creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

교육학석사학위논문

대학 입학시험 국제 비교 분석

-수학 과목의 행렬과 벡터 영역을 중심으로-

2019년 2월

서울대학교 대학원

수학교육과

박 미 선

대학입학시험 국제 비교 분석

-수학 과목의 행렬과 벡터 영역을 중심으로-

지도교수 권 오 남

이 논문을 교육학 석사학위논문으로 제출함

2018년 11월

서울대학교 대학원

수학교육과

박 미 선

박미선의 석사학위논문을 인준함

2018년 12월

위 원 장 유 연 주 (인)

부 위 원 장 조 한 혁 (인)

위 원 권 오 남 (인)

국문초록

대학 입학시험 국제 비교 분석

-수학 과목의 행렬과 벡터 영역을 중심으로-

4차 산업혁명이 도래함에 따라 국가는 미래 사회의 변화에 대응하기 위해 교육을 통해 창의적인 인재를 양성하고자 노력하고 있다. 많은 국가들은 미래사회의 기반으로써 수학을 중요하게 인식하고 4차 산업혁명 시대에 요구되는 능력을 검토하여 교육과정에 반영함으로써 수학 교육을 강화하고 있다. 이는 우리나라의 2015 개정 수학과 교육과정의 교과 역량을 통해서도 확인할 수 있다. 그러나 교육과정의 변화와 함께 평가의 변화가 함께 이루어지지 않으면 의도하는 바를 온전히 실현하기 어렵다. 특히 대학 입학시험의 변화가 이루어지지 않는다면 학교 교육의 평가의 변화도 제약이 있을 수밖에는 없다. 이에 반해 외국은 대학 입학시험의 변화를 통해 학생의 미래 사회 준비도를 점검함으로써 국가경쟁력을 높이고 있다. 이에 본 연구에서는 수능의 변화의 방향을 검토하기 위해 외국 대학 입학시험을 확인한다. 한편, 4차 산업혁명의 산업의 근간들이 수학을 기반으로 하고 있으며, 그 중에서 선형대수학이 널리 쓰인다. 선형대수학의 핵심 개념은 행렬과 벡터로 외국에서는 고등학교 교육과정에서 포함하고 있다. 이와 달리 우리나라는 교육과정에서 행렬을 삭제하였고, 벡터는 학습 내용을 축소하였다. 또한 축소된 벡터 영역을 포함하는 과목의 수능 포함여부에 대해서도 논란이 있었다. 이에 외국 대학 입학시험 중 행렬과 벡터 영역에 초점을 두고 분석하여 우리나라 수능에 시사점을 도출할 필요가 있다.

지금까지 이루어진 외국 대학 입학시험 분석 연구는 우리나라 교육과정의 변화에 맞춰 수능 변화의 방향을 모색하고 있었다. 본 연구도 개정 교육과정 적용 시기에 맞춰 수능의 변화 방향을 모색하기 위해 외국 대학 입학시험의 형식, 평가 내용요소, 문항의 행동 영역을 검토하였다.

본 연구에서는 미래 사회 준비도가 높고 수학 교육을 강화하고 있는 10개의 국가(영국, 프랑스, 독일, 핀란드, 에스토니아, 싱가포르, 중국, 대만, 호주, 미국)를 선택하여 행렬과 벡터 영역을 포함하고 있는 대학 입학시험을 비교, 분석하였다. 그리고 분석한 결과를 바탕으로 수능과 비교하여 시사점을 이끌어내고자 하였다.

연구결과 선다형과 단답형으로 구성되어 있는 수능과 달리 외국 대학 입학시험은 대체로 하위 문항을 포함한 서술형 문항을 출제하고 있었으며, 공학용 계산기나 공식집 사용을 허용하고 있었다. 또한 서술형 채점 방법을 통해 학생의 사고과정을 확인하고 점수를 부여하고 있었다. 그리고 외국 대학 입학시험의 행렬과 벡터 영역의 평가 내용요소는 우리나라에 비해 비교적 범위가 넓고 높은 수준의 내용을 평가하고 있을 뿐만 아니라 실생활 맥락 또는 타 교과 소재를 이용하여 행렬과 벡터 개념의 유용성을 인식할 수 있는 기회를 제공하고 있었다. 그리고 외국 대학 입학시험의 행렬과 벡터 문항은 간단한 계산 능력을 평가하기보다는 대체로 이해 능력이나 문제해결 능력과 같이 높은 수준의 수학적 사고력을 평가하고 있었다.

본 연구는 행렬과 벡터 영역에 초점을 두고 외국 대학 입학시험의 형식, 문항의 내용요소와 행동 영역을 비교, 분석하기 위해 각 시험의 구체적인 문항을 상세하게 검토하여 외국 대학 입학시험의 이해를 높인다는 의의를 가진다. 또한 도입된 지 오래되어 정형화되어 있는 수능에의 변화의 방향과 시사점을 제시한다는 의의를 찾을 수 있다.

주요어: 대학 입학시험, 국제 비교, 행렬, 벡터, 서술형 문항, 문제해결 능력

학 번: 2017-20052

목 차

국문 초록 ····· i
목차 ····· iii
표 목차 ····· v
그림 목차 ····· vi

I. 서론 ····· 1

1. 연구의 필요성 ····· 1
2. 연구의 목적 및 연구문제 ····· 4

II. 문헌분석 ····· 6

1. 대학 입학시험 국제 비교 연구 ····· 6
2. 대학수학능력시험 분석 ····· 10
   2.1. 대학수학능력시험의 내용 영역 - 행렬, 벡터 ····· 10
   2.2. 대학수학능력시험의 행동 영역 ····· 17

III. 연구방법 ····· 23

1. 분석 대상 ····· 23
2. 자료수집 및 분석방법 ····· 30
   2.1. 자료수집 ····· 30
   2.2. 자료 분석방법 ····· 30

IV. 연구결과 ····· 32

1. 대학 입학시험의 형식 ····· 32
   1.1. 외국 대학 입학시험 비교, 분석 ····· 32
      1.1.1 문항 형식, 시험 시간 ····· 32
      1.1.2. 공학용 계산기, 공식집 ····· 38

1.1.3. 서술형 채점 방법 ····· 52
1.2. 수능과 외국 대학 입학시험 형식 비교 ····· 57
2. 대학 입학시험의 내용요소 ····· 60
2.1. 외국 대학 입학시험 비교, 분석 ····· 60
2.1.1. 행렬 영역 ····· 60
2.1.2. 벡터 영역 ····· 70
2.2. 수능과 외국 대학 입학시험 내용요소 비교 ····· 81
3. 대학 입학시험의 행동 영역 ····· 86
3.1. 외국 대학 입학시험 비교, 분석 ····· 86
3.1.1. 계산 능력 ····· 86
3.1.2. 이해 능력 ····· 89
3.1.3. 추론 능력 ····· 93
3.1.4. 문제해결 능력 ····· 96
3.2. 수능과 외국 대학 입학시험 행동 영역 비교 ····· 109
V. 결론 ····· 113
1. 요약 ····· 113
2. 논의 및 시사점 ····· 117
3. 연구의 한계 및 제언 ····· 118
참고문헌 ····· 119
ABSTRACT ····· 125

표 목 차

<표 Ⅱ-1> 대학 입학시험 국제 비교 선행 연구 ····· 6
<표 Ⅱ-2> 2016학년도 수능 수학 출제 과목 및 범위 ····· 11
<표 Ⅱ-3> 07 개정 수학과 교육과정의 행렬 영역 내용요소 ····· 11
<표 Ⅱ-4> 2019학년도 수능 출제 과목 및 범위 ····· 14
<표 Ⅱ-5> 07, 09, 15 개정 수학과 교육과정 벡터 영역의 내용요소 변화 ··· 16
<표 Ⅱ-6> 수능 수학과 행동 영역 ····· 19
<표 Ⅲ-1> 분석 대상 국가의 시험명과 시험과목 ····· 25
<표 Ⅲ-2> 분석 대상 국가 교육과정, 교수 및 평가요목 문서 ····· 29
<표 Ⅳ-1> 국가별 대학 입학시험 문항 형식, 시험시간 ····· 33
<표 Ⅳ-2> 국가별 대학 입학시험 공학용 계산기, 공식집 사용 ····· 38
<표 Ⅳ-3> 국가별 대학 입학시험 행렬 영역의 내용요소 ····· 61
<표 Ⅳ-4> 행렬 영역의 내용요소별 국가 비교 ····· 63
<표 Ⅳ-5> 국가별 대학 입학시험 벡터 영역의 내용요소 ····· 71
<표 Ⅳ-6> 벡터 영역의 내용요소별 국가 비교 ····· 75
<표 Ⅳ-7> 행렬 영역의 내용요소별 외국 대학 입학시험과 수능의 비교 ·· 82
<표 Ⅳ-8> 벡터 영역의 내용요소별 외국 대학 입학시험과 수능의 비교 ·· 84
<표 Ⅳ-9> 국가별 대학 입학시험 행렬 문항의 행동 영역 분석 ····· 105
<표 Ⅳ-10> 국가별 대학 입학시험 벡터 문항의 행동 영역 분석 ····· 107
<표 Ⅳ-11> 수능 수학의 행렬과 벡터 문항의 행동 영역 분석 ····· 112

그 림 목 차

[그림 Ⅱ-1] 2016학년도 수능 수학 B형 행렬 문항1 ····· 12
[그림 Ⅱ-2] 2016학년도 수능 수학 A, B형 행렬 공통 문항 ····· 13
[그림 Ⅱ-3] 계산 능력 평가 문항 ····· 20
[그림 Ⅱ-4] 이해 능력 평가 문항 ····· 20
[그림 Ⅱ-5] 추론 능력 평가 문항 ····· 21
[그림 Ⅱ-6] 문제해결 능력 평가 문항 ····· 22
[그림 Ⅳ-1-1] 독일 Abitur의 A부분 벡터 문항 ····· 35
[그림 Ⅳ-1-2] 호주 VCE의 FtM2 행렬 문항 ····· 36
[그림 Ⅳ-1-3] 독일 Abitur의 B부분 벡터 문항 ····· 39
[그림 Ⅳ-1-4] 핀란드 Ylioppilastutkinto 기본과정 벡터 문항 ····· 40
[그림 Ⅳ-1-5] 호주 VCE의 SM1 벡터 문항 ····· 41
[그림 Ⅳ-1-6] 영국 GCE A-level의 FP1, FP3에서 제공된 행렬 공식 ·· 42
[그림 Ⅳ-1-7] 호주 VCE의 FtM1, FtM2에서 제공된 행렬 공식 ····· 42
[그림 Ⅳ-1-8] 영국 GCE A-level의 FP1 행렬 문항 ····· 43
[그림 Ⅳ-1-9] 호주 VCE의 FtM1 행렬 문항 ····· 44
[그림 Ⅳ-1-10] 영국 GCE A-level의 FP3에서 제공된 벡터 공식 ····· 45
[그림 Ⅳ-1-11] 영국 GCE A-level의 FP3 벡터 문항 ····· 46
[그림 Ⅳ-1-12] 독일 Abitur의 B부분에서 제공된 벡터 공식 일부 ····· 47
[그림 Ⅳ-1-13] 독일 Abitur의 B부분 벡터 문항 ····· 48
[그림 Ⅳ-1-14] 핀란드 MAOL 공식집에서 제공된 벡터 공식 일부 ····· 49
[그림 Ⅳ-1-15] 싱가포르 H2에서 제공된 벡터 공식 ····· 50
[그림 Ⅳ-1-16] 호주 VCE의 SM1, SM2에서 제공된 벡터 공식 ····· 51
[그림 Ⅳ-1-17] 영국 GCE A-level의 C4 벡터 문항 ····· 54
[그림 Ⅳ-1-18] 영국 GCE A-level의 C4 문항 채점기준의 일부 ····· 56
[그림 Ⅳ-1-19] 시험 출제 문항 유형에 따른 국가 분류 ····· 58
[그림 Ⅳ-2-1] 영국 GCE A-level의 FP1 행렬 문항 ····· 64
[그림 Ⅳ-2-2] 호주 VCE의 FtM1 행렬 문항 ····· 64
[그림 Ⅳ-2-3] 미국 SAT 교과 시험의 문제집 행렬 연습 문항 ····· 64

[그림 Ⅳ-2-4] 영국 GCE A-level의 FP3 행렬 문항 ····· 65
[그림 Ⅳ-2-5] 대만 학과능력측정시험 행렬 문항 ····· 65
[그림 Ⅳ-2-6] 호주 VCE의 FtM1 행렬 문항 ····· 66
[그림 Ⅳ-2-7] 프랑스 Baccalauréat의 S 행렬 문항 ····· 67
[그림 Ⅳ-2-8] 대만 지정과목고시 수학乙 행렬 문항 ····· 68
[그림 Ⅳ-2-9] 미국 SAT 교과 시험의 행렬 공식 연습 문항 ····· 68
[그림 Ⅳ-2-10] 에스토니아 Riigieksamite 기본과정 벡터 문항 ····· 76
[그림 Ⅳ-2-11] 중국 高考 전국권 문과 벡터 문항 ····· 77
[그림 Ⅳ-2-12] 대만 지정과목고시 수학乙 벡터 문항 ····· 77
[그림 Ⅳ-2-13] 에스토니아 Riigieksamite 심화과정 벡터 문항 ····· 77
[그림 Ⅳ-2-14] 호주 VCE의 SM2 벡터 문항 ····· 77
[그림 Ⅳ-2-15] 호주 VCE의 SM1 벡터 문항 ····· 78
[그림 Ⅳ-2-16] 대만 지정과목고시 수학甲 벡터 문항 ····· 78
[그림 Ⅳ-2-17] 영국 GCE A-level의 M1 벡터 문항 ····· 79
[그림 Ⅳ-2-18] 호주 VCE의 SM1 벡터 문항 ····· 79
[그림 Ⅳ-2-19] 영국 GCE A-level의 M1 벡터 문항 ····· 80
[그림 Ⅳ-2-20] 싱가포르 H2의 벡터 문항 ····· 81
[그림 Ⅳ-3-1] 대만 학과능력측정시험 계산 문항 ····· 87
[그림 Ⅳ-3-2] 호주 VCE의 FtM1 계산 문항 ····· 87
[그림 Ⅳ-3-3] 중국 高考 전국권 이과 계산 문항 ····· 88
[그림 Ⅳ-3-4] 대만 지정과목고시 수학乙 계산 문항 ····· 88
[그림 Ⅳ-3-5] 호주 VCE의 SM2 계산 문항 ····· 88
[그림 Ⅳ-3-6] 미국 SAT 교과 시험의 문제집 벡터 계산 문항 ····· 89
[그림 Ⅳ-3-7] 대만 지정과목고시 수학甲 이해 문항 ····· 90
[그림 Ⅳ-3-8] 호주 VCE의 FtM1 이해 문항 ····· 90
[그림 Ⅳ-3-9] 프랑스 Baccalauréat의 S 이해 문항 ····· 91
[그림 Ⅳ-3-10] 독일 Abitur의 A부분 이해 문항 ····· 92
[그림 Ⅳ-3-11] 핀란드 Ylioppilastutkinto 심화과정 이해 문항 ····· 92
[그림 Ⅳ-3-12] 중국 高考 전국권 문·이과 공통 이해 문항 ····· 92
[그림 Ⅳ-3-13] 대만 학과능력측정시험 이해 문항 ····· 93

[그림 Ⅳ-3-14] 프랑스 Baccalauréat의 S 추론 문항 ····· 94
[그림 Ⅳ-3-15] 호주 VCE의 FtM1 추론 문항 ····· 94
[그림 Ⅳ-3-16] 프랑스 Baccalauréat의 S 추론 문항 ····· 95
[그림 Ⅳ-3-17] 대만 학과능력측정시험 추론 문항 ····· 95
[그림 Ⅳ-3-18] 영국 GCE A-level의 FP3 문제해결 문항 ····· 97
[그림 Ⅳ-3-19] 대만 지정과목고시 수학乙 문제해결 문항 ····· 97
[그림 Ⅳ-3-20] 호주 VCE FtM2 문제해결 문항 ····· 98
[그림 Ⅳ-3-21] 영국 GCE A-level의 C4 문제해결 문항 ····· 99
[그림 Ⅳ-3-22] 독일 Abitur의 B부분 문제해결 문항 ····· 100
[그림 Ⅳ-3-23] 핀란드 Ylioppilastutkinto 심화과정 문제해결 문항 ····· 101
[그림 Ⅳ-3-24] 싱가포르 H2의 문제해결 문항 ····· 101
[그림 Ⅳ-3-25] 대만 지정과목고시 수학甲 문제해결 문항 ····· 102
[그림 Ⅳ-3-26] 호주 VCE의 SM2 문제해결 문항 ····· 103
[그림 Ⅳ-3-27] 2016학년도 수능 수학 A형 행렬 문항1 ····· 109
[그림 Ⅳ-3-28] 2016학년도 수능 수학 A형 행렬 문항2 ····· 110
[그림 Ⅳ-3-29] 2016학년도 수능 수학 B형 행렬 문항2 ····· 110
[그림 Ⅳ-3-30] 2019학년도 수능 수학 가형 벡터 문항1 ····· 111
[그림 Ⅳ-3-31] 2019학년도 수능 수학 가형 벡터 문항2 ····· 111

I. 서론

1. 연구의 필요성

4차 산업혁명과 같은 미래 사회를 향한 시대의 변화는 빠르게 진행되고 있다. 이에 여러 국가는 4차 산업혁명 시대를 이끌어나갈 수 있는 창의적인 인재를 양성하는 일을 국가의 매우 중요한 책무라고 보고 교육의 힘을 통해 미래 사회를 대비하기 위해 노력하고 있다. 그 예로 중국은 고등학생을 위한 인공지능 교과서(汤晓鸥, 陈玉琨, 2018)를 제작하여 인공지능의 기본 개념과 원리 및 일상생활에서의 인공지능의 실용성에 대해 학습함으로써 학생들이 4차 산업혁명을 이해하고 준비할 수 있도록 하고 있으며, 에스토니아는 교육과정에 코딩교육을 포함한 소프트웨어 교육을 포함하여 1학년부터 12학년까지 운영함으로써 국가 경쟁력 확보를 위해 노력하고 있다(신승기, 배영권, 2015).

위와 같이 학교 교육을 통해 미래 사회를 대비하는 시도를 바탕으로 학교 수학도 변하고 있다. 영국, 독일, 핀란드, 싱가포르, 중국, 호주, 미국 등은 미래 사회의 변화에 부합하는 역량에 집중하며 수학 교육의 목표, 내용, 교수방법 등의 변화를 모색하고 있다(나귀수 외, 2018). 이러한 시도는 우리나라의 수학 교육과정 문서에서도 확인할 수 있다. 2018년부터 적용되는 2015 개정 수학과 교육과정 문서에서 수학의 성격을 보면 문제 해결, 추론, 창의·융합, 의사소통, 정보처리, 태도 및 실천으로 표현되는 6가지 수학 교과 역량이 명시되어 있다. 이는 세계경제포럼(WEF, 2016)의 미래 직업 관련 보고서에 제시된 4차 산업혁명 시대에서 요구되는 능력인 문제해결력, 비판적 사고력, 창의성 등의 능력과 맥락을 같이 하고 있기 때문에 우리나라도 다른 국가들과 마찬가지로 수학 교육을 통해서 창의적인 미래 인재를 양성하기 위한 의도가 있다고 볼 수 있다.

한편 교육과정과 평가는 유기적인 관계이므로(최인선, 이민희, 2017) 교육과정의 변화와 더불어 평가의 변화가 수반되지 않으면 교육과정을

통해 추구하는 목표가 온전히 실현되기 어렵다. 과정중심평가와 같은 평가의 변화가 시도되고는 있으나 여전히 지식의 암기를 통한 지필평가 위주의 평가가 많은 부분을 차지하고 있기 때문에 학생이 미래 사회에 필요한 역량을 갖추었는지 측정하기에는 다소 어려움이 있다. 특히 우리나라 대학 입학시험인 대학수학능력시험(이하 수능)은 여전히 선다형과 단답형으로 이루어진 지필평가 시험이기에 미래 사회의 인재가 지녀야 할 역량을 평가하기에 적합한 것인가에 대한 의문이 든다. 대학 입학시험은 학생 개인의 능력 향상을 점검하고 국가의 발전을 이끌 인재를 선발하고 판단하는 하나의 잣대로써 중요하기 때문에 시대적인 흐름에 따른 변화에 맞춰나가야 한다.

최근 영국, 호주, 일본은 미래 사회의 변화를 준비하는 차원에서 고등학교를 졸업하는 학생의 역량을 강화하기 위해 대학 입학시험 체제와 문항 유형의 변화를 꾀하고 있다(남진영, 2017). 특히 우리나라와 가까운 일본은 공통테스트라는 새로운 대학 입학시험을 2020년에 시행할 예정이며, 이전에 없었던 서술형 문항을 도입하여 사고력, 판단력, 표현력을 측정함으로써 학생의 문제해결력을 평가하고자 한다(文部科学省, 2017). 이렇듯 외국의 사례를 볼 때 학생의 미래 사회 역량을 점검하고 확인하는 차원에서 대학 입학시험의 변화는 진행되고 있다.

수능의 목표는 학생들이 대학에서 수학(修學)하는데 필요한 능력을 갖추었음을 측정하는 것(한국교육과정평가원, 2018)이지만 시대의 변화에 따라 학생이 갖추어야 할 능력에도 변화가 있기 때문에 이에 맞춰 수능의 변화 방향을 고려해야 한다. 물론 수능이외에 학생의 역량을 평가할 수 있는 여러 대학 입학 전형방법이 존재하지만 수능은 대학 입학의 관문이며 학교 교육의 마지막 평가라는 상징적인 의미를 갖고 있기 때문에 수능의 변화가 이루어지지 않으면 학교에서 실시되는 평가의 변화도 제약이 있을 수밖에 없다. 즉, 수능의 변화는 학교에서 실시되는 평가의 변화를 이끌 수 있다. 따라서 수능의 변화는 시대적인 흐름에 맞추어 반드시 고려되어야 하므로 본 연구에서는 외국의 대학 입학시험을 검토함으로써 수능의 변화 방향을 모색한다.

그리고 수학 교육을 강화하고 있는 많은 국가들(영국, 독일, 핀란드, 호주, 미국 등)은 수학이 4차 산업혁명에 중요한 역할을 차지하고 있음을 인식하고 있다. 특히 호주는 미래사회에서 수학의 중요성을 강조하며 대학에서 이공계열 및 경상계열로 진학하는 학생들에게 필수적으로 요구하는 고등학교 수학의 수준을 높여야 한다고 제언한다(AAS, 2016). 그러나 이와 달리 우리나라의 수학 교육과정 개정의 방향은 학생의 학습 부담 경감을 실현한다는 목적 하에 수학의 내용을 줄여가고 있다. 특히 지금으로부터 10여 년 동안 적용된 3번의 개정 교육과정[1)]에서 고등학교 수학 교과의 내용 중에 행렬 내용 영역의 삭제와 벡터 내용 영역의 축소는 학습 부담 경감을 위한 변화의 결과였다. 그러나 행렬과 벡터는 대학 과정의 선형대수학의 핵심 개념이며, 선형대수학은 4차 산업혁명과 같은 미래 사회의 정보 및 통신과학 분야, 첨단 과학 분야에서 가장 중요시되고 널리 쓰이는 수학의 분야이기 때문에(이상구, 이재화, 함윤미, 2012), 교육과정에서 행렬 영역의 삭제와 벡터 영역의 축소는 다소 아쉬운 선택으로 보인다.

또한 내용이 축소된 벡터 영역은 2015 개정 수학과 교육과정(이하 15 개정 수학과 교육과정)의 '진로 선택과목'에 속한 <기하>과목에 포함되어 있어 학생의 진로 선택에 따라 평가할 수 있는 것으로 보이나 오히려 '진로 선택과목'이라는 이유로 15 개정 수학과 교육과정을 처음 적용받는 2021학년도 수능에서는 제외(교육부, 2018a)되어 사회적으로 논란이 있었다. 이후 공론화 과정을 통해 2022학년도 수능에서는 선택과목으로 포함(교육부, 2018b)되었으나, '일반 선택과목'인 <미적분>, <확률과 통계>를 포함한 3개의 과목 중에서 하나를 선택하는 것이기 때문에 여전히 <기하>과목에 포함된 벡터 영역의 중요성에 대한 인식은 부족한 것으로 볼 수 있다. 이에 행렬과 벡터 영역에 초점을 두고 외국 대학 입학시험을 분석함으로써 각 국가의 대학 입학시험에서 각각의 영역이 어떠한 비중을 차지하고 있는지 확인하여 학습 및 평가의 필요성에 대해 검토한

1) 2009년에는 2007 개정 수학과 교육과정이, 2014년에는 2009 개정 수학과 교육과정이 적용되었으며, 2018년에 2015 개정 수학과 교육과정이 적용되기 시작했다. 약 10년 동안 교육과정의 변화가 3번 이루어졌다.

다.

따라서 미래 사회를 준비하는데 학생에게 필요한 능력과 관련된 수학적 개념을 학습하고 평가하고 있는 것인지 그리고 우리나라 교육과정의 변화에 따른 수능의 수학 출제 과목이 대학 교육에 필요한 수학적 능력을 측정하기에 적합한 것인가에 대한 고민이 필요해 보인다. 이에 미래 사회 준비 차원에서 우리나라 수능에 대한 시사점을 얻기 위해 본 연구는 행렬과 벡터 영역에 대한 외국의 대학 입학시험을 비교, 분석하여 외국의 사례를 통해 평가의 미래지향적인 방향을 모색한다. 이를 통해 앞에 제시한 문제들에 대해 부분적인 답을 제시할 수 있을 것이다.

2. 연구의 목적 및 연구문제

본 연구의 목적은 행렬과 벡터 영역의 외국 대학 입학시험을 비교, 분석함으로써 외국 대학 입학시험의 형식, 행렬과 벡터 영역에서 다루고 있는 내용요소, 행렬과 벡터 문항의 행동 영역에 대한 이해를 돕는 것이다. 이를 통해 문항 유형을 포함한 수능의 형식을 고찰하고, 수능에서 행렬과 벡터 영역에 대한 평가의 필요성을 탐색하는데 목적이 있다. 구체적으로 행렬과 벡터 영역을 대학 입학시험에 출제하고 있는 10개국을 조사하여 해당 국가에서 학생들에게 어떠한 내용을 가르치고, 어떻게 평가하는지 기술할 것이다. 또한 외국 대학 입학시험을 비교, 분석한 결과와 수능을 비교하여 수능에 주는 시사점을 명시적으로 드러낼 것이다. 이러한 목적을 이루기 위한 구체적인 연구 문제는 다음과 같다.

1. 행렬과 벡터를 포함한 외국 대학 입학시험의 형식은 어떠한가?
2. 외국 대학 입학시험에서 행렬과 벡터 영역의 내용요소는 어떠한가?
3. 외국 대학 입학시험에서 행렬과 벡터 문항의 행동 영역은 어떠한가?

이러한 연구문제에 대해 답하는 것은 우리나라가 미래 사회의 변화를

이끌어나갈 창의적인 인재를 양성하는 방향으로 학교 교육 내용과 평가 방법의 변화를 모색하고 대학 입학시험인 수능의 변화 방향에 대한 이해를 확장하는 데 기여할 것이다. 본문은 모두 5개의 장으로 구성되어 있다. Ⅰ장은 연구의 필요성과 목적 및 연구문제를 기술했다. Ⅱ장은 문헌 분석으로 현재까지 이루어진 대학 입학시험 국제 비교 연구와 행렬과 벡터 영역에 대한 수능의 내용 영역과 행동 영역을 분석하였다. 이는 연구 결과를 분석하기 위한 기반이 되며, 연구 분석틀을 제공한다. Ⅲ장은 연구 방법에 대한 설명이다. 연구의 분석 대상과 자료수집 및 분석 방법에 대해 기술하였다. Ⅳ장은 본 연구의 핵심인 연구 결과로써 크게 3개의 부분으로 구분된다. 첫 번째는 외국 대학 입학시험의 형식에 대해 비교, 분석하였고, 두 번째는 교육과정, 교수 및 평가요목 문서를 기반으로 외국 대학 입학시험의 행렬과 벡터 영역의 내용요소를 비교, 분석하였으며, 세 번째는 외국 대학 입학시험의 행렬과 벡터 문항의 행동 영역을 분석하였다. 그리고 각 절의 외국 대학 입학시험 분석 내용과 수능을 비교하여 서술하였다. Ⅴ장은 결론이다. 이 장에서는 연구 결과를 요약, 정리하여 연구의 의의를 언급한 후 연구의 한계점과 후속연구를 위한 제언으로 마무리 지었다.

Ⅱ. 문헌 분석

이 장에서는 외국 대학 입학시험을 비교, 분석한 선행 연구를 검토함으로써 본 연구의 방향을 모색하고, 우리나라 수능의 행렬과 벡터 영역의 내용요소와 문항의 행동 영역을 분석함으로써 외국 대학 입학시험을 이해하기 위한 분석의 틀로써 사용한다.

1. 대학 입학시험 국제 비교 연구

국내 수학교육 관련 학술지에 게재된 대학 입학시험 국제 비교 연구를 발행연도순으로 정리하면 <표 Ⅱ-1>과 같다. 각 연구들에 제시된 소제목 순서에 따라 내용을 정리했으며, 비교 국가명은 연구에 제시된 순서대로 나열한 것이다. 이를 토대로 시기면, 방법면, 내용면에서 선행 연구의 특징을 찾을 수 있으며, 본 연구의 방향을 검토할 수 있다.

<표 Ⅱ-1> 대학 입학시험 국제 비교 선행 연구

연구자	연도	내용	비교 국가	분석 기준
이재학 외	2004	2005학년도 수능 개편 내용	한국, 중국, 일본, 영국, 프랑스, 독일	문항 형식 (문항 유형), 수험 시간, 평가 내용, 평가 범위
		한국과 외국 대학 입학시험 문제 비교		
		수능 개선을 위한 시사점		
조윤동, 남진영, 고호경	2009	한국과 외국 대학 입학시험 내용 영역 비교	한국, 중국, 미국, 일본	시험 개요, 시험의 특징과 내용 영역, 문항 유형
		한국과 외국 대학 입학시험 문항 유형 비교		

서보억, 남진영	2010	일본의 대학 입학시험 특성	한국, 일본	구성, 응시인원, 시험추이, 내용 영역, 형식
		일본 대학 입학시험 문항 분석		
		일본 대학 입학시험과 수능의 비교		
		일본 대학 입학시험이 수능에 주는 시사점		
남진영. 정연준	2011	중국 대학 입학시험 체제	중국	구성, 기본원칙, 평가 능력, 출제 범위, 문항 분석
		중국 대학 입학시험 문항의 특징		
		중국 대학 입학시험의 시사점		
전영주	2011	중국 수학과 교육과정	중국	시험 체제 (내용 영역, 행동 영역, 문항 구성)
		시험 개요		
		시험지 구성		
조성민 외	2014	교육과정 변화와 수능	한국, 미국, 중국	내용 영역
		외국 대학 입학시험과 수능의 내용 영역 비교		
남진영, 탁병주	2016	외국 대학 입학시험 개요	미국, 영국, 호주, 일본, 싱가포르	출제 범위 (내용 영역), 문항 형식, 시험 시간
		외국 대학 입학시험 내용 비교 분석		
		외국 대학 입학시험 형식 비교 분석		
이정무 외	2016	통계 문항	한국, 미국	PISA 평가틀
		수능에서 통계적 소양 평가 모색		
남진영	2017	외국 대학 입학시험 개정 방향	영국, 호주, 일본	시험 목적과 성격, 시험 체제, 문항 유형
		개정 예시 문항 분석		
최인선, 이민희	2017	외국 대학 입학시험 체제	대만	시험체제, 출제범위, 문항분석 (내용 영역, 행동 영역)
		외국 대학 입학시험 문항 분석		

시기면에서 이재학 외(2004)는 제7차 교육과정이 적용된 2005학년도 수능 시작에 앞서 이루어진 연구이며, 나머지 연구들은 이후 07 개정 수학과 교육과정과 09 개정 수학과 교육과정의 도입과 그에 따른 수능 개편 시기(2012학년도, 2017학년도)에 맞물려 있다. 이와 같이 연구들은 1993년 수능이 우리나라 대학 입학시험으로 시작된 이래 10여년이 지나 안착된 상태에서 외국 교육평가의 방향을 탐색하고 있다. 이를 토대로 우리나라 교육과정의 변화와 함께 수능 평가의 변화가 필요함을 공통적으로 인식하고 있음을 보여준다.

그리고 대체적으로 시험 체제, 문항의 출제 범위 등과 같은 형식을 비교하는 연구로 각 국가의 대학 입학시험을 전반적으로 이해하는 데 도움을 주는 개요서 같은 역할을 하는 편이나 문항 분석의 정도에 따라 2가지의 연구로 분류할 수 있다. 하나는 조사 국가의 대학 입학시험에서 출제된 문항을 충분히 분석하고 제시하는 연구(예: 서보억, 남진영, 2010; 남진영, 정연준, 2011; 이정무 외, 2016; 최인선, 이민희, 2017)로 각 국가의 대학 입학시험의 문항 6~10개 정도가 예시로 포함되어 있다. 그 이외의 연구들은 각 대학 입학시험에 대한 전반적인 설명에 좀 더 초점이 있어 제시한 문항들이 평균적으로 3개 이하이며, 시험 체제를 설명해주는 부가적인 역할을 하고 있다. 이에 외국 대학 입학시험의 문항의 특징을 통해 수능의 개선점을 도출하기 위해서는 외국 대학 입학시험의 문항을 충분히 분석하고 각 특징을 제시할 필요가 있다.

또한 대부분의 연구들은 궁극적으로 우리나라 수능에의 시사점을 제시한다. 내용면에서 직접적으로 수능과 다른 국가의 대학 입학시험을 비교하거나 수능의 시사점을 제언의 형태로 드러냄으로써 차이를 보이고는 있으나 결국은 수능에의 시사점 도출이라는 하나의 목표를 갖고 있음을 알 수 있다.

위의 기준들을 토대로 볼 때 본 연구는 15 개정 수학과 교육과정의 도입과 그에 따른 수능 출제 과목의 변화 시기에 맞춰 필요한 연구이다. 또한 국제적인 교육의 흐름을 검토하는 차원에서 여러 국가의 대학 입학시험을 비교, 분석함으로써 우리나라 수능에의 변화 방향을 모색하고 시

사점을 제안할 수 있는 비교연구가 될 수 있다. 이와 더불어 기존 연구와 본 연구의 차이로는 4차 산업혁명의 근간이 되는 선형대수학의 핵심인 행렬과 벡터 영역에 초점을 두어 내용 영역 면에서 다른 국가의 수학교육 경쟁력을 검토할 수 있으며, 시험 형식에 따른 수학적 사고력 평가 방법에 대해서도 심도 있게 논의할 수 있다.

2. 대학수학능력시험 분석

우리나라 수능 수학의 평가틀은 Bloom의 교육 목표 분류학을 수학 교과에 맞게 수정 보완한 것(신성균 외, 1992)으로, 1993년 시행된 첫 수능부터 현재 시행되고 있는 수능까지 내용 영역과 행동 영역으로 구분되는 이원목적분류표를 사용하고 있다. 이에 이 절에서는 수능의 수학과 평가틀을 토대로 내용 영역과 행동 영역으로 나누어 2007 개정 수학과 교육과정(이하 07 개정 수학과 교육과정)과 2009 개정 수학과 교육과정(이하 09 개정 수학과 교육과정)이 적용된 수능을 행렬과 벡터 영역 중심으로 분석한다.

2.1. 대학수학능력시험의 내용 영역 - 행렬, 벡터

행렬과 벡터 영역은 1994학년도 첫 수능에 적용된 제 5차 교육과정부터 약 20여 년 동안 수능에서 평가되는 내용이었다. 벡터 영역은 09 개정 수학과 교육과정이 적용되는 현재 수능에서도 평가하는 내용이나 행렬 영역은 09 개정 수학과 교육과정에서 삭제되었기 때문에 09 개정 수학과 교육과정이 적용되기 시작한 2017학년도 수능부터 평가 내용에 해당하지 않는다.

가장 최근에 행렬 영역이 포함된 수능은 07 개정 수학과 교육과정이 마지막으로 적용된 2016학년도 수능으로, 당시에 문과가 보는 수학 A형과 이과가 보는 수학 B형으로 나뉘어 계열별로 출제 범위가 다르다(한국교육과정평가원, 2015). 이는 [표 Ⅱ-1]과 같으며, 본 연구와 관련된 부분은 밑줄을 그어 표시했다.

<표 Ⅱ-2> 2016학년도 수능 수학 출제 과목 및 범위(07 개정 수학과 교육과정 적용)

시험명	출제 과목	출제 범위
수학 A형	수학 Ⅰ	행렬과 그래프, 지수함수와 로그함수, 수열, 수열의 극한
	미적분과 통계 기본	함수의 극한과 연속, 다항함수의 미분법, 다항함수의 적분법, 확률, 통계
수학 B형	수학 Ⅰ	행렬과 그래프, 지수함수와 로그함수, 수열, 수열의 극한
	수학Ⅱ	방정식, 부등식, 삼각함수, 함수의 극한과 연속, 미분법
	기하와 벡터	일차변환과 행렬, 이차곡선, 공간도형과 공간좌표, 벡터
	적분과 통계	적분법, 순열과 조합, 확률, 통계

<표 Ⅱ-2>를 보면 행렬 영역은 문·이과 공통 출제 과목인 <수학Ⅰ>에 포함되어 있는 '행렬과 그래프' 와 이과 출제 과목인 <기하와 벡터>에 포함되어 있는 '일차변환과 행렬' 이다. 수능 출제 범위로써 각 과목에서 어떠한 내용을 다루었는지 확인하기 위해 07 개정 수학과 교육과정(교육인적자원부, 2007)의 영역별 내용요소를 정리하면 <표 Ⅱ-3>과 같다.

<표 Ⅱ-3> 07 개정 수학과 교육과정 행렬 영역의 내용요소(2012~2016학년도 수능)

과목/단원	내용요소
수학Ⅰ 행렬과 그래프	행렬과 그 연산 - 행렬의 표현, 행렬의 정의 - 합, 차, 곱 연산 - 단위행렬, 역행렬 - 이차정사각행렬의 역행렬
	연립일차방정식과 행렬 - 미지수가 2개인 연립일차방정식의 행렬 표현

	- 역행렬을 이용한 연립일차방정식의 해 계산
	그래프와 행렬 - 그래프의 뜻 - 그래프와 행렬의 관계, 실생활 문제 해결
기하와 벡터 일차변환과 행렬	일차변환 - 일차변환과 행렬사이의 관계 - 대칭변환, 닮음변환, 회전변환과 행렬사이의 관계 - 일차변환의 성질 이해 및 활용
	일차변환의 합성과 역변환 - 일차변환의 합성의 뜻과 성질 이해 - 일차변환의 역변환 - 역변환의 행렬 표현 및 활용

07 개정 수학과 교육과정에서 다루는 '행렬과 그래프'와 '일차변환과 행렬'의 내용요소는 각각 기초적인 개념과 간단한 연산을 위주로 되어 있다. 물론 벡터를 벡터로 보내는 함수인 일차변환을 다루고 있는 '일차변환과 행렬'의 내용은 '행렬과 그래프'에 비하면 다소 어렵지만 [그림 Ⅱ-2]와 같이 개념의 기본적인 원리를 다루는 문제를 주로 다루고 있기 때문에 학습하는데 부담이 크다고 볼 수만은 없다.

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합이 9일 때, a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[그림 Ⅱ-1] 2016학년도 수능 수학 B형 행렬 문항1

그럼에도 이후 개정 교육과정에서 학습 부담을 이유로 제외되었다. 09 개정 수학과 교육과정 논의에서는 행렬 연산을 다루는 데 치중하여 계산량만 많고 의미를 찾지 못하는 문제 풀이 위주의 학습을 강조한다는 이유로 인해 09 개정 수학과 교육과정의 '일반과목'의 내용 영역에서 삭제되었다(신이섭 외, 2011). 15 개정 수학과 교육과정 편성 논의에서도 행렬 영역에 대한 포함 여부가 고려되었으나 교육과정의 개정 방향인 학

습량 감축과 수험생 부담 완화를 이유로 추가되지 않았다(박경미 외, 2015). 이러한 논의 과정을 살펴보면 행렬 학습의 부담은 교육과정의 내용에서 오는 것이 아니라 평가인 수능에서 비롯되었음을 알 수 있다. 이는 07 개정 수학과 교육과정이 적용된 수능에서 행렬의 유용성을 인지할 수 없는 [그림 Ⅱ-2]와 같은 합답형 문항이 반복적으로 출제[2]되어 학생들이 행렬 학습의 필요성을 느끼지 못하고 학습 부담으로만 여기게 된 것과 관련이 있다.

16. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A+B=(BA)^2,\quad ABA=B+E$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. $A=B^2$
ㄴ. $B^{-1}=A^2+E$
ㄷ. $A^5-B^5=A+B$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[그림 Ⅱ-2] 2016학년도 수능 수학 A, B형 행렬 공통 문항

그러나 행렬은 여러 가지 현상을 표현할 수 있는 효과적인 도구로써 미래 사회를 살아갈 학생들에게 필요한 영역이다(박경미 외, 2015). 이에 이후 논의될 장에서 외국 대학 입학시험 행렬 영역의 평가 내용과 평가 방법 등을 비교, 분석함으로써 차후 우리나라 개정 교육과정 및 수능에 시사점을 도출한다.

한편, 벡터 영역은 수능이 시작된 이래 현재까지 이과 학생을 위한 수

2) 07 개정 수학과 교육과정이 적용된 2012~2016학년도 수능 수학에서 매년 행렬의 합답형 문항이 A(나), B(가)형 구분없이 공통적으로 출제되었다.

능 출제 내용 영역에 포함되어 있다. 그런데 교육부의 보도자료(2018a)에 의하면 15 개정 수학과 교육과정이 적용되어 올해 고등학교 1학년 학생이 치르게 되는 2021학년도 수능에서는 벡터 영역이 포함된 과목인 <기하>를 출제 과목에서 제외하였다. 이에 수능 출제 과목 논란이 제기되어 공론화 과정과 논의를 통해 벡터를 포함하고 있는 <기하>과목이 학생의 선택권 보장을 위해 2022학년도 수능의 선택과목으로 포함이 되었다(교육부, 2018b). 이러한 흐름에서 연구자는 수능 출제 과목으로써 벡터 내용 영역에 대한 검토가 필요하다고 보았으며, 이에 07 개정 수학과 교육과정과 09 개정 수학과 교육과정 문서를 통해 학생들이 학습해 온 벡터 내용 영역에 대한 흐름과 방향을 분석한다.

가장 최근에 벡터 영역을 다룬 수능은 09 개정 수학과 교육과정이 적용된 2019학년도 수능으로, 당시 이과가 보는 수학 가형과 문과가 보는 수학 나형으로 나뉘는데 계열별로 출제 범위가 다르다(한국교육과정평가원, 2018). 이는 <표 Ⅱ-4>와 같으며, 본 연구와 관련된 부분은 밑줄을 그어 표시했다.

<표 Ⅱ-4> 2019학년도 수능 출제 과목 및 범위(09 개정 수학과 교육과정 적용)

시험명	출제 과목	출제 범위
수학 가형	미적분Ⅱ	지수함수와 로그함수, 삼각함수, 미분법, 적분법
	확률과 통계	순열과 조합, 확률, 통계
	기하와 벡터	평면 곡선, <u>평면벡터</u>, <u>공간도형과 공간벡터</u>
수학 나형	수학Ⅱ	집합과 명제, 함수, 수열, 지수와 로그
	미적분Ⅰ	수열의 극한, 함수의 극한과 연속, 다항함수의 미분법, 다항함수의 적분법
	확률과 통계	순열과 조합, 확률, 통계

09 개정 수학과 교육과정이 적용된 수능 수학의 벡터 영역은 수학 가형의 <기하와 벡터>과목에 포함되어 있는 '평면벡터' 와 '공간도형과

공간벡터’이다. 또한, 앞서 제시했던 <표 Ⅱ-2>를 보면 07 개정 수학과 교육과정이 적용된 수능 수학에서 벡터 영역은 <기하와 벡터>과목에서의 ‘벡터’이다. 구체적으로 <표 Ⅱ-2>, <표 Ⅱ-4>에서 살펴본 07 개정 수학과 교육과정, 09 개정 수학과 교육과정부터 15 개정 수학과 교육과정까지의 변화를 분석하기 위해 각각의 교육과정(교육인적자원부, 2007; 교육과학기술부, 2011; 교육부, 2015a)에서 벡터 영역의 내용요소를 정리하면 <표 Ⅱ-5>와 같다.

<표 Ⅱ-5>를 보면 3개의 교육과정에 따른 벡터 영역의 내용요소의 변화를 확인할 수 있다. 07 개정 수학과 교육과정에서 09 개정 수학과 교육과정으로 이동은 소단원이 2개가 되면서 큰 변화를 일으킨 것처럼 보일 수 있으나 자세히 살펴보면 07 개정 수학과 교육과정에서 09 개정 수학과 교육과정으로서의 내용요소의 변화는 크지 않다. 07 개정 수학과 교육과정에서는 평면과 공간의 벡터의 내용이 섞여있었으나, 09 개정 수학과 교육과정에서는 평면과 공간을 분리하여 내용을 제시함으로써 학생의 자연스러운 이해를 돕는 방향으로 진행되었음을 알 수 있다. 이에 반해 09 개정 수학과 교육과정에서 15 개정 수학과 교육과정으로 이동은 내용면에서 큰 변화를 보인다. 09 개정 수학과 교육과정의 평면벡터의 연산, 성분과 내적은 그대로 15 개정 수학과 교육과정의 <기하>에 포함되었으나 공간벡터의 내용은 완전히 삭제되었고, 미분과 적분을 이용한 속도와 가속도, 거리는 <미적분>과목으로 이동하였다. 이는 <기하>가 ‘진로 선택과목’으로 변경되며 내용 감축의 필요성과 학습 부담 경감 요구가 반영된 결과로써(박경미 외, 2015) 공간벡터가 삭제되고, 평면벡터로 제한된 내용만을 다루는 급격한 변화를 보여준다.

<표 Ⅱ-5> 07, 09, 15 개정 수학과 교육과정 벡터 영역의 내용요소 변화

	07 개정 수학과 교육과정 (2012~2016학년도 수능)	09 개정 수학과 교육과정 (2017~2020학년도 수능)		15 개정 수학과 교육과정 (2022학년도 수능~)[3]
과목	기하와 벡터	기하와 벡터		기하
단원	벡터	평면벡터	공간도형과 공간벡터	평면벡터
내용요소	벡터와 그 연산 - 벡터의 뜻 - 벡터의 합, 차, 실수배	벡터의 연산 - 벡터의 뜻 - 벡터의 합, 차, 실수배		벡터의 연산 - 벡터의 뜻 - 벡터의 합, 차, 실수배
	벡터의 내적 - 벡터의 내적 이해 및 계산	평면벡터의 성분과 내적 - 위치벡터의 뜻, 평면벡터와 좌표 표현 - 벡터의 내적의 이해 및 계산 - 평면에서 벡터를 이용한 직선과 원의 방정식		평면벡터의 성분과 내적 - 위치벡터의 뜻, 평면벡터와 좌표 표현 - 벡터의 내적의 이해 및 계산 - 평면에서 벡터를 이용한 직선과 원의 방정식
	직선과 평면의 방정식 - 공간에서 직선의 방정식 - 공간에서 평면의 방정식	평면운동 - 미분법을 이용한 속도와 가속도 - 정적분을 이용한 속도와 거리	공간벡터 - 공간벡터의 뜻, 공간벡터의 합, 차, 실수배 - 공간벡터의 내적의 이해 및 계산 - 공간에서 벡터를 이용한 직선의 방정식 - 공간에서 벡터를 이용한 평면과 구의 방정식	

3) 15 개정 수학과 교육과정이 처음 적용되는 2021학년도 수능에는 <기하>과목이 제외되었기 때문이다.

이와 더불어 15 개정 수학과 교육과정에 따른 수능 출제과목 범위에서도 큰 변화를 보였다. 15 개정 수학과 교육과정이 적용되는 첫 수능인 2021학년도 수능의 경우, 벡터 영역을 포함한 <기하>가 '진로 선택과목' 이라는 전제하에 수험생 부담 완화와 이공계 필수과목으로 보기 어렵다는 이유(교육부, 2018a)로 포함되지 않았으며, 2022학년도 수능에서 <기하>는 학생 선택권 강화 및 학습 부담 완화를 이유로 <확률과 통계>, <미적분>, <기하>중 한 과목을 고르는 선택과목으로 포함되었다(교육부, 2018b). 이와 같은 현상으로 인해 고등학교에서 많은 학생들은 '진로 선택 과목' 인 <기하>과목보다는 '일반 선택과목' 인 <미적분>이나 <확률과 통계>를 선택할 확률이 높다. 또한 벡터를 포함하고 있는 <기하>를 학습하지 않아도 대학의 이공계열로 진학하는 학생들이 많아질 가능성도 크다.

그러나 벡터는 자연과학이나 공학에서의 기초 과목의 재료가 되고, 평면도형이나 공간도형의 성질을 이해하기 좋은 도구이기 때문에(신이섭 외, 2011), 수학을 도구로 사용하는 이공계열로 진학할 학생에게 의미있는 내용 영역이다. 이에 교육과정 개정에 따른 학습 부담 경감이라는 이유만으로 벡터 영역의 내용 축소가 이루어지는 것에 대해 생각해 볼 필요가 있다. 이러한 배경을 바탕으로 이후 논의될 장에서는 외국 대학 입학시험에서 벡터 영역의 평가 내용과 평가 방법 등을 비교, 분석하여 다른 국가와의 경쟁력 면에서 우리나라 교육과정과 수능의 방향이 세계 교육의 흐름에 적절한지 확인한다.

2.2. 대학수학능력시험의 행동 영역

수능은 고등학교 교육과정을 기반으로 학생들의 대학 교육을 받는 데 필요한 수학적 사고력을 평가하는 시험이다(한국교육과정평가원, 2018). 수능 수학에서 측정하는 수학적 사고력은 행동 영역으로 제시되고 있으며, 구체적으로 '계산 능력', '이해 능력', '추론 능력', '문제해결 능력' 으로 구분하고 있다.

행동 영역의 구분은 처음 수능이 시작된 1994학년도부터 적용되어 크게 변하지 않고 현재까지 유지되고 있기 때문에[4] 수학적 사고력의 인지 수준을 적절하게 분류하여 평가하고 있는 것으로 간주할 수 있다. 또한 임해미, 김성경, 박지현(2018)이 제안한 15 개정 수학과 교육과정에 따른 국가 수준 평가의 수학과 평가틀을 살펴보면 계산, 이해, 추론, 문제해결 능력을 기본적으로 포함하고, 정보처리 역량을 추가하고 있어 기존의 수능 행동 영역이 15 개정 수학과 교육과정을 기반으로 평가하는 수능에서도 적용할 수 있는 평가틀이라고 볼 수 있다.

이에 2019학년도 수능 대비 학습 방법 안내(한국교육과정평가원, 2018)에 서술되어 있는 행동 영역의 세부적인 능력을 <표 Ⅱ-6>과 같이 정리하였으며, 각 능력을 대표하는 단어는 진하게 표시하였다.

4) 5차, 6차 교육과정이 적용된 수능에서는 추론을 귀납, 유추, 추측, 증명으로 나누고, 문제해결을 수학내적, 수학외적으로 구분하였으며, 7차 교육과정이 적용된 수능에서는 추론을 발견적, 연역적으로, 문제해결을 수학내적, 수학외적으로 나누어 설명하였으나 07 개정 수학과 교육과정이 적용된 수능부터는 추론과 문제해결내의 영역을 구분하지 않고 설명을 하나로 통합하여 제시하고 있다(한국교육과정평가원, 2014 참고).

〈표 Ⅱ-6〉 수능 수학과 행동 영역

행동 영역	설명
계산 능력	연산의 기본 법칙이나 성질을 적용하여 주어진 식을 간단히 하는 능력
	수학의 기본적인 공식이나 계산법을 적용하는 능력
	수학의 전형적인 풀이 절차(알고리즘)를 적용하는 능력
이해 능력	문제에 주어진 수학적 용어, 기호, 식, 그래프, 표의 의미와 관련 성질을 알고 적용하는 능력
	주어진 문제와 관련된 수학적 개념을 파악하고 적용하는 능력
	교과서에 나오는 기본 예제나 정형화된 응용문제를 해결하는 능력
	주어진 문제 상황을 수학적으로 표현하는 능력
	수학적 표현을 다른 표현으로 바꾸어 표현하는 능력
추론 능력	나열하기, 세어보기, 관찰 등을 통해 문제 해결의 핵심 원리를 발견하는 능력
	유추를 통해 문제 해결의 핵심 원리를 발견하는 능력
	수학의 개념·원리·법칙을 이용하여 참인 성질을 이끌어 내거나 주어진 명제의 참·거짓을 판별하는 능력
	주어진 정의를 이해하고 참인 성질을 이끌어 내는 능력
	반례를 들어 주어진 명제가 거짓임을 판단하는 능력
	조건 명제의 증명, 삼단 논법에 의한 논리적 추론, 반례에 의한 증명, 모순법, 동치 명제의 증명, 수학적 귀납법에 의한 증명 등을 이해하는 능력
	주어진 증명을 읽고 결론을 도출하는 능력
문제해결 능력	두 가지 이상의 수학적 개념·원리·법칙의 관련성을 파악하고 종합하여 문제를 해결하는 능력
	두 단계 이상의 사고 과정을 거쳐서 문제를 해결하는 능력
	실생활 상황에서 관련된 수학적 개념·원리·법칙 등을 파악하고 이를 적용하여 문제를 해결하는 능력
	타 교과의 소재를 사용한 상황에서 관련된 수학적 개념·원리·법칙 등을 파악하고 이를 적용하여 문제를 해결하는 능력

수능에서 출제되었던 행렬과 벡터 문항을 수능 수학과 행동 영역으로 제시된 <표 Ⅱ-6>을 기준으로 분석하는 방법을 확인한다. 아래에 제시하고 있는 4개의 문항 중 계산 능력, 추론 능력, 문제해결 능력을 평가하는 문항은 한국교육과정평가원의의 수능 분석 자료집에 포함되어 있는 내용으로, 평가틀을 이용한 문항 분석 방법을 검토할 수 있다. 그리고 행렬과 벡터 영역에서 이해 능력을 평가하는 문항은 명백하게 제시된 예시가 없기 때문에 수능 수학 문항 출제에 관한 책자(박선화 외, 2004)를 참고하여 선택하였다.

1. 행렬 $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$의 역행렬 A^{-1}의 모든 성분의 합은? [2점]

① 5 ② 4 ③ 3 ④ 2 ⑤ 1

[그림 Ⅱ-3] 계산 능력 평가 문항

[그림 Ⅱ-3]은 2012학년도 수능 수학 가, 나형의 공통 문항으로 이차정사각행렬의 역행렬을 구하고 역행렬의 성분의 합을 구하는 것이다. 이는 수학의 기본적인 공식이나 계산법을 적용하는 능력이 필요한 것으로 계산 능력 영역에 해당하는 문항에 해당한다(한국교육과정평가원, 2012).

25. 좌표평면 위의 점 $(4, 1)$을 지나고 벡터 $\vec{n}=(1, 2)$에 수직인 직선이 x축, y축과 만나는 점의 좌표를 각각 $(a, 0)$, $(0, b)$라 하자. $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

[그림 Ⅱ-4] 이해 능력 평가 문항

[그림 Ⅱ-4]는 2018학년도 수능 수학 가형 문항으로 벡터의 성질을 이해하고 직선의 방정식의 개념에 적용하여 값을 구하는 문항이다. 이는 문제에서 주어진 내용과 관련된 수학적 개념을 파악하고 적용하는 능력을 요구하고 있기 때문에 이해 능력을 평가하는 것으로 볼 수 있다.

16. 두 이차정사각행렬 A, B가

$$A^2 - AB = 3E, \quad A^2B - B^2A = A + B$$

를 만족시킬 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, E는 단위행렬이다.) [4점]

<보 기>

ㄱ. A의 역행렬이 존재한다.

ㄴ. $AB = BA$

ㄷ. $(A+2B)^2 = 24E$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

[그림 Ⅱ-5] 추론 능력 평가 문항

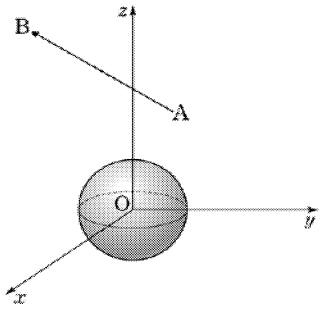
[그림 Ⅱ-5]는 2015학년도 수능 수학 A, B형 공통 문항으로 추론 능력을 평가하는 문항이다. 이는 역행렬의 뜻과 성질, 행렬의 교환법칙과 분배법칙 등에 대해 이해하고 주어진 <보기>인 명제의 참·거짓을 연역적으로 추론하여 판별하는 능력이 필요하기 때문에 추론 능력 영역에 해당하는 문항으로 본다(한국교육과정평가원, 2015).

29. 좌표공간의 두 점 $A(2, \sqrt{2}, \sqrt{3})$, $B(1, -\sqrt{2}, 2\sqrt{3})$에 대하여 점 P는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|\overrightarrow{AP}|=1$

(나) $\overrightarrow{AP}$와 $\overrightarrow{AB}$가 이루는 각의 크기는 $\frac{\pi}{6}$이다.

중심이 원점이고 반지름의 길이가 1인 구 위의 점 Q에 대하여 $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$의 최댓값이 $a+b\sqrt{33}$이다. $16(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.) [4점]



[그림 Ⅱ-6] 문제해결 능력 평가 문항

[그림 Ⅱ-6]은 2016학년도 수능 수학 B형 문항으로 벡터의 연산, 공간 벡터의 내적, 구의 방정식 등 다양한 수학적 개념을 활용할 수 있는지를 측정하고 있다(한국교육과정평가원, 2016). 이처럼 두 가지 이상의 수학적 개념·원리·법칙을 종합적으로 파악하고 문제에 적용하여 해결하는 능력이 필요하기 때문에 문제해결 능력을 평가하는 문항으로 분류한다.

위와 같은 방법으로 수능 수학의 행동 영역 <표 Ⅱ-6>의 분석틀을 활용하여 외국 대학 입학시험 행렬과 벡터 영역의 문항이 어떠한 수학적 사고력을 평가하기 위해 출제되었는지 분석한다.

Ⅲ. 연구방법

이 장에서는 조사 대상으로 선정한 10개국의 대학 입학시험 명칭과 그에 따른 교육과정 또는 교수 및 평가요목 문서를 제시함으로써 본 연구의 대상을 분명히 한다. 또한, 해당 국가의 대학 입학시험 관련 규정 및 지침, 교육과정 또는 교수 및 평가요목 문서의 자료를 수집하고 분석한 방법을 제시함으로써 연구 결과의 신뢰성을 높이고자 한다.

1. 분석 대상

본 연구는 영국, 프랑스, 독일, 핀란드, 에스토니아, 싱가포르, 중국, 대만, 호주, 미국의 대학 입학시험에서 행렬과 벡터 문항을 분석하였다. 10개국은 전 세계적으로 대학교육 수준이나 교육체제, 이공계열을 통한 국가 발전 위상이 높은 국가들로 지역을 고려하여 선택하였다. 특히 분석 대상 국가는 4차 산업혁명시대의 기술과 장기적인 성장력을 확인할 수 있는 UBS, WEF, IMD의 국가 경쟁력 순위[5]에서 대체로 우리나라보다 높은 순위를 보이는 국가일 뿐만 아니라 나귀수 외(2018)에서 수학교육을 통한 미래 사회 대비 계획을 갖고 있는 국가들로 대부분 제시되었기 때문에 해당 국가의 고등학교 졸업 자격시험이나 대학 입학선발시험[6]을 분석하는 것은 의미가 있다. 또한 싱가포르와 대만은 TIMSS나 PISA의 수학 시험 성취도면에서 꾸준히 최상위권을 보이는 국가이며(구자옥, 2016; 상경아, 2016), 미국, 영국, 독일, 프랑스는 역대 노벨과학상 수상자가 많

5) UBS(Union Bank of Switzerland, 스위스 연방은행)의 4차 산업혁명 준비도 순위(2016), WEF(World Economic Forum, 세계경제포럼)의 네트워크 준비지수(2018), IMD(International Institute for Management Development, 스위스 국제경영대학원)의 세계 디지털 경쟁력 지수(2018)를 검토함. 한국무역협회 Trade Brief(2017)은 위 세 지표를 종합하여 4차 산업혁명 경쟁력 순위를 제시하고 있음.

6) 고등학교 졸업 자격시험은 고등학교 교육과정을 이수했음을 알려주는 목적의 시험이며, 대학 입학선발시험은 고등학교를 졸업하고 대학 교육과정을 이수할 학생을 선발하는 시험을 말한다.

아 기초과학 분야가 두텁다고 볼 수 있으며, 핀란드, 에스토니아, 중국과 호주는 교육을 통한 인재 양성이 돋보이는 국가이기 때문에 본 연구의 분석 대상으로 적절하다고 보았다.

본 연구의 분석 대상인 각 국가의 대학 입학시험은 고등학교 졸업 자격시험이거나 대학 입학선발시험으로 나라마다 성격은 다소 상이하다. 그러나 본 연구에서는 국가별 대학 입학시험의 성격에 대한 구분은 고려하지 않고, 대학 입학시 반영되는 여부에만 초점을 두고 이를 모두 대학 입학시험이라고 간주한다. 이에 분석 대상 국가의 대학 입학시험에서 행렬과 벡터 영역을 포함하는 수학 시험을 분석 대상으로 선택했으며, <표 Ⅲ-1>과 같다.

그리고 2018년 올해를 기준으로 최근 2년 안에 시행된 대학 입학시험을 분석 대상으로 삼았다. 영국, 호주와 같이 학생이 미래 사회의 준비 역량을 갖추고 있는지 점검하는 방향으로 대학 입학시험 체제의 변화가 이루어지고 있기 때문에(남진영, 2017), 최근 2년으로 제한하여 외국 대학 입학시험을 살펴보더라도 본 연구의 목적을 실현하는데 충분하다고 보았다. 그리고 영국, 독일, 싱가포르, 호주는 2018년 시행된 시험지를 아직 공개하지 않았거나 구할 수 없어 해당시기의 시험 문항을 분석 대상에서 제외하였으나, 각 국가의 2016, 2017년 문항들이 충분히 특징을 드러내고 있어 분석하는데 큰 무리가 없었다. 또한 미국은 시험출제기관에서 기출 문제를 공개하지 않고 연습 문항만을 제공하고 있어 이를 분석 대상으로 택했다.

<표 Ⅲ-1> 분석 대상 국가의 시험명과 시험과목

국가		시험명	시험과목			분석시기
유럽	영국	GCE A-level (Edexcel)	C4, FP1, FP3, M1			2016, 2017
	프랑스	Baccalauréat	ES, S			2016 ~ 2018
	독일 (바이에른주)	Abitur	Prüfungsteil A, B			2016, 2017
	핀란드	Ylioppilastutkinto	lyhyt, pitkä		A-osa	2016 가을 ~ 2018 봄
					B1-osa	
					B2-osa	
	에스토니아	Riigieksamite	kitsas, laia		Ⅰ-osa	2016 ~ 2018
					Ⅱ-osa	
아시아	싱가포르	Singapore-Cambridge GCE A-level	H2	1	Pure mathematics	2016, 2017
				2	Pure mathematics	
	중국 (전국권)	高考	文科, 理科			2016 ~ 2018
	대만	學科能力測驗	數學考科			2016 ~ 2018
		指定科目考試	數學甲, 數學乙			
오세아니아	호주 (빅토리아주)	VCE	FtM		1	2016, 2017
					2	
			SM		1	
					2	
북아메리카	미국	SAT subject test	Level 2			연습문항

영국의 대학 입학시험(General Certificate of Education A-level, GCE A-level)은 국가의 승인을 받은 여러 기관에서 시행을 하는데, 그 중에서 많은 학생들이 선택하는 Pearson Edexcel(이하 Edexcel)의 A-level 시험을 분석 대상으로 선택하였다. Edexcel의 A-level 수학 시험은 6개의 과정으로 구분되며, 각 과정은 필수과목과 선택과목으로 나뉜다. 본 연구에서는 필수 과목이거나 각 과정에서 택할 비율이 50%이상 되는 선택과목 중에서 행렬 영역을 다루는 FP1, FP3과 벡터 영역을 다루는 C4, FP3, M1[7]로 좁혀 분석 대상으로 삼았다.

프랑스의 일반계 고등학교(Lycée général) 학생들이 치르는 대학 입학시험(Baccalauréat)은 전공 계열에 따라 L(Litteraire, 문학), ES (Économique et Sociale, 경제 및 사회), S(Scientifique, 과학)로 구분된다. 이 중에서 행렬 영역을 다루고 있는 ES, S 수학 시험과 벡터를 다루고 있는 S 수학 시험을 본 연구의 분석 대상으로 선택했다.

독일은 현재 각 주마다 다른 대학 입학시험(Abitur)을 보고 있는데 2020년부터 독일 전역에 동일한 시험을 시행하기 위해 현재 진행 중에 있다. 이 중에서 교육성취도가 높은 것으로 알려진 바이에른을 포함한 6개주[8]는 2014년부터 현재까지 통일하여 하나의 시험으로 진행하고 있다 (ISB, 2013). 바이에른주에서 시행하는 대학 입학시험(Prüfungsteil)의 수학 시험은 짧은 비연속과제로 구성된 A부분과 확장된 과제로 구성된 B부분으로 나뉘며, 각각의 부분은 공통적으로 해석학(Analysis), 추계학 (Stochastics), 기하학(Geometrie)으로 구분된다. 세 영역 중에서 기하학이 벡터를 포함하고 있어 해당 영역으로 좁혀 분석하였다.

핀란드의 대학 입학시험(Ylioppilastutkinto)은 다른 국가와 다르게 1년에 두 번(봄, 가을) 시행된다. 수학 시험은 기본(lyhyt)과 심화(pitkä)과정으로 나뉘어 있고, 각 과정은 세 부분(A, B1, B2)으로 구성되어 있다. 벡터 영역은 과정과 상관없이 포함되기 때문에 본 연구에서는 2016년 가을부터 2018년 봄까지 시행된 총 4번의 대학 입학시험의 수학의 기본과정

7) Edexcel의 수학 과목은 Core mathematics(C)1~4, Further Pure mathematics(FP)1~3, Mechanics(M)1~5, Statistics(S)1~4, Decision mathematics(D)1~2으로 구분된다.
8) 바이에른, 함부르크, 메클렌부르크포어포메른, 니더작센, 작센, 슐레스비히홀슈타인

(lyhyt)과 심화과정(pitkä)을 분석 대상으로 선택하였다.

에스토니아의 대학 입학시험(Riigieksamite)에서 수학 시험은 기본(kitsas)과 심화(laia)과정으로 구분되며, 각 과정은 문항수와 배점이 다른 두 부분(Ⅰ, Ⅱ)으로 나뉜다. 벡터 영역은 두 과정에 모두 포함되어 있기 때문에 본 연구에서는 2016년부터 2018년까지 시행된 대학 입학시험의 수학의 기본과정(kitsas)과 심화과정(laia)을 분석 대상으로 택했다.

싱가포르의 대학 입학시험(Singapore-Cambridge GCE A level)은 계열에 따라 보는 시험이 다르다. 경영, 경제 및 사회과학으로 진학을 준비하는 학생을 위한 H1과 수학, 물리, 공학을 전공할 준비를 하는 학생을 위한 시험인 H2로 나뉘는데, H2시험이 벡터를 포함하고 있다. 이에 본 연구에서는 H2시험을 분석 대상으로 선택하였으며, 순수 수학과 확률 및 통계의 두 부분으로 나뉘는 H2시험에서 벡터 영역을 다루는 순수 수학(Pure mathematics)으로 제한한다.

중국의 대학 입학시험(高考)은 국가기관인 교육부고시중심(教育部考試中心)에서 출제하는 전국권 시험과 지역 교육청에서 자체적으로 출제하는 지역 시험으로 나뉜다. 본 연구에서는 교육부고시중심에서 출제하는 전국권 수학 시험을 선택하였으며, 문과(文科)와 이과(理科)로 구분되지만 두 시험 모두 벡터를 다루고 있어 둘 다 분석 대상에 해당한다.

대만의 대학 입학시험은 전형방법에 따라 구분되는데, 수학 시험을 포함하고 있는 학과능력측정시험(學科能力測驗)과 지정과목고시(指定科目考試)가 있다. 두 시험은 행렬과 벡터 영역을 모두 포함하고 있기 때문에 학과능력측정시험의 수학교과(考科)와 지정과목고시 수학갑(甲), 수학을(乙)이 본 연구의 분석 대상이다.

호주는 주별로 다른 대학 입학시험을 갖고 있는데 교육열이 높다고 알려진 도시인 멜버른을 포함하고 있는 빅토리아주의 대학 입학시험(Victorian Certificate of Education, VCE)을 분석 대상으로 선택하였다. 호주 대학 입학시험(VCE)의 수학 과목은 Mathematical Methods(MM)1, 2, Further Mathematics(FtM)1, 2, Specialist Mathematics(SM)1, 2이며, 행렬 영역을 포함하고 있는 시험인 FtM1, FtM2[9]와 벡터 영역을 포함하고 있

는 시험 SM1, SM2가 본 연구의 분석 대상이다.

미국의 다양한 대학입학 전형방법 중에 본 연구에서는 행렬과 벡터를 모두 다루고 있는 SAT 교과시험(subject test)의 Level 2에 초점을 두었다. SAT 시험을 주관하는 기관(College board)에서 제공하는 연습 문항 중 본 연구와 관련된 것은 1개의 행렬 문항뿐이었다. 이에 주관 기관에서 제시한 행렬 1문항을 분석 대상으로 포함하고, SAT 교과시험을 준비하는 학생들이 많이 보는 문제집 2종류[10]에 포함되어 있는 행렬 연습 문항 3개와 벡터 연습 문항 8개를 추가로 선택하여 미국 교과시험(subject test)의 행렬과 벡터 문항의 특징을 분석하였다.

한편 대학 입학시험의 출제 범위는 일반적으로 국가 교육과정이나 교수 및 평가요목을 기준으로 하고 있다. 이에 본 연구에서는 분석 대상인 대학 입학시험 문항의 행렬과 벡터 영역의 내용요소를 확인하기 위해서 각 국가의 교육과정 문서나 교수 및 평가요목이 포함된 문서를 선택하였고, 이를 정리하면 <표 Ⅲ-2>와 같다.

9) FtM1,2는 필수과목과 선택과목으로 나뉘는데, 4개의 선택과목 중 한 과목이 행렬이기 때문에 다른 국가에 비해 분석 문항수가 많은 편이다.

10) Barron’s SAT subject test Math Level 2 (10판)(2012), Mcgraw-hill’s SAT subject test Math Level 2 (2판)(2009)

<표 Ⅲ-2> 분석 대상 국가 교육과정, 교수 및 평가요목 문서

국가	문서명	출판연도
영국	Pearson Edexcel Specification GCE Mathematics (Issue 3)	2014
프랑스	Bulletin officiel spécial n° 8	2011
독일 (바이에른주)	Bayern Lehrplan Jahrgangsstufe 11,12 Mathematik	2004
핀란드	National Core Curriculum for General Upper Secondary Schools 2015	2016
에스토니아	National Curriculum for Upper Secondary Schools	2014
싱가포르	Mathematics Higher 2 (Syllabus 9758)	2017
중국 (전국권)	2018 数学理大纲, 数学理大纲	2017
대만	學科能力測驗 數學考科考試說明 指定科目考試 數學考科考試說明 (適用於99 課綱微調)	2013
호주 (빅토리아주)	Victorian Certificate of Education Mathematics Study Design	2015
미국	Common Core State Standards for Mathematics	2010

<표 Ⅲ-2>에 제시된 문서 중 영국, 프랑스, 호주, 싱가포르, 중국은 대학 입학시험을 위한 교수 및 평가요목 문서이며, 독일, 핀란드, 에스토니아, 대만, 미국은 각 국가에서 적용하고 있는 교육과정 문서이다. 그리고 2017년부터 적용된 싱가포르의 교수요목 문서는 2016년까지 적용된 교수요목 문서와 비교했을 때 벡터 영역에서 추가된 내용만 있을 뿐 삭제된 내용은 없기 때문에 2017년 문서를 분석 대상으로 선택해도 문제가 되지 않는다고 보았다. 또한 중국의 2018년 시험을 위한 평가요목 문서의 벡터 영역의 내용요소는 2016년, 2017년의 문서의 내용과 다르지 않기 때문에 가장 최근의 문서를 이용하여 분석에 사용하였다.

2. 자료수집 및 분석방법

2.1. 자료수집

본 연구의 핵심인 외국의 대학 입학시험 문항을 가장 먼저 수집했으며, 이후 내용요소의 분석을 위해 교육과정 및 교수 및 평가요목 문서를 수집하였다. 이러한 자료는 기본적으로 해당 국가의 교육부, 지역 교육청 및 교육관련 공식 웹사이트를 통해 수집하였다. 또한 기존에 외국 교육과정이나 외국 대학 입학시험을 분석한 국내 논문을 통해 확인한 온라인 경로, 주변 친구의 외국인 친구를 통한 경로 또는 웹 정보에서 확인한 경로를 통해 직·간접적으로 확인하여 본 연구의 자료를 수집할 수 있었다.

그리고 본 연구에서 외국 대학 입학시험 형식을 문항 유형, 시험 시간, 공학용 계산기 사용, 공식집 사용(공식 제공), 서술형 채점 방법과 같이 시험을 시행하는데 포함되는 규정 및 지침으로 보고, 이에 대한 내용이 시험 문서에서 제시되지 않은 부분은 추가로 검색하여 관련 내용이 포함된 문서나 웹 정보를 수집하였다.

또한 연구자가 분석 대상 모든 국가의 언어에 능통하지 않기 때문에 수집된 자료 중 비영어권 국가인 프랑스, 독일, 핀란드, 에스토니아, 중국, 대만의 웹 사이트 정보나 시험 문항은 온라인 번역 어플을 사용하여 일차적으로 번역을 하였고, 언어를 잘 알고 있는 주변 지인을 통해 확인하는 작업을 거쳤다.

2.2. 자료 분석방법

우선 수집한 대학 입학시험에서 행렬과 벡터 영역에 해당하는 문항을 선택하여 해당 문항을 번역하였다. 문항을 번역할 때 원문의 의미를 오역 없이 정확하게 전달하는 것과 우리나라 교육과정상에서 사용하는 수

학적 용어, 기호를 참고하여 매끄럽게 문장을 완성하는 것에 초점을 두었다. 번역한 문항은 연구자와 같은 대학원 석사과정 학생이며 교직 경력 4년의 수학교사와 검수하여 수정하였다.

이후 번역한 문제를 풀어봄으로써 해당 문항이 행렬과 벡터 영역에서 어떠한 내용요소를 바탕으로 출제가 되었는지 확인할 수 있었으며, 문제를 해결하는 과정에서 피험자인 학생에게 어떠한 능력을 요구하는지 확인할 수 있었다. 이를 토대로 연구 결과를 분석할 때 해당 내용을 뒷받침할 수 있는 문항을 예시로 들어 근거로 삼았다.

그리고 수집한 자료 중 외국 대학 입학시험의 형식을 비교, 분석하기 위해서 3가지로 분류하였다. 문항 유형, 시험 시간과 같이 평가에 필수적으로 포함되는 것, 공학용 계산기, 공식집처럼 평가에서 허용 여부와 관련된 것, 서술형 채점 방법 등과 같이 평가 이후 사항과 관련된 것으로 분류하여 각각의 내용을 국가별로 표로 정리하여 분석하거나 해당 내용을 기술하였다.

또한 행렬과 벡터 문항에서 다루는 내용요소의 비교, 분석을 위해서 앞 절의 <표 Ⅲ-2>에 제시한 국가 교육과정이나 교수 및 평가요목 문서를 사용하였다. 영국, 핀란드, 에스토니아, 호주, 싱가포르, 미국의 문서는 영어로 제작되어 있는 출판물을 사용하였으며, 프랑스, 독일, 중국, 대만은 해당 국가의 언어로 제작되어 있는 출판물을 사용하였다. 각 국가별로 내용요소를 전개한 후 분석 관점에 따라 표로 정리하였다.

마지막으로 대학 입학시험 문항의 행동 영역에 대해서는 Ⅱ장에서 살펴본 수능 수학과 행동 영역 <표 Ⅱ-6>을 평가틀로 사용하였다. <표 Ⅱ-6>을 이용하여 조사 대상 국가의 행렬 문항 46개와 벡터 93개를 분석하고, 연구자와 같은 대학원의 박사과정 수료자이며 4년 교직 경력의 수학교사에게 분석을 의뢰하였다. 해당 교사는 수학 교육연구의 전문성을 갖추고 있으며, 중등학교에서 문항 출제경험이 있어 문항 분석 결과에 신뢰성을 줄 수 있다고 보았다. 문항 분석 결과 연구자의 분석과 94.0% 일치하였으며, 연구자와 해당 교사 간 분석에서 도출된 상이한 의견에 대해서는 협의를 거쳐 최종 분석 결과에 반영하였다.

Ⅳ. 연구결과

이 장에서는 10개국 영국, 프랑스, 독일(바이에른주), 핀란드, 에스토니아, 싱가포르, 중국(전국권), 대만, 호주(빅토리아주), 미국의 대학 입학시험 중 행렬과 벡터 영역을 포함하고 있는 수학 시험을 형식면에서 살펴보고, 행렬과 벡터 영역의 내용요소와 행렬과 벡터 문항의 행동 영역을 비교, 분석한다. 그리고 분석 내용을 토대로 우리나라 수능과의 비교를 통해 수능에의 시사점을 도출한다.

1. 대학 입학시험의 형식

본 연구에서 대학 입학시험의 형식은 문항 유형, 시험 시간, 공학용 계산기 사용, 공식집 사용(공식 제공), 서술형 채점 방법과 같이 수학 시험을 시행하는데 포함되는 규정 및 지침을 말한다. 이는 문항을 분석하지 않고 확인할 수 있는 정보로써 외국 대학 입학시험의 배경을 검토할 수 있어 이후 대학 입학시험의 문항을 비교, 분석하고 논의 결과를 이끌어 내는데 풍부한 맥락을 제공할 수 있다. 이에 본 연구에서는 3개의 절을 통해 외국 대학 입학시험의 형식을 비교, 분석한다.

1.1. 외국 대학 입학시험 비교, 분석

1.1.1. 문항 형식, 시험 시간

분석 대상 국가의 행렬과 벡터 영역을 포함하는 대학 입학시험의 문항 유형과 시험시간은 <표 Ⅳ-1>과 같다. <표 Ⅳ-1>을 보면 미국의 SAT subject test를 제외한 9개국의 대학 입학시험의 수학 시험에서 서술형 문항을 출제하고 있음을 알 수 있다.

<표 Ⅳ-1> 국가별 대학 입학시험 문항 형식, 시험 시간

국가	시험명/시험과목		문항 형식		시간
			문항 유형	하위문항유무	
영국	C4, FP1, FP3, M1		서술형 8문항	△	90분
프랑스	ES		서술형 3~4문항[11]	○	180분
	S		서술형 3~5문항		240분
독일 (바이에른주)	A부분	해석학	서술형 4~5문항	○	90분
		추계학	서술형 2문항		
		기하학	서술형 2문항		
	B부분	해석학	서술형 2~3문항		180분
		추계학	서술형 2~3문항		
		기하학	서술형 1문항		
핀란드	lyhyt(기본), pitkä(심화)	A부분	서술형 4문항	△	360분
		B1부분	서술형 3문항		
		B2부분	서술형 3문항		
에스토니아	kitsas(기본), laia(심화)	Ⅰ부분	서술형 7문항	△	120분
		Ⅱ부분	서술형 5문항		150분

싱가포르	H2	1	Pure mathematics	서술형 10~12문항	○	180분
		2	Pure mathematics	서술형 4~5문항		180분
			Probability & Statistics	서술형 6~8문항		
중국 (전국권)	文科, 理科			4지선다형 12문항 + 단답형 4문항 + 서술형 6문항	△	120분
대만	學科能力測驗		數學考科	5지선다형 6~7문항 + 다답형 5~7문항 + 단답형 7~8문항	×	100분
	指定科目考試		數學甲	5지선다형 3~4문항 + 다답형 3~5문항 + 단답형 3~4문항 + 서술형 2문항	△	80분
			數學乙	5지선다형 3문항 + 다답형 4~5문항 + 단답형 3문항 + 서술형 2문항		80분
호주 (빅토리아주)	FtM[12]		1	5지선다형 40문항	×	90분
			2	서술형 13~15문항	○	90분
	SM		1	서술형 10문항	△	60분
			2	5지선다형 20문항 + 서술형 6문항	○	120분
미국	SAT subject test		Level 2	5지선다형 50문항	×	60분

(○: 모든 문항이 하위 문항을 포함, △: 일부 문항이 하위문항을 포함, ×: 모든 문항이 하위 문항 포함하지 않음.)

11) 간혹 4지선다형이 출제되기는 하나 한 문항에서 하위 문항의 일부분에 불과하다.
12) FtM1,2에서 행렬과목만의 문항의 유형은 각각 5지 선다형 8문항, 서술형 3문항이 출제되었다.

특히 영국, 프랑스, 독일, 핀란드, 에스토니아, 싱가포르 6개국은 모든 문항을 서술형으로 출제하고 있으며, 중국, 대만, 호주 3개국은 선다형, 서술형 등의 유형을 혼합하여 출제하고 있다. 또한 하위문항을 포함하고 있는 서술형 문항이 대체적으로 출제되는 편이며, 각 문제 해결 과정을 서술할 수 있는 충분한 시험시간을 확보해주고 있음을 알 수 있다.

외국 대학 입학시험에서 출제된 서술형 문항 [그림 Ⅳ-1-1], [그림 Ⅳ-1-2]을 토대로 서술형 문항의 특징을 확인한다.

주어진 점 $A(2,1,-4)$, $B(6,1,-12)$, $C(0,1,0)$에 대하여

a. 점 C가 직선 AB위에 있으나 선분 AB위에는 없음을 보이시오.

b. 선분 AB위에 점 D가 있다고 하자. 점 D의 위치는 점 D와 점 B사이의 거리가 점 D와 점 A사이의 거리의 3배가 되는 위치라고 할 때, 점 D의 좌표를 구하시오.

[그림 Ⅳ-1-1] 독일 Abitur의 A부분 벡터 문항(2017년 시행)

[그림 Ⅳ-1-1]은 독일 A부분에서 출제된 문항으로 서술어를 보면 답만을 요구하는 것이 아니라 왜 그렇게 되었는지 설명을 작성해야 함을 알 수 있다. 물론 답을 구하는 문제도 반드시 풀이과정을 서술해야 한다.

학교 매점에서는 파이(P), 롤(R), 샌드위치(S)를 판매한다. 세 학교에서 팔린 각 품목의 수는 행렬 M과 같다.

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} P & R & S \end{array} \\ \begin{pmatrix} 35 & 24 & 60 \\ 28 & 32 & 43 \\ 32 & 30 & 56 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ 1주 \\ 2주 \\ 3주 \end{array}$$

a. 3주 동안 얼마나 많은 샌드위치가 팔렸는가?

m_{ij}는 행렬 M의 i행, j열의 성분을 말한다.

b. 성분 m_{12}가 의미하는 바는 무엇인가?

c. 다음의 행렬을 보자.

$$\begin{pmatrix} 35 & 24 & 60 \\ 28 & 32 & 43 \\ 32 & 30 & 56 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 491.55 \\ 428.00 \\ 487.60 \end{pmatrix}$$

이때 a는 파이 한 개의 가격, b는 롤의 한 개의 가격, c는 샌드위치 한 개의 가격이다.

i. 샌드위치 한 개의 가격은 얼마인가?

ii. 아래 행렬은 3주 동안 롤과 샌드위치를 판 전체 금액이 $915.60임을 보여주고 있다.

$$L \times \begin{pmatrix} 491.55 \\ 428.00 \\ 487.60 \end{pmatrix} = (915.60)$$

위 행렬을 만족하는 L은 1×3 행렬이다.

행렬 L을 구하시오.

[그림 Ⅳ-1-2] 호주 VCE의 FtM2 행렬 문항(2017년 시행)

호주 FtM2에서 출제된 [그림 Ⅳ-1-2]는 4개의 하위 문항을 갖고 있는 서술형 문항이다. 이는 실생활 맥락에서 주어진 행렬을 해석하고, 행렬의 곱셈의 의미를 파악하고 표현할 수 있는지 물어보며 관련된 수학적 개념의 원리, 법칙 등을 종합적으로 적용할 수 있는지 확인하고 있다.

이처럼 서술형 문항을 출제하는 국가의 대학 입학시험은 답의 옳고 그름을 채점하는 것이 아니라 답에 이르는 풀이과정을 평가하고 있다. 학생이 작성한 풀이과정을 통해 학생의 논리적인 사고과정을 파악할 수 있을 뿐만 아니라 학생의 수학적 기호의 사용 및 표현 능력, 해석 능력을 확인함으로써 평가할 수 있다. 또한 하위 문항을 포함한 서술형 문항을

출제하여 해당 내용 영역의 수학적 개념을 연계하여 질문함으로써 학생이 관련된 수학적 개념을 폭넓게 이해하고 종합적으로 해결할 수 있는지 평가하고 있다. 이에 다수의 외국 대학 입학시험에서 하위 문항을 포함한 서술형 문항을 출제하고 있는 것으로 보이며, 이러한 평가의 세계적인 흐름에 맞추어 일본은 2020년부터 서술형 문항을 포함하는 대학 입학시험 개정(文部科学省, 2017)을 앞두고 있는 것으로 볼 수 있다.

한편, <표 Ⅳ-1>의 시험시간을 살펴보면 서술형 문항을 포함하고 있는 대다수 국가의 대학 입학시험은 문제를 풀 수 있는 충분히 긴 시간을 학생에게 주고 있음을 알 수 있다. 학생에게 확보된 충분한 시험 시간은 서술형 문항의 문제 해결 과정 작성을 고려한 것뿐만 아니라 학생이 갖고 있는 능력을 온전하게 드러낼 수 있게 하고, 정확하게 평가하려는 의도로 여겨진다. 이와 같은 맥락으로 분석 대상 대부분의 국가는 대학 입학시험을 여러 날에 걸쳐 보거나 고등학교 졸업까지 여러 번 시험기회를 주고 있다. 이는 대학 입학시험을 통해 학생의 능력을 충분히 발현하게 함으로써 학생의 잠재된 능력을 정확히 파악하여 졸업자격과 대입선발의 타당성을 높이고 있음을 보여주는 것이다.

1.1.2. 공학용 계산기, 공식집

분석 대상 국가의 행렬과 벡터 영역을 포함하는 대학 입학시험의 공학용 계산기 허용과 공식집 사용 여부에 관한 부분은 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 국가별 대학 입학시험 공학용 계산기, 공식집 사용

국가	시험명/시험과목		공학용 계산기	공식집
영국	C4, FP1, FP3, M1		○	○
프랑스	ES		○	×
	S			
독일 (바이에른주)	A부분		×	×
	B부분		○	○
핀란드	lyhyt(기본), pitkä(심화)	A부분	×	○
		B1부분	○	
		B2부분		
에스토니아	kitsas(기본), laia(심화)	Ⅰ부분	○	×
		Ⅱ부분		
싱가포르	H2		○	○
중국 (전국권)	文科, 理科		×	×
대만	學科能力測驗	數學考科	×	○
	指定科目考試	數學甲		×
		數學乙		
호주 (빅토리아주)	FtM	1	○	○
		2		
	SM	1	×	○
		2	○	
미국	SAT subject test	Level 2	○	○

(○: 사용을 허용하거나 제공함, ×: 허용하지 않거나 제공하지 않음.)

우선 <표 Ⅳ-2>에서 공학용 계산기의 사용을 전혀 허용하지 않는 국가는 중국과 대만이다. 중국과 대만을 제외한 나머지 8개국은 일부 또는 모든 시험 과목에 허용하고 있다. 모든 시험에서 공학용 계산기를 허용하는 국가는 영국, 프랑스, 에스토니아, 싱가포르, 미국으로 5개국이며, 부분적으로 허용하고 있는 국가는 독일, 핀란드, 호주 3개국이다.

일반적으로 시험에서 공학용 계산기의 사용을 허용하는 것은 두 가지의 목적이 있는 것으로 볼 수 있다. 첫 번째로 평가의 초점이 복잡하고 어려운 수식에 대한 계산 능력에 있는 것이 아니라 문제를 해결하는 과정에서 나온 수식을 해석하기 위해 학생이 공학용 계산기를 적절하게 활용할 수 있는지 확인하는 것이다. 이를 확인할 수 있는 예로 프랑스의 교수요목 문서에는 '3차이상의 행렬의 계산은 반드시 공학용 계산기를 사용한다.' 라고 명시되어 있으며, 독일 대학 입학시험 B부분의 문항인 [그림 Ⅳ-1-3]의 해결 과정에서는 $\cos\phi = \frac{\sqrt{5}}{35}$를 만족하는 ϕ의 값을 구하기 위해 공학용 계산기를 활용해야 한다.

(전략)
d. 가능한 가장 높은 에너지율을 얻기 위해 태양 모듈의 경사각 ϕ의 크기는 수평으로부터 30°에서 36°이어야 한다. 이 조건이 맞는지 확인하시오.
… (후략)

[그림 Ⅳ-1-3] 독일 Abitur의 B부분 벡터 문항(2017년 시행)

두 번째로 문제에 제시된 조건 값들이 실제 수치와 유사하여 풀이과정에서 공학용 계산기를 사용함으로써 수학이 실제 상황의 문제를 해결할 수 있음을 인식하게 하는 것이다. 그 예시로 핀란드의 시험 문항 [그림 Ⅳ-1-4]를 들 수 있다.

화물선은 Hanko 항구에서 독일의 Rostock로 이동한다. 배의 항법 시스템은 벡터 형식으로 경로를 일려준다. 배는 우선 $\vec{a} = 3.5i - 3.5j$에서 $\vec{b} = -5.0i$으로, 마지막으로 $\vec{c} = -4.1j$로 지나간다. 출발 지점에서 배는 얼마나 멀리 있는가? (단, 단위는 km이나 구하는 답은 m단위로 환산해서 십의 자리에서 반올림하시오. 여기에서는 지구 표면의 휘어짐은 고려하지 않는다.)

[그림 Ⅳ-1-4] 핀란드 Ylioppilastutkinto 기본과정 벡터 문항(2017년 가을 시행)

벡터의 합과 크기를 이용하여 [그림 Ⅳ-1-4]의 문제를 풀면 답 $\sqrt{60.01}$을 구할 수 있다. 이를 문제 조건대로 십의 자리에서 반올림하기 위해서는 근호를 사용하지 않는 값으로 구해야 하므로 반드시 계산기를 이용해야 한다. 이는 문제에서 주어지는 조건 값을 인위적으로 조절하지 않았음을 말하는 것으로, 복잡하지만 실생활 맥락에서 접할 수 있는 수치를 그대로 사용하여 문제를 해결하는 기회를 제공하고 있음을 드러낸다. 이처럼 평가에서 공학용 계산기의 사용을 허용함으로써 문제 해결 과정에서 학생이 공학적 도구를 적절하게 활용하는지 평가할 수 있으며, 실생활 상황의 맥락에서 실제적인 수치를 사용하여 공학용 계산기를 이용해 문제를 해결함으로써 수학이 실질적으로 생활에 유용함을 인식하게 할 수 있다.

그리고 시험 과목마다 공학적 도구 사용에 대한 허용 여부가 다른 국가인 독일, 핀란드, 호주에 대해 확인한다. 독일의 A부분, 핀란드의 A부분, 호주의 SM1에서 공학용 도구의 사용을 허용하지 않는데, 이는 공학용 계산기의 사용을 허용하는 독일의 B부분, 핀란드의 B1, B2부분, 호주의 SM2와 상대적으로 평가하는 능력이 다소 다르다는 것을 말하고 있다. 즉, 독일의 A부분, 핀란드의 A부분, 호주의 SM1에서는 공학용 계산기에 의존하지 않는 학생의 계산 능력을 평가하는 목적이 좀 더 뚜렷하다고 볼 수 있다. 예를 들어 호주의 SM1 벡터 문항인 [그림 Ⅳ-1-5]는 좌표공간에서 주어진 위치벡터와 두 벡터가 이루는 각의 크기를 이용하여 식을 세워 미지수를 구하는 문제이다. 이는 평가의 초점이 풀이를 절차대로 서술하는 과정에서 공학용 계산기 없이 학생의 계산 능력만으로

해를 구할 수 있는지 확인하고 있음을 보여준다.

고정된 원점에 대한 점 B, C, D의 위치벡터는 각각 $\vec{b}=i-j+2k$, $\vec{c}=2i-j+k$, $\vec{d}=ai-2j$이다. (단 a는 실수) 각 BCD의 크기가 $\frac{\pi}{3}$일 때, a값을 구하시오.

[그림 Ⅳ-1-5] 호주 VCE의 SM1 벡터 문항(2017년 시행)

이제 대학 입학시험에서의 수학 공식집 제공 또는 허용 여부에 대해 분석한다. 각 시험에서 사용되는 공식 중 행렬과 벡터 영역에 초점을 두었으며, 공식이 의도하는 바를 그대로 전달하기 위해서 공식집은 번역하지 않고 그대로 제시하였다.

<표 Ⅳ-2>를 보면 모든 시험 과목에서 공식을 제공하지 않거나 허용하지 않는 국가는 프랑스, 에스토니아, 중국뿐이다. 일부 시험에서 허용하고 있는 국가는 독일, 대만이며, 나머지 영국, 핀란드, 싱가포르, 호주, 미국의 분석 대상 시험에서는 공식집을 사용하고 있다. 그런데 국가마다 대학 입학시험에서 제공하거나 허용하는 수학 공식이 시험과의 연관성 또는 내용에서 차이가 있기 때문에 구분하여 분석한다.

첫 번째로 제공하는 공식이 문제 해결에 큰 영향을 미치지 않는 것으로 보이는 국가의 대학 입학시험은 대만의 학과능력측정시험과 미국의 SAT subject test이다. 대만의 학과능력측정시험에서 제공하는 공식은 등차수열과 등비수열의 합 공식, 삼각함수 덧셈 공식, 뿔의 부피, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\log_{10}2$, $\log_{10}3$의 근삿값 등이며, 미국의 SAT subject test에서 제공하는 공식은 원뿔의 부피, 구의 부피, 구의 넓이 등이다. 이러한 공식들은 대학 입학시험에서 평가하는 내용 영역과는 다소 거리가 있다. 이를 통해 대만의 학과능력측정시험과 미국의 SAT subject test를 준비하는 학생은 공식이 제공됨에도 시험 대비를 위해 암기해야 할 내용의 폭이 달라지지는 않을 것으로 보인다.

두 번째로 공식을 사용하는 국가의 대학 입학시험 중 행렬 영역의 공

식을 확인한다. 대학 입학시험에 행렬 영역의 공식을 제공하는 국가는 영국과 호주이며, 행렬 영역을 포함하는 영국의 FP1, FP3시험과 호주의 FtM1, FtM2시험에서 제공하는 수학 공식은 각각 [그림 Ⅳ-1-6], [그림 Ⅳ-1-7]과 같다.

Matrix transformations

Anticlockwise rotation through θ about O: $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

Reflection in the line $y = (\tan\theta)x$: $\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$

In FP1, θ will be a multiple of 45°.

[그림 Ⅳ-1-6] 영국 GCE A-level의 FP1, FP3에서 제공된 행렬 공식

Module 1 – Matrices

determinant of a 2 × 2 matrix	$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
inverse of a 2 × 2 matrix	$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, where $\det A \neq 0$
recurrence relation	S_0 = initial state, $S_{n+1} = T S_n + B$

[그림 Ⅳ-1-7] 호주 VCE의 FtM1, FtM2에서 제공된 행렬 공식

[그림 Ⅳ-1-6]은 행렬의 회전 변환, 선대칭 변환에 대한 공식이며, [그림 Ⅳ-1-7]은 이차정사각행렬의 행렬식, 역행렬과 점화식 관계에 대한 공식이다. 본 연구의 분석 대상인 영국과 호주의 대학 입학시험의 2016, 2017년에 출제된 모든 행렬 문항을 검토한 결과 제공한 공식들을 사용하는 문항이 매년 출제되는 것은 아니었으며, 주어진 공식들이 복잡하지 않기 때문에 암기에 어려움을 겪을 정도는 아니었다. 그러나 시험에서 공식을 제공하는 것이 어떠한 역할을 할 수 있는가에 대해 생각해 볼 수

있는 문항을 확인할 수 있었다. 이는 영국 FP1의 [그림 Ⅳ-1-8], 호주 FtM1의 [그림 Ⅳ-1-9]이다.

$$P=\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

a. 행렬 P에 의해 나타내어진 기하학적 변환 U을 설명하시오.

변환 U는 점 $A(p, q)$를 점 $B(6\sqrt{2}, 3\sqrt{2})$로 사상한다.

b. p, q의 값을 구하시오.

2×2행렬 Q로 표현되는 변환 V는 직선 $y=x$에 의한 대칭변환이다.

c. 행렬 Q를 구하시오.

변환 U는 변환 V에 의해 변환 T가 된다. 변환 T는 행렬 R로 표현된다고 하자.

d. 행렬 R을 구하시오.

e. 변환 T의 역변환이 자기 자신임을 보이시오.

[그림 Ⅳ-1-8] 영국 GCE A-level의 FP1 행렬 문항(2016년 시행)

[그림 Ⅳ-1-8]에서 첫 번째 하위 문항은 제시된 행렬 P가 회전변환임을 이해하고 설명할 것을 요구하며, 세 번째 하위 문항은 직선 $y=x$에 의한 대칭변환을 표현한 행렬 Q를 구할 것을 요구한다. 이는 [그림 Ⅳ-1-6]에 제시된 행렬의 변환 공식을 바탕으로 주어진 행렬 P에 대한 해석이 가능하며, 행렬 Q를 표현할 수 있다. 공식이 주어지지 않았다면 학생이 이를 암기하고 있어야 문제를 해결할 수 있으나 공식이 주어졌기 때문에 학생이 공식을 적절하게 문제에 적용하여 해석하고, 해결하고 있는가를 평가할 수 있다. 즉, 공식을 제공함으로써 평가의 초점을 공식을 암기하는 것보다 이를 활용할 수 있는가에 둘 수 있는 것이다.

(전략)
농장에서는 매 달 물고기를 사거나 팔아서 어린 물고기, 청소년 물고기, 어른 물고기의 양을 유지한다. F_n을 n번째 달의 물고기의 수라 할 때, 점화식으로 표현하면 다음과 같다.

$$F_{n+1} = \begin{pmatrix} 0.65 & 0 & 0 & 0 \\ 0.25 & 0.75 & 0 & 0 \\ 0 & 0.20 & 0.95 & 0 \\ 0.10 & 0.05 & 0.05 & 1 \end{pmatrix} F_n + B$$

이 때, 행렬 B는 매 달 사거나 팔린 어린 물고기, 청소년 물고기, 어른 물고기의 수를 보여주는 열 행렬이다.
매 달, 농장에서는
a. 어른 물고기를 1650마리 팔 것이다.
b. 어른 물고기를 1750마리 살 것이다.
c. 어린 물고기를 17,500마리 팔 것이다.
d. 어린 물고기를 50,000마리 살 것이다.
e. 10,000마리 청소년 물고기를 살 것이다.

[그림 Ⅳ-1-9] 호주 VCE의 FtM1 행렬 문항(2017년 시행)

[그림 Ⅳ-1-9]에서는 주어진 점화식을 이해하여 행렬 B를 구하고, 행렬 B의 성분이 의미하는 바를 해석하여 답을 구하도록 하고 있다. 이는 [그림 Ⅳ-1-7]에 제공된 공식인 점화식 관계를 토대로 학생이 문제 상황을 좀 더 잘 이해할 수 있게 하고, 문제의 해결을 가능하게 한다.

이처럼 시험에서 제공되는 공식은 학생의 암기능력보다는 주어진 공식을 활용하여 문제를 해결하는 능력을 평가함으로써 더 높은 수준의 사고력을 측정하는데 도움을 줄 수 있다. 또한, 학생이 문제에서 주어진 조건을 좀 더 잘 이해하게 함으로써 학생의 문제해결 능력을 이끌어 낼 수 있다.

세 번째로 대학 입학시험에서 벡터 영역의 공식을 사용하는 국가는 영국, 독일, 핀란드, 호주, 싱가포르이다. 구체적으로 벡터 영역의 공식을 제공하는 시험은 영국의 FP3, 독일의 B부분, 호주의 SM1, SM2, 싱가포르의 H2이며, 핀란드의 시험에서는 공식을 제공하는 것이 아니라 학생이 공식집을 가져오는 것을 허용하는 것으로 본 연구에서는 핀란드 대학 입학시험에서 승인된 MAOL 공식집(2013)의 벡터 영역 공식을 확인하였다. 그리고 영국의 C4나 M1에서도 제공되는 공식이 있으나 벡터 영역과는

관련이 없기 때문에 본 연구에서는 영국의 시험 중 벡터 공식을 제공하는 시험은 FP3뿐이라고 보았다.

이 중에서 많은 벡터 공식을 제공하거나 허용하는 시험은 영국의 FP3, 독일의 B부분, 핀란드의 시험으로 제공하는 공식은 각각 [그림 Ⅳ-1-10], [그림 Ⅳ-1-12], [그림 Ⅳ-1-14]와 같다.

Vectors

The resolved part of **a** in the direction of **b** is $\dfrac{\mathbf{a.b}}{|\mathbf{b}|}$

The point dividing AB in the ratio $\lambda : \mu$ is $\dfrac{\mu\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{\lambda+\mu}$

Vector product: $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\sin\theta\,\hat{\mathbf{n}} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \mathbf{b}.(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}.(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

If A is the point with position vector $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ and the direction vector **b** is given by $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$, then the straight line through A with direction vector **b** has cartesian equation

$$\frac{x-a_1}{b_1} = \frac{y-a_2}{b_2} = \frac{z-a_3}{b_3} \ (=\lambda)$$

The plane through A with normal vector $\mathbf{n} = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ has cartesian equation

$n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$ where $d = -\mathbf{a.n}$

The plane through non-collinear points A, B and C has vector equation

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + \lambda(\mathbf{b}-\mathbf{a}) + \mu(\mathbf{c}-\mathbf{a}) = (1-\lambda-\mu)\mathbf{a} + \lambda\mathbf{b} + \mu\mathbf{c}$$

The plane through the point with position vector **a** and parallel to **b** and **c** has equation

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$$

The perpendicular distance of (α, β, γ) from $n_1x + n_2y + n_3z + d = 0$ is $\dfrac{|n_1\alpha + n_2\beta + n_3\gamma + d|}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2 + n_3^2}}$.

[그림 Ⅳ-1-10] 영국 GCE A-level의 FP3에서 제공된 벡터 공식

영국의 FP3에서 제공되는 공식 [그림 Ⅳ-1-10]은 스칼라사영, 외적, 삼중곱, 직선의 방정식, 평면의 방정식, 점과 평면 사이의 거리 등의 계산식을 포함하고 있다. FP3 시험에서 출제된 [그림 Ⅳ-1-11]과 같은 문항을 보면 제공된 여러 공식들 중 외적 계산식, 직선의 방정식과 평면의 방정식 표현을 적용하여 하위 문항들을 해결할 수 있음을 알 수 있다. 이처럼 공식들을 암기하지 않아도 주어진 공식들을 통해 문제 해결이 가능하다.

평면 $\Pi_1 : x-2y-3z=5$과 평면 $\Pi_2 : 6x+y-4z=7$가 있다.
a. 두 평면 Π_1, Π_2사이의 예각을 구하시오.

한 점 $P(2, 3, -1)$이 있다. 직선 l은 점 P를 지나가고, 평면 Π_1에 수직이다.
또한 직선 l은 평면 Π_2을 통과하는데, 교점이 Q이다.
b. 점 Q의 좌표를 구하시오.

평면 Π_3는 점 Q를 통과하고, 두 평면 Π_1, Π_2에 수직이다.
c. 평면 Π_3의 방정식을 $r \cdot n = p$꼴로 구하시오.

[그림 Ⅳ-1-11] 영국 GCE A-level의 FP3 벡터 문항(2017년 시행)

독일의 B부분에서 제공된 공식은 [그림 Ⅳ-12]로 내적과 외적의 정의, 내적과 외적의 의미 및 계산식, 두 벡터 사이의 각의 계산식, 삼중곱, 평면의 방정식 표현 등을 포함하고 있다.

Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Definition: $\vec{a} \circ \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$
- zueinander senkrechte Vektoren: $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \circ \vec{b} = 0$
- Betrag eines Vektors: $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \circ \vec{a}}$
- Einheitsvektor: $\vec{a}^0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$
- Winkel zwischen zwei Vektoren: $\cos\varphi = \frac{\vec{a} \circ \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \quad (0 \le \varphi \le \pi)$

Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

- Definition: $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}$
- Richtung: $\vec{a} \times \vec{b}$ steht senkrecht auf $\vec{a}$ und $\vec{b}$
- Betrag: $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi \quad (0 \le \varphi \le \pi)$
- Flächeninhalt eines Dreiecks ABC: $F = \frac{1}{2} \cdot |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$
- Volumen einer dreiseitigen Pyramide ABCD: $V = \frac{1}{6} \cdot |\overrightarrow{AB} \circ (\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AD})|$

Ebene im $\mathbb{R}^3$

- Parameterform: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\vec{u} + \mu\vec{v}$
- Normalenform in Vektordarstellung: $\vec{n} \circ (\vec{X} - \vec{A}) = 0$
- Normalenform in Koordinatendarstellung: $n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$

Kugelgleichung

$(x_1 - m_1)^2 + (x_2 - m_2)^2 + (x_3 - m_3)^2 = r^2$

[그림 Ⅳ-1-12] 독일 Abitur의 B부분에서 제공된 벡터 공식 일부

독일 B부분에 출제된 문항 [그림 Ⅳ-1-13]은 공식집에 제공되어 있는 내적과 외적의 계산식, 두 벡터 사이의 각의 계산식, 구의 방정식 표현을 이용하여 문제를 해결할 수 있다.

직교 좌표계에 있는 세 점 $A(6,3,3)$, $B(3,6,3)$, $C(3,3,6)$는 정삼각형을 만든다.

a. 정삼각형 ABC가 위에 있는 평면 E의 방정식을 표준형으로 구하시오.

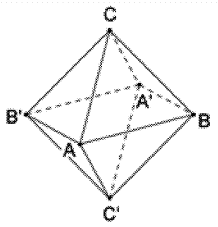
(예상되는 결과: $E: x+y+z-12=0$)

세 점 A, B, C는 점 $Z(3,3,3)$를 대칭으로 하여 또 다른 세 점 A', B', C'를 얻는다.

b. 세 점 A, B, Z를 포함하는 평면 F를 구하여 설명하고, 평면 F와 선분 CC'가 수직임을 보이시오.

c. 사각형 $ABA'B'$는 한 변의 길이가 $3\sqrt{2}$인 정사각형임을 보이시오.

입체도형 $ABA'B'CC'$는 팔면체이다. 이것은 정사각형 $ABA'B'$를 공통밑면으로 하고, C와 C'를 뿔의 꼭짓점으로 하는 사각뿔 2개로 이루어져있다.



d. 팔면체 $ABA'B'CC'$의 부피가 36임을 보이시오.

e. 옆면 ABC와 $AC'B$사이의 각의 크기를 구하시오.

f. 팔면체의 모든 꼭짓점이 구 위에 있다. 이 구의 방정식을 구하고, 구 부피에서 팔면체 부피의 비율을 계산하시오.

[그림 Ⅳ-1-13] 독일 Abitur의 B부분 벡터 문항(2016년 시행)

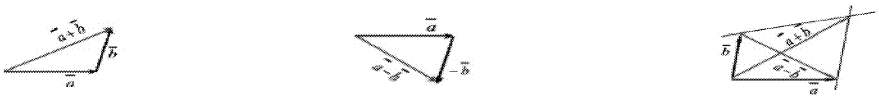
위와 같이 영국이나 독일의 대학 입학시험의 문항을 보면 주어진 공식을 이용하여 많은 문제를 해결할 수 있음을 보여준다. 이는 학생의 공식 암기 유무에 따른 평가보다는 학생이 문제 풀이에 필요한 공식이 무엇인지 파악하고, 제공한 공식을 적절하게 활용하여 문제를 해결할 수 있는지를 평가하고 있다고 볼 수 있다. 즉, 암기를 통한 기억력 테스트와 같은 평가보다는 학생의 높은 사고 수준을 평가하는 데 목적이 있다.

그리고 핀란드의 대학 입학시험에서 허용하는 MAOL 공식집은 [그림 Ⅳ-1-14]로 벡터의 합·차·실수배의 기하학적 의미, 벡터 관련 용어의 뜻과 표현, 내적과 외적의 기하학적 의미 및 계산식, 스칼라 사영, 벡터 사영, 두 벡터 사이각의 계산식, 삼중곱 등을 포함하고 있다. 핀란드 공식집의 가장 큰 특징은 영국, 독일과 달리 개념의 이미지를 포함하고 있다는 것이다. 개념과 함께 제시되어 있는 이미지가 자세하고 풍부하여 마치 교과서 벡터 단원의 내용을 압축해 놓은 것처럼 보이기도 하는데, 이를 통해 개념의 이해가 충분히 가능하고 이전에 학습한 내용을 기억해내

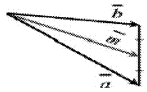
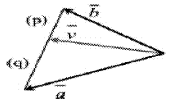
는 데 충분한 도움을 줄 수 있을 것으로 보인다.

Laskutoimitukset

Summa ja erotus



Määritelmiä

nollavektori	$\bar{0}$ on vektori, jonka suunta on epämääräinen ja pituus 0.
yksikkövektori	$\overline{a^\circ}$ on $\bar{a}$: n suuntainen ja sen pituus on 1, $\overline{a^\circ} = \frac{\bar{a}}{\lvert \bar{a} \rvert}$
vastavektori	$-\bar{a}$ on $\bar{a}$: n pituinen ja sille vastakkaissuuntainen, joten $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$
paikkavektori	$\overrightarrow{AO} = \bar{r}$ on origon O ja pisteen A yhdysvektori
mediaanivektori	$\bar{m} = \frac{\bar{a}+\bar{b}}{2}$ 
jakosuhdevektori	$\bar{v} = \frac{p\bar{a}+q\bar{b}}{p+q}$ 

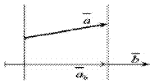
6. pistetulo (skalaaritulo) $\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \cos(\bar{a}, \bar{b}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

7. kohtisuoruus $\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$, kun $\bar{a}, \bar{b} \neq \bar{0}$

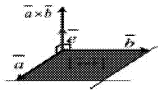
8. välinen kulma $\cos(a, b) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}|\,|\bar{b}|}$, $0^\circ \leq \measuredangle(\bar{a}, \bar{b}) \leq 180^\circ$

9. skalaariprojektio $a_b = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$

10. vektoriprojektio $\bar{a}_b = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\bar{b} \cdot \bar{b}}\,\bar{b}$



11. ristitulo (vektoritulo) $\bar{a} \times \bar{b} = |\bar{a}|\,|\bar{b}| \sin(\bar{a}, \bar{b})\,\bar{e} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$, $|\bar{e}| = 1$

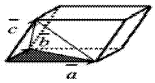


12. yhdensuuntaisuus $a \parallel b \Leftrightarrow a \times b = 0$, *kun* $a, b \neq 0$

13. suunnikkaan ala $A = |\bar{a} \times \bar{b}|$, *kolmion ala* $= \frac{1}{2} A$

14. skalaarikolmiotulo $\bar{a} \cdot \bar{b} \times \bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} \cdot \bar{c} = \overline{abc} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$

15. särmiön tilavuus $V = |\overline{abc}|$, tetraedrin tilavuus



[그림 Ⅳ-1-14] 핀란드 MAOL 공식집에서 제공된 벡터 공식 일부

이처럼 핀란드도 영국, 독일과 마찬가지로 많은 내용을 담은 공식집의 사용을 허용하고 있다. 그러나 공식을 이용하여 많은 계산 과정을 필요로 하는 영국이나 독일과 달리 핀란드의 대학 입학시험 문항은 대체로 적절한 개념을 이용하여 문제를 해석하고 처리할 수 있는지 묻고 있기 때문에 공식을 제공한 맥락이 다소 다르다고 볼 수 있다. 앞서 언급했듯이 교과서의 내용을 압축해 놓은 것처럼 보이는 공식집을 허용하는 것은 마치 오픈북 형태의 시험을 치르는 것과 유사하다. 이는 <표 Ⅳ-1>에서 확인한 바와 같이 대학 입학시험이 6시간 동안 시행되는 것과도 맥락이 일치하는 것으로 보인다.

반면 싱가포르, 호주의 대학 입학시험에서 사용하는 벡터 공식은 영국, 독일, 핀란드와 양적인 면에서 현저한 차이를 보인다. 싱가포르 H2에서 제공하는 벡터 공식은 [그림 Ⅳ-1-15]로 직선의 방정식, 평면의 방정식, 외적 계산 등을 포함하고 있으며[13], 호주 SM1, SM2에서 제공하는 벡터 공식은 [그림 Ⅳ-1-16]으로 벡터 크기, 내적 계산식 등을 포함하고 있으나 제시되는 공식의 수가 영국, 독일, 핀란드에 비해 적은 편이다.

The point dividing AB in the ratio $\lambda : \mu$ has position vector $\dfrac{\mu\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{\lambda+\mu}$

If A is the point with position vector $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$ and the direction vector $\mathbf{b}$ is given by $\mathbf{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$, then the straight line through A with direction vector $\mathbf{b}$ has cartesian equation

$$\frac{x-a_1}{b_1}=\frac{y-a_2}{b_2}=\frac{z-a_3}{b_3}(=\lambda)$$

The plane through A with normal vector $\mathbf{n}=n_1\mathbf{i}+n_2\mathbf{j}+n_3\mathbf{k}$ has cartesian equation

$$n_1x+n_2y+n_3z+d=0 \text{ where } d=-\mathbf{a}.\mathbf{n}$$

The point dividing AB in the ratio $\lambda : \mu$ has position vector $\dfrac{\mu\mathbf{a}+\lambda\mathbf{b}}{\lambda+\mu}$

Vector product:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\a_3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_2b_3-a_3b_2\\a_3b_1-a_1b_3\\a_1b_2-a_2b_1\end{pmatrix}$$

[그림 Ⅳ-1-15] 싱가포르 H2에서 제공된 벡터 공식

13) 2016년과 2017년 시험에 적용되는 공식집은 교육과정의 변화에 따라 제공하는 벡터 공식의 내용에 차이가 있다. [그림 Ⅳ-16]의 윗부분은 2016년 시험에서 제시된 공식이며, 아래 부분은 2017년 시험에서 제시된 공식이다.

Vectors in two and three dimensions

$\underset{\sim}{r} = x\underset{\sim}{i} + y\underset{\sim}{j} + z\underset{\sim}{k}$
$\lvert \underset{\sim}{r} \rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$
$\dot{\underset{\sim}{r}} = \frac{d\underset{\sim}{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\underset{\sim}{i} + \frac{dy}{dt}\underset{\sim}{j} + \frac{dz}{dt}\underset{\sim}{k}$
$\underset{\sim}{r}_1 \cdot \underset{\sim}{r}_2 = r_1 r_2 \cos(\theta) = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$

[그림 Ⅳ-1-16] 호주 VCE의 SM1, SM2에서 제공된 벡터 공식

그리고 싱가포르는 하위 문항을 다수 포함하고 있는 서술형 문항을 출제함으로써 여러 가지의 수학적 개념을 종합적으로 묻고 있기 때문에 위에 제시된 공식만으로 해결할 수 있는 문항은 없다. 호주의 시험에서도 위에 제시되는 벡터 공식만으로 해결할 수 있는 문항은 없었다. 이처럼 제공된 공식이 문제 해결에 직접적인 도움은 거의 주지 않지만, 제공된 공식을 통해 학생이 문항에서 주어진 조건을 파악하는데 참고용으로써 간접적인 도움은 줄 수 있을 것이다.

지금까지 살펴본 바와 같이 공학용 계산기나 공식집을 사용하는 국가의 대학 입학시험은 공식 암기나 계산 과정의 정확도에 의한 학생의 능력 평가보다는 공학용 도구를 활용하여 실제적인 수치를 적용한 문제를 해결하고, 공식을 적절하게 이용하여 문제를 해결할 수 있는 능력을 평가하는 데 좀 더 초점이 있는 것으로 볼 수 있다.

1.1.3. 서술형 문항 채점 방법

앞 절에서 살펴본 바와 같이 대부분 국가의 대학 입학시험에서 서술형 문항을 출제하고 있다. 서술형 문항은 선다형이나 단답형과 달리 컴퓨터를 이용하여 채점하는 것이 아니라 사람에 의해 채점하는 형태를 보인다. 이에 각 국가에서는 채점 기준과 채점 결과 분석 내용 등을 제시함으로써 시험 채점의 객관성 및 공정성을 보여주고 있다. 또한 시험의 채점 기준을 통해 학생들의 풀이과정에서 확인하려는 것이 무엇인지 그 의도를 파악할 수 있다. 이 절에서는 분석 대상 국가 중 서술형 문항 작성 및 채점 방법이 확인된 영국, 프랑스, 핀란드, 에스토니아, 중국, 대만, 호주의 대학 입학시험 관련 문서를 살펴보고, 구체적으로 영국 대학 입학시험의 서술형 문항 채점 기준에 대해서 분석한다.

영국, 프랑스, 에스토니아, 중국, 대만, 호주의 대학 입학시험은 시험지에 서술형 풀이 작성에 대한 지침이 포함되어 있다. 영국은 학생이 풀이과정을 명확하게 제시해야 하고, 서술 과정이 없는 답은 충분한 점수가 부여되지 않음을 명시하고 있으며, 프랑스는 추론의 정확성과 명료성이 평가의 중요한 부분이며, 풀이과정이 완전하지 않거나 결과를 얻지 못해도 답안에 포함할 것을 명시하고 있다. 에스토니아는 공식과 계산 및 해결 과정을 명확하게 작성할 것을 요구하며, 분명하지 않은 부분은 채점자에 의해 고려되지 않음을 명시하고 있다. 그리고 중국은 서술형 문항의 답으로 풀이 과정 및 계산 과정이 작성되어 함을 명시하고 있으며, 대만도 계산과정 또는 근거를 작성해야 하며, 그렇지 않으면 점수가 깎이거나 0점이 될 수 있다고 명시하고 있다. 호주는 문항의 배점이 1점이 아닌 이상 정확한 풀이과정이 제시되어야 함을 명시하고 있다.

그리고 시험지 이외의 문서(MEB, 2017)에 규정이 제시되어 있는 핀란드는 구체적으로 다음과 같이 설명하고 있다.

학생들이 서술형 문항을 서술할 때에 필요한 정당화 및 결과와 함께 풀이 과정에 좌표, 다이어그램, 패턴, 그래프 등을 명확하게 표현할 것을

요구한다.

계산 능력을 평가하는 목적이 아닌 경우, 명백하게 옳지 않은 결과가 아닌 경우, 실수가 문제의 본질을 바꾸지 않는 경우와 같은 사소한 계산 오류는 점수에 반영하지 않는다.

하나 이상의 해결과정을 작성했을 경우에는 최저 점수를 받는 과정으로 채점된다.

이와 같이 각 국가의 대학 입학시험에서 서술형 문항을 채점할 때, 작성된 풀이과정을 통해 학생의 계산 능력, 문제해결 능력을 포함하는 사고과정을 파악하고 이에 대해 점수를 부여하는 것으로 확인할 수 있다. 이를 토대로 서술형 문항의 평가의 초점이 답의 옳고 그름보다는 풀이과정에서 드러나는 표현력, 논리적 사고과정에 있음을 알 수 있다.

그리고 영국과 호주의 대학 입학시험에서는 문항별 학생의 답안 분포 등을 포함하는 시험 결과에 대한 분석 자료(examination report)를 온라인 사이트에 공개하여 채점 과정의 신뢰성을 높이고 있다.

이제 영국의 대학 입학시험 서술형 문항 채점 기준을 확인한다. 영국의 대학 입학시험 서술형 문항 채점 기준 파일은 시험 문항 파일, 문항별 채점 결과 분석 파일과 함께 온라인상에 탑재되어 있다. 여기서는 해당 시험 문항의 서술형 채점 기준을 확인하기 위해 2017년에 시행한 C4의 벡터 문항과 함께 채점기준을 살펴본다. 그리고 제시하는 시험 문항은 이해를 돕기 위해 다른 절과 마찬가지로 번역한 문항을 사용하나 채점 기준에 대해서는 번역을 통해 기준을 정한 의미가 잘못 전달될 수 있어 원문을 그대로 제시한다.

원점 O에 대하여, 직선 l_1, l_2의 방정식은 다음과 같다.

$$l_1 : r = \begin{pmatrix} 4 \\ 28 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix},\ l_2 : r = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$ (단, λ, μ는 스칼라 매개변수이다.)

직선 l_1, l_2는 점 X에서 교차한다.

(a) 점 X의 좌표를 구하시오. (3점)

(b) 직선 l_1과 l_2사이의 예각의 크기를 소수점 둘째자리까지 구하시오. (3점)

직선 l_1위에 있는 점 A의 위치벡터는 $\begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$이다.

(c) AP의 거리를 무리수 형태로 구하시오. (2점)

직선 l_2위에 있는 점 Y가 있다. 벡터 $\overrightarrow{YA}$는 직선 l_1에 수직이다.

(d) AP의 거리를 소수점 첫째자리까지 구하시오. (2점)

직선 l_1위에 있는 점 B는 $|\overrightarrow{AX}| = 2|\overrightarrow{AB}|$을 만족한다.

(e) 위 조건을 만족하는 점 B의 위치벡터 두 개를 구하시오. (3점)

[그림 Ⅳ-1-17] 영국 GCE A-level의 C4 벡터 문항(2017년 시행)

[그림 Ⅳ-1-17]은 주어진 직선의 벡터 방정식을 이용하여 두 직선의 교점, 두 직선이 이루는 각의 크기, 두 점 사이의 거리, 한 점의 위치벡터를 구하는 문제로 하위 문항 5개를 포함한 서술형 문항이다. 각각의 하위 문항에 대한 배점이 정해져 있음을 문항을 통해 확인할 수 있다. 이 문항을 채점하기 위한 기준은 [그림 Ⅳ-1-18]과 같다.

Question Number	Scheme	Notes	Marks
6.	$l_1 : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 4 \\ 28 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $l_2 : \mathbf{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix}$ lies on l_1	Let θ_{Acute} be the acute angle between l_1 and l_2	
(a)	$\{l_1 = l_2 \Rightarrow\}$ $28 - 5\lambda = 3$ $\{\Rightarrow \lambda = 5\}$ or $4 - \lambda = 5 + 3\mu$ and $4 + \lambda = 1 - 4\mu$ $\{\Rightarrow \mu = -2\}$	$28 - 5\lambda = 3$ or $4 - \lambda = 5 + 3\mu$ and $4 + \lambda = 1 - 4\mu$ or $\lambda = 5$ or $\mu = -2$ (Can be implied).	B1
	$\left\{\overrightarrow{OX} = \right\} \begin{pmatrix} 4 \\ 28 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ or $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$	Puts $l_1 = l_2$ and solves to find λ and/or μ **and** substitutes their value for λ into l_1 or their value for μ into l_2	M1
	So, $X(-1, 3, 9)$	$(-1, 3, 9)$ or $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$ or $-\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ or condone $\begin{matrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{matrix}$	A1 cao
			[3]
(b) Way 1	$\mathbf{d}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$	Realisation that the dot product is required between $\mathbf{d}_1$ and $\mathbf{d}_2$ or a multiple of $\mathbf{d}_1$ and $\mathbf{d}_2$	M1
	$\cos\theta = \dfrac{\pm \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}}{\sqrt{(-1)^2 + (-5)^2 + (1)^2} . \sqrt{(3)^2 + (0)^2 + (-4)^2}}$ $\left\{= \dfrac{-7}{\sqrt{27} . \sqrt{25}}\right\}$	**dependent on the 1st M mark.** Applies dot product formula between $\mathbf{d}_1$ and $\mathbf{d}_2$ or a multiple of $\mathbf{d}_1$ and $\mathbf{d}_2$	dM1
	$\{\theta = 105.6303588...\ \square\}$ $\theta_{Acute} = 74.36964117... = 74.37$ (2 dp)	awrt 74.37 seen in (b) only	A1
			[3]
(c)	$\overrightarrow{AX} = "\overrightarrow{OX}" - \overrightarrow{OA} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -15 \\ 3 \end{pmatrix}$ or $A_{\lambda=2}, X_{\lambda=5}\ \square$ $AX = 3\{\mathbf{d}_1\}$, $\left\{\left\|\mathbf{d}_1\right\| = \sqrt{27}\right\}$		
	$AX = \sqrt{(-3)^2 + (-15)^2 + (3)^2}$ or $3\sqrt{27}$ $\left\{= \sqrt{243}\right\} = 9\sqrt{3}$	Full method for finding AX or XA	M1
		$9\sqrt{3}$ seen in (c) only	A1 cao
	Note: You cannot recover work for part (c) in either part (d) or part (e).		[2]
(d) Way 1	$\dfrac{YA}{"9\sqrt{3}"} = \tan("74.36964...")$	$\dfrac{YA}{\text{their } \left\|\overrightarrow{AX}\right\|} = \tan\theta$ or $YA = \left(\text{their } \left\|\overrightarrow{AX}\right\|\right)\tan\theta$, where θ is their acute or obtuse angle between l_1 and l_2	M1
	$YA = 55.71758... = 55.7$ (1 dp)	anything that rounds to 55.7	A1
			[2]
(e) Way 1	$\{A_{\lambda=2}, X_{\lambda=5} \Rightarrow$ So $AX = 2AB \Rightarrow$ So at B, $\lambda = 3.5$ or $\lambda = 0.5)\}$		
	$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 28 \\ 4 \end{pmatrix} + 3.5 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} 0.5 \\ 10.5 \\ 7.5 \end{pmatrix}$	Substitutes **either** $\lambda = \dfrac{(\text{their } \lambda_X \text{ found in } (a)) + 2}{2}$ **or** $\lambda_B = 3 - \dfrac{(\text{their } \lambda_X \text{ found in } (a))}{2}$ into l_1	M1;
	$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 4 \\ 28 \\ 4 \end{pmatrix} + 0.5 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$; $= \begin{pmatrix} 3.5 \\ 25.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$	At least one position vector is correct. (Also allow coordinates).	A1
		Both position vectors are correct. (Also allow coordinates).	A1
			[3]
			13

Question Number	Scheme	Notes	Marks
6. (e) Way 6	$\left\{\left\|\overrightarrow{AX}\right\| = 9\sqrt{3}, \left\|d_1\right\| = 3\sqrt{3} \Rightarrow K = \frac{9\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = 3 \Rightarrow \overrightarrow{AX} = 3\mathbf{d}_1;\ \text{So, } \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \pm \tfrac{1}{2}\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{OA} \pm \tfrac{1}{2}(3\mathbf{d}_1)\right\}$		
	$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} + 0.5\left(3\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right); = \begin{pmatrix} 0.5 \\ 10.5 \\ 7.5 \end{pmatrix}$	Applies either $\overrightarrow{OA} + 0.5(K\mathbf{d}_1)$ or $\overrightarrow{OA} - 0.5(K\mathbf{d}_3)$, where $K = \frac{\text{their } \left\|\overrightarrow{AX}\right\|}{3\sqrt{3}}$	M1;
	$\overrightarrow{OB} = \begin{pmatrix} 2 \\ 18 \\ 6 \end{pmatrix} - 0.5\left(3\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}\right); = \begin{pmatrix} 3.5 \\ 25.5 \\ 4.5 \end{pmatrix}$	At least one position vector is correct (Also allow coordinates)	A1
		Both position vectors are correct (Also allow coordinates)	A1
			[3]

	Question 6 Notes	
6. (a)	**Note**	M1 can be implied by at least two correct follow through coordinates from their λ or from their μ
(b)	**Note**	*Evaluating* the dot product (i.e. $(-1)(3) + (-5)(0) + (1)(-4)$) is not required for the M1, dM1 marks.
	Note	**For M1 dM1:** Allow one slip in writing down their direction vectors, $\mathbf{d}_1$ and $\mathbf{d}_2$
	Note	Allow M1 dM1 for $\left(\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(1)^2}.\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-4)^2}\right)\cos\theta = \pm\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
	Note	$\theta = 1.297995...^c$, (without evidence of awrt 74.37) is A0

6. (b) Way 2	**Alternative Method: Vector Cross Product**		
	Only apply this scheme if it is clear that a vector cross product method is being applied.		
	$\mathbf{d}_1 \times \mathbf{d}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \left\{\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & -5 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 20\mathbf{i} - \mathbf{j} + 15\mathbf{k}\right\}$	Realisation that the vector cross product is required between $\mathbf{d}_1$ and $\mathbf{d}_2$ or a multiple of $\mathbf{d}_1$ and $\mathbf{d}_2$	M1
	$\sin\theta = \frac{\sqrt{(20)^2+(-1)^2+(15)^2}}{\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(1)^2}.\sqrt{(3)^2+(0)^2+(-4)^2}}$	Applies the vector product formula between $\mathbf{d}_1$ and $\mathbf{d}_2$ or a multiple of $\mathbf{d}_1$ and $\mathbf{d}_2$	dM1
	$\sin\theta = \frac{\sqrt{626}}{\sqrt{27}.\sqrt{25}}$ □ $\theta = 74.36964117... = 74.37$ (2 dp)	awrt 74.37 seen in (b) only	A1
			[3]

6. (c)	**M1**	Finds the difference between their $\overrightarrow{OX}$ and $\overrightarrow{OA}$ and applies Pythagoras to the result to find AX or XA **OR** applies $\left\|(\text{their } \lambda_X \text{ found in } (a)) - 2\right\|.\sqrt{(-1)^2+(-5)^2+(1)^2}$
	Note	For M1: Allow one slip in writing down their $\overrightarrow{OX}$ and $\overrightarrow{OA}$
	Note	Allow M1A1 for $\begin{pmatrix} 3 \\ 15 \\ 3 \end{pmatrix}$ leading to $AX = \sqrt{(3)^2+(15)^2+(3)^2} = \sqrt{243} = 9\sqrt{3}$
(e)	**Note**	Imply M1 for no working leading to any two components of one of the $\overrightarrow{OB}$ which are correct.

[그림 Ⅳ-1-18] 영국 GCE A-level의 C4 문항 채점기준의 일부(2017년 시행)

영국 대학 입학시험의 서술형 문항의 채점 기준인 [그림 Ⅳ-1-18]을 보면 약어를 사용하여 설명하고 있음을 알 수 있다. 제시되는 약어는 답

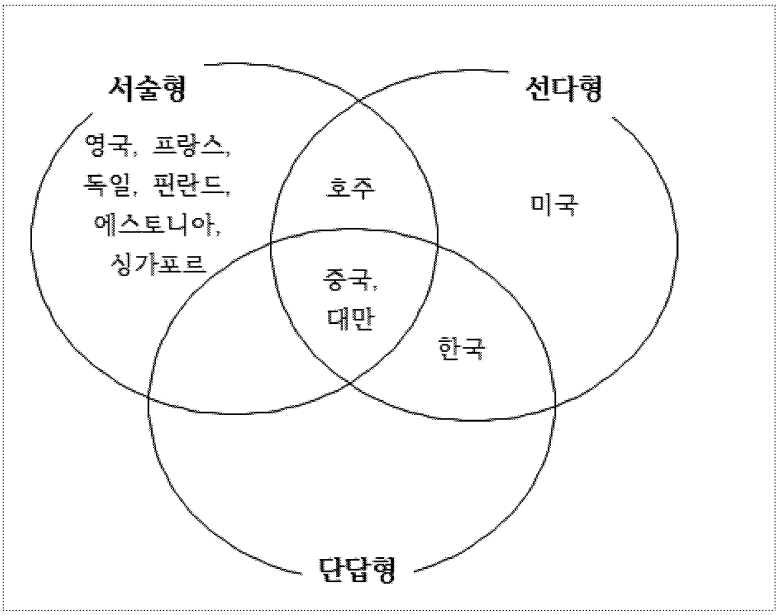
안마다 조금씩 차이는 있지만 빈번하게 사용되는 약어는 B, M, A이며, 약어 뒤에 붙은 숫자는 점수를 의미한다. B1은 방법과 무관하게 조건 없이 정확한 값이면 1점, M1은 풀이 방법을 알고 적용하려는 시도가 있으면 1점, A1은 풀이 방법에 따라 정확한 답이면 1점을 뜻한다. 이처럼 구체적이고 명확하게 제시된 채점 기준을 통해 평가의 신뢰성을 높일 수 있다. 또한 하나의 하위 문항에 대한 답안 예시가 풀이방법에 따라 여러 가지로 제시되어 있다. 이는 학생들이 작성한 다양한 풀이 과정이 고려된 것으로 학생의 수학적 사고과정을 면밀하게 확인하고 이에 대한 평가가 이루어지고 있음을 보여준다. 그리고 각 하위 문항에 대한 추가 설명이 'notes'로 표시되어 제시되어 있다. 이는 채점과정에서 모호해 보이는 사항에 대해 구체적인 추가 기준을 제시하고 있는 것으로 볼 수 있다. 이와 같은 특징을 통해 영국의 대학 입학시험의 서술형 문항 채점 과정이 객관적이며 공정하게 이루어짐을 보여줄 뿐만 아니라 학생의 사고과정을 세세하게 확인하고 평가에 반영하고 있음을 보여주고 있다.

1.2. 수능과 외국 대학 입학시험 형식 비교

가장 최근에 치러진 시험인 2019학년도 수능 수학의 형식을 살펴보고, 앞 절에서 살펴본 외국 대학 입학시험의 형식을 기준으로 수능과 비교하였다.

수능은 이과 학생들이 선택하는 시험인 수학 가형과 문과 학생들이 선택하는 시험인 수학 나형으로 구분된다. 각각의 시험은 100분 동안 진행되고, 총 30문항으로 5지선다형 21문항과 단답형 9문항으로 구성되어 있으며 문항에 포함된 하위 문항은 없다. 모든 문항의 답안 작성은 OMR 카드에 마킹하는 것으로 컴퓨터 채점이 이루어진다. 또한 시험에서 공학용 계산기의 사용을 허용하지 않으며, 공식집을 제공하지 않는다.

이를 토대로 형식면에서 수능과 외국 대학 입학시험의 첫 번째 차이점은 서술형 문항의 출제 유무이다. 이를 정리하면 [그림 Ⅳ-1-19]와 같다.



[그림 Ⅳ-1-19] 시험 출제 문항 유형에 따른 국가 분류

우리나라와 미국을 제외한 다른 국가의 대학 입학시험은 서술형 문항을 출제하고 있다. 그러나 미국은 선다형 문항으로만 출제되는 SAT subject test이외에 본 연구의 대상이 아닌 다른 시험은 서술형 문항을 출제하고 있다. 이에 본 연구에서 대학 입학시험의 서술형 문항을 출제하지 않는 국가는 우리나라만 해당한다고 볼 수도 있다. 선다형과 단답형 문항만으로 평가하는 수능은 미래 사회에서 살아가는데 필요한 문제해결 능력을 키우고 점검하는데 제약이 있다. 이에 하위 문항을 포함하는 서술형 문항을 통한 평가를 고려할 필요가 있다. 이와 더불어 서술형 평가 채점에 대한 정확성과 공정성 시비를 없애기 위해 다른 국가의 사례를 검토하고, 이에 대한 방법 및 사회적인 논의까지 폭넓은 고민이 필요하다.

둘째, 수능은 공학용 계산기와 공식집 사용을 허용하고 있지 않다. 국가마다 차이는 있지만 많은 국가가 대학 입학시험에서 공학용 계산기의 사용을 허용함으로써 실생활 맥락의 실제 수치를 사용하여 계산하고, 수학이 실생활에서 유용함을 경험하게 한다. 또한, 공식집의 사용을 허용

함으로써 공식 암기에 의한 평가보다는 이를 이용하여 문제를 해결하는 능력을 평가하는 것이 주된 목적임을 드러내고 있다. 우리나라 15 개정 수학과 교육과정에도 계산기, 컴퓨터, 교육용 소프트웨어 등의 공학적 도구를 이용한 학습 및 평가에 대해 명시되어 있기 때문에 학교 수학의 학습과 평가에서 공학용 계산기의 적극적인 이용 검토와 함께 대학 입학 시험에서의 공학용 계산기 사용에 대해서도 고려할 필요가 있다. 이는 계산 능력을 평가하는 목적이 아닌 문제에 적용되어 공학적 도구의 활용 능력을 기를 수 있을 뿐만 아니라 궁극적으로 시험을 통해 문제해결 능력을 평가하는 것에도 부합할 것이다.

2. 대학 입학시험의 내용요소

평가는 교육과정의 성취를 판단하는 중요한 도구로써 교육과정은 평가의 범위를 결정하는 요인이다(최인선, 이민희, 2017). 이에 대학 입학시험의 수학 시험 문항 분석이라 함은 평가의 출제 범위가 되는 교육과정에 대한 분석이 이루어져야 함은 당연하다. 다만, 각 국가마다 교육과정을 문서화하는 방법이 다르며, 고등학교 교육과정을 문서화하지 않고 교수요목만을 제시하거나 대학 입학시험을 위한 평가요목을 제시하는 경우도 있어 각 국가의 대학 입학시험의 수학 시험 출제 범위로써 완전히 같은 성격의 문서를 비교하는 것은 어렵다. 이에 이 장에서는 분석 대상 국가의 교육과정 문서 또는 대학 입학시험 관련 공식 웹사이트를 통해 제시된 교수 및 평가요목 문서에서 행렬과 벡터 내용 영역으로 제시된 평가의 내용요소를 비교, 분석한다.

2.1. 외국 대학 입학시험 비교, 분석

2.1.1. 행렬 영역

분석 대상 중 행렬을 대학 입학시험에서 출제하고 있는 국가는 5개국으로 영국, 프랑스, 대만, 호주, 미국이다. 각 국가의 대학 입학시험에서 행렬 문항을 통해 평가하는 내용요소는 <표 Ⅳ-3>과 같다. <표 Ⅳ-3>은 각 문서에서 제시한 내용을 그대로 번역한 부분도 있으나 일부 내용을 다듬어 우리 교육과정에서 사용하는 단어로 정리하기도 하였다. 각 국가별로 평가하는 내용요소가 교육과정을 통해 교과서에서 어떠한 비중을 차지하고 있는지 확인할 수는 없으나 각 국가별 교육과정 또는 교수 및 평가요목 문서에 제시된 행렬의 내용요소를 비교함으로써 해당 국가에서 대학 진학을 준비하고 있는 고등학교 학생들이 어떤 내용을 학습하고 평가받는지 확인할 수 있다는 데 의미가 있다.

<표 Ⅳ-3> 국가별 대학 입학시험 행렬 영역의 내용요소

국가	시험명	시험과목	내용요소
영국	GCE A-level (Edexcel)	FP1	행렬 대수 • 2차원에서 열벡터에 의한 선형변환과 행렬의 표현 • 행렬의 합, 차 • 행렬의 실수배 • 행렬의 곱 • 이차정사각행렬의 행렬식 계산(특이행렬) • 이차정사각행렬의 역행렬 • 기하학적 변환에 대한 행렬의 적용(대칭, 회전 변환 등) • 기하학적 변환의 역(행렬식 고려)
		FP3	심화 행렬 대수 (FP1의 확장) • 3차원에서 열벡터에 의한 선형변환과 행렬의 표현 • 3차정사각행렬의 행렬식 계산 • 3차정사각행렬의 역행렬(특이행렬) • 전치행렬 • 이차정사각행렬과 3차정사각행렬의 고유치, 고유벡터 • 대칭행렬의 대각화($P^{T}AP$가 대각행렬이 되는 직교행렬 구하기)
프랑스	Baccalauréat	ES	• 행렬의 연산 • 정사각행렬의 역행렬 • 그래프와 행렬 • 전이행렬
		S	(ES의 심화) • 행렬의 연산 • 정사각행렬의 역행렬 • 이차 또는 3차정사각행렬의 n제곱 계산 • 선형체계의 행렬 표현 • 행렬과 점화식

대만	學科能力測驗	數學考科	• 선형방정식과 행렬(가우스 소거법) • 행렬의 연산(합, 차, 실수배, 곱) • 행렬 응용(이차정사각행렬의 전이행렬, 이차정사각행렬의 역행렬)
	指定科目考試	數學甲	• 선형방정식과 행렬(가우스 소거법) • 행렬의 연산(합, 차, 실수배, 곱) • 행렬 응용(이차정사각행렬의 전이행렬, 이차정사각행렬의 역행렬) • 선형변환과 이차정사각행렬(회전변환, 대칭변환, 이동변환, 평행사변형 면적)
		數學乙	• 선형방정식과 행렬(가우스 소거법) • 행렬의 연산(합, 차, 실수배, 곱) • 행렬 응용(이차정사각행렬의 전이행렬, 이차정사각행렬의 역행렬)
호주 (빅토리아주)	VCE	FtM1	• 행렬의 정의(정사각행렬, 대각행렬, 대칭행렬, 영행렬 등) • 연산(합, 차, 실수배, 곱)과 전치행렬 • 역행렬과 조건(행렬식) • 선형방정식에서 행렬 사용 • 전이행렬 • 행렬과 점화식
		FtM2	
미국	SAT subject test	level 2	행렬 연산과 응용 • 행렬을 사용하여 자료 표현 및 처리 • 행렬의 실수배 • 행렬의 합, 차, 곱 • 행렬의 성질, 역행렬과 행렬식 관계 • 선형변환과 행렬 • 변환으로서 행렬, 행렬식과 기하학적 해석

위의 내용요소를 분석하기 위해 공통적인 평가 내용을 중심으로 정리하여 비교하면 <표 Ⅳ-4>와 같다.

<표 Ⅳ-4> 행렬 영역의 내용요소별 국가 비교

내용 \ 국가	영국	프랑스	대만	호주	미국
• 행렬의 뜻 • 행렬의 연산(합, 차, 실수배) • 행렬의 종류(영행렬, 단위행렬, 역행렬 등) • 행렬의 곱 • 이차정사각행렬의 역행렬	○*	○*	○*	○*	○*
• 선형방정식과 행렬 표현	○	○*	○*	○*	○
• 전이행렬		○*	○*	○*	
• 선형변환과 행렬(대칭변환, 회전변환 등)	○*		○*		○
• 3차정사각행렬(곱셈, 행렬식, 역행렬)	○*	○			
• 전치행렬	○*			○*	
• 고유치, 고유벡터, 대각화	○*				
• 그래프와 행렬		○*		○*	
• 행렬과 점화식		○*		○*	

(○: 포함되어 있는 내용요소, *: 시험에서 관련 내용 출제)

[표 Ⅳ-4]에서 가장 먼저 확인할 수 있는 것은 행렬 영역을 포함하고 있는 대학 입학시험이 행렬의 기본 성질 및 연산 내용을 평가하는 것뿐만 아니라 각 대학 입학시험의 목적에 따라 심화된 내용을 평가하는 시험도 존재한다는 것이다.

우선 대부분의 국가에서 공통적으로 평가하는 내용은 행렬의 기본 성질 및 연산에 대한 것으로 대표적인 문항은 영국 FP1의 [그림 Ⅳ-2-1], 호주 FtM1의 [그림 Ⅳ-2-2], 미국의 공식연습문항인 [그림 Ⅳ-2-3]과 같다. 각각의 문항에서 다루는 내용은 이차정사각행렬의 역행렬, 행렬의

곱, 행렬의 연산, 행렬의 표현으로 행렬 내용 영역의 기본 개념에 대해 묻고 있다.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 11 & -8 \end{pmatrix}$$

a. 역행렬 A^{-1}을 구하시오.

행렬 A로 나타내어지는 변환에 의하여 행렬 B로 나타내어지는 변환이 행렬 P로 나타내어지는 변환으로 옮겨진다고 하자.
b. 행렬 B를 구하시오.

[그림 Ⅳ-2-1] 영국 GCE A-level의 FP1 행렬 문항(2017년 시행)

다음에 제시된 표는 두 행렬 A, B에 대한 정보를 보여준다.

행렬	차수	규칙
A	3차 정사각행렬	$a_{ij} = 2i + j$
B	3차 정사각행렬	$b_{ij} = i - j$

행렬 A의 성분을 a_{ij}라 하고, 행렬 B의 성분을 b_{ij}라 할 때, 두 행렬의 합 $A+B$는?

a. $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 8 & 10 & 12 \\ 11 & 13 & 15 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} 5 & 8 & 11 \\ 7 & 10 & 13 \\ 9 & 12 & 15 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 6 & 6 & 6 \\ 9 & 9 & 9 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} 3 & 6 & 3 \\ 6 & 3 & 9 \\ 3 & 9 & 3 \end{pmatrix}$

[그림 Ⅳ-2-2] 호주 VCE의 FtM1 행렬 문항(2017년 시행)

행렬 X는 r개의 행과 c개의 열을 갖고, 행렬 Y는 c개의 행과 d개의 열을 갖는다. 이 때 r, c, d는 모두 다르다. 다음 명제 중에서 옳지 않은 것은 어느 것인가?

Ⅰ. 행렬 YX는 존재한다.
Ⅱ. r개의 행과 d개의 열을 갖는 행렬 XY는 존재한다.
Ⅲ. c개의 행과 c개의 열을 갖는 행렬 XY는 존재한다.

[그림 Ⅳ-2-3] 미국 SAT 교과 시험의 문제집 행렬 연습 문항(Barrons)

행렬 영역을 포함하는 외국 대학 입학시험의 두 번째 특징은 대학입학 전형이나 시험과목 선택에 따라 평가 내용의 범위가 다양하고, 학생에게 높은 수준 개념을 묻고 있다는 것이다. 앞서 살펴본 공통 내용 이외에 학생의 진로에 따라 시험마다 다루는 내용은 국가마다 차이가 있지만 일차변환부터 우리나라 대학교육과정의 내용으로 볼 수 있는 전이행렬이나 전치행렬, 고유치와 고유벡터 등을 대학 입학시험에서 평가하고 있다. 영국의 FP3 시험 문항인 [그림 Ⅳ-2-4]는 주어진 행렬이 특이행렬(singular matrix)임을 이용해 행렬식이 0임을 이해하고 적절한 k의 값을 구하기 위해서는 3차정사각행렬의 행렬식을 구하는 방법을 알고 있어야 해결할 수 있다.

주어진 행렬 A가 특이행렬일 때, 상수 k의 값을 구하시오.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ k & 1 & 3 \\ 2 & -1 & k \end{pmatrix}$$

[그림 Ⅳ-2-4] 영국 Edexcel GCE A-level의 FP3 행렬 문항(2016년 시행)

또한 [그림 Ⅳ-2-5]는 대만 대학 입학시험 중 학과능력측정시험 문항으로 행렬을 이용하여 주어진 연립일차방정식을 해결할 때 가우스 소거법을 이용하여 계산하고 행렬로 표현할 수 있는지 평가하는 문항이다.

일차방정식 $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+y+3z=6 \\ x-y=6 \\ x-2y-z=8 \end{cases}$ 을 가우스 소거법으로 계산한 후에 나타낸 행렬은

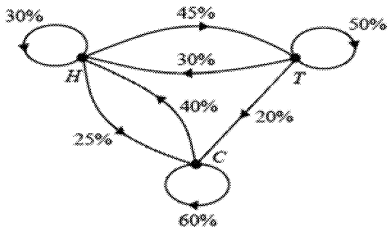
$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ 이다. 이때 실수 a, b, c, d의 값은?

[그림 Ⅳ-2-5] 대만 학과능력측정시험 행렬 문항(2016년 시행)

위와 같은 문항에서 확인할 수 있는 것은 해당 국가의 고등학교에서는 우리나라 대학수학(선형대수학)과정의 기본 개념들을 학습하고 관련된 간단한 연산 능력을 갖추도록 하고 있다는 것이다.

그리고 행렬 영역을 포함하는 외국 대학 입학시험의 세 번째 특징은 실생활 맥락을 담고 있는 문항을 출제한다는 것이다. 특히 호주 대학 입학시험에서 두드러지는 가장 큰 특징으로 꼽을 수 있는데, 대다수의 행렬 문항이 실생활 맥락을 담고 있다. 2016년과 2017년의 FtM1, FtM2 시험을 살펴보면 FtM1의 행렬 문항의 50%와 FtM2의 모든 행렬 문항이 실생활 맥락을 포함하고 있었다.

어떤 도시에 사는 가족들에게 휴가 계획에 대해 물었다. 매년 이들은 집에 머무를지(H), 여행(T)이나 캠핑(C)을 길 것인지 선택한다. 아래 그림은 해마다 그 도시에 사는 가족들의 휴가 선호도 변화를 보여준다.



그림과 같은 정보를 주는 행렬은 다음 중 어느 것인가?

a.

$$\begin{array}{c} \textit{에서} \\ \begin{array}{ccc} H & T & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.30 & 0.75 & 0.65 \\ 0.75 & 0.50 & 0.20 \\ 0.65 & 0.20 & 0.60 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} H \\ T \\ C \end{array} \underline{\text{으로}}$$

b.

$$\begin{array}{c} \textit{에서} \\ \begin{array}{ccc} H & T & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.30 & 0.75 & 0.65 \\ 0.75 & 0.50 & 0.20 \\ 0.65 & 0.20 & 0.60 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} H \\ T \\ C \end{array} \underline{\text{으로}}$$

c.

$$\begin{array}{c} \textit{에서} \\ \begin{array}{ccc} H & T & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.30 & 0.75 & 0.65 \\ 0.75 & 0.50 & 0.20 \\ 0.65 & 0.20 & 0.60 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} H \\ T \\ C \end{array} \underline{\text{으로}}$$

d.

$$\begin{array}{c} \textit{에서} \\ \begin{array}{ccc} H & T & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.30 & 0.75 & 0.65 \\ 0.75 & 0.50 & 0.20 \\ 0.65 & 0.20 & 0.60 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} H \\ T \\ C \end{array} \underline{\text{으로}}$$

e.

$$\begin{array}{c} \textit{에서} \\ \begin{array}{ccc} H & T & C \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.30 & 0.75 & 0.65 \\ 0.75 & 0.50 & 0.20 \\ 0.65 & 0.20 & 0.60 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} H \\ T \\ C \end{array} \underline{\text{으로}}$$

[그림 Ⅳ-2-6] 호주 VCE의 FtM1 행렬 문항(2016년 시행)

FtM1 시험의 문항인 [그림 Ⅳ-2-6]은 실생활 맥락을 표현한 전이다이어그램을 전이행렬로 표현을 바꿀 수 있는지 확인하고 있다. 호주는 이와 같은 실생활 맥락의 문제를 다수 출제하고 있기 때문에 평가를 통해 학생들은 행렬 개념의 필요성, 행렬과 같은 수학적 표현의 유용성을 인식할 수 있는 기회를 얻는다.

이는 호주 대학 입학시험에서 두드러지는 특징이기는 하지만 프랑스, 대만, 미국의 시험에서도 확인할 수 있다. 프랑스 ES의 문항인 [그림 Ⅳ-2-7]은 실생활 맥락의 게임 퍼즐 선택 상황을 확률을 이용하여 행렬과 그래프(전이다이어그램)로 표현할 수 있는지 묻는 것으로 상황을 문제 맥락에 맞게 행렬을 이용하여 처리 및 해석할 수 있는지 평가하고 있다. 이는 앞의 호주 문항과 마찬가지로 전이 행렬과 전이다이어그램을 묻는 것으로 볼 수 있다.

비디오 게임에서 제공되는 퍼즐은 A, B 두 종류로 구분된다. A퍼즐은 쉽고, B퍼즐은 어렵다. 퍼즐을 연속적으로 뽑을 때 다음과 같은 조건하에 임의로 선택된다.

- 첫 번째 퍼즐은 쉽다.
- 쉬운 퍼즐을 뽑은 후 어려운 퍼즐이 뽑힐 확률은 0.15이다.
- 어려운 퍼즐을 뽑은 후 쉬운 퍼즐이 뽑힐 확률은 0.1이다.

$n \geq 1$인 경우에 다음과 같이 정의하자.

- a_n은 n번째에 쉬운 퍼즐이 뽑힐 확률
- b_n은 n번째에 어려운 퍼즐이 뽑힐 확률
- $P_n = (a_n, b_n)$은 n번째 확률 상태

1. 행렬 P_1을 구하시오.
2. 주어진 상황을 A, B를 꼭짓점으로 하고 확률을 보여주는 그래프로 표현하시오.
3. 그래프를 나타내는 행렬 M을 구하고, P_2를 구하시오.

(행렬 영역과 관련이 없어 후략)

[그림 Ⅳ-2-7] 프랑스 Baccalauréat의 S 행렬 문항(2017년 시행)

또한 대만 지정과목고시의 문항 [그림 Ⅳ-2-8]도 서술되어 있는 실생활 맥락의 문제 상황을 전이행렬로 표현하고, 적절한 전략을 사용하여 문제에서 정의된 개념을 해결 및 해석할 수 있는지 평가하고 있다.

정부는 주민들에게 두 종류의 쿠폰 A, B를 매주 금요일마다 발행한다. 주민들은 신분증으로 하나의 쿠폰을 무료로 선택할 수 있다. 오랜 기간 통계에 따르면 지난주 A쿠폰을 선택한 주민들의 85%는 이번 주에 그대로 유지하고 15%가 선택을 바꾸며, 지난주 B쿠폰을 선택한 주민들의 65%는 그대로 유지하고 35%가 다시 선택한다. 여기에서 안정적인 상태라는 것은 지난주와 비교해서 이번 주에 쿠폰을 받는 비율이 변하지 않는 것을 말한다.

a. 위 현상을 설명하는 전이행렬을 표현하시오.

b. 안정적인 상태를 형성하려면 각 쿠폰을 받는 사람의 비율이 어떻게 되어야 하는가?

[그림 Ⅳ-2-8] 대만 지정과목고시 수학乙 행렬 문항(2017년 시행)

	1일	2일	3일
모델 X	20	18	3
모델 Y	16	5	8
모델 Z	19	11	10

위의 표는 3일간의 세일기간동안 디지털 카메라가 팔린 수를 보여준다. 모델 X, Y, Z의 가격은 각각 $99, $199, $299이다. 다음 중 3일 동안 디지털 카메라 판매 수익을 보여주는 행렬 표현은 어느 것인가?

a. $\begin{pmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{pmatrix} (99\ 199\ 299)$

b. $\begin{pmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 99 \\ 199 \\ 299 \end{pmatrix}$

c. $(99\ 199\ 299) \begin{pmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 99 \\ 199 \\ 299 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{pmatrix}$

e. $99 \begin{pmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{pmatrix} + 199 \begin{pmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{pmatrix} + 299 \begin{pmatrix} 20 & 18 & 3 \\ 16 & 5 & 8 \\ 19 & 11 & 10 \end{pmatrix}$

[그림 Ⅳ-2-9] 미국 SAT 교과 시험의 행렬 공식 연습 문항

그리고 미국 SAT subject test의 공식 연습 문항인 [그림 Ⅳ-2-9]는 실생활 맥락의 문제 상황을 행렬을 이용한 수학적 표현으로 바꾸어 간단하게 표현함으로써 행렬의 유용성에 대해 인식할 수 있게 하는 평가 문항이다.

위에 제시된 문항들을 통해 해당 국가의 대학 입학시험에서는 행렬을 이용하여 주어진 실생활 맥락을 표현하고 해석 및 처리할 수 있는지 평가하고 있음을 알 수 있다. 이처럼 호주, 프랑스, 대만, 미국의 대학 입학시험에 출제된 실생활 맥락을 포함한 행렬 문항을 통해 학생들은 학습 과정이나 시험을 준비하는 과정에서 행렬을 유의미한 수학적 도구로 인식할 수 있으며, 행렬에 대한 유용성을 깨닫는 기회로 이어질 수 있기에 의미가 있다.

2.1.2. 벡터 영역

분석 대상 10개국은 벡터 영역을 대학 입학시험의 수학 시험에 포함하고 있다. 각 국가의 대학 입학시험에서 벡터 문항을 통해 평가하는 내용요소는 <표 Ⅳ-5>와 같다. <표 Ⅳ-5>는 행렬 영역과 마찬가지로 각 문서에서 제시한 내용을 그대로 번역한 부분도 있지만 일부 내용은 다듬어 우리 교육과정에서 사용하는 단어로 표현을 바꾸었다. 행렬과 마찬가지로 국가별로 교육과정이 반영된 교과서의 내용을 분석한 것은 아니기 때문에 수학에서 벡터 영역에 대한 정확한 비중 확인은 어렵다. 그러나 평가의 내용요소를 확인함으로써 해당 국가가 대학 진학을 하는 학생들에게 기본적으로 갖추어야 할 벡터 영역에 대한 수학적 지식의 범위를 어느 정도로 정하고 있는지는 가늠할 수 있다.

[표 Ⅳ-5] 국가별 대학 입학시험 벡터 영역의 내용요소

국가	시험명	시험과목	내용요소
영국	GCE A-level (Edexcel)	C4	벡터 • 2차원과 3차원에서 벡터 • 벡터의 크기 • 벡터의 합, 실수배와 기하적 해석 • 위치벡터 • 두 점 사이의 거리 • 벡터를 이용한 직선의 방정식 • 벡터의 내적(두 직선사이의 각 계산)
		FP3	벡터 • 벡터의 외적, 세 벡터의 삼중곱(이에 대한 기하적 해석) • 점, 직선, 평면에서 벡터의 사용 • $(r-a)\times b=0$, $r\cdot n=p$, $r=a+sb+tc$ 형태에서 방정식
		M1	역학에서 벡터 • 벡터의 크기와 방향, 벡터의 합력(resultant) • 평면에서 변위(displacement), 속도, 가속도, 힘(force)에서 벡터 응용
프랑스	Baccalauréat	S	벡터 기하 • 점과 두개의 비공선벡터에 의한 평면의 특성화(벡터의 연산과 개념을 공간으로 확장) • 공면벡터(벡터의 분해) • 직선의 매개변수 표현 벡터의 내적 • 공간에서 벡터의 내적(정의, 성질) • 평면의 법선벡터, 평면의 직교방정식
독일 (바이에른주)	Abitur	A, B부분	공간에서 좌표 기하 • 공간에서 벡터 표현, 벡터 계산 • 벡터의 내적과 벡터의 외적의 응용 공간에서 직선과 평면 • 직선과 평면의 방정식 벡터로 표현(벡터의 일차독립과 일차종속) • 직선끼리의 위치관계, 직선과 평면의 위치관계, 법선벡터를 이용한 평면방정식 • 헤세 표준형($r\cdot n=p$)을 사용한 거리와 각 결정 • 맥락에서의 응용

핀란드	Ylioppilastutkinto	lyhyt(기본), pitkä(심화)	• 벡터의 기본 성질 • 벡터의 합, 차, 실수배 • 좌표체계에서 벡터의 내적 • 연립방정식의 해 • 공간에서 직선과 평면
에스토니아	Riigieksamite	kitsas (기본)	평면에서 벡터, 직선의 방정식 • 벡터의 뜻(좌표 표현) • 벡터의 합, 차, 곱(좌표 표현) • 벡터의 내적, 벡터의 공선성과 직교성 • 직선의 방정식, 두 직선의 위치관계 • 원의 방정식 • 방정식의 그래프(직선, 원, 포물선) • 두 직선의 교점 • 기하 문제에서 벡터와 방정식 사용
		laia (심화)	평면에서 벡터, 직선의 방정식 • 벡터의 뜻(좌표 표현) • 벡터의 합, 차, 곱(좌표 표현) • 벡터의 내적, 물리 문제에서 벡터 사용(두 벡터 사이의 각) • 벡터의 공선성과 직교성 • 벡터를 이용한 삼각형 문제 해결 • 직선의 방정식, 두 직선의 위치관계 • 이차곡선 방정식과 그래프(쌍곡선, 포물선, 원) 공간에서 직선과 평면 • 공간벡터의 뜻(좌표 표현), 벡터의 선형연산, 벡터의 공선성과 공면성, 세 개의 비공면벡터의 표현, 벡터의 내적 • 공간에서 직선과 평면의 위치관계(삼수선의 정리, 도형의 정사영) • 두 벡터사이의 각, 두 점 사이의 거리(벡터의 크기) • 기하 및 물리 문제에서 벡터 사용
싱가포르	H2	Pure mathematics	벡터 • 2차원과 3차원에서 벡터의 기본 성질(연산, 표현, 단위벡터, 위치벡터, 변위 벡터, 방향벡터, 벡터 크기, 공선성 등) • 벡터의 내적과 외적(성질, 두 벡터 사이의 각, 기하적 의미) • 3차원 벡터 기하(평면과 직선 방정식, 두 직선, 직선과 평면, 두 평면의 관계 등)

중국	高考	문과	평면벡터 • 벡터의 개념(평면벡터의 뜻 이해, 기하적 표현 이해) • 벡터 선형 연산(벡터의 합, 차, 실수배와 기하적 의미 숙달, 벡터의 공선성 이해) • 벡터의 좌표 표현과 기본 정리(기본 정리 이해, 평면벡터의 직교 분해 숙달, 좌표로 표현된 평면벡터의 합, 차, 곱) • 벡터의 내적(내적과 기하적 의미 이해, 정사영과의 관계 이해, 좌표표현, 내적 계산, 두 벡터 사이의 각) • 벡터의 응용(기하 문제를 벡터로 해결) • 코시 부등식
		이과	평면벡터 • 벡터의 개념(개념 이해, 기하적 표현 이해) • 벡터 선형 연산(벡터의 합, 차, 실수배와 기하적 의미 숙달, 벡터의 공선성 이해) • 벡터의 좌표 표현과 기본 정리(기본정리 이해, 평면벡터의 직교 분해 숙달, 좌표로 표현된 평면벡터의 합, 차, 곱) • 벡터의 내적(내적과 기하적 의미 이해, 정사영과의 관계 이해, 좌표표현, 내적 계산, 두 벡터 사이의 각) • 벡터의 응용(기하 문제를 벡터로 해결) • 코시 부등식 공간벡터와 기하학 • 공간벡터와 연산(개념 및 기본정리 이해, 선형 연산과 좌표 표현, 공간벡터의 내적) • 공간벡터의 응용(직선의 방향벡터와 평면의 법선벡터 이해, 직선과 평면의 위치관계, 기하 문제를 벡터로 해결)
대만	學科能力測驗	數學考科	평면벡터 • 평면벡터의 표현(기하표현, 좌표표현, 합, 차, 실수배, 선형조합, 선형매개변수) • 평면벡터의 내적(내적과 cosine 관계, 코시부등식, 직선의 법선벡터, 직선과 점 사이의 거리) • 이차정사각행렬의 행렬식과 면적(면적 공식의 성질과 정의, 행렬식, 대수 판정식) 공간벡터 • 공간개념(직선과 평면의 위치관계) • 공간벡터의 좌표 표현(공간 좌표계, 공간벡터의 합, 차, 실수배, 선형조합) • 공간벡터의 내적(내적과 정사영 관계, 코시부등식) • 공간벡터의 외적(외적과 sine 관계, 평행사변형의 면적, 세 벡터의 삼중곱과 기하적 의미, 3차정사각행렬의 행렬식과 성질) 공간에서 평면과 직선 • 평면방정식(평면의 법선벡터, 두 평면사이의 각, 점과 평면사이의 거리)

	指定科目考試	數學甲	평면벡터 • 평면벡터의 표현(기하표현, 좌표표현, 합, 차, 실수배, 선형조합, 선형매개변수) • 평면벡터의 내적(내적과 cosine 관계, 코시부등식, 직선의 법선벡터, 직선과 점 사이의 거리) • 이차정사각행렬의 행렬식과 면적(면적 공식의 성질과 정의, 행렬식, 대수 판정식) 공간벡터 • 공간개념(직선과 평면의 위치관계) • 공간벡터의 좌표 표현(공간 좌표계, 공간벡터의 합, 차, 실수배, 선형조합) • 공간벡터의 내적(내적과 정사영 관계, 코시부등식) • 공간벡터의 외적(외적과 sine 관계, 평행사변형의 면적, 세 벡터의 삼중곱과 기하적 의미, 3차정사각행렬의 행렬식과 성질) 공간에서 평면과 직선 • 평면방정식(평면의 법선벡터, 두 평면사이의 각, 점과 평면사이의 거리)
		數學乙	평면벡터 • 평면벡터의 표현(기하표현, 좌표표현, 합, 차, 실수배, 선형조합, 선형매개변수) • 평면벡터의 내적(내적과 cosine 관계, 코시부등식, 직선의 법선벡터, 직선과 점 사이의 거리) • 이차정사각행렬의 행렬식과 면적(면적 공식의 성질과 정의, 행렬식, 대수 판정식)
호주 (빅토리아주)	VCE	SM1 SM2	벡터 • 벡터의 뜻, 성질 • 벡터의 합, 차, 실수배, 위치 벡터 • 벡터의 일차종속과 일차독립 및 기하적 표현 • 벡터의 크기, 단위벡터, 단위직교벡터 • 벡터의 분해(벡터의 합력) • 벡터의 내적, 스칼라 사영, 벡터 사영 • 평행 벡터, 수직 벡터 • 간단한 기하 내용을 벡터로 증명 벡터 미적분학 • 시간에 관한 함수로서 위치 벡터 • 시간에 관한 벡터 함수의 미분과 적분, 평면에서 움직임에 대한 벡터 미적분 적용
미국	SAT subject test	level 2	벡터 표현 • 벡터의 뜻, 벡터의 성분, 벡터로 표현된 문제 해결 벡터 연산 • 벡터의 합, 차 • 벡터의 실수배

위의 내용요소를 분석하기 위해 공통적인 평가 내용을 중심으로 정리하여 비교하면 <표 Ⅳ-6>과 같다.

<표 Ⅳ-6> 벡터 영역의 내용요소별 국가 비교

국가 / 내용	영국	프랑스	독일	핀란드	에스토니아	싱가포르	중국	대만	호주	미국
• 평면벡터의 뜻 • 평면벡터의 연산 (합, 차, 실수배) • 평면벡터의 성분(좌표 표현)	○*			○*	○*	○*	○*	○*	○*	○*
• 공간벡터의 뜻 • 공간벡터의 연산 (합, 차, 실수배) • 공간벡터의 성분(좌표 표현)	○*	○*	○*	○*	○*	○*	○*	○*	○*	
• 벡터의 내적	○*	○*	○*	○*	○*	○*	○*	○*	○*	
• 벡터의 외적	○*		○*			○*		○*		
• 점과 평면사이의 거리 • 직선과 평면의 위치관계			○*	○*	○*	○*	○*	○*		
• 세 벡터의 삼중곱	○*							○*		
• 벡터의 공선성, 공면성		○*			○	○*	○	○*		
• 평면의 법선벡터, 공간에서 평면의 방정식		○*	○*			○*	○*	○*		
• 헤세 표준형을 사용한 표현 및 거리, 각 계산	○*		○	○*		○*				
• 코시부등식							○	○		
• 이차정사각행렬의 행렬식과 면적								○*		
• 역학에서의 벡터 • 벡터 미적분학	○*								○*	
• 벡터의 일차종속과 일차독립			○						○*	

(○: 포함되어 있는 내용요소, *: 시험에서 관련 내용 출제)

<표 Ⅳ-6>을 통해 확인할 수 있는 벡터 영역을 포함하는 외국 대학입학시험의 가장 큰 특징은 미국과 나머지 9개국의 대학 입학시험에서 다루는 벡터 내용요소의 차이이다. 미국의 SAT subject test에서는 평면벡터의 표현, 연산만을 다루고 있으나 나머지 국가의 대학 입학시험에서는 공통적으로 공간벡터의 뜻, 연산, 성질뿐만 아니라 평면벡터와 공간벡터의 내적까지도 다루고 있기 때문에 미국을 예외적인 상황으로 두고 나머지 분석 대상 국가에 대해 분석할 필요가 있다.

벡터 영역을 포함하는 외국 대학 입학시험의 두 번째 특징은 행렬과 마찬가지로 시험 과목 선택에 따라 평가 내용의 범위가 다양하고, 높은 수준의 개념까지 묻고 있다는 것이다. 즉, 미국을 제외한 나머지 9개 분석 대상 국가의 대학 입학시험은 학생 진로 선택에 따라 시험 과목이나 대학입학전형 방법이 다양하기 때문에 국가마다 평가하는 벡터 영역의 내용요소의 차이가 존재한다. 이를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 에스토니아, 중국, 대만의 대학 입학시험에서는 기본과정 선택 학생 또는 문과 학생들도 벡터를 학습하고 평가받고 있다. 에스토니아의 기본과정 시험과 중국의 문과 시험, 대만의 모든 수학 시험에서 벡터를 다루고 있는데, 평면벡터의 연산, 평면벡터의 내적까지 평가 범위에 해당한다.

에스토니아 기본과정 문항인 [그림 Ⅳ-2-10], 중국 문과 시험 문항인 [그림 Ⅳ-2-11], 대만 지정과목고시 수학乙의 문항인 [그림 Ⅳ-2-12]는 해당 국가에서 이공계열로 진학을 앞두고 있는 학생이 아니어도 평면벡터의 표현, 연산, 기본적인 성질을 평가받고 있음을 보여주는 문항이다.

직선 $s: y=2x-4$는 점 A에서 x축을 지난다. 직선 t는 직선 s에 평행하고 원점 $O(0,0)$을 지난다.

1,2. (벡터 영역과 관련이 없어 생략)

3. 사각형 $OABC$의 모든 꼭짓점은 직선 s와 t위에 있고, $\overrightarrow{AC}=(1,6)$이다. 이때, 점 B와 점 C의 좌표를 구하고, 사각형 $OABC$를 그리시오.

[그림 Ⅳ-2-10] 에스토니아 Riigieksamite 기본과정 벡터 문항(2017년 시행)

두 벡터 $\vec{a}=(x, x+1), \vec{b}=(1,2)$에 대하여 $\vec{a} \perp \vec{b}$이다. 이때, x의 값은?

[그림 Ⅳ-2-11] 중국 高考 전국권 문과 벡터 문항(2016년 시행)

좌표평면위의 $\triangle ABC$에서 점 D는 $\overline{AB}$의 중점이고, $\overrightarrow{AC}$위에 있는 점 E는 $\overline{AE}=3\overline{AC}$를 만족한다. $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}=15$일 때, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AE}$의 값은?

[그림 Ⅳ-2-12] 대만 지정과목고시 수학乙 벡터 문항(2018년 시행)

위에 제시된 세 문항을 토대로 에스토니아, 중국, 대만은 이공계열 진학을 고려하지 않는 학생이어도 벡터 영역에서 비교적 쉬운 개념을 잘 이해하고 적용할 수 있는지 평가함으로써 벡터라는 표현 도구를 인식하고, 간단한 계산은 처리할 수 있음을 보여주고 있다.

둘째, 공간벡터를 다루고 있는 심화과정이나 이과 학생들이 선택하는 시험이어도 어려운 개념만을 묻는 것이 아니라 [그림 Ⅳ-2-13], [그림 Ⅳ-2-14]와 같은 문항을 출제함으로써 공간벡터의 성질, 내적 계산 및 해석에 관련된 기본적인 내용을 이해하고 적용할 수 있는지 평가한다.

구의 지름의 양 끝에 각각 점 $A(-1,3,4), B(3,-4,0)$이 존재한다.
1. 구의 중심 O의 좌표를 구하고, 부피를 구하시오.
2. 점 $C(4,1,-1)$이 구 위에 존재한다. 각 ACB의 크기를 구하시오.

[그림 Ⅳ-2-13] 에스토니아 Riigieksamite 심화과정 벡터 문항(2018년 시행)

두 벡터 $\vec{a}=2i-j+3k, \vec{b}=-mi+j+2k$에 대하여 $\vec{a}-\vec{b}$가 $\vec{b}$에 수직이라고 할 때, m의 값은? (단, m은 상수)

a. $m=0$ b. $m=2$ c. $m=0$또는 $m=2$
d. $m=4.5$ e. $m=0$ 또는 $m=-2$

[그림 Ⅳ-2-14] 호주 VCE의 SM2 벡터 문항(2016년 시행)

셋째, 수학 심화과정 또는 이과 학생들이 선택하는 시험 과목에서 공간벡터의 기본 성질 및 연산을 다루는 것뿐만 아니라 공간벡터의 외적, 삼중곱, 일차독립과 일차종속 등과 같이 우리나라 대학수학(선형대수학)의 내용으로 보이는 더 높은 수준의 문항을 출제하고 있다. 그 예로 호주의 SM1 시험 문항인 [그림 Ⅳ-2-15]는 공간벡터의 벡터사영과 일차종속의 개념을 묻는 것으로 공식집이 제공되어도 관련 공식이 제공되지 않기 때문에 학생이 이에 대해 반드시 알고 있어야 해결할 수 있다.

세 벡터 $\vec{a}=3i+5j-2k$, $\vec{b}=i-2j+3k$, $\vec{c}=i+dk$에 대하여,
(단, d는 실수)

a. $\vec{b}$위로의 $\vec{a}$의 벡터 사영을 구하시오.

b. 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$가 일차종속일 때, d의 값을 구하시오.

[그림 Ⅳ-2-15] 호주 VCE의 SM1 벡터 문항(2016년 시행)

또한 대만 지정과목고시의 객관식 다답형 문항인 [그림 Ⅳ-2-16]은 공간벡터의 외적과 삼중곱의 의미를 이해하고 문제 조건에 적용함으로써 선택지 가운데 옳은 것을 찾을 수 있는지 평가하고 있다.

좌표공간에서 네 개의 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$가 있다. $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{c}$, $\vec{a}\times\vec{c}=\vec{d}$이고, 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$의 크기는 모두 4이다. 두 벡터 $\vec{a}$와 $\vec{b}$사이의 각을 θ라고 할 때, 옳은 것을 있는 대로 고르시오. (단, $0\le\theta\le\pi$)

1. $\cos\theta=\frac{1}{4}$
2. 세 벡터 $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$로 이루어진 평행육면체의 부피는 16이다.
3. 세 벡터 $\vec{a}, \vec{c}, \vec{d}$는 각각 서로 수직이다.
4. 벡터 $\vec{d}$의 크기는 4이다.
5. 두 벡터 $\vec{b}$와 $\vec{d}$사이의 각은 θ이다.

[그림 Ⅳ-2-16] 대만 지정과목고시 수학甲 벡터 문항(2018년 시행)

벡터 영역을 포함하는 외국 대학 입학시험의 마지막 특징은 벡터라는 개념을 통해 수학적 유용성을 인식할 수 있는 문항을 출제하고 있다는 것이다. 첫 번째로 물리 맥락에서 벡터가 과학의 언어임을 보여주는 문항들을 볼 수 있다. 영국과 호주는 역학에서의 벡터, 벡터 미적분학과 같이 물리 개념을 표현하고 설명하는 도구로써 벡터를 사용하는 문항을 출제하여 평가하고 있다.

[그림 Ⅳ-2-17]은 벡터로 표현된 세 힘이 균형을 이룬다는 것에서 합력이 0임을 알고 해결하는 것이며, [그림 Ⅳ-2-18]은 벡터로 표현된 속도를 이용하여 가속도, 힘의 크기, 변위를 구하는 것으로 물리 맥락에서 벡터의 표현 방법을 이해하고 적용할 수 있는지 평가하고 있다.

세 힘 $(15\mathrm{i}+\mathrm{j})$N, $(5q\mathrm{i}-p\mathrm{j})$N, $(-3p\mathrm{i}-q\mathrm{j})$N이 한 입자에 작용한다. 이 입자는 균형을 이룬다고 할 때, p, q의 값을 각각 구하시오. (단, p, q는 상수)

[그림 Ⅳ-2-17] 영국 GCE A-level의 M1 벡터 문항(2017년 시행)

무게가 $2kg$이고 처음 속도가 $(3i+2j)ms^{-1}$인 한 입자가 10초 동안 일정한 힘을 받는다. 10초 후, 입자의 속도가 $(43i-18j)ms^{-1}$이라 하자.

a. 일정한 힘의 크기를 뉴턴 단위로 구하시오.

b. 10초 후 처음 위치로부터 입자의 변위를 구하시오.

[그림 Ⅳ-2-18] 호주 VCE의 SM1 벡터 문항(2017년 시행)

위 문항들은 벡터 개념이 과학을 설명하는 도구로써 사용됨을 보여주는 것으로 우리나라 15 개정 수학과 교육과정에는 명시되어 있지 않으나 15 개정 과학과 교육과정(교육부, 2015b, p.138)에 다음과 같은 성취기준이 존재한다.

[12물리Ⅱ01-01] 평면 상에서 여러 가지 힘이 합성될 때 힘의 벡터를 이용하여 알짜힘을 구할 수 있다.

이렇게 우리나라는 수학이 과학의 표현 수단임을 과학교육과정에 명시하고 있는 반면, 영국과 호주는 수학 시험에서 수학적 개념을 필요로 하는 물리량 계산, 물리 개념의 수학적 해석 및 표현을 평가하고 있기 때문에 우리나라에 비해 수학이 과학의 도구임을 인식하기 쉽다.

두 번째로 실생활 맥락에서 벡터를 이용한 표현 수단으로써 유용성을 보여주는 문항들을 볼 수 있다. 영국, 독일, 핀란드, 싱가포르의 대학 입학시험에서는 실생활 맥락을 부여한 문제 상황을 바탕으로 벡터를 이용하여 표현하고 해석하는 문항을 출제하여 평가하고 있다.

두 배 P, Q는 일정한 속도로 움직이고 있다. P, Q의 속도는 각각 $(9\mathrm{i}-2\mathrm{j})km/h$, $(4\mathrm{i}+8\mathrm{j})km/h$이다. (문제에서 i, j는 각각 동쪽과 북쪽을 나타내는 수직인 단위 벡터이고 위치벡터는 원점 O를 기준으로 주어진다.)

a. 배 P가 움직이는 방향을 구하고, 각을 이용하여 설명하시오.

$t=0$일 때, P, Q의 위치벡터는 각각 $(9\mathrm{i}+10\mathrm{j})km$, $(\mathrm{i}+4\mathrm{j})km$이고, t시간일 때, P, Q의 위치벡터는 각각 $\mathrm{p}km$, $\mathrm{q}km$이다.

b. p, q를 t에 관하여 표현하시오.

c. t시간일 때, $\overrightarrow{QP}=(8+5t)\mathrm{i}+(6-10t)\mathrm{j}$임을 보이시오.

d. 두 배가 $10km$ 떨어져 있을 때, t값을 구하시오.

[그림 Ⅳ-2-19] 영국 GCE A-level의 M1 벡터 문항(2017년 시행)

전기 엔지니어들은 건물 현장에 전기 케이블을 설치하고 있다. 점 (x, y, z)는 $(0, 0, 0)$이라는 메인 지역을 기준으로 정해지며 단위는 m이다. 케이블은 직선으로 놓이며 케이블의 두께는 무시된다.
메인 지역에서 시작하는 기존의 케이블 C는 방향 $(3, 1, -2)$를 따른다. 새로운 케이블은 두 점 $P(1, 2, -1)$, $Q(5, 7, a)$를 지나간다.
ⅰ. 케이블 C와 새로운 케이블이 만나게 되는 a의 값을 구하시오.

두 케이블이 만나지 않기 위해서 엔지니어들은 $a = -3$을 사용한다. 엔지니어들은 두 점 P, Q를 케이블 C위의 점 R에 연결하고자 한다.
ⅱ. 엔지니어들은 필요한 케이블 길이를 줄이기 위해서는 각 PRQ의 크기가 90°이어야한다고 생각한다. 이것이 불가능함을 보이시오.
ⅲ. 엔지니어들은 P와 R사이의 땅을 드릴로 뚫기 어렵다는 것을 발견하고 선분 PR의 길이를 가능한 작게 하려고 한다. 이 경우에 R의 좌표와 선분 PR의 최소길이를 각각 구하시오.

[그림 Ⅳ-2-20] 싱가포르 H2의 벡터 문항(2017년 시행)

영국의 M1 시험 문항인 [그림 Ⅳ-2-19]는 평면벡터로 표현된 두 배의 속도 벡터, 위치벡터를 이용하여 주어진 문제를 해결해야 하며, 싱가포르의 H2 시험 문항인 [그림 Ⅳ-2-20]은 전기 엔지니어가 새로운 케이블을 설치할 때 발생할 수 있는 문제 상황을 제시하여 실생활 맥락에서 공간벡터를 이용하여 문제를 해결하도록 하고 있다. 이러한 문항들은 벡터 개념을 이용하여 실생활 상황을 표현하고 해석할 수 있는지 평가하고 있으며, 이를 통해 학생들은 대학 입학시험에 출제된 실생활 맥락을 경험함으로써 벡터 개념이 유용한 수학적 도구임을 인식할 수 있다.

2.2. 수능과 외국 대학 입학시험 내용요소 비교

수능과 외국 대학 입학시험의 내용요소를 비교하기 위해서 앞에서 살펴본 내용을 기준으로 정리한다. 앞 절에서 살펴본 외국 대학 입학시험의 행렬과 벡터 영역의 내용요소를 기준으로 Ⅱ장에서 살펴본 수능의 행렬과 벡터 영역의 내용요소를 비교하였다.

우선 현재 수능과 외국 대학 입학시험의 행렬 영역은 비교할 수 없다. 이는 Ⅱ장에서 확인한 바와 같이 현재 09 개정 수학과 교육과정이 적용되는 수능뿐만 아니라 올해 적용되는 15 개정 수학과 교육과정에도 포함하고 있지 않기 때문이다.

이에 수능과 외국 대학 입학시험의 행렬 영역의 내용요소를 비교하기 위해 <표 Ⅳ-4>에 우리나라 교육과정 중 행렬이 마지막으로 포함된 07 개정 수학과 교육과정의 행렬 영역의 내용요소를 추가하여 정리하였으며, 이는 <표 Ⅳ-7>과 같다.

<표 Ⅳ-7> 행렬 영역의 내용요소별 외국 대학 입학시험과 수능의 비교

내용 \ 국가	영국	프랑스	대만	호주	미국	한국
• 행렬의 뜻 • 행렬의 연산(합, 차, 실수배) • 행렬의 종류(영행렬, 단위행렬, 역행렬 등) • 행렬의 곱 • 이차정사각행렬의 역행렬	○	○	○	○	○	△
• 선형방정식과 행렬 표현	○	○	○	○	○	△
• 전이행렬		○	○	○		
• 선형변환과 행렬(대칭변환, 회전변환 등)	○		○		○	△
• 3차정사각행렬	○	○				
• 전치행렬	○			○		
• 고유치, 고유벡터, 대각화	○					
• 그래프와 행렬		○		○		△
• 행렬과 점화식		○		○		

Ⅱ장에서 살펴본 바와 같이 우리나라에서 행렬 영역은 07 개정 수학과 교육과정까지만 포함되었기 때문에 현재는 다루고 있지 않다. 이에 <표 Ⅳ-7>안에 표시되는 우리나라 교육과정의 행렬 내용요소는 다른 국가와

달리 이전 교육과정이기 때문에 △으로 표현하였다. <표 Ⅳ-7>을 살펴보면 우리나라 07 개정 수학과 교육과정에서 행렬 영역의 가장 기본적인 내용요소는 행렬의 뜻, 연산, 이차정사각행렬과 관련된 법칙으로 외국에서 다루는 내용요소와 유사한 편이다. 그러나 이를 제외하고는 07 개정 수학과 교육과정이 적용된 수능과 외국 대학 입학시험의 행렬의 내용요소는 몇 가지 큰 차이점을 보인다. 첫째, 학생의 진로 선택에 따른 심화개념의 평가 유무이다. 영국, 대만, 호주의 행렬 영역을 포함하는 시험은 심화내용으로 볼 수 있는 전치행렬, 고유치와 고유벡터, 가우스 소거법, 특이행렬 등과 같은 내용을 다루어 학생의 진로 선택에 따른 심도있는 개념을 평가하고 있지만 수능에서는 다루고 있지 않았다. 둘째, 행렬의 유용성에 관한 것이다. 프랑스, 대만, 호주, 미국의 시험에서는 전이행렬, 전이다이어그램을 다루거나 실생활 맥락의 상황을 효과적으로 표현하는 수단으로써 행렬을 표현하고 있다. 그러나 수능에서는 행렬의 유용성보다는 행렬 개념 및 법칙과 같은 연산의 조작에 초점을 두는 문항이 출제되었기 때문에 수능을 통해서는 행렬의 가치 인식을 하기 어려웠다.

다음으로 수능과 외국 대학 입학시험의 벡터 영역의 내용요소를 비교하기 위해 <표 Ⅳ-6>에 우리나라의 벡터 영역의 내용요소를 추가하여 수정하면 <표 Ⅳ-8>과 같다.

<표 Ⅳ-8> 벡터 영역의 내용요소별 외국 대학 입학시험과 수능의 비교

국가 / 내용	영국	프랑스	독일	핀란드	에스토니아	싱가포르	중국	대만	호주	미국	한국
• 평면벡터의 뜻 • 평면벡터의 연산 (합, 차, 실수배) • 평면벡터의 성분(좌표 표현)	○			○	○	○	○	○	○	○	○
• 공간벡터의 뜻 • 공간벡터의 연산 (합, 차, 실수배) • 공간벡터의 성분(좌표 표현)	○	○	○	○	○	○	○	○	○		△
• 벡터의 내적	○	○	○	○	○	○	○	○	○		○
• 벡터의 외적	○		○			○		○			
• 점과 평면사이의 거리 • 직선과 평면의 위치관계			○	○	○	○	○	○			○
• 세 벡터의 삼중곱	○							○			
• 벡터의 공선성, 공면벡터		○			○	○	○	○			
• 평면의 법선벡터, 공간에서 평면의 방정식		○	○			○	○	○			△
• 헤세 표준형을 사용한 표현 및 거리, 각 계산	○		○	○		○					
• 코시부등식							○	○			
• 이차정사각행렬의 행렬식과 면적								○			
• 역학에서의 벡터 • 벡터 미적분학	○								○		
• 벡터의 일차종속과 일차독립									○		

2018년 올해부터 적용되는 우리나라 15 개정 수학과 교육과정의 내용요소는 ○로 표시하였고, 이전 교육과정에서 다루었던 내용요소는 △으로 표시하였다. 다만 벡터의 내적의 경우 ○표시가 되어 있으나 다른 국가와 달리 공간벡터를 다루지 않기 때문에 평면벡터의 내적만 해당한다. <표 Ⅳ-8>을 살펴보면 우리나라 15 개정 수학과 교육과정의 내용요소는

미국을 제외한 다른 국가와 많은 차이를 보이고 있다. 구체적으로 앞 절에서 확인한 외국 대학 입학시험과 수능의 벡터 내용요소의 차이점은 다음과 같다. 첫째, 공간벡터의 포함여부이다. 미국을 제외한 9개국의 시험에서 공간벡터를 포함하고 있으나 수능에서는 교육과정 개정에 따라 2021학년도 수능부터 공간벡터를 다루지 않는다. 둘째, 학생의 진로 선택에 따른 심화개념의 평가 유무이다. 외국 대학 입학시험은 외적, 삼중곱, 일차독립과 일차종속 등과 같은 내용을 평가하고 있으나 수능은 그렇지 않다. 셋째, 기본과정 또는 문과 학생들이 치르는 시험에 벡터 영역의 포함 여부이다. 에스토니아, 중국, 대만은 기본과정 선택 학생 또는 문과 학생들이 치르는 시험에서도 벡터 영역을 포함하고 있는 반면 수능은 이과학생들이 선택하는 수학 가형에만 다루고 있다. 넷째, 벡터의 유용성에 관한 것이다. 영국, 호주는 수학 시험과목에 벡터가 사용되는 물리 개념이 존재하고, 영국, 독일, 핀란드, 싱가포르의 시험에서는 실생활 맥락에서 벡터가 상황을 표현하고, 처리하는 도구라는 것을 인식할 수 있는 기회가 주어지나, 수능은 맥락을 포함하여 출제하고 있지 않기 때문에 벡터의 수학적 유용성을 인식할 기회가 없다.

3. 대학 입학시험의 행동 영역

Ⅱ장에서 살펴보았듯이 수능 수학 시험의 행동 영역은 대학 교육을 받는 데 필요한 수학적 사고력의 범주를 적절하게 나누고 있다고 볼 수 있다. 이에 본 연구에서는 수능 수학과 행동 영역 분석틀인 <표 Ⅱ-6>을 사용하여 외국 대학 입학시험의 행렬과 벡터 영역의 수학 시험 문항을 분석하고, 이를 바탕으로 각 국가의 대학 입학시험에서 해당 문항을 통해 어떠한 능력을 측정하고 있는지 확인한다. 구체적으로 수학적 사고력의 범주인 행동 영역별로 외국 대학 입학시험에서 어떠한 문항을 출제하여 평가하였는지 살펴본 후 조사 대상 국가의 대학 입학시험의 문항들의 행동 영역의 전반적인 특징을 분석하고, 이를 수능과 비교한다.

3.1. 외국 대학 입학시험 비교, 분석

3.1.1. 계산 능력

계산 능력은 수능 수학과 행동 영역인 <표 Ⅱ-6>에서 제시된 바와 같이 연산의 기본 법칙이나 성질을 적용하여 간단히 하거나 기본적인 공식을 이용하여 절차적으로 풀 수 있는지 확인함으로써 평가할 수 있다.

먼저 행렬 영역에서 계산 능력을 평가하고 있는 대표적인 문항은 영국의 FP1, 대만의 학과능력측정시험, 호주의 FtM1에서 확인할 수 있고, 각각 [그림 Ⅳ-2-1][14], [그림 Ⅳ-3-1], [그림 Ⅳ-3-2]와 같다.

14) 앞 절 행렬 영역의 평가 내용요소를 비교할 때 기본 개념을 평가하는 문항으로 제시된 바 있다.

실수 a, b, c, d, e, x, y, z에 대하여, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 5 & 7 \\ -4 & 6 & e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & x & 7 \\ 7 & y & 7 \\ -11 & z & 23 \end{pmatrix}$이다.

이때 y의 값은?

[그림 Ⅳ-3-1] 대만의 학과능력측정시험 계산 문항(2018년도 시행)

[그림 Ⅳ-3-1]은 행렬의 곱셈 계산 방법을 적용하여 나온 연립방정식을 해결하여 미지수 y를 구하는 문항으로 행렬 연산의 기본적인 법칙, 계산법을 적용할 수 있는지 평가하는 것으로 계산 문항으로 볼 수 있다.

두 행렬의 곱 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{L} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{P} \\ \mathrm{S} \end{pmatrix}$ 은?

a. $\begin{pmatrix} \mathrm{L} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{P} \\ \mathrm{S} \\ \mathrm{E} \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} \mathrm{L} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{P} \\ \mathrm{S} \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{L} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{S} \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{L} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{S} \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} \mathrm{P} \\ \mathrm{E} \\ \mathrm{A} \\ \mathrm{L} \\ \mathrm{S} \end{pmatrix}$

[그림 Ⅳ-3-2] 호주 VCE의 FtM1 계산 문항(2016년 시행)

[그림 Ⅳ-3-2]는 5×5행렬과 5×1행렬의 곱셈 계산 방법을 알고, 행렬 곱셈의 계산법을 적용하여 답을 구할 수 있는지 묻고 있기 때문에 계산 능력을 평가하는 것이다.

다음은 벡터 영역에서 계산 능력을 평가하는 문항이다. 벡터 영역에서 계산 능력을 평가하고 있는 대표적인 문항은 중국의 이과 시험, 대만의 지정과목고시 수학乙, 호주의 SM2, 미국의 연습문항에서 확인할 수 있으며, 각각 [그림 Ⅳ-3-3], [그림 Ⅳ-3-4], [그림 Ⅳ-3-5], [그림 Ⅳ-3-6]과 같다.

두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$사이의 각이 60°이다. $|\vec{a}| = 2, |\vec{b}| = 1$일 때, $|\vec{a}+2\vec{b}|$의 값은?

[그림 Ⅳ-3-3] 중국 高考의 전국권 이과 계산 문항(2017년 시행)

[그림 Ⅳ-3-3]은 평면벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 크기를 계산하기 위해 주어진 조건을 적절하게 이용하여 구할 수 있는지 확인하는 문항으로 벡터 연산의 성질을 이용하여 절차대로 해결할 수 있는지 평가하고 있기 때문에 계산 문항으로 볼 수 있다.

평면 벡터 $\vec{u}, \vec{v}$가 서로 수직이고 $\vec{u}-\vec{v} = (4, -7)$이다. $\vec{u}$의 크기가 6일 때, $\vec{v}$의 크기는?

[그림 Ⅳ-3-4] 대만 지정과목고시 수학乙 계산 문항(2017년 시행)

[그림 Ⅳ-3-4]는 주어진 조건을 이용하여 벡터 $\vec{v}$의 크기를 구할 수 있는지 확인하는 문항으로 벡터 연산의 성질, 기본적인 계산법을 적용하는 능력을 평가하고 있기에 계산 문항으로 볼 수 있다.

질량이 $5kg$인 한 입자는 $12i(N)$과 $9j(N)$의 힘을 받는다. 입자에 다른 힘이 가해지지 않는다고 할 때, 입자의 가속도의 크기는? (단, 가속도의 단위는 ms^{-2}이다.)

a. 3
b. $2.4i+1.8j$
c. 4.2
d. 9
e. $60i+45j$

[그림 Ⅳ-3-5] 호주 VCE의 SM2 계산 문항(2016년 시행)

[그림 Ⅳ-3-5]는 물리 맥락에서 입자의 질량, 가속도, 힘과 관련된 수학의 기본적인 공식을 적용할 수 있는지 확인하는 문항으로 계산 능력을 평가하는 문항으로 볼 수 있다.

두 벡터 $\vec{v}=(-1,-8)$, $\vec{u}=(2,-4)$에 대하여, $\vec{u}+\vec{v}$는?

a. $(-1,-12)$
b. $(3,4)$
c. $(-12,-1)$
d. $(-3,-4)$
e. $(1,-12)$

[그림 Ⅳ-3-6] 미국 SAT 교과 시험의 문제집 벡터 계산 문항(Mcgraw-Hills)

[그림 Ⅳ-3-6]은 두 평면벡터의 합의 좌푯값을 구하는 것으로 벡터 연산의 기본 법칙을 적용할 수 있는지 평가하고 있기 때문에 계산 문항에 해당한다.

위에 제시한 것과 같이 계산 능력을 평가하는 문항들은 대체로 해당 영역의 내용요소 중 기본적인 수학적 개념들을 학생이 알고 있는지 확인하는 데 초점이 있다. 행렬과 벡터 영역의 구분 없이 대부분 내용의 난이도가 다소 낮은 편이며, 주로 선다형과 단답형으로 출제되었다.

3.1.2. 이해 능력

이해 능력은 수능 수학과 행동 영역인 <표 Ⅱ-6>에서 제시된 바와 같이 문제에서 주어진 수학적 표현의 의미를 알고 적용할 수 있는지, 문제 상황과 관련된 수학적 개념을 파악하고 적용하거나 수학적 표현으로 바꿀 수 있는지 확인함으로써 평가할 수 있다.

행렬 영역에서 이해 능력을 평가하고 있는 대표적인 문항은 영국의 FP3, 대만의 지정과목고시 수학甲, 호주의 FtM1, 미국의 공식 연습문항에서 확인할 수 있으며, 각각 [그림 Ⅳ-2-4][15], [그림 Ⅳ-3-7], [그림 Ⅳ-3-8], [그림 Ⅳ-2-9][16]와 같다.

15) 앞 절 행렬 영역의 평가 내용요소를 비교할 때 심화 개념을 평가하는 문항으로 제시된 바 있다.
16) 앞 절 행렬 영역의 평가 내용요소를 비교할 때 실생활 맥락의 문제로 제시된 바 있다.

A는 3×3행렬이다. 임의의 실수 a, b, c에 대하여, $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$이다.

이때, $A^2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$은?

a. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b. $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ c. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ d. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ e. $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

[그림 Ⅳ-3-7] 대만 지정과목고시 수학甲 이해 문항(2018년 시행)

[그림 Ⅳ-3-7]은 주어진 문제의 조건과 관련된 행렬의 성질을 이해하고 적용할 수 있어야 해결할 수 있는 문항으로 이해 능력을 평가하고 있는 것으로 볼 수 있다.

아래 표는 저금통에 모인 동전의 종류에 따른 개수를 보여준다.

동전	5 센트	10 센트	20 센트	50 센트
개수	15	32	48	24

동전 전체의 개수와 금액의 총합을 보여주는 행렬 곱을 고르면?

a. $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 15 \\ 32 \\ 48 \\ 24 \end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix} 15 & 32 & 48 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 10 \\ 1 & 20 \\ 1 & 50 \end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 & 50 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 15 \\ 1 & 32 \\ 1 & 48 \\ 1 & 24 \end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix} 15 & 32 & 48 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 20 \\ 50 \end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 20 & 50 \\ 15 & 32 & 48 & 24 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

[그림 Ⅳ-3-8] 호주 VCE의 FtM1 이해 문항(2016년 시행)

[그림 Ⅳ-3-8]은 저금통에 모인 동전의 종류와 개수가 표로 주어진 상황에서 구하는 두 개의 값을 행렬을 이용하여 적절하게 표현할 수 있는지 확인하는 문항으로 주어진 문제 상황을 수학적으로 표현하는 능력을 평가하고 있기 때문에 이해 문항에 해당한다고 볼 수 있다.

다음은 벡터 영역에서 이해 능력을 평가하는 문항이다. 벡터 영역에서 이해 능력을 평가하고 있는 대표적인 문항은 영국의 M1, 프랑스의 S, 독일의 A부분, 핀란드의 pitkä(심화과정), 에스토니아의 kitsas(기본과정), 중국의 문·이과, 대만의 학과능력측정시험, 호주의 SM1에서 확인할 수 있으며, 각각 [그림 Ⅳ-2-17][17], [그림 Ⅳ-3-9], [그림 Ⅳ-3-10], [그림 Ⅳ-3-11], [그림 Ⅳ-2-10][18], [그림 Ⅳ-3-12], [그림 Ⅳ-3-13], [그림 Ⅳ-2-15][19]와 같다.

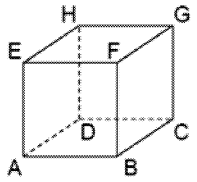
공간에서 기준이 되는 점은 $O(i, j, k)$이다.
평면 P의 방정식을 $2x-z-3=0$이라 하고, 점 A의 좌표는 $(1, a, a^2)$이라 하자.
(단, a는 실수이다.)
(벡터 영역과 관련이 없는 문항 생략)
2. a. 평면 P에 수직이고 점 A를 지나는 직선 D를 매개변수 t를 이용하여 표현하시오.

[그림 Ⅳ-3-9] 프랑스 Baccalauréat의 S 이해 문항(2017년 시행)

[그림 Ⅳ-3-9]는 공간에서 주어진 평면의 법선벡터와 평면에 수직인 직선의 방향벡터가 같음을 이해하고, 한 점과 방향벡터를 이용하여 직선의 방정식을 구하는 문항이다. 이는 관련된 벡터의 개념을 파악하고 적용할 수 있는지 평가하고 있어 이해 문항으로 볼 수 있다.

17) 앞 절 벡터 영역의 평가 내용요소를 비교할 때 타 교과 소재의 맥락에서 수학 개념을 평가하는 문항으로 제시된 바 있다.
18) 앞 절 벡터 영역의 평가 내용요소를 비교할 때 기본과정 또는 문과 학생들이 보는 시험에 포함되는 벡터의 기본 개념을 평가하는 문항으로 제시된 바 있다.
19) 앞 절 벡터 영역의 평가 내용요소를 비교할 때 심화 개념을 평가하는 문항으로 제시된 바 있다.

1. 정육면체 $ABCDEFGH$가 있다.
꼭짓점 D, E, F, H는 다음의 좌표를 갖는다.
$D(0, 0, -2)$, $E(2, 0, 0)$, $F(2, 2, 0)$, $H(0, 0, 0)$



a. (벡터 영역과 관련이 없어 생략)
b. 선분 FB위에 점 P가 있다. 점 P와 점 H사이의 거리는 3이다.
이때, P의 좌표를 구하시오.

[그림 Ⅳ-3-10] 독일 Abitur의 A부분 이해 문항(2016년 시행)

[그림 Ⅳ-3-10]은 점 P의 위치벡터를 구하고 벡터 $\overrightarrow{PH}$의 크기가 3임을 이용하여 점 P의 정확한 위치를 구하는 문항으로 관련된 벡터의 개념을 파악하고 적용할 수 있는지 평가하고 있기 때문에 이해 문항에 해당한다.

두 벡터 $\vec{a} = i + 2j + 3k$, $\vec{b} = 2i + 5k$가 있다.
벡터 $c_t = t\vec{a} + (1-t)\vec{b}$가 최솟값을 갖게 하는 매개변수 $t\,(-2 \le t \le 2)$의 값은?

[그림 Ⅳ-3-11] 핀란드 Ylioppilastutkinto 심화과정 이해 문항(2017년 봄 시행)

[그림 Ⅳ-3-11]의 문항은 벡터 $\vec{c_t}$와 주어진 두 벡터 $\vec{a}, \vec{b}$ 와의 관계를 파악하고 벡터의 성질을 적용하여 매개변수 t의 값을 구하는 문항으로 이해 능력을 평가하고 있다.

$\triangle ABC$에서 $\overline{AD}$는 $\overline{BC}$의 중선이고, 점 E는 $\overline{AD}$의 중점이다. 이때, $\overrightarrow{EB}$는?

a. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
b. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$
c. $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$
d. $\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

[그림 Ⅳ-3-12] 중국 高考의 전국권 문·이과 공통 이해 문항(2018년 시행)

[그림 Ⅳ-3-12]는 $\triangle ABC$에서 각 점과 선분의 위치에 따른 관계를 이해하고 벡터 $\overrightarrow{EB}$를 다른 벡터로 표현할 수 있는지 확인하는 문항으로 주어진 수학적 표현에 벡터 개념을 적용하여 가능한 다른 표현을 찾을 수 있는지 평가하고 있기 때문에 이해 문항에 해당한다고 볼 수 있다.

$\triangle ABC$의 꼭지점은 중심이 O인 단위원위에 있다.
$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\sqrt{3}\,\overrightarrow{OC}=\vec{0}$일 때, 각 BAC의 크기는?
(1) 30° (2) 45° (3) 60° (4) 75° (5) 90°

[그림 Ⅳ-3-13] 대만 학과능력측정시험 이해 문항(2018년 시행)

[그림 Ⅳ-3-13]은 $\angle BAC$를 구하기 위해 벡터의 연산 및 단위원의 성질을 파악하고 관련 내용을 적용할 수 있는지 평가하는 문항으로 이해 문항으로 볼 수 있다.

위에 제시된 행렬과 벡터 영역에서 이해 능력을 평가하는 문항들은 문항 유형에 관계없이 대학 입학시험에 다수 출제되고 있었다. 이와 같은 문항들은 행렬과 벡터 영역에서 수학의 기본 개념을 이해한 후 문제 상황에 맞게 적용할 수 있는지 평가함으로써 계산 능력보다는 좀 더 상위의 수학적 사고력을 측정하고 있다.

3.1.3. 추론 능력

추론 능력은 수능 수학과 행동 영역인 <표 Ⅱ-6>에서 제시된 바와 같이 귀납이나 유추를 통해 문제의 핵심 원리를 이끌어 내거나 문제에서 주어진 조건을 이용하여 추측하거나 증명할 수 있는지 확인함으로써 평가할 수 있는 능력이다.

행렬 영역에서 추론 능력을 평가하고 있는 대표적인 문항은 프랑스의 S, 호주의 FtM1에서 확인할 수 있으며, [그림 Ⅳ-3-14], [그림 Ⅳ-3-15]와 같다.

미지수 x, y가 자연수인 방정식 $E: x^2-8y^2=1$이 있다.

1. (행렬 영역과 관련이 없어 생략)

2. 행렬 $A=\begin{pmatrix}3 & 8\\ 1 & 3\end{pmatrix}$에 대하여, $\{x_n\}$, $\{y_n\}$은 $x_0=1, y_0=0$이고, 임의의 자연수 n에 대하여 $\begin{pmatrix}x_{n+1}\\ y_{n+1}\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}x_n\\ y_n\end{pmatrix}$을 만족하는 수열이라고 하자.

a. 모든 자연수 n에 대한 순서쌍 (x_n, y_n)이 방정식 E의 해 임을 수학적 귀납법으로 증명하시오.

[그림 Ⅳ-3-14] 프랑스 Baccalauréat S의 추론 문항(2018년 시행)

[그림 Ⅳ-3-14]는 행렬의 개념을 평가하는 것이 주된 초점은 아니지만 행렬 표현에 대한 이해를 바탕으로 문제를 해결할 수 있기 때문에 대표 문항으로 보았다. 구체적으로 이차정사각행렬의 연산으로 표현되는 점화식에서 일반항이 주어진 방정식의 해가 됨을 수학적 귀납법으로 증명하는 문항으로 추론 능력을 평가하는 것으로 볼 수 있다.

치환 행렬 P에 의해 행렬 $\begin{pmatrix}F\\ E\\ A\\ R\\ S\end{pmatrix}$는 행렬 $\begin{pmatrix}S\\ A\\ F\\ E\\ R\end{pmatrix}$로 바꿀 수 있다.

행렬 P는?

a. $\begin{pmatrix}0&0&1&0&1\\0&0&1&1&0\\1&1&0&0&0\\0&1&0&0&1\\1&0&0&1&0\end{pmatrix}$

b. $\begin{pmatrix}0&0&0&1&0\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&0&1\\1&0&0&0&0\end{pmatrix}$

c. $\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$

d. $\begin{pmatrix}1&0&0&0&1\\0&1&1&0&0\\1&0&1&0&0\\0&1&0&1&0\\0&0&0&1&1\end{pmatrix}$

e. $\begin{pmatrix}0&0&0&0&1\\0&0&1&0&0\\0&1&0&0&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&1&0\end{pmatrix}$

[그림 Ⅳ-3-15] 호주 VCE의 FtM1 추론 문항(2017년 시행)

[그림 Ⅳ-3-15]는 5×1행렬의 성분의 위치를 바뀌게 하는 5×5 치환 행렬의 모습을 유추하는 문항으로 추론 능력을 평가하는 것으로 볼 수 있다.

다음은 벡터 영역에서 추론 능력을 평가하는 문항이다. 벡터 영역에서 추론 능력을 평가하고 있는 대표적인 문항은 프랑스의 S, 대만의 학과능력측정시험에서 확인할 수 있으며, 각각 [그림 Ⅳ-3-16], [그림 Ⅳ-3-17]과 같다.

정규직교 공간에 기준이 되는 점 $O(i, j, k)$에 대하여, 다음과 같은 6개의 점이 존재한다.
$A(1,2,3)$, $B(3,0,1)$, $C(-1,0,1)$, $D(2,1,-1)$, $E(-1,-2,3)$, $F(-2,-3,4)$
각 명제에 대하여 참인지 거짓인지 판단하시오.

명제 1. 세 점 A, B, C가 한 직선 위에 있다.
명제 2. $\vec{n}(0,1,-1)$는 평면 ABC의 법선벡터이다.
명제 3. 선분 EF와 평면 ABC가 교차하는 점은 선분 BC의 중점이다.
명제 4. 선분 AB와 CD는 교차한다.

[그림 Ⅳ-3-16] 프랑스 Baccalauréat의 S 추론 문항(2016년 시행)

[그림 Ⅳ-3-16]은 좌표공간위에 있는 6개의 점으로 설명되는 직선, 법선벡터, 선분에 관련된 4개의 명제의 참·거짓을 판별하는 문항으로 추론 능력을 평가하고 있다.

좌표평면위에 있는 $\triangle ABC$에 대하여, $\overrightarrow{AB}=(-4,3)$, $\overrightarrow{AC}=\left(\frac{2}{5},\frac{4}{5}\right)$이다.
다음 중 옳은 것을 고르시오.
(1) $\overline{BC}=5$
(2) $\triangle ABC$는 직각삼각형이다.
(3) $\triangle ABC$의 넓이는 $\frac{11}{5}$이다.
(4) $\sin B > \sin C$
(5) $\cos A > \cos B$

[그림 Ⅳ-3-17] 대만 학과능력측정시험 추론 문항(2018년 시행)

[그림 Ⅳ-3-17]은 좌표평면 위의 $\triangle ABC$에서 주어진 두 벡터 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$를 이용하여 제시된 보기 5가지 중 옳은 것을 모두 찾는 다답형 문항으로 관련된 수학적 개념, 원리를 이용하여 주어진 명제의 참·거짓을 판별하는 능력을 평가하는 것으로 추론 문항으로 볼 수 있다.

위에 제시한 추론 능력을 평가하는 문항들은 행렬과 벡터 영역의 구분과 관계없이 많지 않았으며, 프랑스, 대만, 호주의 대학 입학시험에서만 확인할 수 있었다. 프랑스의 대학 입학시험에서 행렬과 벡터 영역으로 제한하여 문항을 살펴보면 증명과정을 서술하는 문항과 참·거짓을 판단하는 문항을 확인할 수 있다. 호주의 대학 입학시험에서는 추론 능력을 평가하는 문항이 많은 편은 아니지만 선다형임에도 유추를 해야 하거나 선택지의 참·거짓을 판단해야 하는 내용으로 평가하고 있었다. 그리고 대만의 대학 입학시험에서는 다답형 문항을 포함하고 있기 때문에 모든 선택지의 참·거짓을 정확하게 판별해야 하는 능력이 요구되며 이에 추론 문항은 반드시 존재할 수밖에 없다. 이러한 추론 문항은 관련된 수학적 개념·원리·법칙을 정확하게 알고 적용해야 참·거짓을 판별할 수 있거나 증명할 수 있기 때문에 다소 난이도가 높은 편이다.

3.1.4. 문제해결 능력

문제해결 능력은 수능 수학과 행동 영역인 <표 Ⅱ-6>에서 제시된 바와 같이 두 가지 이상의 수학적 개념 또는 두 단계 이상의 사고 과정을 거쳐 문제를 해결하거나 실생활 맥락이나 타 교과의 소재의 맥락에서 수학적 개념·원리·법칙을 적용하여 문제를 해결하는 것을 말한다.

행렬 영역에서 문제해결 능력을 평가하고 있는 대표적인 문항은 영국의 FP3, 대만 지정과목고시의 수학乙, 호주의 FtM2에서 확인할 수 있으며, [그림 Ⅳ-3-18], [그림 Ⅳ-3-19], [그림 Ⅳ-3-20]과 같다.

행렬 M에 대하여 다음 물음에 답하시오.

$$M=\begin{pmatrix} 1 & k & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix},\ k\in R,\ k\neq\frac{1}{2}$$

(a) $\det M$이 $1-2k$임을 보이시오.

(b) 역행렬 M^{-1}을 k에 관하여 구하시오.

직선 l_1은 행렬 $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 1 & -1 \end{pmatrix}$로 표현되는 변환에 의해 직선 $l_2 : \frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{2}=\frac{z-3}{1}$로 사상된다.

(c) 직선 l_1의 방정식을 구하시오.

[그림 Ⅳ-3-18] 영국 GCE A-level의 FP3 문제해결 문항(2017년 시행)

[그림 Ⅳ-3-18]은 3개의 하위 문항을 해결하기 위해 3차정사각행렬의 행렬식, 역행렬, 기하학적 변환의 역과 관련된 수학적 개념과 원리를 알고 하위 문항간의 관련성을 종합적으로 판단하여 해결하는 문항으로 문제해결 능력을 평가하고 있는 것으로 볼 수 있다.

어느 마을에서 장안(張安)과 이평(李平)은 마을 대표 선거에 나섰다. 투표 결과 장안은 55%의 표를 얻었고, 이평은 45%의 표를 얻어 장안이 선택되었다. 선거관리위원회는 다음 마을 대표를 뽑을 때 후보가 여전히 장안과 이평이고, 유효한 표를 가진 유권자도 여전히 같다고 할 때, 장안을 지지하던 유권자 중 25%가 이평을 지지할 것이라고 예측한다. 그리고 이평을 지지하던 유권자 중 10%가 장안을 지지할 것이라고 예측한다. 위의 현상을 설명하는 전이행렬을 A라고 할 때, $\det A$의 절댓값은?

[그림 Ⅳ-3-19] 대만 지정과목고시 수학乙 문제해결 문항(2018년 시행)

[그림 Ⅳ-3-19]는 행렬을 이용하여 주어진 실생활 맥락의 상황을 간단하게 이차정사각행렬로 표현하고, 구한 행렬의 행렬식을 구하는 능력을 평가하고 있기 때문에 문제해결 문항에 해당한다.

어느 여행사는 고객들 일부의 여행 방법 선택에 대해 연구하고 있다. 고객들은 매년 비행기를 이용할지(A), 차를 탈지(L), 배를 탈지(S), 가지 않을 것인지(N) 결정한다. 아래 행렬 T는 매년 고객들의 여행 방법 선택이 변할 비율을 보여준다.

$$\begin{array}{cc} & \text{올해} \\ & \begin{array}{cccc} A & L & S & N \end{array} \\ T = & \begin{pmatrix} 0.65 & 0.25 & 0.25 & 0.50 \\ 0.15 & 0.60 & 0.20 & 0.15 \\ 0.05 & 0.10 & 0.25 & 0.20 \\ 0.15 & 0.05 & 0.30 & 0.15 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ L \\ S \\ N \end{array} \text{ 내년} \end{array}$$

S_n은 2014년 이후 n번째 해의 여행 방법을 선택한 고객의 수를 보여주는 행렬이다.

행렬 S_0는 2014년에 여행 방법을 선택한 고객들의 수를 보여준다.

$$S_0 = \begin{pmatrix} 520 \\ 320 \\ 80 \\ 80 \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ L \\ S \\ N \end{array}$$

행렬 S_1은 2015년에 여행 방법을 선택한 고객들의 수를 보여준다.

$$S_1 = TS_0 = \begin{pmatrix} 478 \\ d \\ e \\ f \end{pmatrix} \begin{array}{c} A \\ L \\ S \\ N \end{array}$$

a. 행렬 S_1의 미지수 d, e, f를 구하시오.

b. 2015년에 고객 478명이 비행기를 이용했음을 보여주는 계산식을 쓰시오.

c. 2014년에 배를 이용한 고객들이 2015년에도 배를 이용했을 것이라 예측되는 고객의 수는 몇 명인가?

d. 2015년에 비행기를 이용한 고객들 중에 2014년에도 비행기를 이용했을 비율은? 답을 가장 가까운 정수로 반올림하여 구하시오.

[그림 Ⅳ-3-20] 호주 VCE FtM2 문제해결 문항(2016년 시행)

[그림 Ⅳ-3-20]은 여행이라는 실생활 맥락의 상황을 간단하게 행렬로 표현한 것을 이해하고, 이를 이용하여 하위 문항을 차례로 해결하는 문항으로 문제해결 능력을 평가하고 있다.

다음은 벡터 영역에서 문제해결 능력을 평가하는 문항이다. 벡터 영역에서 문제해결 능력을 평가하고 있는 대표적인 문항은 영국의 C4, 독일의 B부분, 핀란드의 pitkä(심화과정), 싱가포르의 H2, 대만 지정과목고시의 수학乙, 호주의 SM2에서 확인할 수 있으며, 각각 [그림 Ⅳ-3-21], [그

림 Ⅳ-3-22], [그림 Ⅳ-3-23], [그림 Ⅳ-3-24], [그림 Ⅳ-3-25], [그림 Ⅳ-3-26]과 같다.

원점 O를 기준으로 직선 l_1의 방정식은 다음과 같다.

$$r=\begin{pmatrix}8\\1\\-3\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}-5\\4\\3\end{pmatrix}$$ (단, μ는 스칼라 매개변수이다.)

점 A는 $\mu=1$일 때, 직선 l_1위에 있다.

(a) 점 A의 좌표를 구하시오.

점 P의 위치벡터가 $\begin{pmatrix}1\\5\\2\end{pmatrix}$이다.

직선 l_2는 점 P를 지나고, 직선 l_1과 평행이다.

(b) 직선 l_2의 벡터 방정식을 구하시오.

(c) AP의 거리를 구하시오. (단, $k\sqrt{2}$ 형태로 쓰시오. k는 상수이다.)

선분 AP와 직선 l_2사이의 예각을 θ라고 하자.

(d) $\cos\theta$의 값을 구하시오.

점 E는 직선 l_2위에 있다. $AP=PE$일 때,

(e) 삼각형 APE의 넓이를 구하시오.

(f) 위 조건을 만족하는 점 E의 좌표 두 개를 구하시오.

[그림 Ⅳ-3-21] 영국 GCE A-level의 C4 문제해결 문항(2016년 시행)

[그림 Ⅳ-3-21]은 좌표공간에서 직선의 방정식, 위치벡터, 벡터의 크기, 벡터의 내적을 이용한 두 직선 사이의 각을 이용하여 6개의 하위 문항을 해결해야 한다. 이는 여러 가지 수학적 개념·원리·법칙을 종합적으로 활용하는 문제해결 능력을 평가하는 문항으로 볼 수 있다.

수평면에 서 있는 닫힌 텐트는 사각형 기둥이 있는 피라미드 모양이다. 텐트 끝에서 시작하는 모서리 4개는 길이가 길다. 텐트의 높이는 $6m$이고, 바닥 한 모서리의 길이는 $5m$이다. 텐트는 직교 좌표계에서 점 $S(2.5, 2.5, 6)$인 피라미드 $ABCDS$로 모델링된다(그림 1 참조). 점 A는 좌표 원점에 있고 점 C의 좌표는 $(5, 5, 0)$이다. 점 B는 x축 위에, 점 D는 y축 위에 있으며, 삼각형 CDS는 평면 $E: 12y + 5z = 60$위에 있다. 직교 좌표계의 길이 단위는 $1m$이다.

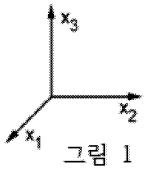


그림 1

a. 점 B와 점 D의 좌표를 구하고, 직교 좌표계에서 피라미드 $ABCDS$를 그리시오.
b. 삼각형 DAS가 있는 평면 F의 방정식을 표준형으로 구하시오.
c. 인접하는 텐트 두 벽은 텐트 안쪽에서 둔각으로 만난다. 이 각의 크기를 결정하시오.
d. 텐트에서 전등은 4개의 벽 각각에서 $50cm$의 거리를 두고 매달려 있다. 모델에서 전등의 위치를 나타내는 점의 좌표를 구하시오.
e. 삼각형 CDS의 대칭축인 직선 g의 방정식을 구하시오.
f. 모델에서 삼각형 CDS로 표현된 텐트 벽의 일부를 세로 $1.80m$의 수직 막대 두 개(그림 2 참조)를 사용하여 수평 캐노피로 늘릴 수 있다. 결과적으로 텐트 벽에서 너비가 $1.40m$인 열린 곳이 모델에서 g에 대칭인 직사각형으로 표시된다. 캐노피의 면적을 계산하시오.

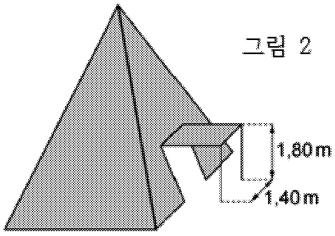


그림 2

[그림 Ⅳ-3-22] 독일 Abitur의 B부분 문제해결 문항(2017년 시행)

[그림 Ⅳ-3-22]는 좌표공간 상의 주어진 점을 이용하여 직선의 방정식, 내적과 cosine의 관계, 벡터의 연산 등을 이용해야 하는 문항이다. 이는 두 가지 이상의 수학적 개념 및 원리의 관련성을 이해하고, 실생활 맥락의 상황에서 수학적 개념·원리·법칙을 적절하게 사용하는 종합적인 사고력을 평가하고 있기 때문에 문제해결 문항에 해당한다고 볼 수 있다.

Annukka와 Fareed는 계산기 없이 다음 두 벡터의 내적 값을 계산하려고 한다.

$$\vec{u} = 7\cos\frac{\pi}{5}i + 7\sin\frac{\pi}{5}j,\ \vec{v} = 3\cos\frac{8\pi}{15}i + 3\sin\frac{8\pi}{15}j$$

두 사람의 풀이 방법은 다음과 같다.

Annukka의 풀이	Fareed의 풀이
$\vec{u}\cdot\vec{v} = 7\left(\cos\frac{\pi}{5}i + \sin\frac{\pi}{5}j\right)\cdot 3\left(\cos\frac{8\pi}{15}i + \sin\frac{8\pi}{15}j\right)$ $= 21\left(\cos\frac{\pi}{5}\cos\frac{8\pi}{15} + \sin\frac{\pi}{5}\sin\frac{8\pi}{15}\right)$ $= 21\cos\left(\frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5}\right)$ $= 21\cos\frac{\pi}{3} = \frac{21}{2}$	벡터 크기: $\lvert\vec{u}\rvert = 7,\ \lvert\vec{v}\rvert = 3$ 내적 공식: $\vec{u}\cdot\vec{v} = 7\times 3\cos(\vec{u},\vec{v})$ 두 벡터 사이의 각: $\frac{8\pi}{15} - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{3}$ 그러므로 $\vec{u}\cdot\vec{v} = 21\cos\frac{\pi}{3} = \frac{21}{2}$

a. Annukka와 Fareed는 내적 값을 계산하기 위해 각각 다른 방법을 사용했다. 임의의 두 벡터 $\vec{a} = a_x i + a_y j,\ \vec{b} = b_x i + b_y j$를 이용하여 각각의 방법을 표현하시오.

b. Fareed는 두 벡터의 크기와 두 벡터 사이의 각을 계산했다. Fareed가 두 벡터 사이의 각을 어떻게 추론했는지 그림으로 표현하시오.

c. Annukka의 답은 어떻게 나온 것인지 풀이에서 줄별로 간략하게 설명하시오.

[그림 Ⅳ-3-23] 핀란드 Ylioppilastutkinto 심화과정 문제해결 문항(2018년 봄 시행)

[그림 Ⅳ-3-23]은 내적 값을 계산하는 다른 두 가지 방법을 보여주고 각각의 풀이 과정을 해석하도록 하는 문항이다. 이는 수학적 개념에 따른 다른 원리와 법칙의 관련성을 파악하고 종합적으로 사고할 수 있는지 평가하고 있기 때문에 문제해결 문항으로 볼 수 있다.

평면 p의 방정식은 $r = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} a \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$이고,

직선 l의 방정식은 $r = \begin{pmatrix} a-1 \\ a \\ a+1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$이다. (단, a는 상수이고, λ, μ, t는 매개변수이다.)

(ⅰ) $a = 0$일 때,

(a) 직선 l이 평면 p에 수직임을 보이고, 직선 l과 평면 p가 교차하는 점에서 λ, μ, t의 값을 구하시오.

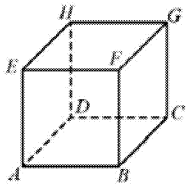
(b) 평면 p에서 수직인 거리가 12인 평면들의 방정식을 구하시오.

(ⅱ) 직선 l과 평면 p가 특정한 한 점에서 만나지 않을 때, a의 값을 구하시오.

[그림 Ⅳ-3-24] 싱가포르 H2의 문제해결 문항(2016년 시행)

[그림 Ⅳ-3-24]는 직선과 평면의 방정식 표현, 직선과 평면의 위치관계, 공선성, 외적과 내적을 이용하여 해결해야 하는 문항이다. 이는 두 가지 이상의 수학적 개념을 두 단계 이상의 사고과정을 거쳐야 하므로 문제해결 능력을 평가하고 있다고 볼 수 있다.

좌표공간에 그림과 같은 $ABCDEFGH$가 있다.
아래 문항을 해결하시오.



(1) 점 A와 평면 BDE사이의 거리가 대각선 AG 길이의 $\frac{1}{3}$임을 보이시오.
(2) $\overrightarrow{AG}$가 평면 BDE에 수직임을 보이시오.
(3) 평면 BDE의 방정식이 $2x+2y-z=-7$이고, 점 A의 좌표가 $(2,2,6)$일 때, 점 A에서 평면 BDE까지의 거리를 구하시오.
(4) (3)에 이어서, G의 좌표를 구하시오.

[그림 Ⅳ-3-25] 대만 지정과목고시 수학甲 문제해결 문항(2018년 시행)

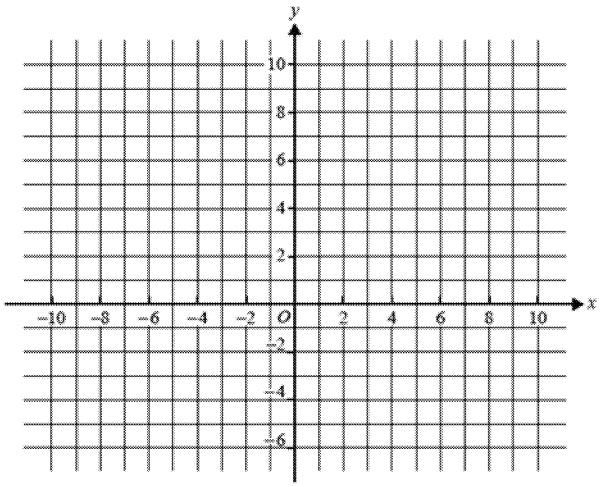
[그림 Ⅳ-3-25]는 벡터의 외적, 법선벡터, 점과 평면사이의 거리, 평면의 방정식 등과 같은 여러 수학적 개념을 파악하고, 두 단계 이상의 사고과정을 거쳐 문제를 해결하는 능력을 평가하고 있기 때문에 문제해결 문항으로 볼 수 있다.

두 배 A, B가 원점 O에서 위치한 등대에서 관칠되었다. 원점 O를 기준으로, 각 배의 위치벡터는 정오 이후 t시간일 때 다음과 같고, 변위는 km단위로 측정된다.

$$r_A = 5(1-t)i + 3(1+t)j,\ r_B = 4(t-2)i + (5t-2)j$$

a. 두 배가 충돌하지 않음을 명확한 근거를 들어 설명하시오.

b. 아래 좌표평면위에 각 배의 경로를 그리고 표시하시오. 두 배의 움직임의 방향을 화살표로 보이시오.



c. 두 배의 경로사이의 둔각의 크기를 소수점 이하 첫째자리까지 구하시오.

d. ⅰ. 두 배가 가장 가까울 때, t값을 소수점 이하 셋째자리까지 구하시오.

ⅱ. 두 배 사이의 최소거리를 소수점 이하 둘째자리까지 구하시오(단위는 km이다.).

[그림 Ⅳ-3-26] 호주 VCE의 SM2 문제해결 문항(2016년 시행)

[그림 Ⅳ-3-26]은 시간 t에 관한 함수로 표현된 두 배의 위치 벡터에 대하여 두 배의 경로, 두 배가 충돌하지 않음, 두 배가 가장 가까울 때의 상황에서 시간과 거리를 구하는 문항이다. 이는 실생활 맥락에서 벡터의 개념·원리·법칙을 적용하여 문제를 해결하는 능력을 평가하고 있기 때문에 문제해결 문항으로 볼 수 있다.

위에 제시한 것과 같이 문제해결 능력을 평가하는 문항들은 대부분의 외국 대학 입학시험에서 행렬과 벡터 영역의 구분 없이 다수 확인할 수 있었다. 특히, 영국의 C4, FP1, FP3, M1, 싱가포르의 H2는 여러 하위 문항을 포함한 서술형 문항을 주로 출제하고 있기 때문에 해결 과정에서

관련된 여러 가지의 수학적 개념을 사용하거나 두 단계 이상의 사고 과정을 거쳐야 하므로 주로 문제해결 능력을 평가한다. 또한, 독일의 B부분, 호주의 FtM2에서 출제하는 대부분의 문항은 실생활 맥락 또는 타 교과의 소재를 사용하기 때문에 해결 과정에서 맥락에 적용되는 수학적 개념·원리·법칙을 종합적으로 활용해야 하므로 문제해결 능력을 평가한다.

마지막으로 분석 대상 국가의 대학 입학시험의 행렬과 벡터 문항에서 요구하는 수학적 사고력을 분석하여 정리하면 각각 <표 Ⅳ-9>, <표 Ⅳ-10>과 같다.

<표 Ⅳ-9>는 분석 대상 국가의 대학 입학시험별 행렬 문항 46개를 행동 영역을 기준으로 분류한 것이다. 가장 두드러지는 특징은 전체 문항 중 70%가 넘는 다수의 문항이 이해 능력과 문제해결 능력을 평가하고 있다는 것이다. 이는 행렬 문항을 통해 계산 능력만을 평가하는 경우는 드물며, 수학적 개념을 어떻게 적용하고 표현하는지에 초점을 둔 이해 능력을 평가하거나 문제 상황에서 행렬의 수학적 개념·원리·법칙을 종합적으로 사용하여 실생활 맥락의 문제를 해결하는 능력을 평가하는 데 초점이 있음을 보여준다. 특히 문제해결 능력을 평가하는 문항이 다수 분석된 이유는 영국의 대학 입학시험이 대체로 하위 문항을 포함한 서술형 문항으로 구성되어 있기 때문이며, 호주의 대학 입학시험이 대체로 실생활 맥락에서 해결하는 문항을 출제하기 때문이다.

두 번째 특징은 호주 대학 입학시험 문항의 행동 영역에서 확인할 수 있다. 호주는 각 시험의 성격과 출제된 문항의 유형에 따라 문항의 행동 영역 분포에도 특징이 있다. FtM1은 다른 국가의 시험과 달리 행렬을 하나의 단독적인 영역으로 두고 다수의 문항을 출제하고 있으며, 선다형 문항과 서술형 문항으로 문제해결 능력만이 아닌 계산 능력이나 추론 능력까지도 평가할 수 있는 문항을 출제하고 있다. FtM2도 행렬이 단독적인 영역으로 구분되어 출제되고 있으나 실생활 맥락의 문제 상황에서 여러 하위 문항을 통해 행렬의 개념을 다루기 때문에 문제해결 능력을 평가하는데 초점이 있다.

<표 Ⅳ-9> 국가별 대학 입학시험 행렬 문항의 행동 영역 분석

국가	시험명	시험과목	행동 영역				합계
			계산	이해	추론	문제해결	
영국	GCE A-level (Edexcel)	FP1	1	1	0	2	4
		FP3	0	1	0	2	3
프랑스	Baccalauréat	ES	0	1	0	1	2
		S	0	0	2	0	2
대만	學科能力測驗	數學考科	1	2	0	0	3
	指定科目考試	數學甲	0	2	1	0	3
		數學乙	0	1	0	2	3
호주	VCE	FtM1	2	6	2	6	16
		FtM2	0	0	0	6	6
미국	SAT subject test	level 2	1	2	1	0	4
합계			5 (10.9%)	16 (34.8%)	6 (13.0%)	19 (41.3%)	46 (100%)

<표 Ⅳ-10>은 분석 대상 국가의 대학 입학시험별 벡터 문항 93개를 행동 영역을 기준으로 분류한 것이다. <표 Ⅳ-10>에서 벡터 영역의 계산 문항은 행렬 영역에 비해 많은 비중을 차지하고 있는 것으로 보이나 선다형 문항으로만 출제되는 미국의 대학 입학시험과 선다형 문항 비중이 높은 호주의 대학 입학시험을 제외하면 약 10%의 비율로 행렬 문항의 행동 영역 분포와 큰 차이를 보이지 않는다.

<표 Ⅳ-10>에서 드러나는 첫 번째 특징은 행렬 문항과 마찬가지로 전체 벡터 문항 중 약 70%정도가 이해 능력과 문제해결 능력을 평가하고 있다는 것이다. 이는 벡터 문항을 통한 평가의 초점이 벡터의 수학적 개념을 어떻게 적용하고 표현할 수 있는지에 초점을 둔 이해 능력을 평가하거나 문제 상황에서 벡터의 수학적 개념·원리·법칙을 종합적으로 사용할 수 있는지 확인하는데 있음을 보여준다. 구체적으로 영국의 대학 입학시험은 하위 문항을 포함한 서술형 문항으로 구성되어 있기 때문에 두 단계 이상의 사고과정 또는 두 가지 이상의 수학적 개념을 묻고 있어 문제해결 능력을 평가하는 문항이 많이 출제되는 경향을 보인다. 또한 독일, 싱가포르, 호주의 대학입학시험은 실생활 맥락 및 타 교과 소재의 상황에서 수학적 개념·원리·법칙을 적용하는 서술형 문항을 출제하기 때문에 문제해결 능력을 평가하는 문항이 다수 출제되고 있다.

두 번째 특징은 대학 입학시험의 형식과 문항의 행동 영역 분포 사이에 관련성을 확인할 수 있다는 것이다. 첫째, 문항의 유형과 문항의 행동 영역 사이에 관련성이 있다. 선다형 문항을 출제하는 중국, 대만, 호주의 SM2, 미국의 대학 입학시험에서만 계산 능력을 평가하는 문항이 분포되어 있으며, 주어진 보기의 참·거짓을 판별해야 하는 다답형 문항을 출제하는 대만의 대학 입학시험에서만 다수의 추론 문항이 분포하고 있기 때문에 문항의 유형과 행동 영역 사이의 관련성을 연결해서 생각해 볼 수 있다.

<표 Ⅳ-10> 국가별 대학 입학시험 벡터 문항의 행동 영역 분석

국가	시험명	시험과목	행동 영역				합계
			계산	이해	추론	문제해결	
영국	GCE A-level (Edexcel)	C4	0	0	0	2	2
		FP3	0	0	0	2	2
		M1	0	1	0	3	4
프랑스	Baccalauréat	S	0	1	1	1	3
독일	Abitur	A부분	0	2	0	4	6
		B부분	0	0	0	4	4
핀란드	Ylioppilastutkinto	lyhyt(기본)	0	1	0	1	2
		pitkä(심화)	0	1	0	3	4
에스토니아	Riigieksamite	kitsas(기본)	0	3	0	0	3
		laia(심화)	0	1	0	2	3
중국	高考	문과	2	1	0	0	3
		이과	2	5	0	0	7
싱가포르	H2	Pure mathematics	0	0	0	4	4
대만	學科能力測驗	數學考科	1	6	3	0	10
	指定科目考試	數學甲	2	3	3	2	10
		數學乙	2	1	1	0	4
호주	VCE	SM1	0	3	0	2	5
		SM2	3	4	0	2	9
미국	SAT subject test	level 2	7	1	0	0	8
합계			19 (20.4%)	34 (36.6%)	8 (8.6%)	32 (34.4%)	93 (100%)

둘째, 공학용 계산기의 사용을 허용하지 않는 중국과 대만의 시험에서 계산 능력을 평가하는 문항이 확인된다는 것이다. 앞 절에서 살펴본 바와 같이 중국, 대만의 대학 입학시험은 공학용 계산기의 사용을 허용하지 않음으로써 계산 능력도 평가 목적의 일부임을 드러냈다. 중국과 대만의 시험 문항을 분석한 결과 선다형 문항뿐만 아니라 단답형 문항에서도 계산 능력을 평가하는 문항(예: [그림 Ⅳ-2-11], [그림 Ⅳ-3-1], [그림 Ⅳ-3-4])이 출제된다. 셋째, 공식집의 사용이 허용되는 시험에서 문제해결 능력을 평가하는 문항을 확인할 수 있었다. 그 예로 많은 벡터 공식이 제공되거나 허용되는 영국의 FP3, 독일의 B부분, 핀란드의 시험에서 문제해결 능력을 평가하는 문항(예: [그림 Ⅳ-1-11], [그림 Ⅳ-1-13], [그림 Ⅳ-3-22], [그림 Ⅳ-3-23])이 출제되고 있다.

3.2. 수능과 외국 대학 입학시험의 행동 영역 비교

수능과 외국 대학 입학시험에 출제된 행렬과 벡터 문항의 행동 영역을 비교한다. Ⅱ장에서 살펴본 바와 같이 행렬 영역은 09 개정 수학과 교육과정 이후 다루지 않기 때문에 07 개정 수학과 교육과정이 마지막으로 적용된 2016학년도 수능 수학 A, B형의 행렬 문항을 선택했다. 그리고 벡터 영역의 문항은 09 개정 수학과 교육과정이 적용되어 가장 최근에 시행한 2019학년도 수능 수학 가형에서 선택하였다.

2016학년도 수능 수학 A, B형의 행렬 문항을 먼저 살펴보자. 문과 학생들이 주로 선택하는 수능 수학 A형에서 행렬 문항은 3문항이 출제되었으며 [그림 Ⅳ-3-27], [그림 Ⅱ-2][20], [그림 Ⅳ-3-28]과 같다.

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A-B$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[그림 Ⅳ-3-27] 2016학년도 수능 수학 A형 행렬 문항1

[그림 Ⅳ-3-27]은 두 이차정사각행렬의 차의 성분을 구하는 것으로 행렬 연산의 기본 성질을 적용하여 식을 간단히 하는 것만으로도 해결할 수 있는 문항으로 계산 능력을 평가하고 있다.

두 번째 행렬 문항은 수학 A, B형의 공통문항인 [그림 Ⅱ-2]로 주어진 두 식을 이용하여 주어진 보기의 참·거짓을 판단하는 것으로 추론 능력을 평가하는 문항으로 볼 수 있다.

20) Ⅱ장에서 행렬이 교육과정에서 삭제된 이유를 분석할 때 제시되었던 행렬의 합답형 문항이다.

24. x, y에 대한 연립일차방정식

$$\begin{pmatrix} 1 & a-2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=3\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

가 $x=0$, $y=0$ 이외의 해를 갖도록 하는 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

[그림 Ⅳ-3-28] 2016학년도 수능 수학 A형 행렬 문항2

세 번째 행렬 문항인 [그림 Ⅳ-3-28]은 연립일차방정식의 해가 유일하지 않으려면 변형한 행렬의 행렬식이 0임을 파악하고 공식을 이용하여 해결하는 문항이다. 이는 당시 교과서에 흔히 제시되는 예제로써 수학적 개념을 파악하고, 관련 개념의 성질을 적용할 수 있는지 확인하는 문항으로 이해 능력을 평가하고 있다.

같은 해에 이과 학생들이 주로 선택하는 수능 수학 B형의 행렬 문항도 A형과 마찬가지로 3문항이었으며, [그림 Ⅳ-3-29], [그림 Ⅱ-1][21], [그림 Ⅳ-3-30]과 같다.

1. 두 행렬 $A=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$에 대하여 행렬 $A+B$의 모든 성분의 합이 9일 때, a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[그림 Ⅳ-3-29] 2016학년도 수능 수학 B형 행렬 문항2

[그림 Ⅳ-3-29]는 두 이차정사각행렬의 합의 성질을 이용하여 미지수를 구하는 것으로 행렬 연산의 기본 성질을 적용하여 식을 간단히 정리함으로써 문제를 해결할 수 있기 때문에 계산 능력을 평가하는 문항으로 볼 수 있다. 이는 수능 수학 A형의 1번으로 출제된 [그림 Ⅳ-3-27]문항과 매우 유사하다.

21) Ⅱ장에서 행렬이 교육과정에서 삭제된 이유를 분석할 때 제시되었던 문항으로 행렬 영역 문항의 평가의 적절성에 대해 근거로 든 문항이다.

수학 B형의 두 번째 행렬 문항은 [그림 Ⅱ-1]이며, 행렬로 표현된 일차 변환을 적용하는 것과 직선의 기울기 공식을 알면 해결할 수 있다. 이는 관련된 수학 개념의 기본적인 계산법을 적용하는 문항으로 계산 능력을 평가하는 것이다. 그리고 세 번째 문항은 수능 A, B형에 공통적으로 출제된 것으로 앞에서 추론 능력을 평가하는 문항으로 분석하였다.

다음은 수능에서 출제된 벡터 문항을 분석하기 위해 2019학년도 수능 수학 가형을 살펴보자. 수능 수학 가형에서 벡터 개념을 평가하는 문항은 2문항으로 [그림 Ⅳ-3-30], [그림 Ⅳ-3-31]과 같다.

1. 두 벡터 $\vec{a}=(1,\ -2)$, $\vec{b}=(-1,\ 4)$에 대하여 벡터 $\vec{a}+2\vec{b}$의 모든 성분의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

[그림 Ⅳ-3-30] 2019학년도 수능 수학 가형 벡터 문항1

[그림 Ⅳ-3-30]은 순서쌍으로 표현되는 두 벡터의 합의 성분을 구하는 것으로 벡터 연산의 기본 성질을 적용하여 간단히 할 수 있는지 확인하고 있기 때문에 계산 능력을 평가하는 것이다.

29. 좌표평면에서 넓이가 9인 삼각형 ABC의 세 변 AB, BC, CA 위를 움직이는 점을 각각 P, Q, R라 할 때,

$$\overrightarrow{AX}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AR})+\frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$$

를 만족시키는 점 X가 나타내는 영역의 넓이가 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

[그림 Ⅳ-3-31] 2019학년도 수능 수학 가형 벡터 문항2

수학 B형의 두 번째 벡터 문항인 [그림 Ⅳ-3-31]은 평면벡터의 표현과 기하학적인 의미, 이에 대한 해석을 묻고 있다. 이는 두 가지 이상의 수학적 개념과 원리를 파악하고 이를 종합적으로 해결해야 하는 문항으로 문제해결 능력을 평가하고 있다고 볼 수 있다.

분석한 내용을 토대로 수능 수학의 행렬과 벡터 문항의 행동 영역을 정리하면 <표 Ⅳ-11>과 같다.

<표 Ⅳ-11> 수능 수학의 행렬과 벡터 문항의 행동 영역 분석

내용 영역	시기	시험명	행동 영역				합계
			계산	이해	추론	문제 해결	
행렬	2016 학년도	A형	1	1	1	0	3
		B형	2	0	1	0	3
벡터	2019 학년도	가형	1	0	0	1	2
합계			4 (50.0%)	1 (12.5%)	2 (25.0%)	1 (12.5%)	8 (100%)

<표 Ⅳ-11>과 수능 출제 문항의 분석을 토대로 수능과 외국 대학 입학 시험과의 가장 큰 차이점은 문항의 행동 영역의 분포이다. 외국 대학입학시험은 이해 능력 또는 문제해결 능력을 평가하는 문항이 다수 출제되고 있으나 수능은 다수의 행렬과 벡터 문항이 계산 능력을 평가하고 있다. 물론 문제해결 능력을 평가하는 벡터 문항이 존재하기는 하지만 외국의 대학입학시험과 비교해서 학생의 수학적 사고과정을 평가하고 있다고 보기 어렵다. 이에 학생의 사고과정을 파악할 수 있는 문제해결 능력 평가 방법에 대한 고려와 함께 수능 문항 유형의 변화에 대한 검토도 이루어져야 한다.

V. 결론

1. 요약

본 연구에서는 미래 사회 준비도가 높은 10개국(영국, 프랑스, 독일, 핀란드, 에스토니아, 싱가포르, 중국, 대만, 호주, 미국)을 선택하여 각 국가의 대학 입학시험을 행렬과 벡터 영역을 중심으로 대학 입학시험의 형식, 출제되는 문항의 내용요소, 문항의 행동 영역을 비교, 분석한다. 이를 기준으로 학생을 평가하는 대학 입학시험의 형식, 대학 입학시험 출제의 평가 범위로써 행렬과 벡터 영역의 내용요소, 대학 입학시험 행렬과 벡터 문항으로 평가하는 수학적 사고력을 확인한다. 이를 위한 연구문제는 다음과 같다.

1. 행렬과 벡터를 포함한 외국 대학 입학시험의 형식은 어떠한가?
2. 외국 대학 입학시험에서 행렬과 벡터 영역의 내용요소는 어떠한가?
3. 외국 대학 입학시험에서 행렬과 벡터 문항의 행동 영역은 어떠한가?

이러한 연구문제에 답하기 위해 4차 산업혁명 준비도가 높거나 미래 수학교육을 강화하고 있는 것으로 알려진 10개의 국가(영국, 프랑스, 독일, 핀란드, 에스토니아, 싱가포르, 중국, 대만, 호주, 미국)를 선정하여 각 국가의 행렬과 벡터 영역을 포함하고 있는 대학 입학시험의 수학 시험 형식, 행렬과 벡터 시험 문항, 문항의 출제 근거가 되는 교육과정 또는 교수 및 평가요목 문서를 분석하여 다음과 같은 결론을 얻었다.

연구문제 1에 대하여, 분석 대상 국가의 문항 유형, 시험 시간, 공학용 계산기나 공식집 사용 여부, 서술형 채점 방법을 조사하였다. 미국을 제외한 9개국의 대학 입학시험에서는 서술형 문항을 출제하고 있는데, 중국, 대만, 호주 3개국은 선다형, 서술형 등의 유형을 혼합하여 출제하는 반면 영국, 프랑스, 독일, 핀란드, 에스토니아, 싱가포르 6개국은 서술형

문항만으로 평가하고 있었다. 또한 대부분 하위 문항을 포함하여 두 단계 이상의 사고 과정을 평가하거나 두 가지 이상의 수학적 개념을 종합적으로 사용해야 하는 문항을 출제하고 있었다. 그리고 다수의 국가가 공학용 계산기의 사용과 공식집을 제공하거나 사용할 수 있도록 허용함으로써 계산 과정의 정확도나 공식 암기에 의한 능력을 평가하기보다 실생활 맥락의 값을 해석 및 처리하고, 높은 수학적 사고력을 요하는 문제를 해결할 수 있는지 평가하고 있었다. 또한 서술형 문항의 채점 방법을 통해 시험에서 학생의 사고 과정을 면밀하게 살펴 점수를 부여하고 있음을 확인할 수 있었다.

연구문제 2에 대하여, 분석 대상 국가의 교육과정 또는 교수 및 평가 요목 문서에서 행렬과 벡터 영역의 내용요소를 확인하였다. 행렬 영역을 대학 입학시험에서 포함하고 있는 국가는 영국, 프랑스, 대만, 호주, 미국 5개국이다. 영국, 프랑스, 호주, 대만은 시험에 따라 전치행렬, 고유치과 고유벡터, 가우스 소거법 등과 같은 내용을 평가하고 있기 때문에 평가 내용의 범위가 다양하고 수준이 다소 높다고 볼 수 있다. 또한 프랑스, 대만, 호주, 미국의 시험에서는 실생활 맥락을 행렬을 이용하여 해석, 표현, 처리할 수 있는지 평가하는 문항을 출제함으로써 행렬의 유용성을 인식할 수 있다. 두 번째로 벡터 영역의 내용요소를 살펴보면 평면벡터만을 포함하고 있는 국가는 미국뿐이며, 나머지 9개국의 대학 입학시험에서는 공간벡터까지 다루고 있었다. 영국, 독일, 싱가포르, 대만, 호주는 시험 과목에 따라 외적, 삼중곱과 같은 우리나라 대학 교육과정에서 다루는 내용요소도 평가하고 있었다. 에스토니아, 중국, 대만은 기본과정 또는 문과 학생을 대상으로 하는 시험에서도 평면벡터의 내용을 포함하고 있었다. 역학에서의 벡터, 벡터 미적분학을 다루는 영국, 호주의 대학 입학시험과 실생활 맥락을 포함하는 영국, 독일, 핀란드, 싱가포르의 시험에서는 벡터를 이용한 표현 및 처리 능력을 평가하는 문항을 출제함으로써 벡터 개념의 유용성에 대해 인식할 수 있는 기회를 제공한다.

연구문제 3에 대하여, 수능의 행동 영역 평가틀을 이용하여 외국 대학

입학시험에서 행렬과 벡터 문항의 행동 영역을 계산, 이해, 추론, 문제해결 능력으로 구분하여 분석하였다. 행렬과 벡터 문항에서 공통적으로 나타나는 특징은 각 영역에서 출제된 전체 문항 중 70%가 넘는 문항이 대체로 이해 능력과 문제해결 능력을 평가하고 있다는 것이다. 이는 대부분의 국가의 대학 입학시험에서 단순 계산법을 적용하는 문항보다는 주어진 문제와 관련된 행렬, 벡터의 수학적 개념을 파악하여 처리하고, 관련된 개념·원리·법칙을 종합적으로 적용하여 문제를 해결하는 능력을 평가하고 있기 때문이다. 또한 대부분의 외국 대학 입학시험에서 하위 문항을 포함하는 서술형 문항을 출제하여 학생의 능력을 평가하기 때문에 문제해결 능력을 평가하는 문항이 많이 나타난다. 이와 같은 맥락에서 각 국가별로 출제되는 문항의 유형과 행동 영역의 분포가 관련 있음을 확인할 수 있었다. 서술형 문항을 출제하는 영국, 프랑스, 독일, 핀란드, 에스토니아, 싱가포르, 호주의 대학 입학시험에서는 대체로 문제해결 능력을 평가하는 문항이 나타났으며, 다답형을 출제하는 대만의 대학 입학시험은 추론 능력을 평가하는 문항이 존재한다. 그리고 벡터 문항을 선다형으로 출제하는 중국, 대만, 호주의 SM2, 미국의 대학 입학시험에서만 계산 능력을 평가하는 문항을 확인할 수 있다.

2. 논의 및 시사점

본 연구는 미래 사회 준비도가 높거나 수학 교육을 강화하고 있는 10개 국가(영국, 프랑스, 독일, 핀란드, 에스토니아, 싱가포르, 중국, 대만, 호주, 미국)에서 시행하고 있는 대학 입학시험 중 행렬과 벡터 영역을 다루고 있는 수학 시험에 초점을 두고 분석한 연구로써 각 국가의 대학 입학시험의 형식, 시험에서 다루는 행렬과 벡터 영역의 내용요소, 행렬과 벡터 문항을 통해 평가하는 행동 영역을 분석하여 궁극적으로 우리나라 수능에의 시사점을 제안하는 연구이다. 연구결과에서 제시된 수능과 외국 대학 입학시험의 비교 내용을 토대로 시사점을 정리하면 다음과 같다.

첫째, 외국 대학 입학시험의 형식을 비교, 분석한 결과 대체로 서술형 문항을 출제하고 공학용 계산기나 공식집을 허용함으로써 단순 계산 능력보다는 문제해결 능력에 초점을 둔 학생의 수학적 사고수준을 평가하고 있다. 또한 서술과정에서 드러나는 학생의 표현력, 논리적 사고력을 평가하고 있다. 이에 반해 수능 수학은 선다형, 단답형으로만 출제되며, 공학용 계산기나 공식집을 허용하고 있지 않다. 따라서 미래 사회 역량을 갖춘 학생을 길러내기 위해서 학생의 문제해결 능력을 향상시켜야 하므로 이를 파악할 수 있게끔 수능에서 하위 문항을 포함한 서술형 문항의 출제와 공학용 계산기나 공식집 허용에 대한 검토가 필요하다.

둘째, 외국 대학 입학시험에서 다루는 행렬과 벡터 영역의 내용요소를 비교, 분석한 결과 영역의 구분 없이 대다수 국가의 시험 평가의 범위가 넓고 높은 수준의 내용을 포함하고 있을 뿐만 아니라 실생활 맥락 또는 타 교과에서 수학적 개념의 사용을 경험함으로써 행렬과 벡터의 유용성을 인식할 수 있다. 또한 벡터 영역의 경우 미국을 제외한 9개 국가에서 공간벡터까지 포함하여 평가하고 있으며, 에스토니아, 중국, 대만은 기본과정 또는 문과 학생들도 배우고 평가받고 있다. 이에 반해 우리나라는 행렬 영역을 09 개정 수학과 교육과정부터 삭제했고, 벡터 영역은 올해 적용된 15 개정 수학과 교육과정에서 평면벡터로 축소하였으며 15 개정

수학과 교육과정이 적용된 수능에서 선택과목으로 배치되어 중요성이 약화되었다. 따라서 학교 수학 교육을 통해 국가 경쟁력을 갖춘 학생을 길러내기 위해 우리나라 수학 교육과정에 행렬 내용 영역의 재도입과 벡터 내용 영역의 확장 및 수능 출제 과목으로의 중요성에 대해 검토가 필요하다. 이와 함께 행렬과 벡터 영역의 내용요소의 폭을 넓히고, 높은 내용 수준까지 다양하게 제시함으로써 학생의 진로 선택에 따른 학습 및 평가의 기회 제공에 대해 고려해야 하며, 타 교과 소재 및 실생활 맥락에서 행렬과 벡터가 현상을 표현하고 해석하는 유용한 도구임을 인식할 수 있는 학습 및 평가의 개선이 필요하다.

셋째, 외국 대학 입학시험에서 출제하고 있는 행렬과 벡터 문항의 행동 영역을 비교, 분석한 결과 단순한 공식 암기나 간단한 계산법을 적용하는 계산 능력을 평가하기 보다는 이해 능력 또는 문제해결 능력을 평가하는 문항이 주로 많이 출제되고 있다. 이에 반해 수능 수학은 교육과정을 충실히 반영하여 출제한다는 원칙과 EBS 문제와의 높은 연계율을 바탕으로 점점 더 정형화되어 난이도가 높은 몇 개의 문제로 학생들을 변별하는 시험이 되고 있다. 이는 한국교육과정평가원이 명시한 수능의 평가 목표인 대학교육을 받는데 필요한 수학적 사고력을 측정하는 것과 다소 거리가 있어 보인다. 따라서 고등학생의 역량을 향상시키고 그 역량을 발판으로 대학에서 창의적인 인재로 키워내기 위해서 수능에서 출제하는 수학 문항이 문제해결 능력과 같은 높은 수준의 사고력을 평가하는 형태로 변해야 한다. 단순하게 행렬과 벡터의 개념을 많이 알고 있어야 해결하는 문항이 아니라 종합적으로 사고하여 적용할 수 있고, 행렬과 벡터의 유용성을 깨닫도록 실질적인 문제해결 능력을 평가할 수 있는 문항을 출제하는 방향으로 수능의 변화가 필요하다.

3. 연구의 한계 및 제언

본 연구는 미래 사회 준비도가 높거나 수학 교육을 강화하고 있는 10개 국가에서 시행하고 있는 대학 입학시험을 비교, 분석하여 우리나라 수능에의 시사점을 살펴본 연구로 다음과 같은 한계점을 지닌다.

첫째, 각 국가의 대학 입학시험이 갖는 문화적 맥락을 고려하지 않았다. 우리나라가 속한 동아시아의 경우 대학 입학시험이 갖는 의미가 서구유럽의 경우와 다르다. 이는 사회적, 역사적 맥락의 차이가 존재하기 때문인데, 이에 따른 각 국가의 국민들이 느끼는 대학 입학시험의 중요도 또는 대학 입학시험의 의미가 우리가 느끼는 바와 다소 다를 것이다.

둘째, 각 국가의 평가 목적에 따라 수학 문항의 행동 영역의 분류가 다양함에도 통합적으로 고려한 새로운 분석틀을 만들지는 않았다. 분석 대상 국가의 대학 입학시험 평가의 초점에 따라 요구하는 능력이 다름에도 수능에의 시사점에 목적을 두었기 때문에 수능 수학의 행동 영역 분석틀을 사용하였다.

이에 후속 연구를 위한 제언은 다음과 같다.

첫째, 영국, 호주, 일본과 같이 지금까지 시행되던 대학 입학시험이 개정되는 국가의 경우 이후 변화가 적용된 대학 입학시험을 토대로 대학 입학시험 비교 연구가 필요하다. 특히 우리나라와 비슷한 문화적 배경을 갖고 있는 일본의 개정된 대학 입학시험을 분석하는 연구가 필요하다. 또한, 기존에 없었던 서술형 평가 문항을 출제할 예정이기 때문에 이를 평가하고 채점하는 방법에서의 사회적인 논의와 학생과 교사, 학부모의 인식도 함께 조사하여 분석될 필요가 있다.

둘째, 각 국가의 대학 입학시험의 수학과 평가 목적에 따라 요구되는 능력을 종합적으로 고려하여 학생의 능력을 평가할 수 있는 수학의 행동 영역 분석틀을 개발하여 비교, 분석할 필요가 있다.

참고문헌

교육과학기술부 (2011). 교육과학기술부 고시 제 2011-361호 [별책 8] 수학과 교육과정. 교육과학기술부.

교육부 (2015a). 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정. 교육부.

교육부 (2015b). 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 9] 과학과 교육과정. 교육부.

교육부 (2018a). 2021학년도 대학수학능력시험 출제범위 발표. 교육부 보도자료(2018.02.28.).

교육부 (2018b). 2022학년도 대학입학제도 개편방안 및 고교교육 혁신방향 발표. 교육부 보도자료(2018.08.17.).

교육인적자원부 (2007). 교육인적자원부 고시 제 2007-79호 [별책 8] 수학과 교육과정. 교육인적자원부.

구자옥, 김성숙, 이혜원, 조성민, 박혜영 (2016). OECD 국제 학업성취도 평가 연구: PISA 2015 결과 보고서. 한국교육과정평가원. 연구보고 RRE 2016-2-2..

나귀수, 김동원, 김연, 이수진, 박미미 (2018). 미래 수학교육의 전망과 탐색. 대한수학교육학회. 2017 정책연구보고서.

남진영 (2017). 영국, 호주, 일본의 대학입학 수학 시험 개정. 수학교육학연구, 27(4), 679-700.

남진영, 정연준 (2011). 중국의 대학입학 수학 시험 분석 연구. 학교수학, 13(1), 1-17.

남진영, 탁병주 (2016). 대학입학 수학 시험 국제 비교 분석 - 미국, 영국, 호주, 싱가포르, 일본. 수학교육학연구, 26(2), 287-307.

박경미, 박선화, 권점례, 윤상혁, 강현영, 이경진, 최지선, 강은주, 김민정, 이광상, 김재영, 이광연, 한준철, 김선희, 방정숙, 이경은, 도종훈, 이문호, 황선미, 임해미, 이화영, 조혜정, 박정숙, 이승훈, 박문환, 김성여, 임미인, 권영기, 서보억, 이은정, 김완일, 장혜원, 이만근, 권오남, 안현정, 이지윤,

강성권, 강태석, 김화경, 신동관, 오택근, 전인태 (2015). 2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구Ⅱ. 한국과학창의재단. 연구보고서 BD15110002.

박선화, 박문환, 이봉주 (2004). 대학수학능력시험 출제 매뉴얼 수리 영역. 한국교육과정평가원.

상경아, 곽영순, 박지현, 박상욱 (2016). TIMSS 2015 우리나라 학생들의 수학·과학 성취 특성. 한국교육과정평가원. 연구자료 ORM 2016-96.

서보억, 남진영 (2010). 한국과 일본 대학 입학시험의 수학 문항에 대한 비교 분석. 수학교육, 49(4), 395-410.

신성균, 황혜정, 김수진, 성금순 (1992). 교육의 본질 추구를 위한 수학 교육 평가 체제 연구(Ⅲ) - 수학과 평가 도구 개발. 한국교육개발원. 연구자료 RM 92-5-2.

신승기, 배영권 (2015). 에스토니아의 소프트웨어 교육 정책 분석을 통한 교육과정 설계에 대한 시사점 고찰. 정보교육학회논문지, 19(3), 361-372.

신이섭, 황혜정, 김동원, 이동환, 송민호, 신항균, 장혜원, 김상미, 고호경, 김선희, 이환철, 방승진, 박혜숙, 이재학, 김영록, 도종훈, 김화경, 전철, 최홍원 (2011). 2009 개정 수학과 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구. 한국과학창의재단. 정책연구 2011-11.

이상구, 이재화, 함윤미 (2012). 초기 선형대수학의 역사. 수학교육 논문집, 26(4), 351-362.

이재학, 조승제, 박선화, 박혜숙 (2004). 우리나라와 주요국의 대학입학 수학 시험문제 비교 연구. 수학교육, 43(4), 349-379.

이정무, 유진수, 이정아, 이경화 (2016). 대학수학능력시험에서 통계적 소양 평가의 가능성 모색. 수학교육학연구, 26(3), 527-542.

임해미, 김성경, 박지현 (2018). 2015 개정 수학과 교육과정의 수학 교과 역량을 반영한 국가수준 학업성취도 평가의 평가틀 및 예시 문항 개발. 학교수학, 20(1), 65-82.

전영주 (2011). 중국 대학 입학시험의 수학 평가내용 및 구성 고찰. 한국학교수학회논문집, 14(1), 85-100.

조성민, 김재홍, 최지선, 최인선 (2014). 대학수학능력시험 수학 영역의 내용

영역에 대한 고찰. 수학교육 논문집, 28(2), 195-217.
조윤동, 남진영, 고호경 (2009). 한, 중, 미, 일의 전국단위 대학 입학시험 수학과 출제체제 비교를 통한 수리 영역 개선 방안 연구. 학교수학, 11(4), 547-565.
최인선, 이민희 (2017). 대만의 대학 입학시험 수학 문항 분석. 학교수학, 19(2), 369-384.
한국교육과정평가원 (2012). 2013학년도 대학수학능력시험 대비 학습 방법 안내. 한국교육과정평가원. 대수능 CAT 2012-3.
한국교육과정평가원 (2014). 대학수학능력시험 20년사. 한국교육과정평가원 수능 CAT 2014-28. 한국교육과정평가원. 수능 CAT 2014-28.
한국교육과정평가원 (2015). 2016학년도 대학수학능력시험 대비 학습 방법 안내. 한국교육과정평가원. 수능 CAT 2015-6.
한국교육과정평가원 (2016). 2017학년도 대학수학능력시험 대비 학습 방법 안내. 한국교육과정평가원. 수능 CAT 2016-3-3.
한국교육과정평가원 (2017). 2018학년도 대학수학능력시험 대비 학습 방법 안내. 한국교육과정평가원. 수능 CAT 2017-1-3.
한국교육과정평가원 (2018). 2019학년도 대학수학능력시험 대비 학습 방법 안내. 한국교육과정평가원. 수능 CAT 2018-2-1.
한국무역협회 국제무역연구원 (2017). EU 주요국의 4차 산업혁명 대응정책과 혁신 네트워크 구축 현황. Trade Brief(2017.07.12.).
汤晓鸥, 陈玉琨 (2018). 人工智能基础 : 高中版. 上海: 华东师范大学出版社.
大學入學高考中心 (2013). 學科能力測驗 數學考科考試說明, 指定科目考試 數學考科考試說明(適用於99 課綱微調). Retrieved from https://www.examiner.com.tw/examNews_detail.php?id=3617
中国教育考试网 (2017). 2018 数学理大纲, 数学理大纲. Retrieved from http://www.neea.edu.cn/html1/report/1712/8563-1.htm.
文部科学省 (2017). 大学入学共通テスト実施方針. 文部科学省. Retrieved from http://www.mext.go.jp/component/a_menu/education/micro_detail/__icsFiles/afieldfile/2017/10/24/1397731_002.pdf.

Australian Academy of Science(AAS) (2016). The mathematical sciences in Australia : A vision for 2025. Retrieved from http://www.science.org.au/mathematics-plan-2016-25.

Bayerisches Staatsministerium für Unterricht und Kultus (2004). Bayern Lehrplan Jahrgangsstufe 11,12 Mathematik. Retrieved from http://www.isb-gym8-lehrplan.de/contentserv/3.1.neu/g8.de/index.php?StoryID=26192.

Common Core State Standards Initiative (2010). Common Core State Standards for Mathematics(CCSSM). Retrieved from http://www.corestandards.org/assets/CCSSI_Math%20Standards.pdf.

Edexcel (2013). Pearson Edexcel Specification GCE Mathematics (Issue 3). Retrieved from https://qualifications.pearson.com/en/qualifications/edexcel-a-levels/mathematics-2008.html.

Finnish National Board of Education (2016). National Core Curriculum for General Upper Secondary Schools 2015. Helsinki: Finnish National Agency for Education.

HARIDUS JA TEADUSMINISTEERIUM (2014). National Curriculum for Upper Secondary Schools. Retrieved from https://www.hm.ee/en/national-curricula-2014.

John, J. D. (2009). SAT subject test Math Level 2(2nd ed.). McGraw-Hill Companies, Inc.

MAOL-taulukot (2013). Matemaattisten Aineiden Opettajien Litto, Otava: Julkaisun verkkosivut. Retrieved from http://www.taulukot.com/.

Ministère de l'Éducation Nationale et de la Jeunesse (2011). Bulletin officiel spécial n° 8. Retrieved from http://www.education.gouv.fr/pid285/le-bulletin-officiel.html/.

Singapore Examinations and Assessment Board(SEAB) (2017). Mathematics Higher 2 (Syllabus 9758). Retrieved from https://www.seab.gov.sg/pages/nationalExaminations/GAL/Private_Candidates/syllabus/2017_GCE_A.

Staatsinstitut für Schulqualität und Bildungsforschung München(ISB) (2013).

Wesentliche Rahmenbedingungen (gültig bis 2019). Retrieved from http://www.isb.bayern.de/gymnasium/faecher/mathematik-informatik/mathematik/abiturpruefung-mathematik-ab-2014/.

Richard, K., & Howard, P. D. (2012). SAT subject test MATH LEVEL 2(10th ed.). New York, NY: Barron's Educational Series, Inc.

Victorian Curriculum and Assessment Authority(VCAA) (2015). Victorian Certificate of Education Mathematics study design. Retrieved from https://www.vcaa.vic.edu.au/Pages/vce/studies/mathematics/further/furthermathindex.aspx#H2N1009E.

World Economic Forum(WEF) (2016). The Future of Jobs : Employment, Skills and Workforce Strategy for the Fourth Industrial Revolution. Retrieved from https://www.weforum.org/reports/the-future-of-jobs.

YLIOPPILASTUTKINTOLAUTAKUNTA(MEB) (2017). Matematiikan Kokeen Määräykset. Retrieved from https://www.ylioppilastutkinto.fi/maaraykset.

ABSTRACT

A Comparative Study on Mathematics Exams for the College Entrance in Several Countries

- focusing on the matrix and vector domain

Park Mi Sun
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

Many countries are striving to foster creative talent through education to cope with future changes in society such as the Fourth Industrial Revolution. They are strengthening math education by recognizing math as the basis of a future society and reviewing the competencies required during the Fourth Industrial Revolution and reflecting them into the curriculum. This can also be seen through subject competencies in the 2015 revised mathematics curriculum in Korea. However, it is difficult to fully actualize what is intended unless there is a change in assessment along with a change in curriculum. In particular, if there is no change in the KSAT, which is the Korea college scholastic ability test, the change in the assessment of school education is bound to be limited. In some countries, the new system and the type of questions in the college entrance exam are scheduled to be

implemented in order to strengthen the competency of high school students in preparation for future changes in society. So, we need to examine foreign college entrance exams in order to review the direction of changes in the KSAT. Also, the foundations of the fourth Industrial Revolution are based on mathematics, and linear algebra is widely used among them. The core concepts of linear algebra are the matrix and vector. They are included in the high school curriculum in other countries. In contrast, we do not teach by deleting the matrix domain and reduced the learning contents of the vector domain in curriculum. There was also controversy whether or not to set test questions in the subject including the vector domain for the KSAT. Therefore, it is necessary to analyze college entrance exams focusing on the matrix and vector domain in several countries and to derive implications for the KSAT.

In this study, 10 countries (UK, France, Germany, Finland, Estonia, Singapore, China, Taiwan, Australia, and the United States) that are highly prepared for the future of society and are strengthening their math education were selected to compare and analyze college entrance exams that includes the matrix and vector domain.

The results of this study are divided into three categories based on the research questions. First, unlike the KSAT which consists of multiple choice and short answer questions, the college entrance exam in other countries was mostly set with descriptive questions including sub items and allow the use of scientific calculators and formula books. Second, the contents of the matrix and vector domain of college entrance exam in other countries are not only measuring relatively wide and high levels of content compared to Korea, but also providing an opportunity to recognize the usefulness of the matrix and vector concepts using real-life context or other subject matter. Third, the matrix and vector questions of college entrance exam in other countries are generally evaluating high levels of mathematical thinking skills,

such as comprehension and problem-solving ability rather than evaluating simple calculation ability.

This study is intended to enhance the understanding of college entrance exams in other countries by carefully reviewing the specific matrix and vector questions of each test in order to compare and analyze the forms of college entrance exams, the content elements of the questions and the mathematical thinking levels assessed by the item. It is also meaningful in that it suggests the direction and implications of the KSAT in comparison with the trends of the college entrance exam in other countries.

Keywords: comparative study, college entrance mathematics exam, matrix, vector, descriptive question, problem-solving ability

Student Number: **2017-20052**