 a번 움직인다. 3) 이 때 'R+++(개수)' 하는 식으로 R의 벨류를 정해주면 그 개수만큼 움직인다. 하지만 'R+++(e개), L+++(n개)'라 하고 e+n>a라 하면 e와 n의 범위 내에서 무작위로 a만큼 움직인다. 4) 거북이를 T라 하면 T가 A와 B사이를 k번 움직여 건너려면 실행해야하는 유닛 벡터의 개수는 정해져있다. 따라서 L=<1, -1>, R = <-1, -1>(나의 관점에서 볼 때)라는 유닛 벡터를 설정하면 LL…LL(L번)RR…RR(R번)이라는 개수가 정해지고 ${}_kC_e = {}_kC_n = \frac{k!}{e!n!}$ 이 된다.

Constructionism 기반 프로그램에서 제공하는 실행 가능한 표현 체계는 조합론 과제를 정당화 할 수 있는 표현 체계를 제시한다. 즉 두 대칭 지

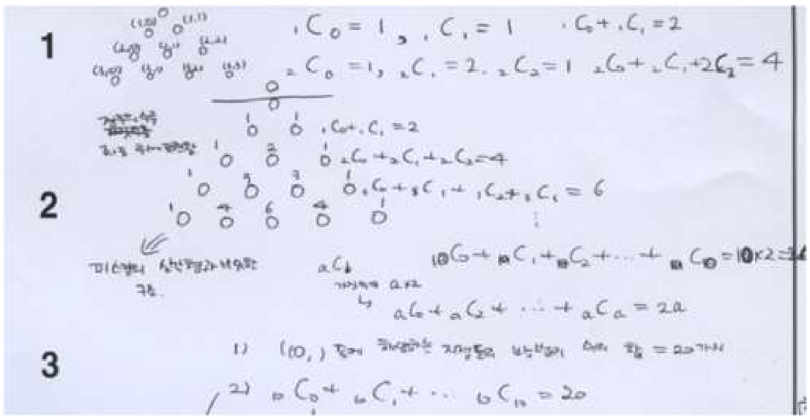
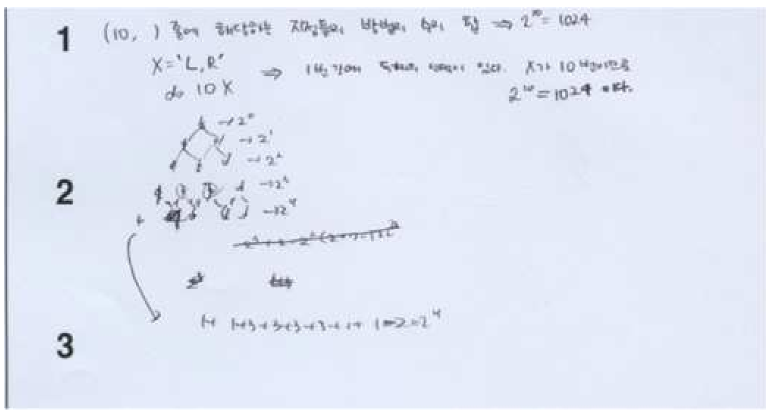
점에 해당하는 경로를 표현하고 이를 실행하였을 때 그들은 자신이 구성한 치환 문자 사이의 관계성을 파악한다. 지점의 대칭성은 치환문자의 L과 R의 개수의 대칭성으로 확인이 되며 이는 자신의 아이디어를 정당화할 이야기의 표현 체계로 작용한다. 이를 통해 학생들은 좀 더 수학적으로 엄밀한 조합론적 스토리텔링(combinatorial storytelling)을 가능하게 한다.

<table>
<tr><th>번호</th><th>과제</th></tr>
<tr><td>1</td><td>
</td></tr>
<tr><td>2</td><td>
</td></tr>
<tr><td>3</td><td>
</td></tr>
</table>

[그림 Ⅳ-3] 학생들에게 주어진 조합론적 논증 과제

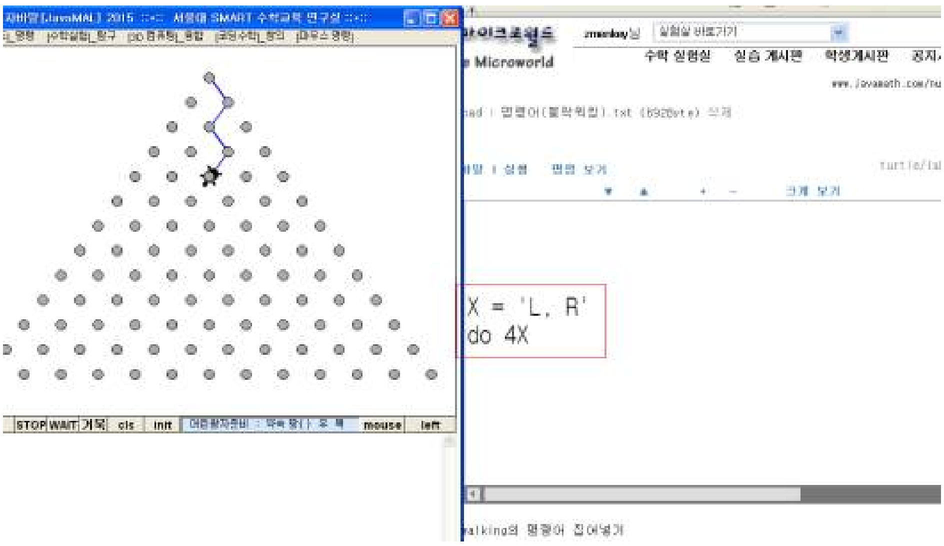
예를 들어 도로망 방법에서 제시하는 '같은 가로줄에 경로의 수의 합'을 이용한 이항 항등식 정당화 과정을 살펴보자. 과제는 Radford (1999)가

학습자의 일반화 과정을 탐구하기 위한 과제를 토대로 하여 만들었다. 즉 가로줄이 같은 지점의 합에 대한 초기 패턴을 보여준 후 이를 바탕으로 비약적인 단계의 숫자에 대한 패턴을 찾게 하도록 하였다[그림 Ⅳ-3] 학생 S3은 구성활동 전 ‘소박한 정당화’, 즉, 몇 단계의 패턴의 숫자를 계산한 후 그 규칙을 가지고 귀납적으로 정당화하는 과정을 보여주었다. Radford & Peirce(2006)에게 있어서 이 과정은 초기 패턴을 가지고 진행한 단순한 귀납법이지 일반화라고 할 수는 없다.

활동전	
활동후	

[그림 Ⅳ-4] 학생 S3의 과제에 대한 반응

학생 S6의 활동지인 [그림 Ⅳ-4]의 구성 활동 전을 보면 지점에는 각각의 경로의 개수가 올바르게 적혀있으나 이를 합한 숫자는 올바른 패턴의 숫자가 아닌 2의 배수로 적혀 있었다. 이는 초기에 보여준 2 단계까지 패턴이 2, 4로 진행되었기에 바로 이 학생은 2의 배수가 해당 패턴의 규칙이라고 생각한 것이다. 이 소박한 귀납법은 이 학생의 사고를 지배하여 위와 같은 오류를 범함과 동시에 추후 ‘어떤 가로줄’에 대한 답을 결국 $2x$라고 주장하였다. 한번 귀납된 규칙은 사전지식 및 기본적인 셈하기보다 더 강력하게 학생에게 작용하여 기본적인 검토 과정조차 하지 않게 되어 자신의 오류를 인식 할 수 없게 한다.



[그림 Ⅳ-5] 학생 S3이 작성한 실행식과 실행 결과

이 학생은 구성 활동 후에 다시 정당화 하는 과정에서 [그림 Ⅳ-5]와 같은 실행식을 구성하였다. 이를 실행해 본 결과 마이크로월드는 항상 4번째 가로줄에 거북이가 도착한다는 것을 보여주었다. 이 학생은 이를 통해 치환 문자 X= ‘L, R’을 이용하여 조합론적 논증을 시도하는 모습을 보였다. X = ‘L, R’이라는 치환 문자를 ‘한 번 내려갈 때마다 두 가지의 선택 사항이 있다.’라는 상황으로 체화하여 이를 통해 5번 내려갔을 때의

상황으로 재해석하여 올바른 규칙을 발견하는 모습을 보였다[그림 Ⅳ-4]. 이 학생이 학생들 앞에서 실시한 발표의 내용은 Tucker(2002)가 제시한 도로망 방법의 조합론적 논증과 일치하는 내용이었으며 이 학생은 추후 진행된 문자 n을 이용한 실행 가능한 표현 체계를 경험한 후 변수 n을 이용한 일반화에 성공하였다.

도로망 방법 탐구 프로그램을 통해 조합론적 논증을 경험해 본 학습자들에게 RBW 학습 환경을 제시하여 확률 상황에 이러한 경험을 이용할 수 있도록 하고자 하였다. 즉, 선행 지식으로 L과 R이라는 실행식을 통해 해당 지점의 경로의 개수와 조합이라는 경로의 수가 일치한다는 것을 확인한 학습자에게 해당 경로를 500번 반복하여 그 도착 횟수로 확률적 사고를 하게 하는 방식으로 학습 환경을 전환해 주었다.

위 학습 환경에 따른 변화를 관찰하기 위해 이항 분포 과제로 자주 등장하는 동전 던지기에서의 뒷면의 횟수 문제를 제시하였다. 이 과제와 관련하여 구성 활동 전과 후로 나누어 과제 수행을 실시하고 그 변화를 관찰하고자 하였다. 문제는 아래와 같다.

[문제 1]
천기는 동전 한 개를 5번 반복하여 던졌습니다. 이 때, 다음 보기 중에서 뒷면의 횟수가 몇 번이 나올 가능성이 가장 크다고 할 수 있습니까?
① 0 ② 1 ③ 2 ④ 3 ⑤ 4 ⑥ 5
⑦ 가능성이 모두 같다

구성활동 전 수업에 참여한 학생들 대부분은 주어진 문제의 답을 '가능성이 모두 같다'라고 답하였다. 즉 횟수에 상관없이 나올 가능성을 모두 같다고 생각하였다. 구성활동은 위의 [문제 1]을 거북이의 움직임의 상황에 맞추어 도로망 방법 탐구 프로그램에 주어진 현상에 대입하기 위해 동형인 과제 [문제 2]를 동시에 제시하였다.

[문제 2]
거북이가 주어진 지점에서 5번 내려갔습니다. 이 때, 다음 보기 중에서 오른쪽으로 간 횟수가 몇 번이 나올 가능성이 가장 크다고 할 수 있습니까?
① 0　② 1　③ 2　④ 3　⑤ 4　⑥ 5
⑦ 가능성이 모두 같다

그 후 위의 과제를 RBW 구성활동을 통해 해당 도착지의 도착 빈도수를 통해 사고 실험을 하게 한 후 학습자들에게 재차 과제의 답을 구하도록 하였다. 그 결과 학습자들의 답은 여전히 '가능성이 모두 같다'로 대답한 학생들이 많았다. 도착지의 도착 빈도수가 서로 다른 상황임을 인식했음에도 불구하고 이 라벨이 의미하는 바가 무엇인지를 깨닫지 못한 채 종전에 파악했던 방식대로 문제를 해결하는 학습자가 대부분이었다. 이 구성 활동 전에 선행 지식으로 쌓은 경로의 수를 이용한 경우의 수에 대한 지식이 이 확률 과제에도 영향을 미치길 기대했지만 많은 학생들이 여전히 자신의 확률적 오개념에 편향된 사고를 하는 학생들이 많았다.

이는 해당 학습 환경의 기초가 되는 이론인 '조합론' 분야가 여전히 많은 학생들에게는 어려운 내용으로 자리 잡고 있었으며 또한 환경 설계 자체가 경로의 수 탐구 환경과 RBW 환경이 서로 개별적으로 설계되어 연관성이 부족하다는 데에 그 이유를 논해볼 수 있다. 또한 다음 장에서도 언급할 위 과제의 학습자들의 확률적 오개념이 올바른 확률적 사고로 전환시키기 매우 어렵다는 점을 보여주고 있다.

다만, 몇몇 학생들은 이에 위 과제에 대한 답을 바꾸어 제시한 학생들이 존재하였으며 그 정당화 과정을 이전에 배운 경로의 수에서 찾고자 하였다. 학생 S4는 구성 활동 중에 아래와 같은 질문을 던졌다.

S4 : 선생님 질문이 있는데요. 5개 중에 두 번 앞면이 나오는 상황이요. 2번 앞, 3번 뒤 나오면 되잖아요.
T : 그렇죠.

S4 : 뒤뒤뒤앞앞 하고 앞앞뒤뒤뒤도 결국 이 지점에 해당하는 거잖아요
T : 그렇죠
S4 : 그럼 이 두 개를 다른 거로 해석해야 해요? 즉, 순서를 고려해야 해요?

이 학생은 추후 진행된 발표 시간에 앞으로 나와 다음과 같은 발표를 진행하였다.

S4 : 어! 이 문제의 모든 확률이 다 같은 게 아닌 게, 이게 아까 생각했던 것처럼 모든 확률을 $\frac{1}{2^5}$이라고 생각했을 때, 모든 확률을 더해서 1이 나와야 하는데 그게 안 나와요. 아니고요.
S4 : 예를 들어 두 번 앞면이 나오는 거는요. 앞앞뒤뒤뒤, 뒤뒤뒤앞앞 이런 게 다 다르니까, 이런 거 다 세보면 ${}_5C_2$ 이니까요. 결국 확률은 $\frac{1}{2^5}$이 아니라 가 ${}_5C_2\times\frac{1}{2^5}$ 나오고요. 그래서 답은 2하고 3이 제일 커요.

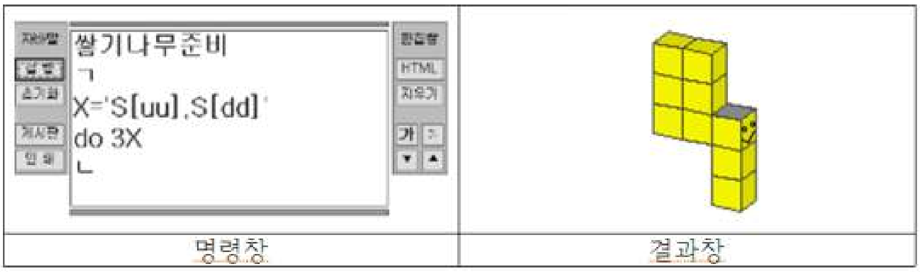
학생 S4에게 있어서 RBW의 지점은 5번의 시도 중에서 오른쪽이 나오는 횟수임과 동시에 해당 지점까지 가는 경로의 수로 인식이 되었다. 이를 통해 경로의 수가 가장 많은 지점을 찾아 그 지점의 확률이 가장 높을 것으로 파악하고 이를 조합론적 논증으로 정당화 하는 과정을 보여주었다. 이 학생은 이를 통해 '독립시행의 확률'이라고 하는 학교 수학의 내용의 아이디어를 도출해 내는 데까지 성공하였다. 대부분에 학생들에게 위의 확률 오개념을 개선시켜주는 데에는 실패했지만 좀 더 위의 아이디어를 보완하여 학습자의 수준에 맞게, 그리고 경우의 수 학습과 확률 학습 사이의 연결성을 향상시켜 주는 방향으로 환경을 개선하면 어린 학생들에게도 확률 편향성을 개선시켜 줄 수 있다는 가능성을 확인할 수 있다.

4.2. 초등학생 대상 탐구 프로그램 적용 결과

S시 소재 초등학생을 대상으로 진행된 2차 적용 연구의 프로그램은 앞서 중학생 대상 도로망 탐구 프로그램 적용 연구에서 제시된 과제, 즉 이항 분포 상황에서 사건의 발생 횟수에 따른 확률을 같은 확률로 가정하고 생각하는 오개념에 초점을 맞추었다.

그 결과 60명의 학생 중 약 78% 해당하는 학생이 해당 확률이 모두 같다고 가정하였으며 그렇게 대답하지 않은 학생들의 답변도 역시 '횟수에 절반 정도가 많이 나올 것 같다'는 직관적인 사고에 의존하는 모습이었다. 단 한 명의 학생만이 표본 공간 내의 표본 집합을 고려하여 옳은 답변을 하는 모습을 보였다. Peard(1996)과 Chernoff & Zazkis(2011)가 언급한 이러한 오개념은 확률적 경험이 적은 어린 학습자일수록 그 오개념의 발생 가능성이 좀 더 높은 것을 확인할 수 있다.

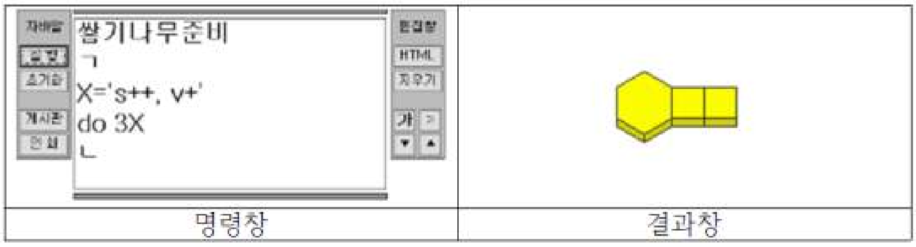
초등학생 대상 이항 분포 탐구 프로그램은 학습자에게 표본 공간 내에 있는 표본 집합에 대한 구조를 조기에 구성하게 해주기 위한 기대로 출발하였다. 먼저 '린덴마이어 확률 표현' 실행식을 쌓기 나무 마이크로월드에 코딩하는 구성 활동을 먼저 실시하였다. 이는 학습자에게 '린덴마이어 확률 표현'을 통해 모델링 된 현상을 확률적으로 다르게 실행하게 해주어 해당 과제의 모든 경우의 수를 시각화하게 하는 역할을 하였다



[그림 Ⅳ-6] 쌓기 나무 마이크로월드 기반 경우의 수 시각화

또한 '린덴마이어 확률 표현'의 두 가지의 선택 사항의 횟수를 제한해

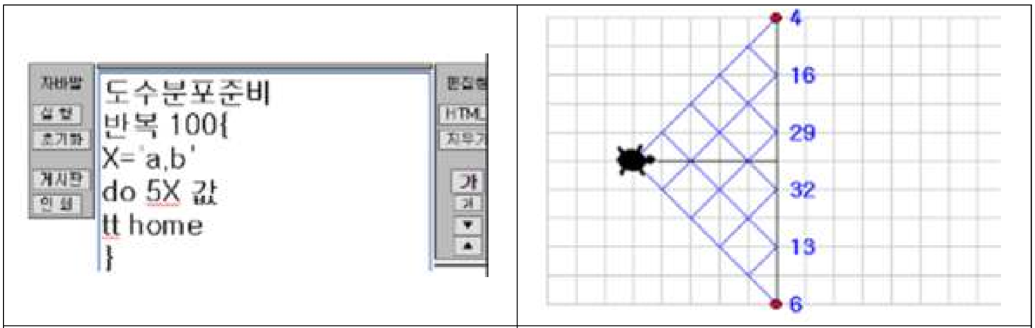
주는 실행식인 '+'를 이용하여 횟수가 두 가지의 선택사항의 횟수가 고정된 상황에 대한 실행식을 코딩할 수 있도록 구성활동을 실시하였다. 즉, X = ' s++, v+'라고 놓으면 이는 육각기둥 (s)이 2개까지만, 그리고 정육면체(v)가 하나까지 실행될 수 있는 상황[4)]으로 바뀌게 되어 실행이 된다. 이를 실행해보면서 각각의 결과의 경우의 수를 판단함으로써 '표본 집합'이라는 것을 경험할 수 있도록 유도하였다.



[그림 Ⅳ-7] 실행식 '+'를 이용한 린덴마이어 확률 표현

이와 같은 경험은 이항 분포의 실제 확률 변수, 즉 사건의 횟수를 다루기 전 현상의 모든 경우의 수를 하나하나씩 확인해 볼 수 있게 해 준다. 즉, 횟수라는 변수로 표본 공간을 생성하기 전 그 표본 공간 안에 있는 표본 집합을 경험하게 해 준다. 그리고 이후에 위 '쌓기나무준비'라는 명령을 '도수분포준비'로 바꾸는 활동을 통해 '위', '아래' 쌓기 나무로 코딩된 경우의 수를 '위', '아래'로 가는 거북이의 움직임으로 전환해주고 이를 '반복' 명령으로 원하는 만큼 반복하게 하여 그 도착 횟수를 사고의 대상으로 고려하게 하는 구성활동을 실시하였다. 다시 말해, '위', '아래'라는 두 가지 선택사항으로 만들어 줄 수 있는 경로의 수 자체의 표본 집합을 해당 도착지를 통해 위로 몇 번 올라갔는가에 대한 횟수로 파악하게 하여 표본 공간으로 전환시키는 아이디어를 적용했다. 그리고 도착지 옆에 라벨처럼 붙어있는 빈도수는 해당 변수의 확률을 어림잡아 계산할 수 있게 해 주는 확률 실험을 실행식으로 구성하였다.

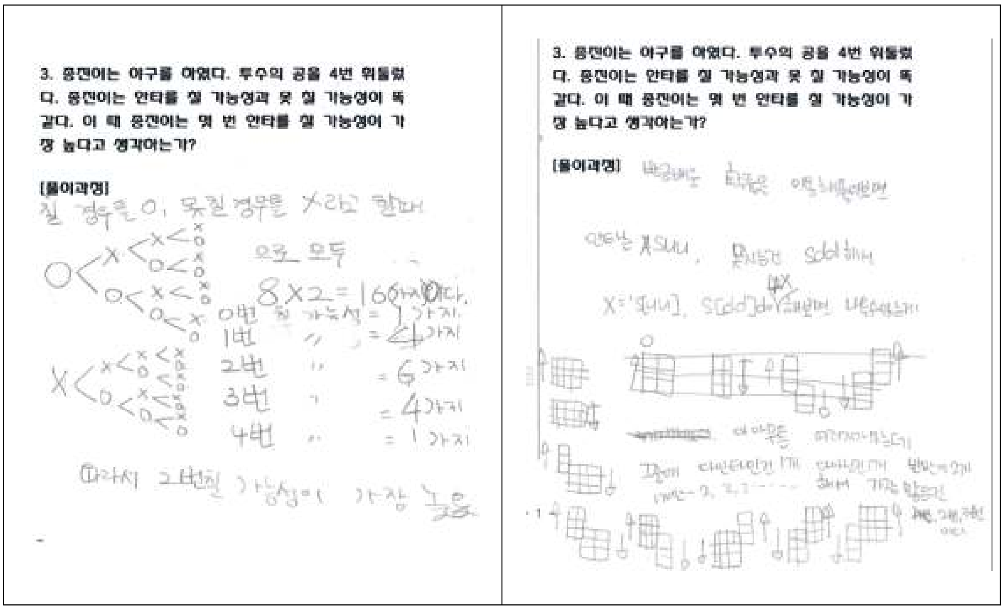
4) 이는 동전의 예로 들면 동전을 3번 던졌을 때, 앞면이 2번 그리고 뒷면이 1번인 경우의 수를 실행식을 통해 마이크로월드에 구현하게 하고자 하는 의도가 숨겨져 있다.



명령창	결과창

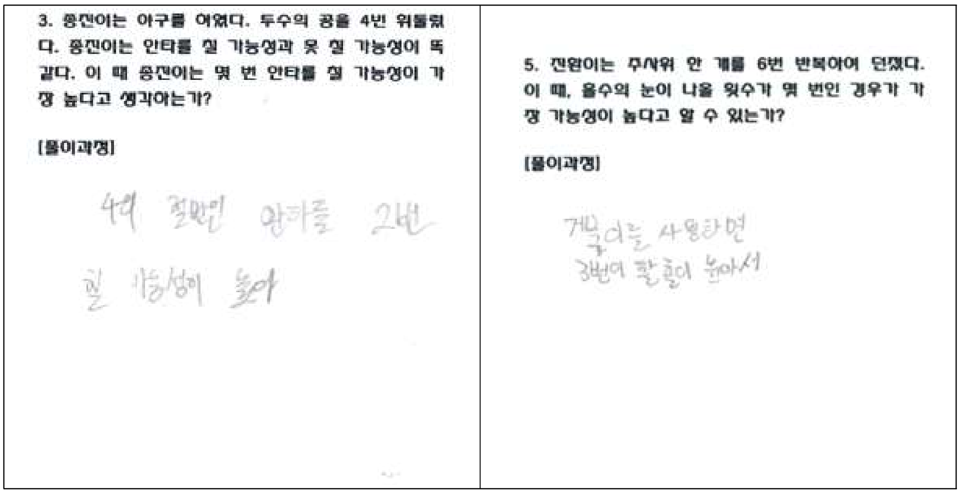
[그림 Ⅳ-8] 기본 이항 분포 탐구 프로그램

이와 같은 구성활동을 진행하고 난 후 똑같은 유형의 문제로 사후 시험을 진행한 결과 학습자들의 확률적 사고의 많은 변화가 일어났다. ‘모두 같다’라고 대답한 학생은 15%에 불과했으며 85%에 해당하는 학생들이 해당 시행 횟수의 가운데 횟수에서 답을 찾고자 하였다. 즉, 이항 분포에 대한 ‘중심 경향성(central tendency)’를 가지게 되었다는 점이다.



[그림 Ⅳ-9] 유형 1 : ‘표본 집합’의 구성을 통한 확률적 판단

흥미로운 점은 중심 경향성을 가지게 된 학생들의 정당화 방식이 다양했다는 점이다. 그 유형을 크게는 세 가지로 나누어 보았다. 첫 번째 유형은 대다수의 학생이 시도한 유형으로 해당 문제에서 나올 수 있는 모든 ‘표본 집합’을 나열한 후에 이를 통해 ‘표본 공간’의 개수를 세어서 가장 많은 경우의 수가 나오는 변수를 답으로 선정하는 유형이다. 표본 집합을 나열하는 방법은 사건의 발생 유무를 ‘O, X’로 파악하는 학생부터 ‘수형도’, 그리고 선행 학습으로 진행된 ‘쌓기 나무 마이크로월드’에 이르기까지 다양했다. ‘린덴마이어 확률 표현’을 기초로 한 경험이 학습자에게 ‘표본 집합’으로써 사고의 대상에 그대로 연결이 되어 확률적 사고를 할 수 있게 해 주는 징검다리 역할을 하였다.

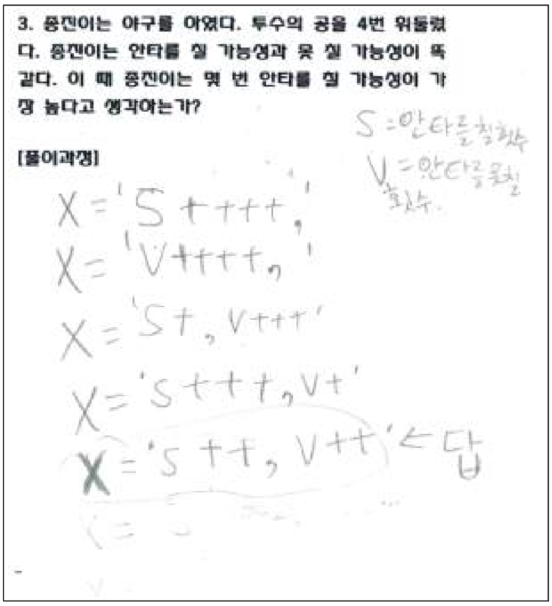


[그림 Ⅳ-10] 유형 2 : 사고 실험에 의존한 판단

두 번째 유형은 해당 학습 환경의 사고 실험 결과에 의존하는 경우이다. 즉, 문제의 현상을 그대로 학습 환경에 담아 거북이라는 에이전트에게 실행이 되었을 때 그 결과를 몇 번 진행한 후 이를 귀납적으로 해당 문제의 해답으로 사용한 경우이다. 현상을 모델링한 해당 설계 환경의 사고 실험은 주어진 변수들의 빈도수를 그대로 학습자에게 보여준다. 이를 통해 확률적으로 이 변수가 가장 높다고 판단함에는 연역적인 알고리

즘의 필요가 없다. 몇몇 학생들은 이러한 반복되는 사고실험을 통해 그저 이러한 현상은 가운데가 가장 많을 것으로 보인다고 단정을 지어 버리는 학생들도 있었다.

마지막 유형으로는 해당 과제의 정당화를 자신이 코딩한 실행식에서 찾고자 하는 학생이다. 즉, 해당 문제의 두 가지 요소, 즉 사건의 발생 유무를 종전의 쌓기 나무의 두 가지 표현으로 나누어 이를 실행식으로 코딩하는 작업을 하였다. 그리고 이 실행식의 결과를 기억하여 이를 통해 해당 답변의 정당화를 이끌고자 하는 노력을 하였다. 실행식 자체는 마이크로월드에 에이전트를 원하는 방향대로 옮길 수 있는 실행 가능한 표현체계이자 학습자에게 정당화 도구로 쓰일 수 있는 언어 체계가 될 수 있다.


3. 종진이는 야구를 하였다. 투수의 공을 4번 휘둘렀다. 종진이는 안타를 칠 가능성과 못 칠 가능성이 똑같다. 이 때 종진이는 몇 번 안타를 칠 가능성이 가장 높다고 생각하는가?

[풀이과정]

[그림 Ⅳ-11] 유형 3 : 실행 가능한 표현을 통한 정당화

본 연구에서 제시한 세 가지의 기본 실행식을 통한 확률 학습 환경은 학습자에게 강하게 작용하고 있는 '표본 공간에 대한 동 확률의 가정'이라고 하는 편향성에 어느 정도 영향을 줄 수 있는 환경으로 도입될 수

있다. 또한 실행식 자체에서 제공하는 ‘표본 집합’에 대한 경험은 그대로 에이전트의 움직임으로 체화된 확률 상황으로 연결되어 학습자의 판단을 올바르게 하게 해 주는 가능성을 부여함과 동시에 이에 대한 정당화 도구를 제시하는 학습 환경으로서 역할을 하였다.

V. 요약 및 결론

1. 요약

확률은 그 분야의 특성상 비결정론적인 성격을 지니기 때문에 알고리즘과 연역적인 방식으로는 한계점이 존재하며 다양한 오개념을 가질 수 있는 학습 대상이다. 이에 많은 연구들은 확률 지도에 있어서 귀납적으로 실험을 할 수 있는 학습 환경에 초점을 맞추기 시작했으며 이러한 방법론적 수단으로 테크놀로지의 힘을 빌리기 시작했다. 하지만 종전의 테크놀로지 기반 시뮬레이션 환경은 학습자의 확률 편향성을 바꿀 수 있다는 장점을 지니고 있지만 적절한 언어를 제시하지 못함으로써 자신의 사고에 대한 정당화 과정을 할 기회를 창출하지 못하는 한계점을 가지고 있었다.

Computational thinking 역량 강화의 목소리가 높아지고 확률 학습 환경에 대한 변화의 요구가 높아지면서 많은 확률 교육 연구는 프로그래밍 언어를 이용하여 학습 환경을 설계하는 것에 초점을 맞추었다. 하지만 전문적인 프로그래밍 언어는 너무 난해하게 제작되었으며 교육용 확률 학습 환경은 대부분 충분한 프로그래밍 언어 체계를 제시하지 못하고 있다는 지적이 있었다.

이에 본 연구에서는 기존의 확률 교육의 한계점을 극복할 수 있는 확률 학습 환경을 위해 실행 가능한 표현 기반 확률 학습 환경을 모색하였다. 이에 JavaMAL 마이크로월드를 기초로 하여 '이항 분포'라고 하는 확률론의 한 분야를 선정하여 이를 실행 가능한 표현으로 모델링하여 학습자가 스스로 구성할 수 있는 학습 환경을 설계하기에 이르렀다. 본 연구에서는 다음과 같은 연구 문제를 제시하였다.

연구 문제 1. 실행 가능한 표현 기반 이항 분포 학습 환경을 어떻게

설계할 수 있는가?

연구 문제 2. 실행 가능한 표현 기반 이항 분포 학습 환경을 통해 어떠한 수업을 제시할 수 있는가?

연구 문제 3. 실행 가능한 표현 기반 이항 분포 학습 환경은 기존의 확률 학습 환경과 비교하여 어떠한 의의가 있는가?

위의 연구 문제에 대해 논의하기 위하여 본 연구에서는 아래와 같은 과정으로 연구를 진행하였다,

먼저 확률 프로그래밍 언어 기반 학습 환경의 장점 및 단점에 대해 알아보았다. R언어 SPSS와 같은 전문적인 확률 프로그래밍 언어에서부터 ABM 기반 확률 학습 환경인 NetLogo, ProbLab등과 같은 기존의 확률 학습 환경에 대해 알아보고 이러한 확률 프로그래밍 언어의 개선해야 할 점을 찾아보았다.

그리고 이러한 문제점을 개선해 줄 도구로 실행 가능한 표현을 선정하여 이에 대한 이론적 배경을 얻고자 하였다. 최근 전 세계적으로 각광을 받고 있는 computational thinking의 진행 상황 및 정의에 대해 다루고 이 사고력이 수학 학습에 끼칠 영향에 대하여 살펴봄으로써 실행 가능한 표현의 틀을 잡았다. 또한 이러한 '실행 가능한 표현'을 통해 에이전트의 움직임으로 확률 현상을 모델링하고자 했던 본 연구의 취지에 기반이 되는 Papert(1980)의 constructionism에 대해 알아보았다. 또한 '거꾸로 교실'로 명명하고 있는 수업 패러다임을 이론적 배경으로 하여 본 연구의 학습 환경의 효과를 극대화 할 수업 모델을 제시하고자 하였다.

이론적 배경을 토대로 여러 확률 개념 중 거북이의 '몸짓 언어'로 모델링하는데 용이한 확률 상황인 '이항 분포'를 선정하여 실행 가능한 표현 기반 이항 분포 탐구 프로그램을 설계하였다. 이항 분포 현상의 핵심 요소를 모델링 할 수 있는 실행 가능한 표현을 설계하고 이러한 표현이 실

행되었을 때 시뮬레이션 될 마이크로월드 결과창을 구현하였다. 설계된 학습 환경을 토대로 학교 현장에서 직접 적용해 볼 수 있는 확률 현상을 선정하여 확률 실험을 설계하였으며 이러한 확률 학습 환경에 적절한 수업 모델을 제시하였다. 두 번에 거친 적용 결과를 통해 학습 환경을 수정·보완하여 연구 참여자의 피드백을 바탕으로 결과를 정리하였다.

이상의 절차를 통한 각 연구 문제에 대한 결과는 다음과 같다.

연구 문제 1에서 이항 분포의 핵심 사항, 즉, 주어진 사건의 발생 유무에 따라 확률적으로 사고해야 하는 현상에 대한 모델링 표현 체계를 구축해야 했다. 이에 JavaMAL 마이크로월드 상에서 거북이라는 에이전트의 '왼쪽, 오른쪽' 혹은 '위, 아래'와 같은 대비되는 '몸짓 언어'를 기초로 하는 실행 가능한 표현 체계를 설계하고자 하였다. 수학 언어 체계와 시뮬레이션 환경을 구축하게 할 코딩 언어 등으로 실행식 체계를 구성하였으며. 사건의 발생 유무를 확률적으로 발생시킬 표현 체계로 L-system의 아이디어를 차용한 '린덴마이어 확률 표현'을 설계하였다. 즉 주어진 치환 문자에 두 가지의 양분된 사항을 표현하여 이항 분포 현상을 모델링하고자 하였다. 그리고 이를 실행시킴으로써 거북이의 움직임으로 주어진 현상을 시뮬레이션 하게 하여 확률 실험을 구축하고 학습자에게 'What if?' 전략에 입각한 다양한 확률적 사고를 돕도록 환경을 설계하였다.

먼저, 중학교 학생들을 대상으로 한 '도로망 방법 탐구 프로그램'과 'RBW 확률 탐구 프로그램'은 Tucker(2002)가 제시한 도로망 방법(block walking method)이라는 조합론 분야의 방법론이 학습자의 확률적 판단에 영향을 주기를 기대하며 설계하였다. 파스칼의 삼각형과 동일한 경로 배치에 해당 에이전트가 출발점에서 'L, R'이라는 두 가지 선택사항으로 내려간다는 현상으로 모든 이항 분포 상황을 모델링 하고자 하였으며 이를 치환문자와 랜덤워크 디자인이라는 실행 체계를 접목시켜 JavaMAL 마이크로월드 게시판에 학습 환경을 설계하여 제공하였다.

이 후 이 학습 환경의 보완점, 즉, 학습자가 코딩할 수 있는 실행 가능한 표현 체계가 부족하다는 점, 해당 경로의 배치가 고정 되어 있다는 점, 그리고 기존 랜덤워크의 모델과 유사한 방식으로 자연스럽게 디자인 하여야 한다는 점 등을 반영하여 초등학교 학생들을 대상으로 새로운 학습 환경을 제시하였다.

Papert(1980)가 강조한 학습 환경의 방향성은 학습자가 모국어를 다루듯이 자신의 실행식을 다루어 좀 더 적극적인 도구를 다루는 능력을 길러야 한다는 것이었다. 이를 반영하여 학습자가 직접 다룰 수 있는 기본적인 실행식 세 가지와 다양한 코딩 언어를 가지고 구성 활동을 설계하였다. 종전의 학습 환경에서 제시한 L-system 기반 '린덴마이어 확률 표현'을 거북이의 움직임으로 현상을 전환시킴과 동시에 해당 도착지점의 빈도수를 통해 경우의 수와 확률 판단 사이의 연결성을 도모한 '도수분포준비 및 반복'을 첨가하였다. 그리고 Gigerenzer & Hoffrage(1995)의 아이디어를 반영하여 도착지의 빈도수를 자연수로 라벨처럼 달아 직접 확률 계산을 시행해 볼 수 있게 하는 실행식인 '값'을 도구로 제시하였다.

먼저 이 '린덴마이어 확률 표현'을 쌓기 나무 마이크로월드에 표현해 보는 구성활동을 통해 먼저 현상의 모든 경우를 확률적으로 표현해 주는 실행 가능한 표현을 구성한 후 바로 '도수분포준비'로 전환하여 현상의 모든 경우를 사건의 발생 횟수에 따른 표본 공간으로 집합시키게 함으로써 확률 사고에 도움이 될 수 있도록 설계되었다.

연구 문제 2에서는 먼저 초등학생 대상 이항 분포 학습 환경에서 쓰인 실행 가능한 표현 체계에 대해 재해석하였다. 본 연구의 실행 가능한 표현 체계의 궁극적인 목적은 이항 분포와 관련한 현상에 대한 모델링과 이에 대한 즉각적인 피드백이 될 시뮬레이션에 있다. 본 연구의 프로그램에 쓰인 실행 가능한 표현은 이항 분포 현상을 모델링 할 수 있는 '수학적 언어 표현'을 제공함과 동시에 마이크로월드 상의 거북이의 경로

생성을 시뮬레이션 함으로써 '분포의 시각적 표현'을 제공한다.

이러한 실행 가능한 표현에서 제공하는 언어 표현 체계와 시각적 결과물은 학습자에게 'What if?' 전략에 기초한 확률 실험을 가능하게 해 준다. 즉, 현상에서 핵심 요소를 모델링 하고 해당 실행식 체계에서 수정을 통해 지속적인 실험을 가능하게 할 수 있도록 언어 체계를 설계하고 이를 통해 랜덤워크 기반 시뮬레이션 표현을 통해 즉각적 피드백을 받을 수 있도록 제작되었다. 이를 통해 자신의 확률적 사고를 올바른 확률적 직관으로 바꿀 수 있는 경험을 할 수 있다.

거북이라는 에이전트의 상반된 두 가지의 움직임을 수식으로 표현하여 사건의 발생 유무를 모델링 할 'a, b'라는 기본 수식을 기초로 'X, p :'와 같은 '수식 체계'로 이루어져 있다. 뿐만 아니라 computational thinking 역량 강화의 취지에 부합하면서도 최종적으로 학습자 스스로 확률 실험을 구성할 수 있게 하는 '도수 분포 준비, 반복, 약속' 등과 같은 '코딩 언어'로 이루어져 있다. 기존의 프로그래밍 언어 기반 확률 학습에서 지적되고 있는 난해함을 극복하고자 학습자에게 친숙한 수식과 일상 언어로 구성하고자 하였으며 이러한 언어 체계는 기존에 시뮬레이션 확률 학습 환경에서는 제공하지 못하였던 의사소통의 역할을 할 언어 체계를 부여해 줄 수 있다.

이러한 실행 가능한 표현 체계로 교사가 학교 현장에서 학습자에게 제시할 수 있는 현상은 매우 다양하다.

첫 번째로, 여러 연구에서 밝혀진 바 있는 확률적 오개념, 즉 학습자가 이항 분포의 확률 변수인 '사건의 발생 횟수'에 대하여 횟수에 관계없이 모두 확률이 같다고 가정을 하는 오개념을 극복할 수 있는 구성 활동이 가능하다. 이를 극복하기 위해선 '독립 시행의 확률'이라는 학교 수학의 내용을 학습자에게 가르쳐야 하지만 학교 수학에서는 공식화시켜 이를 통해 현상에 접목하게 하는 연역적 방식을 취하고 있다. 게다가 해당 확률 개념은 매우 난해하여 어린 학생일수록 그 확률적 개념을 이해하기가 힘들다. 본 학습 환경은 '린덴마이어 확률 표현'에 대한 실행 및 피드백

을 통해 해당 표본 공간 내의 '표본 집합'에 대한 경험을 가능하게 한다. 그리고 이 '린덴마이어 확률 표현'을 거북이의 '몸짓 언어'로 시뮬레이션 했을 때의 각각의 변수의 빈도수가 다르다는 점을 인식, 이를 앞서 경험한 '표본 집합'에 근거하여 그 정당화가 가능하도록 하는 구성 활동을 제공해 줄 수 있다.

두 번째로, 학교 수학에서 제시하는 이항 분포 알고리즘에 핵심 요소인 사건의 발생 확률, 그리고 시행 횟수를 변화를 줌으로써 확률 실험을 진행 할 수 있다. 치환문자 X의 실행 횟수를 바꾸면 시행 횟수에 따른 분포 상황을 피드백으로 받아 사고 실험을 할 수 있게 된다. 이러한 확률 실험을 위해선 '약속' 명령을 통한 경로의 길이의 조정이 필요하며 이러한 구성 활동은 computational thinking 역량 강화를 가져올 하나의 코딩 교육이 될 수 있다. 또한 '린덴마이어 확률 표현'의 두 가지 '몸짓 언어'의 확률을 조절함으로써 사건의 발생 확률에 따른 분포 상황을 실험해 볼 수 있다. '린덴마이어 확률 표현'에 'p :'라는 실행식을 접목, 확률 에이전트를 만들어 냄으로써 다양한 이항 분포 현상에 대한 시뮬레이션이 가능하다.

이러한 실행 가능한 표현 기반 학습 환경을 좀 더 학습자에게 알맞은 수업 형태로 제시하기 위해서 본 연구에서는 거꾸로 교실 통한 수업 모델을 제시한다. 인터넷 기반 학습 환경은 동영상, 학습 환경 게시판 등을 통해 학습자가 실행 가능한 표현 체계를 학습하고 교실 환경을 벗어나 다양한 현상을 미리 사고 실험할 수 있는 환경을 제공해 줄 수 있다. 또한 댓글 혹은 그룹 채팅과 같은 방식으로 학습자간의 또는 학습자와 교사·컴퓨터 간의 의사소통을 원활하게 진행하게 해 준다. 교실 수업에서는 이러한 경험을 바탕으로 토론 학습 및 교사의 적절한 정리 학습으로 학습자의 사고 과정 속의 올바른 확률적 직관을 가지게 할 수 있다. '확률 오개념 극복 교수학적 상황 진행 단계(신보미 & 이경화, 2006)'에 기초한 본 연구의 수업 모델은 실행 가능한 표현 기반 환경에 기대 효과, 즉, 현상에 기초한 확률 실험 기반 학습과 원활한 의사소통을 가능하게

해 줄 수 있는 수업 모델이다.

연구 문제 3에서는 실행 가능한 표현 기반 이항 분포 탐구 프로그램이 기존의 확률 학습 환경에 견주어 어떠한 의의가 있는지를 살펴보았다. 본 프로그램의 가장 큰 특징은 다른 확률 학습 프로그램에 비하여 실행 가능함(executable)을 전제로 한 언어 체계 자체를 수면 위로 끌어 올렸다는 점이다. 본 연구에서 제시하는 실행 가능한 표현은 현상에 대한 자신의 사고를 명령창 내에 쉽게 언어화할 수 있도록 설계되어야 했으며 이러한 언어 표현 자체가 현상의 핵심 개념이 숨어 있게 해야 했다. 이러한 설계 의도로 본 실행 가능한 표현은 가능한 쓰기 쉽고 친숙한 일상 언어와 수식 기호로 제작되었으며 각각의 표현의 의미는 현상 내의 구조를 함축적으로 보유할 수 있도록 제작되었다.

이러한 설계 방식으로 기대할 수 있는 효과는 두 가지이다. 첫째로, 현상으로부터 출발하는 실험 기반 학습이 가능해진다. 기존의 프로그래밍 언어보다 친숙하고 쉽게 전이가 될 수 있도록 설계된 실행 가능한 표현은 현상을 모델링 할 도구의 역할을 충분히 할 수 있다. 그리고 이러한 표현 체계는 시뮬레이션을 즉각적으로 실행하면서 피드백을 준다. 이러한 학습 환경은 학교 교실 환경에서는 제공할 수 없었던 귀납적 접근 방식으로 확률 학습을 가능하게 한다.

또 하나는 프로그래밍 언어를 통한 의사소통이다. 본 연구에서 가장 초점을 맞추고자 했던 바는 자신이 표현한 프로그래밍 언어 자체를 가지고 컴퓨터·교사·동료 학생들과 원활한 의사소통을 할 수 있도록 하는 것이었다. 본 연구는 모국어와 같이 쉬우면서도 강력한 아이디어(powerful idea)를 내포한 도구를 제공할 것을 강조했던 Papert의 constructionism을 배경으로 하였다. 이에 따라 이항 분포 현상의 핵심 아이디어인 ‘사건의 발생 유무’를 거북이의 ‘몸짓 언어’인 a, b로 설계하여 ‘사건의 발생 확률’, ‘시행 횟수’, ‘자연 빈도수’, ‘랜덤 워크’와 같은 구조를 일상 언어와 친숙한 수식으로 설계, 이를 통해 자신의 변화된 사고를 자연스럽게 의

사소통할 수 있도록 하였다. 이러한 설계 의도는 R언어와 SPSS와 같은 전문적인 확률 프로그래밍 언어 및 ProbLab과 같은 교육용 확률 소프트웨어에서는 구현할 수 없었던 적극적인 언어 표현이라고 할 수 있다.

본 연구에서는 두 번에 걸쳐 이항 분포 학습 환경을 실제 학교 현장에 적용해 봄으로써 위에서 언급한 의의를 확인해보고자 하였다. 아쉽게도 거꾸로 교실 수업 형태로 제시하기에는 시간과 공간의 문제가 있어 진행하지는 못하였다.

먼저 중학생 대상 탐구 프로그램인 '도로망 탐구 프로그램'과 'RBW 탐구 프로그램'은 S시 소재 중학교의 영재학급 학생 20명을 대상으로 적용 연구를 진행하였다. 적용 결과 학습자들은 L과 R이라고 하는 두 가지의 실행 가능한 표현을 가지고 거북이를 해당 도착지에 도착하게 하는 언어 표현 체계를 구성하였다. 그리고 이러한 표현체계를 정당화의 근거로 잡아 다양한 조합론적 논증을 하는 모습을 보였다. 게시글에 표현한 실행 가능한 표현 및 댓글 등을 통해 학습자끼리의 의사소통이 진행되었다. 학습자는 서로의 사고를 공유하면서 '도로망 방법'에서 얻어야 할 조합론적 구조를 파악하였다.

하지만 이러한 경험이 추후 구성활동에서 영향력을 주지는 못하였다. '도로망 방법'을 그대로 확률 과제로 전환하는 환경인 RBW 학습 환경을 학습자에게 제공받았다. 하지만 대부분의 학생들은 RBW에서 시각화 하고 있는 도착 지점에 서로 다른 빈도수를 보았음에도 불구하고 처음의 오개념을 그대로 고수하였으며 종전의 조합적인 아이디어와 RBW에서 제시하고 있는 확률 과제와 연결을 시키지 못하였다. 소수의 학생들만이 기존의 지점의 경로의 수를 가지고 해당 확률 과제의 답을 정당화하였으며 이를 통해 '독립시행의 확률'의 아이디어를 끌어내는 모습을 보였다. 이러한 이유를 조합론이라는 분야 자체가 학습자에게 난해하게 작용했을 가능성이 높으며 학습자가 쓸 수 있는 실행 가능한 표현 체계가 부족하다고 보고 이를 보완하여 좀 더 적극적으로 코딩을 통해 구성 활동을 할 수 있는 학습 환경을 설계하였다.

초등학생 대상 확률 학습 환경은 S시 소재 초등학교 6학년 60명을 대상으로 진행하였다. ‘린덴마이어 확률 표현’, ‘도수분포준비와 반복’, ‘값’이라는 세 가지 형태의 실행식을 통해 먼저 쌓기 나무 마이크로월드 기반 경우의 수 탐구 활동을 진행 후 이를 확률 상황에 적용하는 학습 방식으로 진행하였다. 그 후 학습자에게 중학생 대상 탐구 프로그램에서와 동일한 과제를 부여하였다. 그 결과 이항 분포 현상의 ‘사건의 발생 횟수’에 따른 확률에 대한 과제에 대한 해결 방식에 변화를 보였다. 사전 검사에서는 해당 변수를 같은 확률로 가정하였던 학생들이 사후 검사에서는 ‘중심 경향성(central tendency)’ 가지고 판단을 하기 시작했다. 그들의 정당화 과정은 크게는 세 가지의 유형을 보였는데, 첫 번째는 ‘표본 공간’ 내의 ‘표본 집합’을 시각적으로 구성하여 이를 통해 확률적으로 판단한 유형, 두 번째는 자신이 코딩을 통해 구성한 사고 실험에 의존하여 판단을 하는 유형, 그리고 마지막으로 실행 가능한 표현을 통한 실행식으로 표현된 코딩 체계를 바탕으로 정당화하려는 유형 등이 관찰되었다. 이 과정에서도 학습자는 실행 가능한 표현 체계 자체를 가지고 다양한 상호작용을 하였으며, 직접 제작한 실행 가능한 표현을 통해 적극적으로 실험하고 정당화하는 모습을 보였다.

2. 결론 및 제언

본 연구는 현재 학교 수학에서 제시하고 있는 확률 학습에 대한 문제점을 개선해야 할 필요성, 그리고 computational thinking 역량 강화에 대한 필요성이라는 두 가지의 큰 배경을 가지고 출발하였다. 기존의 연구에서 주장하고 있는 전제, 즉, 확률 학습 환경에 테크놀로지 기반 시뮬레이션 환경이 기존의 학교 현장에서 제공하지 못하는 실험 기반 환경을 제공할 수 있다는 전제를 본 연구에서도 따르고자 했으며 이에 기존의 프로그래밍 언어 기반 확률 학습 환경을 분석하였다.

그 결과 R언어나 SPSS와 같은 전문적인 프로그래밍 언어는 난해하다

는 이유로 전문가들에 의한 단순한 프로그래밍 도구로만 쓰이고 있었으며 학교 현장에 적용되고 있는 대부분의 시뮬레이션 프로그램은 클릭 및 드래그 혹은 숫자 대입과 같은 단순한 방식으로 제작되어 있어 현상을 모델링 할 수 있는 언어 체계가 부족했다. 즉, 프로그래밍 도구 자체가 학습자의 모델링 및 시뮬레이션 도구이자 의사소통의 요소로 활용되지 못하고 있었다.

본 연구는 이러한 문제점의 개선 방향으로 실행 가능한 표현을 제시한다. 설계자의 의도가 충분히 담긴 모국어와 같은 친숙하고 쉽게 쓰일 수 있는 언어 표현 체계를 설계하였다. 또한 이러한 언어 체계가 실행 가능함(executable)을 전제로 할 수 있도록 Papert의 constructionism에서 착안한 거북이의 시뮬레이션 마이크로월드에 이 언어 체계가 사용될 수 있도록 설계하였다.

'린덴마이어 확률 표현', '랜덤워크', '자연 빈도수'와 같은 수학적 언어를 기초로 하여 이항 분포 현상의 핵심 아이디어를 모두 거북이의 확률 경로로 표현할 수 있도록 이항 분포 탐구 프로그램을 제작하였다. 이를 통해 확률 사고 실험에 기초를 두어 'What if?' 전략을 써 가면서 귀납적으로 확률 학습을 할 수 있도록 유도하였다. 또한 이러한 실행 가능한 표현 체계 자체가 자신의 확률 사고의 정당화 도구로 쓰일 뿐만 아니라 다양한 의사소통의 장을 통해 컴퓨터나 타인과 원활한 의사소통을 할 수 있도록 하였다.

또한 이러한 실험적 접근, 의사소통이라는 기대 효과를 극대화 할 수 있는 수업 모델을 '거꾸로 교실'에서 잡아 시공간을 초월한 적극적인 수업 지도안을 설계하였다. 이 지도안에는 학교 현장에 직접 접목할 수 있는 교육과정 내의 구성 활동이 포함되어 있으며, 웹 기반 마이크로월드라는 환경을 충분히 활용할 수 있는 다양한 요소를 바탕으로 수업 지도안을 짰다. 적용 결과 학습자는 본 학습 환경에 실행식을 사용하여 거북이의 '몸짓 언어'를 통해 현상에 대한 실험을 하고, 이를 정당화의 도구로 이용하였으며 다른 학습자, 또는 컴퓨터와 상호작용하였다. 또한 이

를 통해 이항 분포에 대한 오개념을 극복하고 이론화 하는 모습을 보였으며 코딩 학습에 대한 즐거움을 느낄 수 있었다.

본 연구는 기존의 학습 환경에 비해 프로그래밍 언어 자체를 하나의 도구로 자유롭게 쓸 수 있게 하는 예시를 제시했다는 점에 의의를 둘 수 있다. 본 연구의 의도는 자신이 코딩한 실행 가능한 표현 자체가 학습자의 사고의 변화뿐만 아니라 이를 표현하고 말할 수 있게 하도록 하는데 초점을 맞추었다. 또한 거북이의 '몸짓 언어'를 통해 거북이의 확률적 경로라는 움직임으로 이항 분포 현상을 모델링하였다는 점에서, 다양한 현상을 하나의 마이크로월드에 모아서 구성 활동을 진행을 할 수 있다는 점에서도 의미가 있을 것이다.

하지만 본 연구에서는 몇 가지 한계점이 노출되었다. 본 학습 환경에서 제시하는 실행 가능한 표현은 이항 분포 현상과 관련한 모든 요소들을 모델링 할 수 있는 도구라고 보기에는 부족하다. 또한 적용 연구는 시간과 공간의 부족으로 인해 본 연구에서 제시하는 수업 모델에 맞는 형태를 제공할 수 없었다. 그 이유로 적용 연구 결과는 본 학습 환경 자체에 대한 협소한 결과만을 얻을 수 없었다. 또한 적용 대상이 소수의 인원으로 진행되었기에 학습자가 올바른 확률 사고로 바뀌는 데 도움이 되었다는 본 연구의 결과는 신뢰도가 떨어진다. 또한 이항 분포와 관련한 기본적인 현상을 가지고 몇 가지의 과제만을 다루었기 때문에 설계 의도대로 결과를 얻었다고 보기에는 어려움이 있다.

마지막으로 본 연구의 설계 과정과 논의를 바탕으로 다음과 같이 후속 연구를 위한 제언을 하고자 한다.

첫째, computational thinking 역량 강화의 목소리가 높아지는 현 시대에 프로그래밍 언어 자체가 학습자의 사고의 도구로써 전면에 부각되어야 한다. 코딩 교육은 최근 교육과정 내에 필수적으로 들어가야 한다는 주장이 신뢰도를 얻어가고 있다. 이러한 흐름에 맞추어 수학 교육 연구에서는 학습자에게 유의미한 변화를 줄 수 있는 코딩 학습이 필요하다. 하지만 기존의 프로그래밍 언어는 매우 전문적이거나 매우 단순한 형태

를 지니고 있다. 이를 개선하기 위해서는 이 둘의 중간에 위치하여 자신이 코딩한 언어 체계 자체가 자신의 사고의 정당화 도구이자 의사소통의 도구로 쓰일 수 있도록 해야 한다. 본 연구에서는 JavaMAL 마이크로월드라는 학습 환경을 선정하고 이항 분포라는 확률 구조를 선택, 이를 거북이의 '몸짓 언어'를 통해 쉽고 전이가 빠르면서도 학습자의 도구로써 의미가 있는 실행 가능한 표현을 설계하고자 한 연구이다. 이러한 시도는 교실 환경에서는 구현할 수 없었던 학습자 중심의 적극적인 구성 활동을 가능하게 할 수 있다. 그 동시에 computational thinking 역량 강화를 가능하게 할 수 있을 것이다.

둘째, 이항 분포 현상뿐만 아니라 다양한 확률 학습에서 현상에 기초한 모델링 및 시뮬레이션을 할 수 있게 하는 실행 가능한 표현 체계 기반 학습 환경 설계 연구가 진행될 필요가 있다. 현상에서 출발하여 실험적인 접근법으로 확률 학습이 이루어져야 하며 적절한 시뮬레이션 피드백이 학습자에게 올바른 확률 사고를 유도할 수 있다는 것은 이미 선행 연구에서 증명된 바 있다. 실행 가능한 표현은 시뮬레이션 사고 실험을 부여함과 동시에 이를 위해 구성한 프로그래밍 언어 자체가 동시에 학습자의 의사소통 및 정당화 도구로 쓰일 수 있다는 장점이 있다. 이는 비단 이항 분포 뿐만 아니라 다양한 확률 현상에서도 모델링 및 시뮬레이션 도구로써 쓰일 수 있는 가능성이 있다. 다양한 후속 연구를 통해 본 연구에서 의도하고자 했던 실행 가능한 표현 기반 확률 학습 환경의 효과를 극대화할 수 있는 새로운 확률 교육이 진행될 수 있기를 희망한다.

마지막으로 본 연구에서 제시한 수업 모델에 따른 추가적인 후속 연구가 필요하다. 이항 분포 탐구 학습 환경은 기본적으로 학습자의 다양한 확률 실험 및 의사소통을 전제로 한다. 본 연구에서 실시한 교실 환경에서의 적용 연구는 이러한 활동에 대한 제한이 있을 수밖에 없다. 본 연구에서도 실시한 S대 영재원 멘토링 사이트를 통해 시도하고자 했던 거꾸로 교실 기반 수업 모델과 같은 적용 연구를 통해 본 학습 환경에 대한 분석을 좀 더 발전적으로 진행해야 할 필요가 있다.

참 고 문 헌

권소영 (2009). **Fathom을 활용한 수학 교수·학습 자료 개발 및 적용 : 고등학교 수학 1의 확률·통계 단원을 중심으로.** 석사학위논문, 이화여자 대학교.

김서령, 박혜숙, & 김완순. (2007). 시리즈 A: 조합문제에서의 인식론적 장애-곱의 법칙과 합의 법칙 중심으로. **A-수학교육, 46**(2), 193-205.

김화경. (2006). **컴퓨터와 수학교육 학습-지도 환경에 관한 연구.** 박사학위논문, 서울대학교

박상준. (2015). 거꾸로 교실 모형의 개발과 적용 사례의 연구-예비교사 교육에의 적용 결과를 중심으로. **사회과교육연구**, 22(2), 1-21.

박찬민. (2014). **Constructionism 기반 표본공간 구성 활동을 통한 조건부확률 학습에 관한 연구.** 석사학위논문, 서울대학교

송민호. (2010). **Constructionism 기반 수학교육공학 관점에서의 학습환경 설계 연구.** 서울대학교 박사학위 논문

조한혁, & 송민호. (2014). 실행식 (Executable expression) 기반 SMART 스토리텔링 수학교육. **수학교육학연구, 24**(2), 269-283.

신보미, & 이경화. (2006). 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 통계적 확률지도에 대한 연구. **수학교육학연구**, 16(2), 139-156.

________________. (2008a). 시뮬레이션을 활용한 확률 지식의 교수학적 변환. **수학교육학연구**, 18(1), 25-50.

우안성. (2013). **Constructionism 기반 그래프 구성 활동 연구.** 석사학위 논문, 서울대학교

우정호. (1998). **학교 수학의 교육적 기초.** 서울: 서울대학교 출판부.

이경화. (2010). 확률적 사고 수준과 영재교육. **영재교육연구**, 20(1), 151-173.

이민경. (2014). 거꾸로 교실 (Flipped Classroom) 의 효과와 의미에 대한 사례연구.

______. (2014). 거꾸로 교실 (Flipped classroom) 의 교실사회학적 의미 분석: 참여 교사들의 경험을 중심으로. **교육사회학연구**, 24(2), 181-207.

조한혁. (2001). 인터넷 기반 마이크로월드 자바수학의 설계. **한국수학교육학회지 시리즈 E <학교수학 논문집> 제 11집**, 339-353.

조한혁. (2003). 컴퓨터와 수학교육. **한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육> 42**(2), 177-192, 서울: 한국수학교육학회.

최인용. (2014). **Computational thinking 기반 스마트 확률 학습 환경 연구.** 석사학위논문, 서울대학교

Abrahamson, D., & Wilensky, U. (2005). ProbLab goes to school: Design, teaching, and learning of probability with multi-agent interactive computer models. In *Proceedings of the fourth congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 570-579).

Barr, V., & Stephenson, C. (2011). Bringing computational thinking to K-12: what is Involved and what is the role of the computer science education community?. ACM *Inroads*, 2(1), 48-54.

Bergmann, J., & Sams, A. (2012). *Flip your classroom: Reach every student in every class every day*. International Society for Technology in Education.

Bransofrd, J. D., Brown, A. L., & Cocking, R. R. (2000). **학습과학 - 뇌, 마음, 경험 그리고 교육**(신종호, 박종효, 최지영, 김민석 역). 서울: 학지사

Brennan, K., & Resnick, M. (2012). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. In *Proceedings of the 2012 annual meeting of the American Educational Research Association, Vancouver, Canada.*

Bundy, A. (2007). Computational thinking is pervasive. *Journal of Scientific and Practical Computing, 1*(2), 67-69.

Chernoff, E. J., & Zazkis, R. (2011). From personal to conventional probabilities: from sample set to sample space. *Educational Studies in Mathematics*, 77(1), 15-33.

Cho, H., Kim, H., Song, M. and Lee, J. (2010) Representation System of Building Blocks in LOGO-based Microworld. *Constructionism 2010*, paris.

English, L. D. (2005). Combinatorics and the development of children's combinatorial reasoning. In *Exploring Probability in School* (pp. 121-141). Springer US.

English, L. D. (1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 22(5), 451-474.

Gigerenzer, G., & Hoffrage, U. (1995). How to improve Bayesian reasoning without instruction: frequency formats. *Psychological review*, 102(4), 684.

____________., Gaissmaier, W., Kurz-Milcke, E., Schwartz, L. M., & Woloshin, S. (2007). Helping doctors and patients make sense of health statistics. *Psychological science in the public interest,* 8(2), 53-96.

Hoffrage, U., Gigerenzer, G., Krauss, S., & Martignon, L. (2002). Representation facilitates reasoning: What natural frequencies are and what they are not. *Cognition,* 84(3), 343-352.

Ihaka, R., & Gentleman, R. (1996). R: a language for data analysis and graphics. *Journal of computational and graphical statistics, 5*(3), 299-314.

Jamali, M., & Ester, M. (2009, June). Trustwalker: a random walk model for combining trust-based and item-based recommendation. In *oceedings of the 15th ACM SIGKDD international conference on Knowledge discovery and data mining* (pp. 397-406). ACM.

Le Caër, G. (2010). A Pearson random walk with steps of uniform orientation and Dirichlet distributed lengths. *Journal of Statistical Physics, 140*(4), 728-751.

Levesque, R. (2005). SPSS programming and data management: *A guide for SPSS and SAS users*. Spss.

Lockwood, E. (2013). A model of students' combinatorial thinking. *The Journal of Mathematical Behavior*, 32(2), 251-265.

Meletiou-Mavrotheris, M., & Lee, C. (2005). Exploring introductory statistics students′ understanding of variation in histograms. In *Proceedings publication in the 4th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*, Sant Feliu de Guíxols, Spain.

Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.

Osborne, M. J., & Rubinstein, A. (1994). *A course in game theory.* MIT press.

Papert, S. (1990). **교육공학론.** (김용관 역), 서울: 삼성실업. (영어 원작은 1980년 출판).

__________ & Harel, I. (1991). Situating constructionism. *Constructionism*, 36, 1-11.

Peard, R. (1996). Problems with probability. In *Technology in mathematics education. Mathematics Education Research Group of Australasia 19th Conference Proceedings* (pp. 437-445).

Pearson, K. (1905). The problem of the random walk. *Nature, 72*(1865), 294.

Pratt, D., & Prodromou, T. (2004). Towards the design of tools for the organization of the stochastic. WORKING GROUP 5 *Stochastic thinking*, 619.

Radford. L. (1999). The Rhetoric of generalization-a cultural, semiotic approach to students' processes of symbolizing-. *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Haifa, Technion-Israel Institute of Technology, Vol.4,* 89-96.

__________, & Peirce, C. S. (2006). Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic perspective. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American* Chapter (Vol. 1, pp. 2-21).

Resnick, M., Berg, R., & Eisenberg, M. (2000). Beyond black boxes: Bringing transparency and aesthetics back to scientific investigation. *The Journal of the Learning Sciences, 9*(1), 7-30.

Soylu, F. (2013). *An Embodied Future Map for Constructionism.* Northwestern University

Tisue, S., & Wilensky, U. (2004, May). Netlogo: A simple environment for modeling complexity. In *International conference on complex systems* (pp. 16-21).

Wilensky, U. J. (1993). *Connected mathematics-Building concrete relationships with mathematical knowledge.* (Doctoral dissertation, Massachusetts Institute of Technology).

__________, & Resnick, M. (1999). Thinking in levels: A dynamic systems approach to making sense of the world. *Journal of Science Education and technology,* 8(1), 3-19.

__________. (2014). Computational thinking through modeling and simulation. *Whitepaper presented at the summit on future directions in computer education. Orlando, FL. http://www.stanford. edu/~coopers/2013Summit/WilenskyUriNorthwesternREV. pdf.*

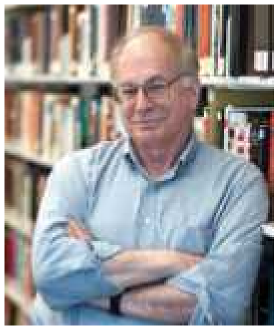
Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Commun. ACM 49.* 33-35.

__________ (2008). Computational thinking and thinking about computing. *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences, 366*(1881), 3717-3725.

확률 패턴 사고 실험

읽을거리 - 카네만의 문제와 자판기 모델

다음과 같은 질문을 읽고 A와 B중 하나를 선택해보자.



Daniel Kahneman

Q1: 600명을 사망시킬 수 있는 질병이 발생했을 때 어떤 치료법을 사용하겠는가?
A: 200명의 생명을 구할 수 있는 치료법
B: 600명 모두 사망할 확률이 2/3나 되며, 모두 살릴 가능성은 불과 1/3인 치료법

위의 질문은 ***대니얼 카네만***이 제시한 문제이다. 그는 이스라엘 국적의 심리학자겸 경제학자로서 2002 노벨 경제학상 수상자다. 그의 학문적인 업적은 판단과 의사결정분야의 심리학, 행동경제학과 행복심리학이다. 카네만은 동일한 상황이라도 어떤 방식으로 사용자에게 전달하느냐에 따라 사용자의 반응이 달라질 수 있음을 아래와 같은 실험을 통해 입증하였다.

여러분이 위의 질문에 대답을 골랐다면, 이번에는 아래의 질문을 읽고 C와 D 중 하나를 선택해보자.

Q2: 600명을 사망시킬 수 있는 질병이 발생했을 때 어떤 치료법을 사용하겠는가?
C: 400명은 사망하는 치료법
D: 600명 모두를 살릴 확률이 1/3이나 되며, 모두가 사망할 확률은 2/3에 머무르는 치료법

비슷하면서 조금은 다른 두 문제에 대한 답을 골랐다면, 실제 많은 사람들은 어떻게 생각했는지를 살펴보자.

우선, Q1의 질문에 대하여 72%가 선택지 A를 선택했다. Q2의 질문에는 D를 선택한 사람이 78%에 달했다고 한다. 실제로 A와 C, B와 D는 동일한 내용이지만 어떻게 표현하느냐에 따라 그 결과는 상당히 다르다는 것을 알 수 있다. 이처럼 동일한 상황을 표현하는 방법은 그 결과에 큰 영향을 줌을 알 수 있다. 확률의 학습이 어려운 것은 실생활의 여러 상황을 표현하는 방법이 다양하기 때문이기도 하다. 다르게 얘기한다면, 확률의 여러 가지 표현을 우리가 알기 쉬운 은유(metaphor)로 나타낸다면, 조금 더 쉽게 다가갈 수도 있을 것이다. 이번 장에서는 우리가 자주 보는 경우의 수 문제를 **자판기 모델**로 이해하고 표현해보면서 그 구조를 파악해보도록 한다.

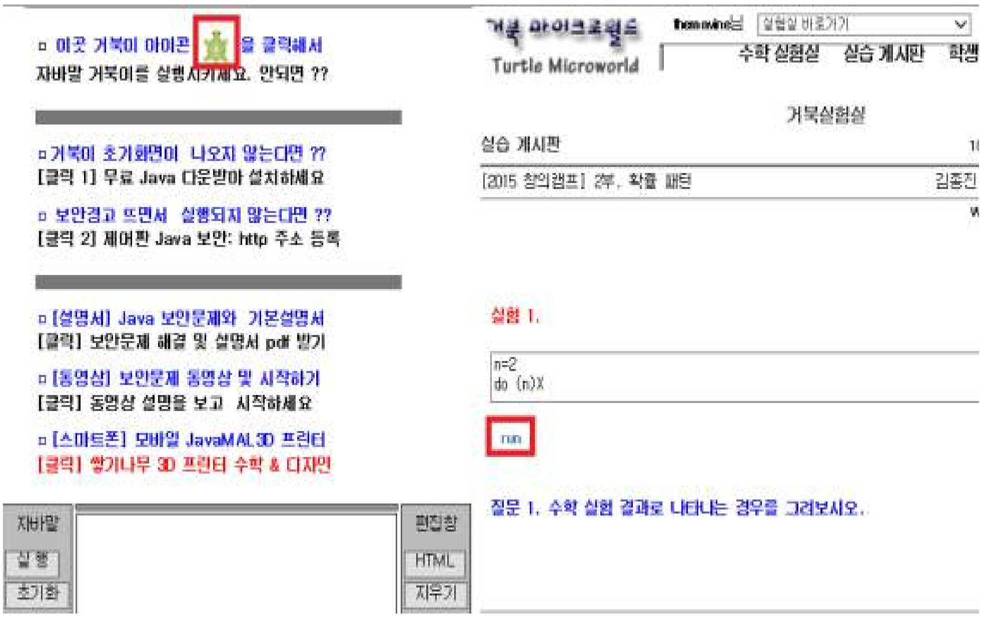
수업1. 확률 패턴 현상 보기

1부의 쌓기나무 성장패턴 탐구에서 우리는 거북 명령어를 통하여 다양한 쌓기나무 패턴을 살펴보았어요. 쌓기나무 성장패턴은 X가 점점 성장해가며 쌓기나무 블록을 쌓는 패턴이었죠. 이 때의 거북실험은 여러 번 실행을 하더라도 항상 같은 결과가 나타나게 되요. 2부에서 배우게 될 확률 패턴은 결과가 어떻게 나타날지 여러 번의 실험을 통해서 살펴보도록 할까요?

자바매쓰 사이트에 (http://www.javamath.com/class) 여러분들이 실험해 볼 게시판을 만들어 놓았어요. 사이트를 들어가서 오른쪽 위에 있는 실습 게시판을 눌러보도록 할게요.

실습 게시판을 누르면 게시판에 있는 [2015 창의캠프] 2부. 확률 패턴 사고 실험 글을 눌러서 첫 번째 실험을 실행하도록 할게요.

게시판 글에 들어가서는 아래 그림과 같이 먼저 거북이 아이콘을 클릭하도록 해요. 거북이 아이콘을 클릭하면 자바말 프로그램이 실행될 것이에요. 그 이후에 게시판 글에 있는 *run* 버튼을 누르게 되면 해당 명령어에 대한 실행 결과를 볼 수 있어요.



과제 1

쌓기나무 패턴 때와 같이 아래와 같은 명령어가 쓰였어요. *run* 버튼을 눌러 실험을 해보고 실행 결과를 아래 표에 그려 보세요.

n=2 do (n) X	run
명령창	실행버튼

질문 1-1

실행버튼을 누른 후, 실행 결과를 그려 보세요.	
1번째 실행	2번째 실행

질문 1-2

여러 번의 실행을 통하여 나타날 수 있는 모든 경우를 그려 보세요.

명령창의 명령을 살펴보면, $n=2$일 때, 거북이에게 X를 2회 실행하라고 명령한 것이죠? 이 때, 나타날 수 있는 결과는 run 버튼을 누를 때마다 확률적으로 다르게 나타나게 되요. 이렇듯, 실행할 때마다 결과가 확률적으로 다르게 나타나는 패턴을 **확률 패턴**이라고 해요.

이번에는 위의 명령창에서 n의 값을 3으로 변경시켜 본 후 나오는 그림을 가지고 X를 추측해 보도록 하자.

질문 1-3

명령창의 n의 값을 3으로 변경시킨 후 run 버튼을 누르자. 이 때, 실행 결과를 그려 보세요.	
1번째 실행	2번째 실행

질문 1-4

n의 값을 바꾼 실험의 결과를 보았을 때, X는 과연 무엇일까요?

$n=2$일 때의 그림을 살펴보면 다음과 같아요.

$n=2$일 때의 모든 경우를 살펴보게 되면, 거북이는 앞으로 2칸 이동하면서 아래로 2개의 블록을 쌓거나 위로 2개의 블록을 쌓고 있어요. 즉, X라는 명령어는 S[uu]와 S[dd]중 하나를 확률적으로 갖게 된다는 것이죠. 이는 $n=3$일 때도 마찬가지로 가능한 모든 그림이 나타나게 되기 때문에 우리는 언제나 X는 S[uu]와 S[dd] 중 하나의 값을 랜덤으로 갖게 된다고 이야기할 수 있어요.

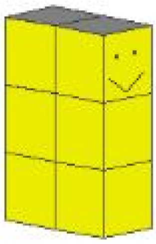
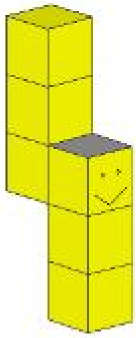
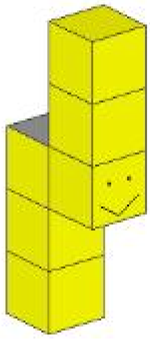
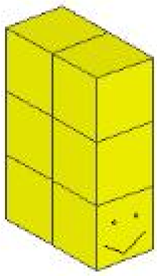
			

그림 (1)	그림 (2)	그림 (3)	그림 (4)

X = 'S[uu] , S[dd]' 와 같이 표현하는 것을 **린덴마이어** 확률 표현이라고 부른다.

질문 1-5

위에 보이는 그림 4가지 중에서는 과연 어떠한 그림이 가장 자주 나타나게 될까요?

질문 1-6

위의 실험을 참고하여, 동전을 2회 던졌다고 생각할 때, 그림 앞면이 몇 번 나오는 것이 가장 많이 나타나게 될까요?

과제 2

이번 과제에서는 조금 다른 형태의 확률 패턴을 탐구해보도록 할게요. 같은 글 아래에 있는 실험 2의 명령창을 보고 실행버튼을 눌러봐요.

실험 2. n=3 do (n)X	run
명령창	실행버튼

질문 2-1

실행버튼을 누른 후, 실행 결과를 그려 보세요.	
1번째 실행	2번째 실행

질문 2-2

여러 번의 실행을 통하여 나타날 수 있는 모든 경우를 그려 보세요.

질문 2-3

앞선 과제 1과의 차이점은 무엇인가요?

이 $n=3$이라는 실행식의 $n=2$로 바꾸어 다시 한 번 실험해 보자. 과연 어떠한 그림이 나오는지, 그리고 어떠한 그림이 빈도수가 많은지를 파악하여 보자. 그리고 아래의 그림 4가지 중에서 아예 나오지 않는 그림은 무엇인지를 파악해 보자.

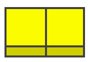
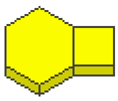
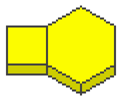
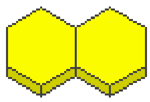
			

그림 (1)	그림 (2)	그림 (3)	그림 (4)

질문 2-4

위의 수학 실험을 통해 여러분이 추측한 X의 특징은 무엇입니까?

위의 과제2에서 $n=4$, $n=5$로 바꾸어 다시 한 번 실험해 보자.

질문 2-5

$n=4$ 일 때에 수학 실험에서 나타나는 특징은 무엇입니까?

질문 2-6

$n=5$ 일 때에 수학 실험에서 나타나는 특징은 무엇입니까?

과제1과는 달리 과제2에서는 나올 수 있는 쌓기나무 블록의 수가 정해져 있음을 알 수 있다. 과제2는 정육면체가 3개, 육각기둥이 1개 들어있고 X가 한 번 실행될 때마다 쌓기나무 블록이 줄어들었음을 알 수 있다.

수업2. 확률 표현과 실행식

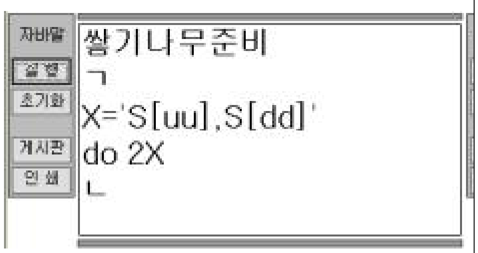
과제 1

Javamath 사이트 (www.javamath.com/class)에 접속하여 아래의 명령어를 통해 확률 탐구실험을 깊이 알아보도록 하자.

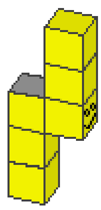
우리가 창의 캠프에서 탐구할 확률적 상황을 위해 자바말 프로그램을 사용한다. 자바말 명령어 입력창에 아래와 같이 입력하고 실행버튼을 누르면 실험 결과가 나온다. 확률 패턴에서는 실험 결과가 실행할 때마다 그 값이 다르게 나타날 수 있다.

X = 'S[uu] , S[dd]' 와 같이 표현하는 것을 **린덴마이어** 확률 표현이라고 부른다.

자바말 속의 거북이는 앞서 배운 린덴마이어 확률 표현을 이해하고 그에 따라 확률적으로 행동할 수 있다. 따라서 아래와 같이 명령어를 입력하게 되면 X는 확률 패턴을 나타내며 쌓기나무 블락을 쌓게 된다.



명령창

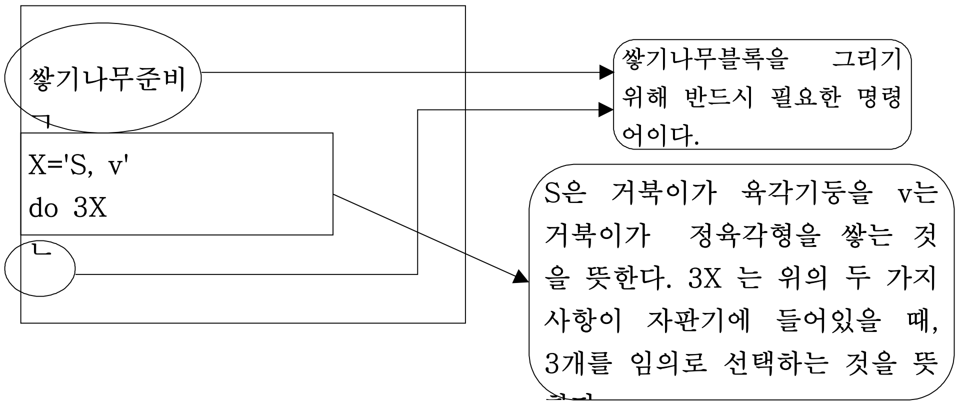


결과창

실행한 결과를 살펴보면 거북이가 앞으로 진행하면서 처음에는 아래에 블락을 두 개, 다음에는 앞으로 이동하여 위로 두 개의 블락을 쌓은 결

과이다. 이 결과는 S[dd]와 S[uu]가 하나씩 차례대로 나온 결과이다. 오른쪽 결과창의 결과는 S[dd]와 S[uu]가 들어있는 자판기 버튼을 두 번 눌렀을 때 ‘임의로’ 나온 결과이다. 즉, 실행할 때마다 그 값이 다를 수 있다.

이제 명령어를 자세히 살펴보자.



명령어	뜻
쌓기나무준비 ㄱ … ㄴ	쌓기나무가 나타날 수 있는 기본 설정을 한다. ㄱ 과 ㄴ 사이의 명령을 실행한다.
X= 'S[uu], S[dd]'	S와 v를 임의로 선택하는 랜덤상자 X
do 2X	X를 2번 실행한다.

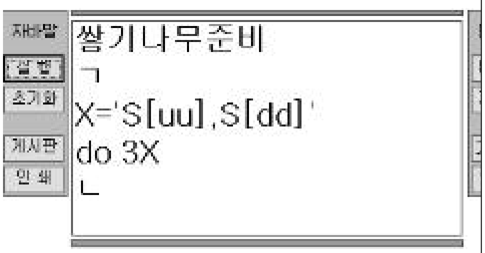
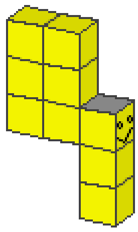
자바말 프로그램에서 실험을 하기 위해서는 위의 명령어를 모두 정확히 입력하여야 한다. 첫 수업의 과제에서는 기본적인 선언문과 X는 숨긴 채 do 2X의 결과만을 보여줬지만, 실제로 X= 'S[uu], S[dd]'로 약속되어 있었다.

앞선 수업의 과제 1에서는 X= 'S[uu], S[dd]'로 약속되어 있었고, 과제 2에서는 X= 's+++, v+'로 약속되어 있었다. 첫 번째 명령어에서는 언제나 S[uu]와 S[dd] 중에서 선택된다. 하지만, 두 번째 명령어에서는 v가 한번 X의 결과로 나타나면 v는 사라지고 s만 뽑히게 된다. 이는 마치 s가 3개, v가 1개 들어있는 자판기에서 음료수를 뽑는 것과 유사하

다. 우리는 이를 자판기 은유 (Metaphor)라 부른다.

	과제1	과제2
명령어	쌓기나무준비 ㄱ X='S[uu], S[dd]' do 2X ㄴ	쌓기나무준비 ㄱ X='s+++, v+' do 3X ㄴ

자바말 명령어 입력창에 아래와 같이 입력하고 실행버튼을 누르면 실험 결과가 나온다.

	
명령창	결과창

질문 1-1

실행 결과로 나올 수 있는 모든 경우를 그려 보시오.

질문 1-2

실행 결과로 나오는 모든 경우 중, 거북이가 위로 쌓기나무를 0번 쌓는 경우와 거북이가 위로 쌓기나무를 2번 쌓는 경우 중 어느 것이 더 많이 나올까요?

과제 2

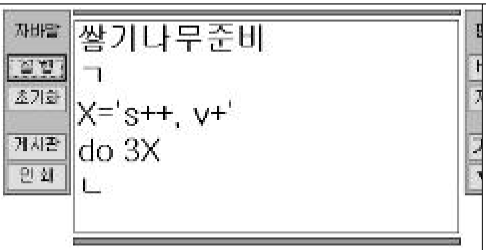
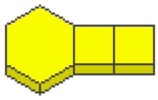
Javamath 사이트 (www.javamath.com/class)에서 확률 실행식을 통해 아래와 같은 문제에 대하여 생각하여 보자.

천기는 승부차기를 3번 반복해서 찹니다. 이 때 천기가 골을 넣을 수 있는 횟수는 모두 넣는 3번부터 한 번도 못 넣는 0번까지의 경우가 있습니다. 그 횟수 중에서 가장 경우가 많다고 생각하는 횟수는 몇 번입니까? 아래의 실험을 통해 이 문제를 해결해 보세요. (단, 천기는 골을 넣을 가능성과 못 넣을 가능성이 모두 똑같습니다.)

질문 2-1

위 문제의 해답은 무엇이라고 생각하시나요?

위의 문제 상황에 대한 실험을 위해 아래와 같은 확률 실행식을 자바말 명령어 입력창에 입력하고 실행버튼을 눌러서 실험 결과를 관찰하자.

	
명령창	결과창

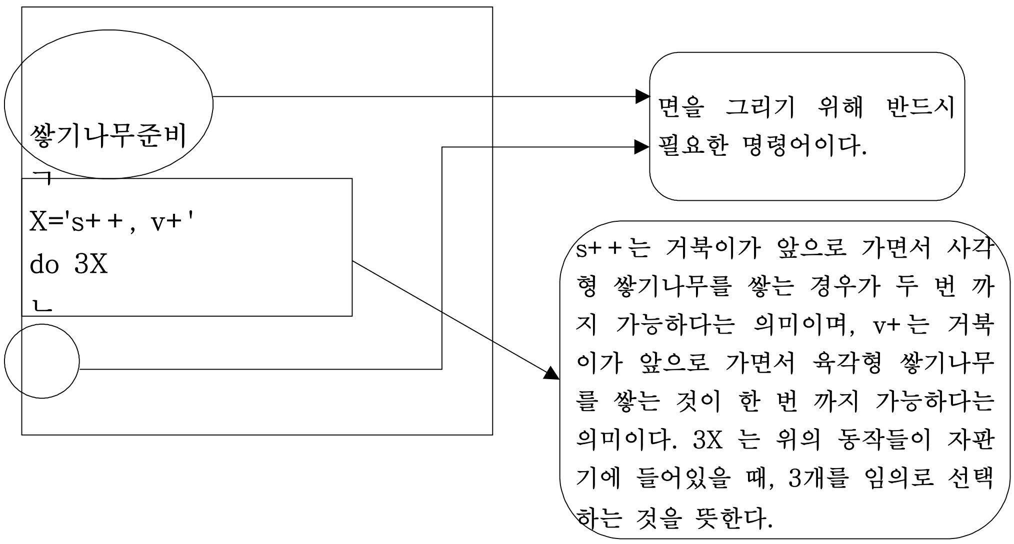
이 실행식에서 s는 사각형, 그리고 v는 육각형을 의미한다. 그리고 +는

자판가 안에 들어있는 s와 v의 개수를 의미한다. 즉 위의 실행식은 자판기 안에 s가 두 개 그리고 v가 한 개 들어있다는 의미이다. 즉, 실행 결과는 s가 두 개 그리고 v가 한 개 들어있는 자판기의 버튼을 세 번 눌렀을 때 '임의로' 나온 결과이다. 즉, 실행할 때마다 그 값이 다를 수 있다.

질문 2-2

실행 결과로 나올 수 있는 모든 경우를 그려 보시오.

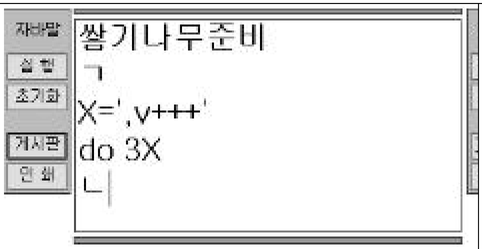
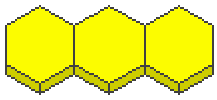
이제 명령어를 자세히 살펴보자.



이 실행식을 아래와 같이 문제 상황으로 해석을 하면, 위의 문제상황에 대한 실험 환경을 만들 수 있게 되어 위의 문제를 해결할 수 있게 됩니다.

명령어	뜻
s++, v+	s를 골이 들어가는 것, v를 골이 들어가지 않는다는 것으로 해석을 하면, 이 명령어는 두 번은 골이 들어가고 한 번은 골이 들어가지 않는 것이다.
do 3X	X를 3번 실행하는 것이므로 승부차기를 세 번 차는 상황으로 해석이 가능하다.

이제 아래와 같은 명령어를 작성하여 실행하여 보자.

	
명령창	결과창

질문 2-3

실행 결과로 나올 수 있는 모든 경우를 그려 보시오.

천기는 승부차기를 3번 반복해서 찹니다. 이 때 천기가 골을 넣을 수 있는 횟수는 모두 넣는 3번부터 한 번도 못 넣는 0번까지의 경우가 있습니다. 그 횟수 중에서 가장 경우가 많다고 생각하는 횟수는 몇 번입니까? 아래의 실험을 통해 이 문제를 해결해 보세요. (단, 천기는 골을 넣을 가능성과 못 넣을 가능성이 모두 똑같습니다.)

질문 2-4
질문 2-2와 질문 2-3을 비교하였을 때, 다시 위의 질문에 대해서 대답해보시오. 그리고 그 이유는 무엇인가요?

질문 2-4는 각각의 경우에 대한 확률을 비교하는 문제를 얘기한다. 우리는 확률을 비교하기 위해서는 경우의 수가 아닌, 경우에 대한 빈도를 살펴봐야 한다. 다음 장에서는 각각의 경우에 대한 빈도에 대해서 알아보기 위해서는 많은 횟수의 반복적인 실험을 한 화면에 나타내서 비교하려 한다.

수업3. 도수분포표를 이용한 확률 실험

과제 1

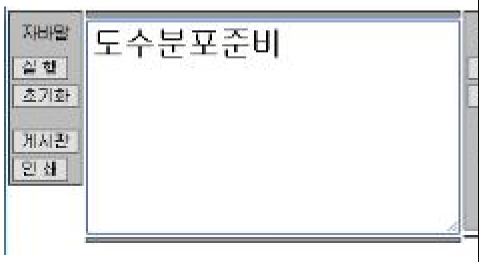
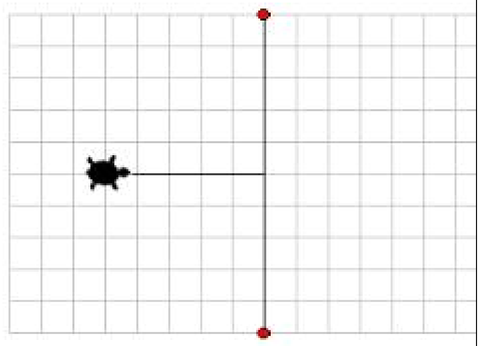
이번에는 창의 멘토링 (mentoring.snu.ac.kr)에 있는 새로운 명령어를 활용하여 보기로 해요. '도수분포준비'라고 하는 약속을 통해 위에서 배웠던 확률 패턴의 빈도수를 비교하여 볼 수 있도록 하는 실험탐구를 해 보아요.

천기는 동전을 총 5번을 던졌어요. 그 이후, 동전의 앞면이 나오는 횟수를 세었답니다. 천기가 센 앞면의 횟수가 얼마가 될 가능성이 가장 높을까요?

질문 1-1

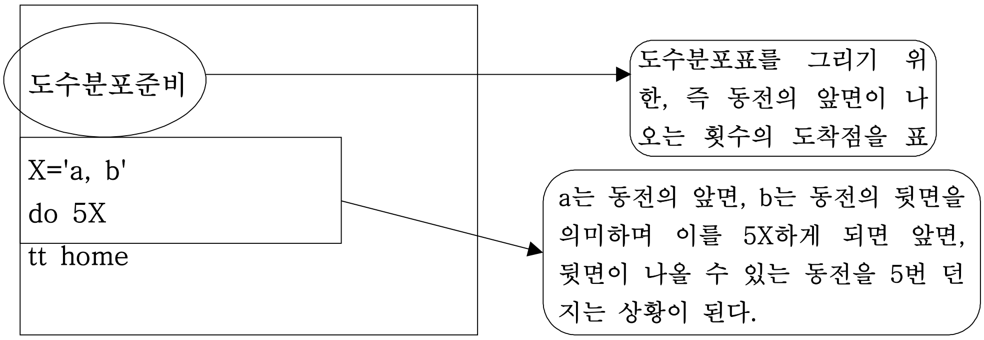
위 문제의 해답은 무엇이라고 생각하시나요?

위의 문제에 대한 해답을 알기 전에 도수분포준비라는 명령어를 배워보도록 할게요.

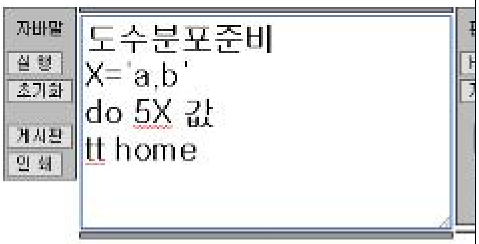
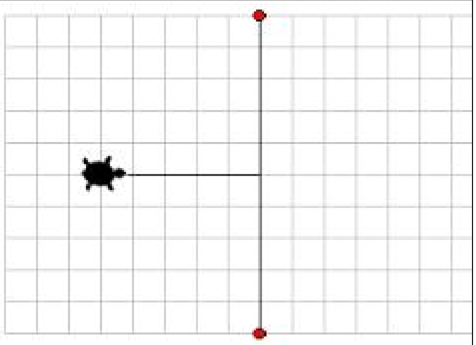
	
명령창	결과창

명령창에 도수분포준비 라고 입력하면 좌표가 나타나고 거북이가 출발점에서 있어요. 또, 빈도수에 대한 여러 명령어들이 기본적으로 세팅되어 있어요.

예를 들면, **a는 앞으로 1칸, 위로 1칸** 움직이도록, **b는 앞으로 1칸, 아래로 1칸** 움직이도록 세팅되어 있어요. a, b는 각각 above와 below의 약자에요. 거북이가 위로 혹은 아래로 가는 방식을 총 5번을 실행하게 된다면, 도착 지점이 바로 동전의 앞면이 나오는 횟수와 연관이 있을 것입니다. 아래의 명령어를 실행해 봅시다.



위와 같은 실행 식을 작성하여 실험하여 보고 실험 결과를 아래 그림에다가 나타내보자.

	
명령창	결과창

질문 1-2

각각의 도착점의 의미하는 것은 무엇일까요? 도착점 중에서 가장 많이 도착하는 지점은 무엇일까요?

과제 2

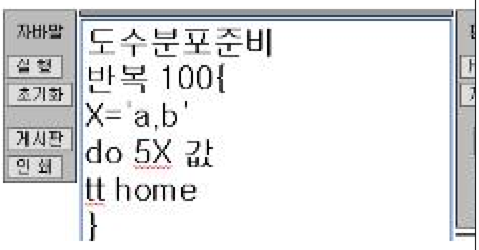
여러분은 위와 같은 문제 상황을 실험으로써 해결하기 위해 자바말을 반복해서 실행을 하였습니다. 그래서 가장 많이 나온 지점을 추측해 볼 수 있었지요. 하지만 이러한 실행식에서 만약 이 두 가지가 된다면 어떨까요?

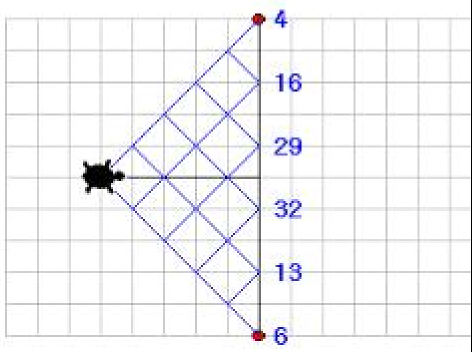
1) 한 번만 누르면 내가 원하는 만큼 거북이가 '반복해서' 움직일 수만 있다면?
2) 도착한 지점이 어디였는지를 까먹지 않도록 거북이가 도착할 때마다 그 도착한 지점의 횟수를 숫자로 표시할 수만 있다면?

여러분들은 위의 보완점을 해결하기 위해 두 가지의 명령어를 추가적으로 작성하여 실행식을 완성하여 봅니다.

명령어	뜻
반복 100 {명령; tt home;}	거북이가 명령을 실행하고 다시 원점으로 돌아오는 작업을 100번을 반복합니다.
값	해당 지점에서의 거북이의 도착 횟수를 숫자로 표시해 줍니다.

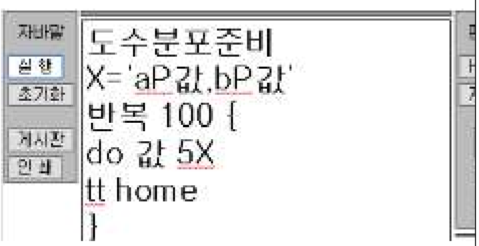
위의 명령어를 이용하여 실험하게 되면 총 100번의 반복된 거북실험을 진행할 수 있다.

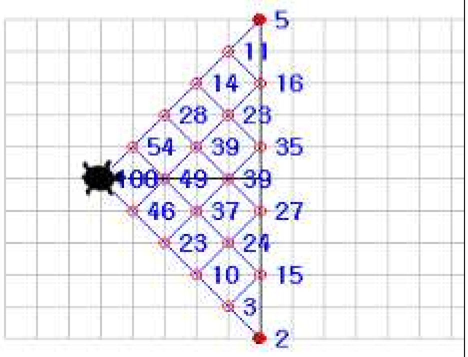




명령창	결과창

도수분포준비를 활용한 확률 실험에서는 거북이가 움직인 위치를 표시할 수도 있습니다. P는 큰 동그라미, p는 작은 점으로 각 위치를 표시할 수 있습니다. 이를 이용하여 다음과 같은 명령을 실행한다면 파스칼의 삼각형의 모양을 확률실험을 통해서 그려낼 수 있습니다.





명령창	결과창

천기는 동전을 총 5번을 던졌어요. 그 이후, 동전의 앞면이 나오는 횟수를 세었답니다. 천기가 센 앞면의 횟수가 얼마가 될 가능성이 가장 높을까요?

질문 2-1
빈도를 나타내는 도수분포준비 실험을 통하여 봤을 때, 위의 질문에 답은 어떻게 될까요?

위와 같은 반복 실행의 빈도수를 통해 각 경우에 도착하는 빈도가 다르다는 것을 알 수 있다. 도착점을 기준으로 생각하였을 때, 경우에 대한 확률이 다르다고 생각할 수 있다. 하지만, 거북이가 경로 중에 위와 아래를 선택하는 확률은 동일하다. 거북이가 X에서 위로 가는 것과 아래로 가는 것을 선택하는 확률이 다른 경우를 다음 과제에서 살펴보기로 하자.

Abstract

With the increasing importance of coding education worldwide in recent years, actively under way has been research on designing learning environments to strengthen the capacity for computational thinking. In particular, with the increasing spread of the awareness that the field of probability must transcend deductive methods through formulae and adopt learning environments accompanied by the modeling of actual phenomena and thought experiments, probability learning environments through technology-based programming languages have been proposed as a solution. However, it has been pointed out that such learning environments are presented too abstrusely by focusing on programming languages themselves or provided after the omission of language expression systems other than elements such as the generation of random numbers so as to be easily approachable to learners. While participating in the direction of such programming language-based probability learning environments, the present study seeks to situate itself between the two contradictory environments above. In other words, the present study starts with the assumption that a language system that can be amply used by learners as a means of communication and that can model and simulate diverse phenomena is necessary.

Consequently, the present study designed a learning environment for executable expression-based binomial distributions. The key elements of executable expressions are language expression systems in technological environments and immediate feedback. To achieve such goals, the present study provided a language expression system

capable of modeling phenomena in relation to binomial distributions, which are probabilistic structures selected in learning environments, in addition to strengthening the capacity for computational thinking, thus enabling the system to play the role of a medium between learners and phenomena. The language expression system was made to follow the design principle of constructionism-based learning environments by using everyday language and mathematical formulae based on the basic movements of the agent in the form of a turtle. In addition, to provide immediate feedback to such executable expressions in JavaMAL microworld environments, by providing simulation result windows through various elements based on the element of random walks, the language expression system was designed to enable learners independently to establish “What if?” strategies regarding phenomena and to conduct diverse probability experiments. The language expression system was designed so that not only a variety of modeling and simulations of binomial distribution phenomena would become possible through such executable expression systems but also those expressions themselves would be used as a means of communication between learners and teachers and between learners and computers.

By reinterpreting and organizing an executable expression system, which is a component of binomial distribution learning environments, diverse binomial distribution phenomena that learners could personally model through the system were selected. In addition, flipped learning was adopted as a teaching format where such learning environments could be even more powerful, and lesson plans where the learning environments in question could be applied most significantly through flipped learning were designed. In addition, through two applicatory

studies, changes to learners' communication process and probabilistic thinking in accordance with the learning environments in question were observed. In addition, through this, the direction of the improvement of learning environments in the present study and the possibility of learning environments for executable expression-based probability coding were examined.

The purpose of the present study lies in simultaneously presenting a tool that can mitigate what has been pointed out in probability education in existing school mathematics, or the absence of thought experiments based on actual phenomena, and a learning environment for probability that meets the demand of the era for a strengthened capacity for computational thinking. As for executable expressions based on body language that generated random paths through the turtle's movements, the direction of designing learning environments was established so that learners could experience significant changes through probability experiments accompanied by agent-based modeling and embodied simulations.

Keywords: Computational thinking, Binomial distribution, Executable expressions, Flipped learning

Student identification number: 2012-23501