creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

교육학석사학위논문

대학생의 증명 발표에서 나타난 교수자와 학생의 권위에 대한 연구

2019년 8월

서울대학교 대학원

수학교육과

이 경 원

대학생의 증명 발표에서 나타난 교수자와 학생의 권위에 대한 연구

지도교수 권 오 남

이 논문을 교육학 석사학위논문으로 제출함

2019년 5월

서울대학교 대학원

수학교육과

이 경 원

이경원의 석사학위논문을 인준함

2019년 6월

위 원 장 이 경 화 (인)

부 위 원 장 김 서 령 (인)

위 원 권 오 남 (인)

국문초록

대학생의 증명 발표에서 나타난 교수자와 학생의 권위에 대한 연구

학부 수준의 수학 교육에서 증명은 핵심적인 주제이다. 증명은 일반적으로 사회적인 맥락에서 다루어지므로, 증명 교수·학습에서 증명의 사회적 활동을 조망할 필요가 있다. 이를 학부 수준의 실제 수업에서 관찰하기 위해 증명에 관한 의사소통이 활발히 일어나는 증명 발표에 초점을 두어야 할 것이다.

증명의 진위를 판정하는 과정은 증명 작성자의 권위에 상당한 영향을 받는다. 수학자와 학생 사이에 증명을 읽는 방식의 차이가 존재하지만, 증명을 읽는 과정에서 증명 작성자의 권위에 영향을 받는다는 점은 공통적이다. 다만, 증명 교수·학습 분야의 연구에서 주로 수학 전문가의 권위만을 다뤄왔다. 수학 교육에서의 권위는 수학 전문가의 권위뿐만 아니라 실제 수업에서 발생할 수 있는 공유된 권위 등을 포함하여 보다 포괄적인 관점의 권위를 다룬다. 이러한 권위를 탐구하기 위해 선행 연구는 교수자와 학생의 발화에 초점을 두고 분석을 수행했다. 또한, 교수자의 권위 혹은 학생의 권위와 같이 주로 하나의 대상에 초점을 두었다. 공유된 권위의 맥락에서 교수자와 학생의 권위를 함께 탐구할 필요가 있다. 따라서 이 연구에서는 교수자와 학생의 공유된 권위를 관찰할 수 있도록 학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업을 설계하였다.

이 연구는 학부 수준의 교육과정에서 교과의 위계에 영향을 받지 않는 〈정수론〉 수업에서 수행되었다. 이 수업은 학생이 수업에서 다루게 될 정의, 정리, 증명을 수업 외 환경에서 미리 학습하고, 실제 수업은 학생의 증명 발표와 토론을 중심으로 이루어지도록 설계되었다. 발표자는 자

신이 작성한 증명에 관하여 설명하고, 청중과 질의응답 하였다. 더불어 교수자는 학생의 발표와 질의응답의 모든 상황을 통제하였다. 이러한 수업 환경에서 발표자의 증명 발표와 질의응답 그리고 교수자의 코멘트를 비디오 녹화하였다. 또한, 이러한 논의의 배경이 되는 학생의 서면 과제 및 Classprep 과제를 수집하였다. 권위 구조 분석틀을 바탕으로 5차시 분량의 수업에서의 발표자, 청중, 교수자의 담화 분석의 결과를 연구 질문에 대한 답으로 제시한다.

첫째, 발표자는 자신의 증명을 명료하게 전달하기 위해 전환된 권위의 모습을 보였다. 모든 발표자는 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환의 모습을 보였고, 다수의 발표자들에게서 외재적 요인에서 내재적 요인의 권위로의 전환의 모습을 보였다. 증명 내용, 증명 구성 방법을 설명하거나 자신의 증명 발표의 방향을 명료하게 설정하는 과정에서 발표자의 권위 전환이 포착되었다. 이는 증명에 대한 효과적인 의사소통을 위한 것이었다. 둘째, 발표자와 청중은 질의응답에서 상반되는 성격의 권위가 대응되는 모습을 나타냈다. 이는 질의응답을 통해 발표자와 청중이 학습 내용의 합의를 이끌어내고, 지식을 구성하는 수학 학습의 주체로서의 역할을 수행하기 위한 것이었다. 셋째, 교수자는 학생의 증명 발표에서 결합된 권위의 모습을 보였다. 수학의 전문적인 지식을 전달하는 것뿐만 아니라 논의를 전환하거나 연장하는 과정에서 교수자는 두 가지의 상반되는 성격의 권위를 동시에 드러냈다. 이는 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자 역할의 수행을 위한 것이었다.

이 연구는 학부 수준의 교육과정에서 학생의 증명 발표의 구체적인 모습을 관찰하였다는 점에서 의의가 있다. 또한, 교수자 혹은 학생이라는 하나의 대상에 초점을 두고 권위의 분석이 이루어진 것이 아니며, 공유된 권위가 형성된 교실에서 교수자와 학생의 권위가 나타나는 모습을 구체적으로 탐구하였다는 점에 가치가 있다.

주요어: 증명 발표, 권위, 대학 수학 교육

학 번: 2016-23223

목 차

초록 ····· i
목차 ····· iii
표 목차 ····· vi
그림 목차 ····· viii

I. 서론 ····· 1
1. 연구의 필요성 ····· 1
2. 연구의 목적 및 연구 질문 ····· 3

II. 이론적 관점 ····· 6
1. 증명 발표를 통한 증명하기(proving) ····· 6
1.1. 증명(proof)과 증명하기(proving) ····· 7
1.2. 증명 발표와 증명하기(proving) ····· 10
2. 수학 교육에서의 권위 ····· 12
3. 증명하기(proving)와 권위 ····· 18

III. 연구 방법 ····· 23
1. 연구 절차 ····· 23
1.1. 연구환경 ····· 23
1.2. 교수자 및 연구 참여자 ····· 25
1.3. 수업의 실행 ····· 27
2. 자료의 수집 및 분석 방법 ····· 30

2.1. 자료 수집 방법 ····· 30
2.2. 자료 분석 방법 ····· 31
2.3. 타당도와 신뢰도 ····· 35

Ⅳ. 연구 결과 ····· 38

1. 발표자의 전환된 권위 ····· 38
1.1. 외재적 요인의 권위로의 전환 ····· 38
1.2. 내재적 요인의 권위로의 전환 ····· 41
1.3. 명료한 전달을 위한 반복적인 권위의 전환 ····· 57
1.4. 전환된 권위의 의미 ····· 65
2. 발표자와 청중 간의 대응된 권위 ····· 70
2.1. 상반된 성격의 권위의 대응 ····· 70
2.2. 동일한 성격의 권위의 표출 ····· 75
2.3. 대응된 권위의 의미 ····· 78
3. 교수자의 결합된 권위 ····· 83
3.1. 상반된 성격의 권위의 결합 ····· 83
3.2. 단일한 성격의 권위의 표출 ····· 89
3.3. 결합된 권위의 의미 ····· 92
4. 논의 ····· 95
4.1. 작성된 증명을 설명하기 위한 기술적 용어의 사용 ····· 96
4.2. 증명 구성 아이디어의 공유 ····· 97

Ⅴ. 결론 ····· 99

1. 요약 ····· 99
2. 연구의 한계 및 제언 ····· 103

참고문헌 ····· 105
부록 ····· 115
Abstract ····· 132

표 목 차

〈표 Ⅱ-1〉 Weber의 권위의 세 가지 유형(Weber, 1947, p. 328) ·····13
〈표 Ⅲ-1〉 연구 참여자의 세부 정보 ·····27
〈표 Ⅲ-2〉 에피소드명 및 증명 발표에 사용된 명제 ·····29
〈표 Ⅲ-3〉 권위 구조 분석틀(Wagner & Herbel-Eisenmann, 2014a, p. 875) ·····36
〈표 Ⅳ-1〉 에피소드 4 발표자(호승)의 발화 및 권위 구조 ·····39
〈표 Ⅳ-2〉 에피소드 4 발표자(호승)의 위수 정의를 위한 도입에 관한 증명 ·····40
〈표 Ⅳ-3〉 에피소드 1 발표자(여필)의 발화 및 권위 구조 ·····42
〈표 Ⅳ-4〉 에피소드 1 발표자(여필)의 유일 소인수분해 정리 활용에 관한 증명 ·····43
〈표 Ⅳ-5〉 에피소드 1 발표자(성은)의 발화 및 권위 구조 ·····45
〈표 Ⅳ-6〉 에피소드 1 발표자(성은)의 유일 소인수분해 정리 활용에 관한 증명 ·····46
〈표 Ⅳ-7〉 에피소드 2 발표자(태홍)의 발화 및 권위 구조 ·····48
〈표 Ⅳ-8〉 에피소드 2 발표자(태홍)의 소수의 무한성에 관한 증명 ·····49
〈표 Ⅳ-9〉 에피소드 2 발표자(경훈)의 발화 및 권위 구조 ·····51
〈표 Ⅳ-10〉 에피소드 2 발표자(경훈)의 소수의 무한성에 관한 증명 ·····52
〈표 Ⅳ-11〉 에피소드 3 발표자(영웅)의 발화 및 권위 구조 ·····54
〈표 Ⅳ-12〉 에피소드 3 발표자(영웅)의 다항식 합동의 활용에 관한 증명 ·····56
〈표 Ⅳ-13〉 에피소드 3 발표자(성은)의 1차 발표의 발화 및 권위 구조 ·····58
〈표 Ⅳ-14〉 에피소드 3 발표자(성은)의 2차 발표의 발화 및 권위 구조 ·····60
〈표 Ⅳ-15〉 에피소드 3 발표자(성은)의 다항식 합동의 활용에 관한 증명 ·····64

〈표 Ⅳ-16〉 에피소드 2 발표에 대한 질의응답: 발표자(태홍)와 청중(경수)의 발화 및 권위 구조 ····· 71
〈표 Ⅳ-17〉 에피소드 2 발표에 대한 질의응답: 발표자(경훈)와 청중(태홍)의 발화 및 권위 구조 ····· 72
〈표 Ⅳ-18〉 에피소드 3 발표에 대한 질의응답: 발표자(성은)와 청중(경수)의 발화 및 권위 구조 ····· 73
〈표 Ⅳ-19〉 에피소드 3 발표에 대한 질의응답: 발표자(영웅)와 청중(성은)의 발화 및 권위 구조 ····· 74
〈표 Ⅳ-20〉 에피소드 1 발표에 대한 질의응답: 발표자(여필)와 청중(경수)의 발화 및 권위 구조 ····· 76
〈표 Ⅳ-21〉 에피소드 4 발표에 대한 질의응답: 발표자(호승)와 청중(영웅)의 발화 및 권위 구조 ····· 77
〈표 Ⅳ-22〉 에피소드 1 발표자(여필)에 대한 교수자의 발화 및 권위 구조 ····· 84
〈표 Ⅳ-23〉 에피소드 1 발표자(성은)에 대한 교수자의 발화 및 권위 구조 ····· 85
〈표 Ⅳ-24〉 에피소드 3의 교수자의 발화 및 권위 구조 ····· 86
〈표 Ⅳ-25〉 에피소드 4 발표자(호승)에 대한 교수자의 발화 및 권위 구조 ····· 87
〈표 Ⅳ-26〉 에피소드 3 발표자(성은)에 대한 교수자의 발화 및 권위 구조 ····· 89
〈표 Ⅳ-27〉 에피소드 2 발표자(태홍)에 대한 교수자의 발화 및 권위 구조 ····· 90

그 림 목 차

[그림 Ⅲ-1] 촬영 교실 상황 ····· 30
[그림 Ⅳ-1] 발표자의 권위의 양상 ····· 67
[그림 Ⅳ-2] 발표자의 전환된 권위의 의미 ····· 69
[그림 Ⅳ-3] 발표자와 청중의 권위의 양상 ····· 79
[그림 Ⅳ-4] 발표자와 청중의 대응된 권위의 의미 ····· 82
[그림 Ⅳ-5] 교수자의 결합된 권위의 의미 ····· 92

I. 서론

1. 연구의 필요성

학부 수준의 수학 교육에서 증명은 기본적인 요소가 된다(Moore, 2016). 증명은 고등 수학적 내용을 학습하는 과정에서 학생이 이해해야 할 본연의 대상이 되기도 한다. 또한, 대학생이 직관적으로 명확한 것이나 이미 사실인 것으로 밝혀진 것을 확인하기 위해 증명을 사용하므로(Schoenfeld, 1985), 증명에 대한 논의는 대학 수학의 교수·학습 맥락에서 핵심이 된다고 할 수 있다.

실제 교실 맥락에서 관찰할 수 있는 증명 교수·학습 활동 중의 하나는 증명 발표가 될 것이다. 그럼에도 불구하고 Mejía-Ramos & Inglis(2009)의 증명에 관한 연구 109편의 문헌 분석에서 증명 구성, 증명의 읽기 활동에 비해 증명 발표에 초점을 둔 연구는 보고된 바가 없음을 밝혔다. Stylianides, Stylianides와 Weber(2017)는 증명 발표와 같은 사회적으로 내재된 활동에 관한 증명 교수·학습 연구가 미진하며 여전히 성장하고 있는 연구 분야임을 지적하였다. 증명 발표에 관한 소수의 연구가 보고된 바 있으며, 주로 교수자의 증명 발표에 초점을 두고 있다(예, Fukawa-Connelly, 2012a; Fukawa-Connelly, 2012b).

학부 수준의 수학 수업에서 증명 발표는 주로 교수자에 의해 수행되는 것이 일반적이다. 교수자 중심으로 증명 구성의 아이디어와 증명의 내용을 학생에게 전달하며, 학생은 교수자의 강의 내용을 필기하는 것이 일반적인 증명 수업의 모습이다(Weber, 2004). 이는 학생으로 하여금 증명 구성 과정에 참여의 기회와 진위를 판단할 기회를 제한하며, 수동적인 역할을 수행하게 한다(Stylianou, Blanton, & Rotou, 2015). 또한, Harel & Sowder(1998)가 제시한 증명 정당화 도식에는 '권위자 증명 도식(Authoritarian proof scheme)'이 포함되어 있는데, 이 도식을 구성한 학생은 수학을 사실의 모음으로 여기며, 사실의 원천에 대한 고민을 거의 하지 않는다. Harel & Robin(2010)은 교수자가 일방적인 강의를 하거나

혹은 학생의 질문에 대한 진위의 결정권자로서의 역할을 수행하는 등의 학부 수업의 수업 관행이 학생의 권위자 증명 도식을 구성하게 할 수 있음을 지적하였다. 따라서 교수자 중심의 증명 발표는 학부 수준의 증명을 학습하는 학생으로 하여금 권위자 증명 도식을 구성하게 함으로써 증명 구성에 대해 깊이 있는 사고의 과정 없이 증명 내용의 사실만을 받아들이게 할 것이다.

교수자 중심의 증명 발표 수업은 증명에 대한 교수자의 권위가 강조되어 있다고 볼 수 있으며, 이러한 수업에서 학생의 권위는 교수자의 권위에 비해 상당히 배제되어 있다. 학생이 권위자 증명 도식을 구성하지 않고, 학생이 증명에 대한 능동적인 탐구를 수행하게 하기 위해서는 전통적인 수학 교수·학습 맥락에서 지배적이었던 교수자의 권위의 변화가 필요하다. 이는 교실 내에서 배제되었던 학생의 권위가 과거보다 강조되어야 할 것이다. 다시 말하면, 교수자와 학생 사이의 권위 관계 속에서 교수자의 권위와 학생의 권위가 한 쪽이 지배적이지 않고 서로 공유될 수 있는 상태가 될 것이다.

학부 수준의 증명 수업에서 교수자와 학생의 권위의 공유를 강조하는 것은 대학생에게 의미 있는 증명 학습의 기회가 될 것이다. 권위를 공유한다는 것은 교수자와 학생의 위치, 교실 내에서 다루어지는 내용 또는 발화가 교수자와 학생이 공동으로 점유하는 것을 의미한다(Amit & Fried, 2005). 이러한 공유된 권위를 교실 내에서 강조하는 것은 학생에게 수학적 아이디어의 이해에 대한 책임감을 부여할 수 있고 지식 소유의 기회를 제공하는 것이며, 이를 기초로 하여 개념적 이해를 도모할 수 있다(Langer-Osuna, 2017; Webel, 2010). 공유된 권위가 강조된 학부 수준의 증명 수업은 기존에 교수자 중심으로 수행되어 온 증명 발표의 기회를 학생에게 부여한 환경이 될 것이다. 즉, 학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업은 그러한 환경이 될 것이다.

공유된 권위의 맥락에서 설계된 학생 중심의 증명 발표 수업은 교수자와 학생의 권위를 모두 포착할 수 있을 것이다. 그럼에도 불구하고, 권위를 주제로 한 선행 연구는 교수자의 권위를 중심으로 분석하거나 교수

자가 배제된 상황에서 학생이 구성한 권위를 분석하는 등, 하나의 대상에 초점을 맞춘 채 권위에 대한 분석이 이루어졌다(예, Wagner & Herbel-Eisenmann, 2014a; Langer-Osuna, 2016). 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업은 교수자의 권위가 학생에게 일부 이양되어 있다는 점에서 공유된 권위가 형성되어 있다. 따라서 이러한 수업은 교수자의 권위뿐만 아니라 학생의 권위까지 관찰할 수 있는 최적의 환경이 될 것이다.

이 연구에서는 교수자의 증명 발표가 중심이 아닌 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자와 학생이 나타내는 권위를 탐구한다. 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업은 증명 발표를 주도하는 교수자의 권위가 학생에게 공유되어 있다. 하지만, 교수자의 권위의 공유로부터 학생이 드러내는 권위는 예측할 수 없다. 따라서 학부 수준의 증명 중심 수업에서 증명 발표에 내재해 있는 교수자의 권위가 학생에게 공유되었을 때 나타나는 교수자와 학생의 권위를 실증적으로 분석할 것이다. 이러한 분석을 위해 교수자와 학생의 증명에 대한 의사소통에서 발생하는 권위의 양상을 면밀히 이해하고 탐구할 것이다. 이를 통해 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 증명 교수·학습이 어떻게 수행되는지 권위의 틀을 통해 확인할 수 있을 것이다.

2. 연구의 목적 및 연구 질문

이 연구에서는 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자와 학생의 권위의 양상을 살펴본다. 전통적인 수학 수업에서 설명의 주도권을 가진 교수자의 권위와 비교했을 때, 학생의 증명 발표가 주가 되는 수업에서의 교수자의 권위는 발표를 수행하는 학생에게 일부분이 이양되어 있다고 할 수 있다. 대학생이 자신이 풀이한 증명에 대해서 발표하고 이에 대해 질의응답 하는 과정과 교수자의 설명은 모두 증명에 대한 의사소통이 중심적이며, 이러한 의사소통은 담화자의 권위를 살펴볼 수 있는 주요한 자원이 된다. 따라서 대학생의 증명 발표가 중심인 수업에서

나타나는 교수자와 학생의 권위를 그들의 의사소통에 초점을 두고 그 양상을 분석하는 것에 목적을 둔다.

증명 교수·학습 연구 분야에서 이 연구는 교수자와 학생 모두의 증명에 대한 의사소통을 실제적인 수업 맥락에서 관찰한 연구가 될 것이다. 또한, 수학 교육의 권위에 관한 연구 분야에서 교수자의 권위를 학생에게 이양했을 때 발생하는 교수자와 학생의 공유된 권위를 심층적으로 살펴본 연구가 될 것이다. 이는 증명 발표가 중심이 되는 학부 수준의 수업에서 발표자의 증명에 대한 의사소통과 교수자와 학생의 역할에 대한 시사점을 제공할 수 있을 것이다. 구체적인 연구 질문은 다음과 같다.

1. 대학생의 증명 발표에서 나타난 발표자의 권위의 양상은 어떠한가?
2. 대학생의 증명 발표에서 나타난 발표자와 청중 간의 권위의 양상은 어떠한가?
3. 대학생의 증명 발표에서 나타난 교수자의 권위의 양상은 어떠한가?

이러한 연구 질문을 제기한 배경은 다음과 같다. 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서, 교수자와 학생의 위치(positioning)는 유동적이다. 교수자와 학생이라는 권위 관계는 변하지 않지만, 교수자와 학생이 각각 발표자와 청중의 역할을 모두 수행할 수 있기 때문에 실제 교실 내의 위치가 유동적이다. 수학 교실 내에서 발생하는 권위는 개인 간의 관계에서 형성되어 발화자의 위치에 영향을 받기 때문에(Herbel-Eisenmann & Wagner, 2010), 교실 내에서 변화하는 주체의 위치에 따라서 연구 문제를 세분화하였다. 그것은 학생이 교수자로서의 역할을 수행하고 있는 과정에서 발표자가 나타내는 권위의 양상, 발표자와 청중의 관계 속에서 형성되는 권위의 양상, 이러한 수업을 통제하고 이끌어가는 교수자의 권위의 양상이다. 이 논문에서의 명확한 의미 전달을 위해 발표자는 자신의 증명에 대해서 발표할 학생으로 한정하며, 청중은 수업에 참여하고 있는 발표자 이외의 학생으로 한정한다, 세 가지의 연구 질문에 답함으로써, 공유된 권위가 강조된 학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서

교수자와 학생이 나타내는 권위의 양상과 그것이 의미하는 바를 살펴볼 수 있을 것이다.

본문은 5개의 장으로 구성되어 있다. Ⅰ장은 연구의 필요성과 연구의 목적 및 연구 질문을 제시했다. Ⅱ장은 이론적 관점으로서 증명 교수·학습의 연구물에 대한 선행 연구 분석을 통한 이 연구에서의 증명(proof)과 증명하기(proving)의 의미를 진술하며, 수학 교육에서의 권위의 개념을 살펴본다. 나아가 권위를 조망한 증명 교수·학습 연구 분야에서의 연구물을 살펴보고, 이 연구에서의 권위의 관점을 제시한다. Ⅲ장은 연구 방법에 대한 기술로, 연구 절차 및 자료 수집, 자료 분석 방법을 제시한다. Ⅳ장은 연구 결과에 대한 설명이다. 에피소드별로 증명 발표에서 나타난 권위의 모습을 발표자의 권위, 발표자와 청중의 권위, 교수자의 권위로 구분하여 분석을 제시한 후 이에 관한 논의를 한다. Ⅴ장은 결론으로 이 연구의 요약 및 연구의 의의와 한계점을 진술하고 후속 연구를 위한 제언으로 마무리한다.

Ⅱ. 이론적 관점

이 장에서는 이 연구의 골자가 되는 증명 교수·학습과 권위의 개념에 대해 선행 연구를 검토하고, 주요한 관점을 밝힌다. 1절에서는 이 연구에서의 증명(proof)과 증명하기(proving)의 개념을 명확히 하고, 증명 발표에 관한 선행 연구를 검토한다. 2절에서는 수학 교육에서의 권위의 개념 도입 과정과 선행 연구를 검토한다. 3절에서는 증명하기(proving)와 권위의 주제의 연관성과 증명 교수·학습 연구 분야에서의 권위 연구의 필요성을 언급한다. 또한, 이 연구 맥락에서 권위가 어떠한 형식으로 반영되었는지를 설명한다.

1. 증명 발표를 통한 증명하기(proving)

증명은 의사소통이 수행되는 것과 같은 사회적 맥락에서 다루어진다고 해도 과언이 아니다. 증명은 수학자들 사이에서 수학적인 내용의 논리적인 성격을 판단하는 합의의 과정을 거치게 된다(de Villers, 1990; Hanna, 1989). 또한, 증명에 대한 의사소통 활동은 증명을 수행하는 활동의 필수적인 요소가 되며(Schoenfeld, 1994), 실제로 수학자는 다른 수학자들과 그리고 학생들과 증명을 통해서 수학적 내용을 의사소통한다(Lew, Fukawa-Connelly, Mejía-Ramos, & Weber, 2016). 이러한 증명에 대한 의사소통을 교실 내에서 관찰하기 용이한 상황은 증명에 대한 논의가 중심인 수업이 될 것이다. 그중에서도 증명에 대한 발표가 중심이 되는 수업에서 증명에 대한 의사소통을 면밀히 관찰할 수 있을 것이다.

증명 발표는 실제 교실에서 교수자 혹은 학생에 의해서 수행될 수 있다. 즉, 증명 발표에서 발표의 주체에 따라서 다양한 증명 활동의 요인을 관찰할 수 있다. 이번 절에서는 증명 발표에서 다뤄지는 대상으로서의 증명(proof)에 대한 의미와 증명을 매개로 하여 수행되는 증명 발표를 통해서 증명하기(proving) 활동의 의미를 살펴본다.

1.1. 증명(proof)과 증명하기(proving)

증명(proof)의 의미에 대해서 연구자들 사이에 명확한 합의가 되어 있지 않을 정도로, 증명은 확인과 반박, 설명, 발견, 의사소통, 연역, 정당화와 같은 다양한 기능을 갖고 있다(de Villers, 1990). 증명하기(proving) 역시 증명을 수행하는 활동으로서 읽기, 설명, 발표, 문제 해결, 설득의 다양한 측면을 다루고 있다. 학자들 사이에 증명과 증명하기의 정의에 관한 명확한 합의가 이뤄지지는 않았다. 또한, 증명과 증명하기는 정의 방식에 따라서 동일한 의미로 사용될 수 있고, 그러한 경우에는 상호 교환 가능하다(Herbst & Balacheff, 2009). 이번 절에서는 증명과 증명하기에 관한 다양한 관점을 증명 발표에 초점을 맞추어 살펴본다.

먼저, 증명(proof)에 관하여 살펴보자. 첫째, 형식적이고 전통적인 수학 본연의 관점에서 증명은 형식적이고 논리적인 추론의 나열이다. 즉, 전제와 결론을 잇는 논리적인 연역이다(Healy & Hoyles, 2001; Mariotti, 2000). 이러한 정의와 일관되게 Griffiths(2000)는 수학적 공리로부터 출발하여 논리적인 단계를 거쳐 결론에 도달하는 추론의 형식적이고 논리적인 나열을 수학적 증명으로 정의하였다. Knuth(2002)는 명제에 포함된 수학적 구조로 다른 수학적 결과를 이용하여 왜 명제가 참이 되는가에 대해 보여주는 연역적인 논증을 증명으로 정의하였다.

둘째, 인지적 관점에서의 증명은 수학적 주장의 판결을 얻을 수 있도록 도움을 주는 논증이다. Manin(1977)은 증명이 연역적 과정의 단계를 밟아가는 것보다 제시된 논증의 타당성에 영향을 받아 받아들여지는 것이라 주장하였다. Hanna(1991)는 논증의 타당성을 고려할 때, 증명 작성자의 명성과 같은 비수학적 요인이 증명의 판결 여부에 영향을 미침을 주장하였다. Harel & Sowder(2007)는 개인이나 공동체가 무엇을 진실로 받아들일 수 있는지에 대해 기술하는 것을 증명 혹은 정당화의 개념으로 제시하였다.

셋째, 증명은 사회적 관점에서 공동체의 협의와 동의에 의해 승인될 수 있는 설명이다. Manin(1977)은 논증이 증명으로 받아들여지는 사회적

행동을 강조하였다. Balacheff(1988)는 주어진 시간 동안 공동체 구성원에게 받아들여진 설명을 증명으로 정의하였는데, Manin(1977)의 정의와 일관성이 있다. Thurston(1994) 역시 증명에 대한 공동체의 사회적 규범을 조명하였다. 증명을 평가할 때, 증명 작성의 기술은 작성된 증명에 포함되지 않지만 이러한 기술이 공동체 내부에서 받아들여질 수 있어야 한다는 점을 언급하였다.

이상의 논의를 종합하면, 증명은 수학 본연의 논리적인 관점, 인지적 관점, 사회적 관점에서 다양하게 정의될 수 있다. 다만, 이 연구에서 다루는 증명의 의미는 어느 하나의 관점에 국한하여 사용하지 않을 것이다. 실제 교실에서 증명 발표가 수행되는 것은 증명의 명제, 증명 구성 아이디어, 이것들을 연결하고 있는 논리적인 연역의 구조가 전달되는 것이며, 제한된 시간 동안 증명 발표에 집중하고 있는 수업 구성원으로부터의 합의가 필요하다. 따라서 증명 발표에서 증명은 수학 본연의 논리적인 관점, 인지적 관점, 사회적 관점이 모두 반영될 수 있으며 각각의 관점을 독립적으로 구분하여 보기는 어렵다.

한편, 증명하기(proving)의 관점에 대해서도 기존 연구자들 간에 특별한 합의가 존재하지 않았다. 증명 작성, 판결의 수행 등의 다층적인 활동을 다루는 증명하기의 특성 때문에 연구의 맥락에 맞게 다른 관점으로 연구가 수행되어 왔기 때문이다. Stylianides 외(2017)는 증명하기의 관점을 크게 세 가지로 구분하였다. 먼저, 문제해결로서의 증명하기이다. 이 관점은 증명과 관련된 활동에 대해 적절한 수행을 만들어낼 수 있는 기술, 역량, 처분을 이해하는 것에 초점을 둔다. 다음으로, 설득으로서의 증명하기이다. 이 관점은 학생 혹은 교사의 수학적 판단에 대한 기준, 규율에 대한 근접성을 이해하는 활동에 초점을 둔다. 마지막으로, 사회적으로 내재된 활동으로서의 증명하기이다. 이 관점에서는 교실에서 증명 활동이 어떻게 수학적으로 수행되는지에 관한 이해에 초점을 둔다. 이러한 의미를 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

첫째, 문제해결로서의 증명하기이다. 이 관점은 증명 수행과 직접적으로 관련되는 기술이나 역량을 이해하는 것과 관련된다. Selden &

Selden(2013)은 증명의 유형을 구분하면서 증명 작성에는 형식적-수사학적인 부분과 문제 중심 부분이 구분됨을 설명하였다. 형식적-수사학적인 부분은 증명 작성에 있어서 절차적으로 작성하는 부분이 되며, 문제 중심 부분은 증명을 완수하기 위해 필요한 핵심적인 아이디어를 의미한다. Weber & Alcock(2009)은 구문론적 증명 구성과 의미론적 증명 구성으로 증명을 구성하는 아이디어의 구분을 수행하였다. 이 관점에서의 증명하기 활동은 증명의 유형을 구분하거나 증명 작성에서 나타나는 학습상의 어려움에 관한 것이다.

둘째, 설득으로서의 증명하기이다. 이 관점은 어떤 증명 혹은 정당화 방식이 증명을 읽거나 학습하는 주체를 설득할 수 있는지가 주요한 문제가 된다. 구체적으로, 교수자와 학생은 제시된 증명에 대하여 설득이 될 수 있는 증명인지 판단하는 활동을 수행한다. Harel & Sowder(1998)는 어떤 논증이 학생을 설득시키고, 학생이 어떤 논증으로 타인을 설득하는지를 학생의 정당화 도식(혹은 증명 도식)을 통해 분류하였다.

셋째, 사회적으로 내재된 활동으로서의 증명하기이다. 이 관점은 증명하기가 본래 사회적 맥락에서 수행된다는 점에 착안하여, 증명에 대한 설명을 이해라기보다는 활동에 초점을 둔다. 또한, 한 학생이나 교수자가 증명을 만들어낼 때, 결과를 인공물로써 그 의미를 어떻게 강조하는지와 어떻게 개인이나 공동체가 이를 사용하는지에 초점을 둔다. 이러한 활동에 대해 구체적으로 예를 들면 다음과 같다. 수학자들은 타인의 증명을 읽을 때, 증명의 확실성을 판단한다기보다 증명을 통해 수학적 아이디어를 얻는다(Mejía-Ramos & Weber 2014; Weber, 2008; Weber & Mejía-Ramos, 2011). 또한, 학생의 증명 개념은 교실 내에서 다뤄지는 증명의 개념에 영향을 받는다(Hemmi, 2006; Weber, 2010). 이를 종합하면 타인의 증명에 대한 평가와 설명이 사회적인 맥락에서의 증명하기 활동이다.

증명하기(proving)는 증명(proof)과 마찬가지로 문제해결, 설득, 사회적으로 내재된 활동이라는 증명하기의 관점이 명확하게 구분되지 않는다. 증명 발표에서 사회적으로 내재된 활동은 다른 두 가지 증명하기 활동에

비해 크게 부각될 수 있다. 하지만, 증명 발표의 대상이 되는 증명을 구성하는 과정에는 문제해결로서의 관점이 적용될 수 있다. 또한, 발표자는 청중의 이해와 청중으로부터의 동의를 이끌어내야 한다는 점에서 설득으로서의 관점 역시 증명 발표 상황에서 포착할 수 있다. 따라서 이 연구에서 살펴보게 될 증명하기 활동에 대한 관점은 일면으로 살펴보고 취하는 것이 아니라 다면적으로 적용된다.

이상의 논의를 정리하면 증명(proof)과 증명하기(proving)는 관점에 따라 동일한 의미를 지니기도 하지만, 이 논문에서 증명 발표에서의 증명과 증명하기를 논할 때는 하나의 관점에 초점을 두지 않고 다면적인 관점을 취할 것이다. 물론 증명 발표에는 사회적인 맥락에서의 증명과 증명하기의 의미가 강조될 수밖에 없다. 수학 교실 내에서 수행되는 증명 발표는 교수자와 학생이 참여한다는 점에서 그 사회적인 속성이 두드러지게 나타나기 때문이다. 하지만 앞서 살펴본 것과 같이 증명 발표에는 공동체 일원의 참여라는 사회적 측면 이외의 측면도 확인할 수 있다. 그러므로 이 연구에서 증명 발표를 둘러싸고 있는 증명과 증명하기를 논할 때, 여타의 측면보다 사회적 측면에 초점을 기울이지만 이외의 측면을 배제하는 것이 아님을 분명히 밝힌다.

1.2. 증명 발표와 증명하기(proving)

실제 교실에서 증명에 대한 의사소통을 활발히 관찰할 수 있는 증명 발표에 관한 소수의 연구가 보고되어 왔다. Fukawa-Connelly(2012a)는 증명 발표가 중심이 되는 추상대수학 강좌에서 교수자가 구성하는 사회수학적 규범을 제시하였다. 또한, Fukawa-Connelly(2012b)는 추상대수학을 강의하는 교수자의 증명 발표에서의 증명 작성과 관련되는 교수자의 사고의 유형을 분석하였다. Mills(2014)는 교수자의 증명 발표에서 학생에게 어떠한 예시를 제공하는지를 실증적으로 분석한 바 있다. Lai & Weber(2014)는 수학자들이 증명에 대해 발표할 때, 청중과 강연의 유형 혹은 교과서와 같은 자료에 영향을 받고, 증명을 구성하거나 수정할 때

다이어그램이나 주요 아이디어를 항상 중요시하는 것이 아님을 밝혔다. 이러한 연구는 증명 발표를 수행하는 학생보다는 교수자에게 초점을 두었을 뿐만 아니라 하나의 증명에 대한 한 번의 증명 발표에 대한 분석이 주를 이루었다.

학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업은 교수자와 다른 학생이 발표에 대한 의견을 제시할 수 있다는 점에서 교수자와 학생 모두의 증명에 대한 의사소통 활동을 확인할 수 있는 사회적인 맥락의 환경이 될 것이다. 또한, 학생의 증명 발표에 따라서 하나의 증명에 대해서 다양한 증명의 발표가 수행될 가능성이 있다는 점에서, 학생의 증명 발표에 관한 연구는 증명 교수·학습 연구 분야에서 증명에 대한 의사소통을 심도 있게 관찰할 수 있을 것이다. 실제 교실 맥락에서 증명 수업에 대한 논의를 다룬 연구는 주로 교수자의 수업 방식이나 교수자의 사고에 초점을 기울여왔다(예, Alcock, 2008; Weber, 2004). 따라서 증명에 대한 실제적인 의사소통을 확인할 수 있는 증명 발표에서 교수자만을 초점을 두는 것이 아닌 교수자와 학생의 증명에 대한 의사소통을 관찰하는 연구가 수행되어야 할 필요가 있다.

한편, Stylianides 외(2017)에 따르면, 증명에 대한 의사소통 활동은 사회적으로 내재된 활동으로 분류됨을 언급하였다. 여기에는 증명에 대한 평가, 인식에 대한 설문조사와 같은 활동 역시 포함된다. 이 관점에서 수행된 국내 연구는 소수의 연구가 보고되어 왔다. Kim(2008)은 중학생을 대상으로 한 증명 수업에서 교사와 학생 사이의 상호 교섭과정을 Harel & Sowder(1998)의 정당화 도식으로 분석하였다. 박경미(2009)는 증명 활동을 진리의 확인이나 추측을 확인하는 과정으로 여기는 것이 아니라는 Lakatos의 관점을 따라 설계한 중학교 기하 수업에서 교수자와 학생의 발화를 분석하였다. 한편, 오예린, 박주용, 권오남(2018)은 학부 정수론 수업에서 동료 간의 증명의 논리성, 명료성, 참신성을 평가하는 것은 전문가가 증명을 평가하는 것과의 차이가 크지 않음을 밝혔다. 이러한 연구들은 증명 활동의 사회적 맥락을 조망하였다는 점에서 가치가 있다. 다만, 증명에 대한 의사소통을 면밀히 관찰할 수 있는 증명 발표에

초점을 둔 국내 연구는 찾아보기 어렵다.

이 연구에서는 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자와 학생의 증명에 대한 의사소통 활동을 실증적으로 관찰한다. Mejía-Ramos & Inglis(2009)는 증명 발표에는 청중의 판결, 청중에 대한 설명, 증명 발표가 사회적인 맥락에서 수행되지만, 발표자는 자신이 해결해낸 수학적 증명의 타당성에 관하여 청중을 설득해야 하며 청중으로부터의 증명의 확인이 필요하다는 점을 지적하였다. 즉, 증명 발표에는 증명(proof)과 증명하기(proving)를 둘러싼 다양한 요인이 고려되어야만 한다. 증명 발표의 대상이 되는 것이 증명이라면, 그것을 실제로 수행하는 활동이 증명하기가 될 것이다. 이 연구에서는 증명 발표를 둘러싸고 있는 전반적인 측면에서 대학생의 증명 발표를 분석할 것이다. 더불어, 작성된 증명에 대한 발표와 증명을 작성하면서 발표하는 것은 구분하여 분석하지 않을 것이다.

2. 수학 교육에서의 권위

'권위(Authority)' 라는 개념은 사회, 정치, 역사 분야의 다양한 맥락에서 사용되어왔다. Pace & Hemmings(2007)는 권위를 교육적 맥락에서 사람들 사이의 사회적인 관계로 정의하였다. 여기에서 사람은 타인을 이끄는 합법성(legitimacy)이 부여된 사람과 이를 따르는 것에 동의한 사람의 두 부류로 분류된다. 수학 교육에서 정의되고 있는 권위는 힘, 통제를 통한 결과라기보다는 합법성에 초점을 두었다. Amit & Fried(2005)는 권위에 관한 기존의 선행 연구를 바탕으로 수학 교육에서의 권위의 개념을 재개념화하였다. 구체적인 과정을 살펴보면 다음과 같다.

첫째, Weber(1947)가 제시한 권위의 유형인 법적 권위, 전통적 권위, 카리스마적 권위를 포함하였다. Weber의 권위의 개념은 교육적 맥락에서 정립된 것은 아니지만, Weber가 제시한 권위는 수학 교실 내에서 나타날 수 있다. 먼저, 법적 권위란 정당한 절차를 거쳐 법적 지위가 있는 자에게 부여되는 권위이다. 경찰관이나 검사, 판사와 같은 법관이 가진

권위가 법적 권위가 된다. 수학 교실 내에서는 수학 지식의 전문가인 교수자가 갖는 권위가 법적 권위와 연결된다. 다음으로, 전통적 권위란 자녀에 대한 부모의 권위와 같이 오랜 시간 관계를 유지했기 때문에 나타나는 권위이다. 학생이 이해되지 않는 수학 내용을 마주했을 때, 부모님, 친구, 형제, 자매를 찾아 해결하는 것은 전통적 권위에 의존한 것이다. 마지막으로, 카리스마적 권위는 개인의 특별한 능력에 의존한 권위를 의미한다. 수학 교실에서 일반적인 사고 범위 내에서 발현되지 않는 문제 해결의 실마리를 제시하거나 그 능력을 제공하는 사람이 드러낸 권위는 카리스마적 권위라고 할 수 있다. 이를 정리하면 <표 Ⅱ-1>과 같다.

<표 Ⅱ-1> Weber의 권위의 세 가지 유형(Weber, 1947, p. 328)

권위의 유형	내용
법적 권위	법적 혹은 관료주의적 체계와 같은 규칙이나 법에 의존하는 질서
전통적 권위	고대의 전통의 신성함과 지위에 의존하는 질서
카리스마적 권위	개인의 영속성, 영웅주의 또는 모범적인 성격에 의존하는 질서

둘째, 수학 교실에서 특정 주제를 알고 있는 자로부터 나타나는 전문가 권위의 개념을 포함한다. 앞서 언급한 바와 같이 전문가 권위는 Weber의 권위의 유형에서 법적 권위의 일부가 된다. 수학 교실에서 수학 지식에 대한 전문가의 역할을 주도적으로 수행하는 자는 교수자이다. 학생은 교수자가 가진 전문적인 지식에 의존하며, 이를 따르게 된다. 전문가 권위에 따라 교수자는 학생에게 수학 지식에 대한 정보와 안내, 가르침을 제공한다.

셋째, 교실의 구조, 교실 내에서 다루어지는 지식 및 담화의 공유에서 나타난 공유된 권위이다. 먼저, 교실 구조의 공유는 교실의 질서, 규율에 기초하여 실현된다. 교실 내의 교사의 점유가 높을수록 학생의 점유는 낮아지게 된다. 이는 교사, 학생의 위치(positioning)와 밀접하게 관련된다. 교사의 교실 내의 점유를 학생에게 일부 양도하는 것은 권위를 공유

한 것이다. 또한, 학문으로서의 수학이 실제 교실에서 다루어지는 내용의 수학과 구분될 수 없는 데서 오는 권위의 공유이다. 이는 Oyler(1996)가 언급한 '내용 영역'과 '과정 영역'에서 생각해볼 수 있다. '내용 영역'이란 수학 학문으로서의 지식의 영역을 일컬으며 교수자는 교실 내에서 다루어지는 지식을 통제한다. '과정 영역'은 교실 내에서 나타나는 담화의 영역을 의미하며, 교수자는 담화의 내용을 통제한다. 여기서 교수자와 학생 사이에 권위가 발생한다. 교수자에 의해 통제되는 영역에 학생이 참여하게 함으로써 권위의 공유가 발생하는 것이다.

Amit & Fried(2005)는 수학 교육에서의 권위가 Weber의 권위, 전문가 권위, 공유된 권위를 포함한 형태임을 설명하였다. 또한, 이 권위의 형태는 인류학적 관점에서 제시한 Beene(1970)의 권위와 밀접한 관련이 있다고 설명하였다. Beene(1970)는 사회적 구조나 사회적 체제 안의 규칙을 보존하는 것에 목적을 두는 것이 아닌 공동체의 성장을 위한 권위로서 그 개념을 제시하였다. 수학 교육의 맥락에서 권위의 개념은 수학 학문에 대한 동의보다는 수학을 실천하는 공동체의 성장에 초점을 둔다. Amit & Fried는 이러한 권위의 개념을 '수정된 권위'로 칭하고, 이를 수학 교육에서의 '권위'로 제시하였다.

권위 관계 속에서 권위에 놓이는 것(being in authority)은 한 사람이 제도적인 역할로 인해 힘이나 책임감에 따른 위치에 놓이는 것을 의미하며, 권위자가 되는 것(being an authority)은 한 사람이 어떤 상황과 연관되는 지식을 발휘하는 것이다(Wagner & Herbel-Eisenmann, 2014a). 사람 사이의 사회적 관계로부터 권위가 발생하며, 발생한 권위에 합법성을 가진 사람과 그 사람을 따르는 사람이 존재하게 된다. 여기에서 합법성을 갖는 사람은 이외의 사람을 이끄는 주도권을 갖게 되는데, 이러한 자가 권위 관계에서의 권위자가 되는 것이다.

권위의 세부적인 유형은 권위 관계로부터 관찰될 수 있다. Gerson & Bateman(2010)은 Amit & Fried(2005)가 시도했던 것과 유사한 재개념화 방식을 거쳐 탐구 지향 미적분학 수업에서 권위의 유형을 계급적, 전문적, 수학적, 수행적 권위로 세분화하였다. 여기서 다시 계급적 권위는 교

수자가 수업에서 설정한 제도적 권위와 학생 혹은 교수자 이외의 구성원에게 제공된 권위로 나뉜다. 이는 교수자만의 전유물로서 다루어져 왔던 전문가 권위가 학생에게서도 나타난다는 점과 권위의 유형을 세분화하여 설명하였다는 점에서 의의가 있다. 하지만, 제도적 권위를 제외하고는 Amit & Fried(2005)의 권위의 개념 내에서 설명될 수 있는 권위라는 점에서 한계가 있다.

기존의 선행 연구는 발화자의 의사소통에서 드러나는 권위를 포착하였다. Herbel-Eisenmann & Wagner(2010)는 수학 교실 담화에서 권위를 분석할 수 있는 틀로서 언어적 다발(lexical bundles)을 제시하였다. 이러한 틀에 기초하여 Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)은 새로운 환경에 직면하는 교수자가 자신의 권위를 어떻게 설정하는지를 분석하였다. 여기서 Herbel-Eisenmann & Wagner(2010)의 논의를 수정 보완함으로써 권위 구조를 내재적 요인(immanent factors)과 외재적 요인(transcendent factors)으로 범주화하였다. 여기서 내재적 요인은 교실 내의 담화에 참여하고 있는 사람들의 선택과 경험에 의존하는 것이며, 외재적 요인은 내재적 요인이 아닌 요인을 의미한다. 내재적 요인의 권위의 하위 요인으로 개인적 권위, 개인적 범위의 권위 구조를 제시하였고, 외재적 요인의 하위 요인을 권위의 담화, 담화적 필연성의 권위 구조로 제시하였다.[1] 또한, Wagner & Herbel-Eisenmann(2014b)은 교수자가 관찰자로서 타인의 수업에서 드러나는 권위의 이동을 분석하고, 권위를 인식하는 것은 자신의 수업에 대한 성찰의 기회가 될 수 있음을 주장하였다. 이러한 연구는 모두 권위에 대한 교수자의 인식과 교수자가 드러낸 권위의 특성을 살펴보는 것에 초점을 기울였다. 교수자와 학생 간의 발화가 제시되기도 하였지만, 공유된 권위의 맥락에서 교수자와 학생의 권위에 대한 분석에 무게를 두지 않았다.

한편, 선행 연구에서는 교수자가 배제된 학생의 협동 학습에서 드러난 권위를 분석하기도 하였다. Langer-Osuna(2016)는 교수자가 배제된 협력

1) 이 논문에서 Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)의 분석틀의 하위 요소를 언급할 때에만 '권위 구조(authority structure)'라는 용어를 사용하였다.

적 문제 해결 상황에서 학생이 구성해나가는 권위를 분석하였다. 이는 Engle, Langer-Osuna와 McKinney de Royston(2014)이 제시한 영향 모델(a model of influence)에 기초하여 학생의 발화로부터 권위의 구성을 분석하였다. Langer-Osuna(2018)는 Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)의 '권위자가 되는 것(being an authority)'을 '지적 권위'로 '권위에 놓이는 것(being in authority)'을 '사회적 권위'의 개념으로 설정하여 기존의 연구 담론을 확장하였다.

Langer-Osuna의 연구들은 수학 교육에서 주로 교수자의 권위를 조명해왔던 것에 반하여 소집단 내에서 나타나는 학생의 권위를 탐구하였다는 점에 가치가 있다. 이는 실제 수학 수업의 일부가 되고 소집단에서 발생하는 국소적인 권위의 형태를 분석한 것이다. 또한, 이러한 권위 관계를 논하는 것은 학생 간의 공동의 지식 구성을 조망한다. 하지만, 이는 실제 수업에서 관찰할 수 있는 일부분의 모습이므로, 전체 토론에서 나타나는 교수자와 학생의 위치가 달라졌을 때 학생이 나타내는 권위, 학생 간의 상호 작용에서 나타나는 권위, 그 과정에서 교수자가 나타내는 권위를 탐구할 필요가 있다. 따라서 이 연구에서 증명 교수·학습에서의 권위를 탐구하기 위해 소집단 내에서의 권위 형성 과정보다는 교수자와 학생의 공유된 권위의 양상을 살펴보는 것에 초점을 기울일 것이다.

수학 교육에서의 권위에 관한 논의는 교실 내의 구성원의 정체성(identity)에 관한 논의로 이어질 수 있다. 권위와 정체성에 관한 논의 모두 위치(positioning)에 그 근간을 두어 출발한다. Harré & van Langenhove(1999)는 위치(positioning)를 사람들이 사회적 구조를 배열하는 행동과 발화를 사용하는 방법으로 기술하였다. 위치라는 용어는 육체적으로 인간이 어디에 놓이는가를 의미하기도 하지만, 은유적으로 인간 사이의 관계를 의미하는 데 사용되기도 한다. 이러한 위치의 개념은 수학 교육에서의 권위 그리고 정체성에 관한 담론과 밀접하게 관련된다. 먼저, 위치는 개인 간의 관계에서 발생하는 권위의 개념과 연관되기 때문이다(Herbel-Eisenamnn & Wagner, 2010). 교육적 맥락에서 생각할 때,

개인 간의 관계란 교수자와 학생 혹은 학생과 학생 사이의 관계로 떠올릴 수 있으며, 더 넓은 범주에서 교수자, 학생과 수학 학문 사이의 관계로도 생각할 수 있다. 다음으로, 위치는 사회적인 맥락에서 다른 사람과의 관계에 대해 초점을 두어, 사회적인 상호작용을 통해 한 사람이 구성해나가는 자아 개념이나 속성으로 정체성을 정의하기 때문이다(Hareé & Langenhove, 1999). 인간은 타인과 상호 작용함으로써 친근한 자, 유능한 자, 권위자의 자질을 보이거나 교수자, 학생 그리고 모둠의 장과 같은 특정한 역할을 부여함으로써 자기 자신을 위치시킨다(Langer-Osuna & Esmonde, 2017). 위치로부터 발생하는 교수자와 학생의 의사소통과 행동은 권위 관계를 형성하게 할 뿐만 아니라 이는 정체성의 구성으로까지 이어지게 된다.

국내 수학 교육 연구 분야에서 권위에 관한 연구가 진행된 바를 찾아보기 어렵다. 교수자의 권위에 초점을 둔 연구라기보다는 과거의 교수·학습 맥락과 비교했을 때 변화된 수학 교수·학습 맥락에서 교수자의 역할에 주목하거나(박성선, 2007), 특정한 수학적 개념을 지도하는 상황에서 교수자의 역할을 분석한 연구가 보고된 바 있다(류희찬, 강경민, 2013; 성창근, 2013). 이러한 연구는 수학 교육에서의 권위의 개념을 도입하여 분석한 연구는 아니다. 따라서 국내 연구에서 수학 교육에서의 권위를 도입하여 실제 교실 내에서 형성되는 교수자와 학생의 권위에 대한 분석이 필요한 실정이다.

지금까지 살펴본 수학 교육에서의 권위에 대한 연구는 Amit & Fried(2005)의 권위의 개념에 초점을 두고 있다. 이에 기초하여 권위를 발화자의 의사소통을 통해 분석할 수 있도록 언어적 다발(lexical bundles)을 제공하여 이에 관한 실증적인 분석을 수행하거나 권위의 개념을 정립하여 개방 코드를 바탕으로 권위의 유형을 분류한 연구가 수행됐다. 하지만, 실제로 학생이 지식을 구성하는 참여가 중요시되는 교실 맥락에서는 교수자와 학생 사이의 상호작용과 전체 교실 토론 상황에서 나타나는 권위를 살펴보는 것 역시 중요하다. Fried(2014)는 교실의 실제적인 맥락에서 권위가 나타나는 양상을 관찰할 필요성을 지적하였으며,

민주적인 교실 환경에서 학생의 권위가 어떻게 설정되는지를 살펴볼 필요성을 제기하였다. 따라서 주체적인 학생으로서의 의미를 강조하는 현시대의 수학 교육의 맥락에서 볼 때, 학생 간에 드러나는 권위와 교수자와 학생 사이에 나타나는 권위를 다면적으로 살펴볼 필요가 있다. 따라서 이 연구에서는 학생 사이의 권위의 양상뿐만 아니라 교수자와 학생이 나타내는 권위의 양상까지 탐구하기 위해 실제적인 교실 맥락에서 교수자와 학생의 권위 관계에서 형성된 공유된 권위의 양상을 살펴볼 것이다.

3. 증명하기(proving)와 권위

사회적인 맥락에서 증명하기(proving) 활동은 증명(proof)이 공동체 내에서 받아들여질 수 있는 것인지를 판정하는 것이 중요한 사안이 된다. 여기서 주목해야 할 점은 증명의 진위를 판정하는 데 권위가 상당한 영향을 미칠 수 있다는 것이다. 저명한 수학자의 증명, 교과서에 제시된 증명, 교수자가 학생에게 제공하는 증명은 증명 작성자의 권위에 의해 증명을 읽는 사람으로 하여금 증명의 진위를 판가름하는 것에 영향을 줄 수 있기 때문이다. 실제로 증명 교수·학습 연구 담론에서 권위 주제는 교수자와 학생의 증명 읽기를 중심으로 논의가 진행되어 왔다(예, Weber, 2008). 따라서 이번 절에서는 증명 교수·학습에서 권위의 주제를 어떻게 다루어왔는지 선행 연구를 검토하고, 이것이 수학 교육에서의 권위의 맥락과 연결되는 지점과 이를 확장하여 살펴보아야 하는 필요성을 제시한다.

먼저, 수학자들은 증명을 읽고, 타당화하는 과정에서 증명 작성 주체의 권위와 증명이 담겨 있는 학술지의 권위에 의존하기도 한다. 수학자들이 증명을 읽을 때, 전체적인 증명의 논리 과정에 관하여 모든 판결을 내리지 않고, 실증적인 증거나 권위자의 존재에 근거하여 그 진위를 판결하기도 한다(Mejía-Ramos & Weber, 2014; Weber, 2008; Weber, Inglis, & Mejía-Ramos, 2014; Weber & Mejía-Ramos, 2011). 선행 연구에서 공통

적으로 발견할 수 있는 사실은 수학자들이 증명의 타당화 과정에서 수학 전문가의 권위에 상당히 의존하고 있다는 점을 알 수 있다.

다음으로, 증명을 학습하는 대학생들 역시 수학자들과 마찬가지로 증명을 읽고 타당화하는 과정에서 권위에 영향을 받는다. Harel & Sowder(1998)는 증명 과정에서 나타나는 대학생의 정당화 도식을 구분하였다. 여기에는 '권위자 증명 도식(Authoritarian proof scheme)'이 포함되어 있다. 이 도식은 학생이 수학적 사실에 대한 이유에 주목하는 것이 아니라, 수학을 수학적 사실의 모음으로 여긴다는 점에 주목한다. 권위자 증명 도식에서 권위자란 교과서나 교수자와 같은 증명 작성에서 수학적 사실을 제공하는 자이다. 교수자가 학생에게 전달하는 증명에 교수자의 권위가 수학적 논리에 내재되어 있는 수학 학문으로서의 권위를 넘어서 지배될 수 있는 것이다. 따라서 학생의 증명 정당화 과정이 권위자에게 기초하여 있는 경우, 권위자 증명 도식으로 분류된다. Inglis & Mejía-Ramos(2009)는 수학자와 학생 모두 증명의 진위를 판단하는 과정에서 증명 작성자의 존재가 명시되어 있는지의 여부에 따라서 설득의 정도가 달라질 수 있음을 언급하였다. 수학자뿐만 아니라 학생에게도 증명을 접할 때 권위가 상당한 영향을 받는다는 점을 알 수 있다.

물론, 증명을 읽고 진위를 판단하는 과정은 수학 전문가와 초임자 사이에 차이가 있다. 전문가와 초임자 사이의 증명 읽기 방법을 비교하는 다수의 연구가 진행되어 왔다(Inglis & Alcock, 2012; Weber & Mejía-Ramos, 2013). Inglis & Alcock(2012)은 수학자와 대학생이 증명을 읽을 때의 안구의 움직임을 추적하여 증명을 타당화하는 과정에서의 행동을 분석하였는데, 증명을 읽는 데 있어 수학자는 대학생보다 안구의 행간 움직임이 적었고 대학생은 수학자에 비해 증명을 구성하고 있는 외형적인 서술의 형태에 집중하는 경향이 있음을 밝혔다. Shepherd & van de Sande(2014) 역시 수학자의 증명 읽기 방식은 자신의 이해에 기초하여 친숙한 내용의 증명은 훑어보는 방식으로 읽는다는 점을 밝혔고, 이러한 방식이 대학생의 증명 읽기 방식과 차이가 있음을 밝혔다. 수학자와 학생 사이의 증명을 읽는 습관이 다르다는 점은 분명하지만, 그들이

증명을 읽고 타당화하는 과정에서 권위에 영향을 받는다는 점은 부정할 수 없다.

증명 교수·학습에 관한 연구 담론에서는 권위에 대한 주제를 교실 내에서 실제로 어떻게 다룰 것인지에 대해 학자들 간의 상반된 주장이 있었다. 먼저, 수학적 정리가 공동체에 받아들여지기 위해서는 전문가의 권위가 중요하다는 점을 강조할 필요가 있다는 것이다(Hanna, 1983; Reid, 2002). 여기서 전문가의 권위가 드러나는 것은 저명한 수학자의 증명이나, 교과서의 증명이 될 수 있다. 반면, 수학적 정리의 논증 과정에서 전문가적 권위를 지나치게 강조하는 것은 학생에게 낙담을 유발할 수 있다는 점이다(Yackel & Cobb, 1996). 수학 전문가로서의 권위를 실제 교수·학습 환경에서 강조하게 되면, 학생으로 하여금 권위자 증명 도식을 구성하게 될 수 있다는 점이다. 따라서 Harel & Sowder(2007)는 학생이 증명 도식을 형성하고 발달할 수 있도록 증명 교수·학습 방법이 구현되어야 함을 지적하였다. 이처럼 증명 교수·학습에서 권위 주제를 실제 교실에서 어떻게 다루어야 하는지에 대해 학자들의 논의가 있었지만, 주로 증명 전문가의 권위를 학생이 어떻게 받아들일 수 있게 할 것인지에 초점을 기울였다.

기존의 증명 교수·학습에서 다루어져 왔던 권위 주제는 Amit & Fried(2005)가 언급한 전문적인 수학 지식을 가진 전문가 권위만이 강조되어왔다고 볼 수 있다. 증명 작성자가 가진 권위 혹은 수학적 사실이 담겨있는 것으로 여겨지는 교과서와 같은 인공물이 가진 권위는 수학 전문가의 지식이 강조되기 때문이다. Otten, Bleiler-Baxter와 Engledowl(2017)은 증명 교수법과 학생이 구성하게 되는 개념 사이에서의 교수자의 증명 패턴을 분석하는 연구에서, 증명과 권위가 연결될 수 있는 주제임을 조명하였다. 교수자의 수학 전문가로서 제공하는 권위가 실제적인 학습에서 나타나는 권위와 구분될 수 없다는 점에서(Amit & Fried, 2005), 증명 교수·학습에서 다루어지는 권위의 논의를 전문가로서의 권위에 한정하지 않고 그 범위를 확장하여 살펴볼 필요가 있다.

권위 개념은 크게 두 가지 면에서 이 연구에서 반영된다. 먼저, 권위

개념은 실제 수업에서의 수업 맥락을 형성한다. 이 연구에서의 권위의 의미는 Amit & Fried(2005)가 제시한 권위의 개념에 기초하여 정치, 사회적 맥락에서 사용되는 권위와는 다른 전문가 권위, 공유된 권위의 의미를 포함한다. 따라서 교수자와 학생의 권위가 공유될 수 있는 맥락을 형성하기 위해서 대학생의 증명 발표와 이것에 대한 질의응답이 중심이 되는 수업을 설계한다. 증명 발표 상황에서 발표자로서의 역할을 수행하고 있는 학생은 교수자의 역할을 일부 수행함으로써, 교수자의 권위를 일정 부분 이양받는다. 이는 선행 연구와 비교했을 때, 교수자와 학생의 위치가 다르다. 이러한 맥락에서 나타나는 발표자의 권위, 발표자와 청중 사이에 나타나는 권위, 교수자가 나타내는 권위를 관찰하는 것은 기존의 연구에서 교수자 혹은 학생만의 권위에 초점을 기울였던 것과는 다른 공유된 권위의 실제를 관찰할 수 있다는 점에서 차별점을 가질 것이다.

다음으로, 권위는 이 연구에서 발화자의 의사소통에서 드러나는 권위를 분석하는 틀로서 기능한다. 의사소통은 주로 발화자 간에 수반된 행동에 기초하여 논의된다. 수학 교실 내의 의사소통에서 나타나는 권위 구조는 발화자의 위치에 따라 다르게 나타날 수 있다. Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)은 이를 정리하여 권위 구조를 분석할 수 있는 담화 분석틀을 제시하였다. 이 연구에서는 증명 발표 수업에서 활발한 의사소통을 통해 나타나는 담화자의 발화를 권위 구조의 발화 분석틀로 분석할 것이다.

이 장에서는 이 연구의 주요 골자에 해당하는 증명(proof)과 증명하기(proving)에 대한 개념을 살펴보고, 증명 발표를 통한 증명하기(proving), 수학 교육에서의 권위의 개념에 대해서 살펴보았다. 증명 활동의 의사소통 기능의 중요성에도 불구하고 증명에 대한 의사소통을 실제 교실에서 관찰할 수 있는 증명 발표에 관한 연구가 수행된 바는 소수였다. 한편, 증명을 작성하는 자의 권위는 증명을 읽는 독자로 하여금 증명의 진위를 판결하는 것에 영향을 미친다. 수학 전문가로서의 권위는 증명 교수 · 학

습 과정에도 영향을 미칠 것이다. 하지만 증명 교수·학습 과정을 수학 교육에서의 권위의 틀로 분석된 바는 극히 드물다. 따라서 이 연구는 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자와 학생의 권위를 증명에 대한 의사소통 활동에 기초하여 그 양상을 분석하는 것에 목적을 둔다. 학부 수준의 학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업은 교수자 중심의 권위만이 강조되어 학생의 권위를 확인하지 못했던 것과 다르게 교수자와 학생의 공유된 권위를 활발하게 관찰할 수 있을 것이다. 이를 통해 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자와 학생이 어떠한 권위를 드러내는가를 관찰할 수 있을 것이다. 또한, 증명 교수·학습에서 나타나는 교수자와 학생의 역할에 대한 시사점을 도출할 수 있을 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

이 연구는 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 나타나는 교수자와 학생의 권위를 분석하는 것에 목적을 둔다. 이러한 목적을 달성하기 위한 연구 방법으로서 사례 연구를 택하였다. 사례 연구란 연구자가 이해하고자 하는 현상을 심층적으로 분석함으로써 시사점을 도출하는 연구 방법이다(Stake, 1995). 따라서 이번 장은 사례 연구의 목적에 부합하는 연구 방법에 관하여 서술한다.

1. 연구 절차

1.1. 연구환경

2017학년도 2학기 S 대학교 수학교육과 전공 과목으로 개설된 〈정수론〉 수업에서 연구가 진행되었다. 〈정수론〉은 정수와 관련된 기본 성질을 이해하고 있다면 쉽게 학습할 수 있는 기본적인 교과이며, 미적분학, 해석개론과 같은 교과와는 다르게 선수 교과와의 연계가 긴밀하지 않은 교과이다. 즉, 대학 수학 교육과정에 포함된 수학 교과 중에서 타 교과와 독립성이 있는 교과이다. 또한, 증명의 의미 만들기, 증명의 타당화, 증명의 평가 등의 사회적 맥락에서의 증명 활동에 관한 증명 교수·학습의 연구에서 〈정수론〉 수업 환경을 그 맥락으로 택하기도 하였다(Mejía-Ramos, Fuller, Weber, Rhoads, & Samkoff, 2012; Selden & Selden, 2003; Smith, 2006; Smith, 2009). 따라서 연구자는 〈정수론〉 수업은 다른 교과에 비해 자신의 증명을 타인에게 적극적으로 발표할 수 있는 환경이 될 것이라 기대하였다.

〈정수론〉 수업의 강의계획서와 학기 초 오리엔테이션을 통해 수업 중에 논의할 증명은 수업에 참여하기 전에 주별 과제로 미리 풀이하고, 수업은 학생이 자원하여 자신의 증명을 발표하고 이에 대한 질의응답이 이루어지며 추가로 동료 간 토론으로 진행된다는 점이 안내되었다. 즉, 이

수업은 교실 밖 환경에서 내용 학습을 충실히 이행하고, 교실 내 환경에서 수업 중에 학생의 자발적인 참여가 이루어질 수 있도록 설계되었다. 이러한 내용 학습을 지원하기 위해 학생에게 매주 15개 내외의 서면 과제와 주별 4개의 온라인 제출 과제가 제공되었으며, 학기 중간과 학기말에 학습 내용을 스스로 정리하여 제출하는 포트폴리오 과제가 부여되었다. 서면 과제는 학생이 일주일에 한 번씩 제출하고, 수업 조교에 의해 채점되어 배부되었으며 이때 개개인에게 증명 작성 방법에 대한 피드백이 제공되었다. 온라인 제출 과제 역시 학생이 일주일에 한 번씩 Classprep 온라인 동료 평가 시스템에 제출하였다. 오예린 외(2018)는 대학생의 온라인 증명 동료 평가와 전문가의 증명 평가에 대한 상관관계를 조사하여 그 신뢰도와 타당도를 규명한 바 있다. 이에 이 연구에서도 동료 간 증명의 논리성, 명료성 그리고 참신성을 평가하고 동료의 증명에 대한 자신의 의견을 제시할 수 있게 함으로써 자신의 증명 구성을 반성적으로 검토할 수 있는 환경을 조성하였다. 이러한 활동을 정리하여 결과물로 제출하는 것이 포트폴리오 과제이며, 이를 통해 학기 중의 증명 학습을 점검할 수 있게 하였다.

학생이 자신의 증명을 발표와 이에 대한 동료들로부터의 피드백을 받을 수 있고, 수업에서 진행된 논의를 더욱 풍부하게 할 수 있도록 조별 토론 학습을 진행하기 위해서는 전통적인 교실 환경과는 다른 환경이 필요할 것이다. Park & Choi(2014)는 교실의 앞쪽에 칠판이 배치되어 있고, 학생이 일렬로 앉아서 수업을 듣는 전통적인 교실 환경은 '골든 존'과 '쉐도우 존'이 구분된다고 주장하면서[2], 모든 학생이 적극적인 참여를 수행하기 위해서는 전통적인 교실의 구조에서 탈피하여 ALC(Active Learning Classroom)와 같은 새로운 교실의 형태가 필요함을 주장하였다.

2) 칠판과 교탁이 교실 앞쪽에 위치하고, 책상이 일렬로 나열된 전통적인 교실에서 골든 존(Golden Zone)은 교실 중앙 앞쪽의 열에 형성되며, 쉐도우 존(Shadow Zone)은 교실 뒷부분에 형성된다. 골든 존에서 학생이 교수자의 필기와 목소리를 놓치지 않으며 수업을 따라갈 수 있지만, 쉐도우 존의 학생은 다른 구역의 학생보다 교수자의 움직임으로부터 자유롭다. 따라서 전통적인 대학 교실에서 골든 존을 사수하기 위한 학생 간의 경쟁이 펼쳐지기도 한다(Park & Choi, 2014).

이 연구 역시 학부 수준에서 증명 발표 활동에 적극적인 참여를 유발할 수 있는 수업이 될 수 있도록 학내의 ALC에서 진행되었다. 연구가 수행되었던 ALC는 강의실의 삼면이 칠판으로 되어 있고, 한 면의 칠판은 이동이 가능하였다. 이 강의실의 책상은 바퀴가 달려있어 모둠 구성을 자유롭게 할 수 있었다. 또한, 프로젝터가 곳곳에 설치되어 있어 학생이 앉아 있는 자리에서 가장 가까이 설치된 프로젝터가 투영하는 화면을 통해 수업에 필요한 자료를 한눈에 확인할 수 있었다.

〈정수론〉 수업에서 세 명의 조교가 서면 과제 수합 및 채점, Classprep 과제 수합, 수업 현장에서의 활동을 분담하여 보조하였다. 연구자는 세 명의 수업 조교 중 한 명으로 활동하였고, 학생의 서면 과제와 포트폴리오 과제를 수합하고 채점하고 이에 대해 피드백을 진행하였다. 또한, 매 수업 현장에 방문하여 학생의 활동을 참여 관찰하였다.

1.2. 교수자 및 연구 참여자

〈정수론〉 수업의 교수자는 20년 이상 이 교과를 학부 과정에서 가르쳐 온 경력자이다. 특히 이 수업의 교수자는 학생의 수학 내용에 대한 암기식 학습을 지양하고, 수학 전공 서적에서 '수학적 정의-정리-증명(definition-theorem-proof)' 의 방식으로 제시하고 있는 천편일률적인 내용의 흐름을 탈피하고 수학 교실 내에서의 적극적인 참여를 통해 학생의 능동적인 수학적 지식의 구성을 도모할 수 있는 변형 무어 교수법(MMM, Modified Moore Method)으로 수업을 진행해왔다. Moore[3]에 의해 시작된 이 교수법은 수업 이외의 시간에 탐구 학습을 하고, 수업 중에는 자신의 발견한 증명에 대해 발표하는 수업 방법이다. 무어 교수법의 효과는 그의 제자의 업적을 통해 입증되었으며(권오남, 2009), 현재까지 여러 형태

3) Robert Lee Moore(1882-1994)는 오랜 시간 텍사스 대학의 수학 교수로 재직하였으며 증명을 가르칠 때, 증명하는 법을 가르치지 않는 교수로 유명했다. 펜실베니아 대학의 기하 수업에서 증명 방법을 일방적으로 가르쳐주는 것이 아니라 학생으로 하여금 증명 방법을 구성할 수 있게끔 수업을 구성한 것에서 무어 교수법이 출발하였다(Robert Lee Moore, n.d.).

의 변형 무어 교수법이 활용되고 있다. 따라서 교수자는 이 수업에서 학생이 주요 예제를 통해 수학적 사실을 발견하고, 이를 증명할 수 있게 구성된 내용 학습 자료를 미리 온라인 학습 게시판에 업로드하여 제공하였다. 이 자료는 여느 수학 서적과는 다르게 정리의 증명이나 예제의 풀이가 없다는 점이 특징이다. 또한, 수업 중에는 학생의 증명에 대한 피드백이나 관련된 수학적 아이디어, <정수론>의 수학사에 관한 설명을 제공하였으며, 학생 간의 논의를 촉진할 수 있는 논점을 제시하였다.

연구 참여자 모집은 <정수론> 수업 수강생 27명을 대상으로 하였다. 수학교육 혹은 과학교육(물리, 생물), 지리교육을 전공하고 있는 학생으로서, 학생은 1학년에서 4학년까지 골고루 분포되어 있었지만 <정수론> 수업이 2학년 전공 수업으로 개설되어 있었기 때문에 2학년 학생이 가장 많은 비중을 차지하였다. 수강 신청 기간과 학기 초에 학생의 증명 발표 수업에 관한 연구가 이 수업에서 이루어질 것이 공지되었다. 또한, 온라인 학습 게시판을 통해 연구 참여자 모집을 공지하였다. 이를 통해 연구 참여자를 모집하였으며, 연구 참여자는 자율적으로 이 연구에 참여하였다. 연구 참여자에게는 도중에 연구에 참여하지 않더라도 불이익이 발생하지 않음을 안내하였다.[4]

연구 참여자는 연구 수행 과정이 되었던 증명 발표와 질의응답에 자율적으로 참여하였다. 하나의 명제의 증명 발표를 에피소드로 칭하였기 때문에, 한 명의 연구 참여자가 여러 번의 발표와 질의응답에 참여한 경우도 있어 여러 에피소드에 등장하기도 한다. 하나의 에피소드에서 다뤘던 자세한 명제의 내용은 다음 하위 절에서 제시한다. 연구 참여자의 세부 정보를 정리한 것이 <표 Ⅲ-1>과 같다.[5]

---

4) 이 연구는 서울대학교 생명윤리심의위원회로부터 승인을(IRB No. 1710/003-001) 받고 진행되었다.

5) 연구 참여자의 이름은 모두 가명이다.

<표 Ⅲ-1> 연구 참여자의 세부 정보

이름	전공	학년	에피소드
여필	수학교육	2	에피소드 1
경수	수학교육	2	에피소드 1, 2, 3
성은	지리교육	4	에피소드 1, 3
태홍	수학교육	2	에피소드 2
경훈	수학교육	1	에피소드 2
영웅	수학교육	2	에피소드 3, 4
호승	수학교육	2	에피소드 4

1.3. 수업의 실행

수업은 2017년 9월 5일부터 12월 12일까지 일주일에 두 번씩 진행되었으며, 한 번의 수업은 75분으로 진행되었다. 수업은 모두 ALC에서 진행되었다. 학습 내용은 사전에 강의계획서와 오리엔테이션을 통해 공지되었으며, 영문으로 작성된 학습 자료는 온라인 학습 게시판에 업로드되었다. 주별로 수업에서 다루게 될 증명은 온라인 학습 게시판에 일주일마다 공지되었으며 그 분량은 정리 15개 내외였다. 이 공지를 보고 수강생들은 수업 외 환경에서 서면 과제와 Classprep 과제를 수행하였으며, 과제의 증명은 국문이나 영문으로 작성해서 제출할 수 있었다. 자신의 증명을 발표하고자 하는 경우 온라인 학습 게시판에 댓글을 달아 자원하였다. 여러 학생이 같은 정리를 발표하고자 하는 경우에는 조교가 학생들의 증명을 비교해보고 동일한 원리에 기초한 증명이면 먼저 댓글을 단 학생이 발표하였으며 그렇지 않은 경우에는 모두 발표할 수 있게 하였다. 과제로 제공되었지만, 발표 지원자가 없는 정리는 질문이 있는 경우에 해당 증명을 함께 논의하였고, 질문이 없는 경우에는 정리를 모두 이해하였다는 교수자와 학생의 합의 하에 다음 정리의 발표로 수업이 이어졌다.

수업 시작 직전에는 모둠별 조 구성과 발표자의 증명 작성이 이루어졌다. 모둠별 조 구성은 수업 시간마다 무작위 추첨 방식으로 새로운 조가 구성되었다. 이는 소외되는 학생 없이 모든 학생의 발표와 토론으로의

참여를 위한 것이었다. 발표자는 수업 시작 전에 미리 도착하여 교실 내부의 지정된 구역에 자신의 증명을 적었다. 발표자는 다른 학생의 발표를 보면서 수업에 참여하다가, 자신의 차례가 되면 자신의 증명을 적은 칠판 앞쪽에 서서 교수자와 청중에게 자신의 증명을 설명하였다. 설명을 마치고 난 뒤에, 교수자는 학생에게 발표자의 증명에 대한 질문과 코멘트를 유도하였다. 질문에 대한 답변과 동료의 코멘트에 대한 자신의 의견을 전달하는 것이 발표자의 일련의 발표가 되었다. 이 과정에서 교수자는 발표자의 증명에 오류가 발견되거나 논의가 필요한 부분은 모둠별로 논의하고 수정할 수 있게 하였다.

이 연구의 결과는 권위의 양상에 따라 에피소드별 증명 발표 상황에서의 발화를 발췌하여 제시한다. 이 에피소드에서 제시한 학생의 증명은 교과서에서 일반적으로 제시되는 증명의 구조적인 면과 주요 아이디어를 활용하는 면에서 차이가 있다. 에피소드별로 제시하는 명제를 정리하면 〈표 Ⅲ-2〉와 같다. 에피소드는 학생이 〈정수론〉 교육과정에서 학습하는 계열성을 고려하여 에피소드의 연번을 매겼다.

<표 Ⅲ-2> 에피소드명 및 증명 발표에 사용된 명제

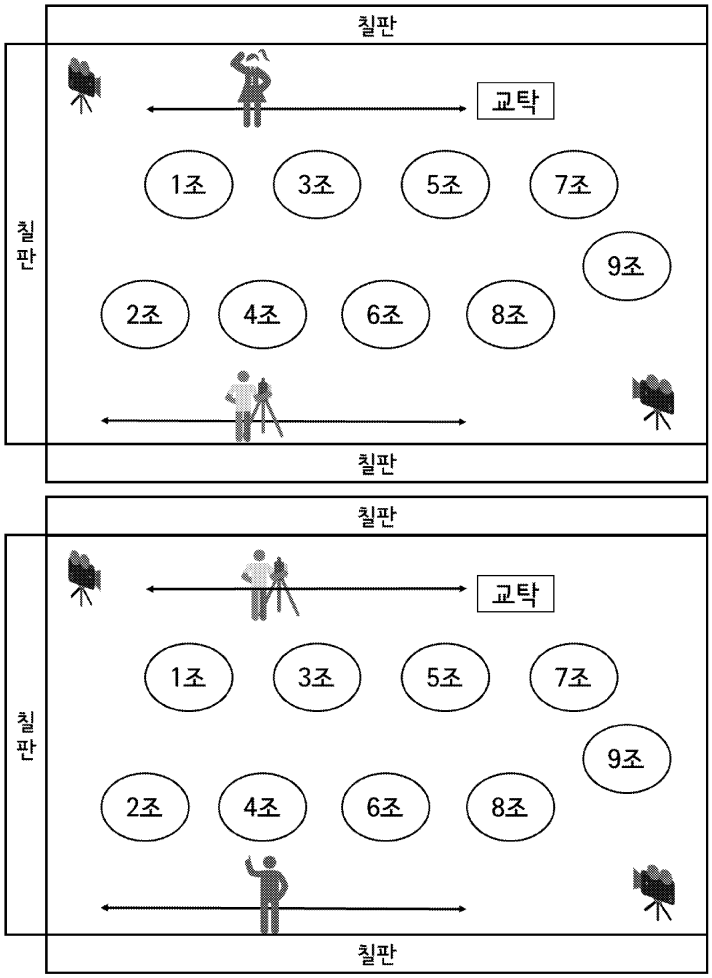
에피소드	에피소드명	명제[6]
에피소드 1	유일 소인수분해 정리의 활용	Given $n+1$ natural numbers, say a_1, a_2, ... , a_{n+1}, all less than or equal to $2n$, then there exists a pair, say a_i and a_j with $i \neq j$, such that $a_i \mid a_j$.
에피소드 2	소수의 무한성	There are infinitely many prime numbers.
에피소드 3	다항식 합동의 활용	Suppose $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ is a polynomial of degree $n > 0$ with integer coefficients. Then $f(x)$ is a composite number for infinitely many integers x.
에피소드 4	위수 정의를 위한 도입[7]	Let a and n be natural numbers with $(a,n)=1$. Then there exist natural numbers i and j with $i \neq j$ such that $a^i \equiv a^j \pmod{n}$.

6) <표 Ⅲ-2>에서 제시된 명제의 교과서적 증명은 부록에서 제시한다.
7) 위수는 a와 n이 서로소일 때, $a^k \equiv 1 \pmod{n}$을 만족하는 최소의 자연수 k로 정의한다.

2. 자료의 수집 및 분석 방법

2.1. 자료 수집 방법

<정수론> 수업 개강 전·후로 연구 진행에 관한 충분한 안내가 이루어지고 난 뒤 2017년 9월부터 12월 사이에 비디오 녹화를 통한 자료 수집이 진행되었다. 비디오 녹화는 [그림 Ⅲ-1]과 같이, 두 대의 고정 카메라로 교실 전체에서 증명을 발표하는 학생에게 질문하고, 피드백하는 학생의 모습을 녹화하였다. 또한, 증명 발표를 카메라에 자세히 담을 수 있



[그림 Ⅲ-1] 촬영 교실 상황

도록 연구자는 한 대의 카메라의 위치를 이동해가며 촬영을 진행하였다. 연구자는 학생의 수업 참여에 방해가 되지 않도록 카메라를 위치를 이동할 때 교실을 가로지르지 않고, 교실 외곽에서 학생의 발표와 질의응답, 교수자의 설명을 촬영하여 수집하였다. 수집된 촬영본을 바탕으로 5차시의 수업에서의 활동에 기초하여 수업 구성원의 위치에 따른 권위의 양상을 연구 결과에서 제시한다.

학생이 제출한 서면 과제와 Classprep에 제출한 과제 또한 수집되었다. 서면 과제의 평가가 이루어지고 난 후에 사본을 복사한 뒤에 학생에게 배부되었고, 사본은 연구자에 의해 보관되었다. Classprep에 제출한 과제는 사진, 혹은 워드 타이핑의 형태로 수집되었다. 또한, Classprep으로부터 학생의 논리성, 명료성과 참신성에 관한 동료평가 결과 역시 엑셀 파일로 수집되었다. 수집한 서면 과제와 Classprep 과제는 학생의 증명 발표의 전반을 이해하기 위한 보조 수단으로 사용되었다.

2.2. 자료 분석 방법

이 연구의 자료 분석은 발표 학생이 작성한 증명, 학생의 발표와 그 발표에 대한 질의응답, 교수자의 설명을 분석의 범위로 하였다. 우선, 연구자는 발표 학생이 발표를 위해 작성한 증명과 서면 과제로 제출한 증명에 대한 검토를 수행하였다. 이 과정에서 서면 과제로 제출한 증명과 발표를 위해 작성한 증명 사이에 차이가 있는 경우가 있었지만, 이러한 차이의 원인에 대한 분석은 이 연구의 초점에 맞지 않기 때문에 수행되지 않았다.[8)]

다음으로, 촬영된 비디오 자료에 삽입된 연구 참여자의 음성을 전사하면서 수업 전반의 깊이 있는 이해를 시도하였다. 발표자는 증명을 미리 작성하고 난 뒤에 증명의 첫 줄부터 마지막 줄까지 하향식(top-down)으

8) 발표자가 발표를 위해 작성한 증명은 연구 결과에서 확인할 수 있다. 증명에 사용된 발표자가 이전에 학습한 내용의 명제, 서면 과제로 제출한 증명은 부록을 통해 제시하였다. 독자의 오독을 미연에 방지하기 위해 학생이 직접 작성한 증명 대신 연구자가 타이핑하여 제시하였다.

로 발표하는 경우와 직접 자신의 증명을 적어 발표하는 경우로 나뉠 수 있었다. 이러한 발표에서의 증명 작성의 차이 역시 연구의 초점이 아니므로 분석에서 제외하였다.

대학생의 증명 발표에서 나타나는 권위를 탐구하기 위해서 교수자와 학생의 발화를 분석한다. 이를 위해 분석은 Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)이 제안한 담화 분석틀에 기초한다. Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)은 Herbel-Eisenmann & Wagner(2010)에서 제시한 언어적 다발(lexical bundles)을 발전하여 권위 구조를 분석할 수 있는 담화 분석틀을 제시하였다. 여기서 권위 구조는 개인적 권위, 권위의 담화, 담화적 필연성, 개인적 범위로 분류되었다. Herbel-Eisenmann & Wagner(2010)의 연구는 영어로 수행된 발화에 기초하였기 때문에, 세 단어 이상의 발화자의 공통된 언어적 묶음이 관찰될 수 있었다. Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)의 분석틀은 이를 발전시킨 것이다. 하지만, 이 연구 환경은 한국어로 수업이 진행되었기 때문에 선행 연구에서 제시한 언어적 다발을 한국어 맥락에서 번역하여 사용하였고, 권위의 언어적 증거를 바탕으로 데이터에 기초하여 코딩 작업을 수행하였다. 이를 정리하면 <표 Ⅲ-3>과 같다.[9]

개인적 권위는 발화자의 권위를 따르기를 유도할 때 나타나는 언어에 기초한 권위 구조로서 1인칭 대명사와 2인칭 대명사가 동시에 나타나는 언어 구조를 갖는다. 간혹 1인칭 혹은 2인칭 대명사가 생략된다고 하더라도 언어적 습관에 의해 생략된 대명사를 유추해낼 수 있다면 이를 개인적 권위로 구분한다. 한국어로 진행된 수업이므로, 이러한 발화를 코딩하기 위해서 발화자의 인칭대명사 표현에 주목하였다. 선행 연구를 따라 발화자가 사용하는 인칭대명사를 1인칭 혹은 2인칭 대명사를 유추해낼 수 있는 경우 개인적 권위가 드러난 발화로 분류하였다. 보통 이러한 형태의 표현은 청유형 문장에서 나타났다.

개인적 범위는 교실 내부의 교수자 혹은 학생이 내리는 판단으로서 드러나는 권위이다. 이는 새로운 상황에 대한 가정이나 변화의 가능성을

9) Wagner & Herbel-Eisenmann(2014)의 분석틀을 재구성하여 제시하였다.

드러내는 담화에서 발견할 수 있다. 또한, 그러한 가능성을 발화자와 청자가 모두 인식하고 있다는 전제하에 이끌어지는 논의에서 발견할 수 있다. 예를 들어, '~할 수 있을 것이다'와 같이 변화의 가능성을 확인할 수 있는 경우 개인적 범위의 권위 구조가 드러났다고 볼 수 있다.

권위의 담화는 규칙을 준수해야 하는 상황에서 드러나는 권위 구조로 조동사 표현으로 언어 구조를 판별할 수 있다. '~할 필요가 있다', '해야 한다'와 같은 표현에서 권위가 나타남을 제시하였다. 증명에 대한 의사소통 상황에서는 진위를 밝혀낼 필요성의 여부에 대한 발화에서 이러한 표현이 나타났다. 즉, 증명 과정에서 구체적인 표현으로의 작성에 대한 필요성에 관한 것이다.

담화적 필연성은 수학 교실 내에서 예측 가능한 상황을 표현하는 담화에서 드러나는 권위 구조이다. 증명 의사소통 상황에서 청중이 인지 여부와 관계없이 변화하는 상황에 대해 일어날 일을 알고 있는 것처럼 말하는 표현이 된다. 이는 수학적 내용을 언급할 때 드러나는 존재성과 발화에서 드러나는 당위성에 대해 표현된다.

권위에 관한 연구는 권위 구조 및 권위의 변화에 대한 분석이 이루어지는 것이 일반적이다(예, Hufferd-Ackles, Fuson, & Sherin, 2004; Skovsmose, 2001). 개인적 권위와 개인적 범위는 교실 내부 구성원의 경험과 선택에 따라 권위가 나타난다는 점으로 내재적 요인(immanent factors)으로 제시한다. 반면 내재적 요인에 영향을 받지 않고 드러나는 요인이 외재적 요인(transcendent factors)이 되며, 여기에는 권위의 담화와 담화적 필연성의 권위 구조가 포함된다. 다시 말해, 발화에서 권위의 담화와 담화적 필연성의 권위 구조가 나타났을 때 외재적 요인의 권위가 발현된 것이며, 개인적 권위와 개인적 범위의 권위 구조가 나타났을 때 내재적 요인의 권위가 발현된 것이다. 따라서 권위 구조 분석틀의 상위 범주를 외재적 요인과 내재적 요인으로 두고 분석한다.

이러한 선행 연구에서 제시한 분석틀의 발화는 교수자의 발화에 초점을 둔 것이었다. 하지만, Fried(2014)는 Wagner & Herbel-Eisenmann (2014a)이 제시한 교수자의 발화에서 드러난 권위 구조는 학생의 발화에

서도 동일한 특징이 나타날 것이라 하였다. 또한, 이 연구는 증명 발표가 중심이 되는 수업으로서 자신의 증명을 설명하는 학생이 발표를 수행하는 동안 교수자의 역할을 수행한다고 볼 수 있다. 즉, 이 연구 환경은 학생이 일정 부분의 교수자의 역할을 수행하지만, 교수자와 학생 사이의 관계가 동일하게 유지되었다. 따라서 Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)이 제시한 권위의 담화 분석틀을 이 연구에 적용하는 것이 무리가 없을 것이다.

Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)은 발화자의 같은 발화 안에서 권위 구조가 동시에 존재하는 경우가 빈번하다는 점을 언급하였다. 따라서 연구 결과에서 제시하게 될 발화자가 나타낸 권위 구조를 명료하게 제시하기 위해서, 발화자의 발화를 분리하여 분석하였다. 담화 분석에서 가장 낮은 수준의 발화 단위인 의사소통 이동(move), 의사소통 이동(move)의 모음인 교환(exchange), 주제를 도입하고 확장하는 발화들의 모음인 시퀀스(sequence), 담화 분석에 있어서 하나의 문제 혹은 시퀀스들의 모음인 에피소드(episode)로 발화를 구분할 수 있다(Truxaw & DeFranco, 2008). 권위 구조를 포착하고 명료하게 연구 결과를 제시하기 위해서 의사소통 이동의 단위로 발화자의 발화를 구분하여 분석하였다. 또한, 발화자의 발화에서 권위 구조가 드러난 문구를 굵게 표시함으로써, 권위 구조의 코딩 결과를 제시하였다. 또한, ‘학생의 발표 - 발표자의 청중과의 질의응답 - 교수자의 설명’이 모두 잘 드러난 화제이면서 발화자의 권위가 두드러지게 나타나는 하나의 명제에 대한 증명 발표를 에피소드로 칭하였다.

발표자의 권위의 모습을 심도 있게 관찰하기 위하여 전사록의 분석을 바탕으로 촬영 동영상에서의 발표자의 발표와 비교하면서, 발표자의 권위의 변화가 일어난 순간을 포착하고자 하였다. 촬영 동영상에서 작성된 증명의 어떤 부분에서 발표자의 권위 변화가 일어났는지 확인할 수 있었다. 이에 발표자가 작성한 증명의 일부에 굵게 표시하거나 밑줄을 그어 표시함으로써, 해당 부분에서 발표자의 권위의 변화가 일어나게 된 배경에 대해 논할 것이다. 굵게 표시한 부분은 발표자의 내재적 요인의 권위

에서 외재적 요인의 권위로의 전환이 이루어진 부분이다. 밑줄을 그어 표시한 부분은 발표자의 외재적 요인의 권위에서 내재적 요인의 권위로의 전환이 이루어진 부분이다.

2.3. 타당도와 신뢰도

연구자는 <정수론> 의 모든 수업에 참여하여 학생의 증명 발표와 질의응답, 소집단 토론 활동에 대한 지속적인 관찰을 수행하였다. 연구자는 해당 수업의 조교로서 학생의 출결을 확인하고 서면 과제 및 포트폴리오 과제의 채점을 수행하는 등의 업무를 수행하였다. 이러한 과정에서 연구자는 수강생과의 친밀감이 형성될 수 있도록 하였으며, 수업의 루틴이 충분히 반복되고 난 이후에 연구 참여자 모집과 자료 수집이 이루어졌다. 2017년 2학기 <정수론> 수업에서 진행된 자료 수집은 짧은 자료 수집 기간으로 인한 한계가 발생할 수 있다. 따라서 동영상 촬영 자료뿐만 아니라 칠판에 작성된 증명을 촬영한 사진 자료, 학생들이 서면으로 작성하여 제출한 과제의 사본, Classprep의 활동 자료를 수집함으로써 자료 수집의 삼각화를 시도하였다. 이를 통해 자료 분석의 내 · 외적 타당도를 높이고자 하였으며, 분석틀과 분석 방법의 적절성은 수학 교육 연구 전문가 집단에 의해 검증되었다. 이러한 과정을 거쳐 자료 분석의 신뢰도를 높이고자 하였다.

<표 Ⅲ-3> 권위 구조 분석틀(Wagner & Herbel-Eisenmann, 2014a, p. 875)

구분	권위 구조	권위의 언어적 증거	특정한 언어적 단서에 포함되지 않는 권위 구조의 일반적 지표	수업 내 발화 예시
내재적 요인 (Immanent factors)	개인적 권위 (Personal authority)	· 1인칭과 2인칭이 같은 문장에 표현됨 · 닫힌 질문 · 독점적인 명령 · 동시다발적인 반응	명시적으로 이유를 제시하지 않은 채, 누군가 다른 사람의 의도를 따르고 있다는 증거	· 이 집합을 생각해보세요. · 팀에서 같이 한번 논의를 해보고 다시 증명을 해보는 걸로.
	개인적 범위 (Personal latitude)	· 열린 질문 · 포괄적인 명령 · 변화를 암시하는 동사 · 대안적 선택을 제안하는 문장의 구성	자신이나 다른 사람들이 선택하고 있다는 것을 인지하고 있다는 증거	· 보여줄 수 있는 것 같습니다. · 어떻게 사용했는지 설명해 줄 수 있을까요?

구분	권위 구조	권위의 언어적 증거	특정한 언어적 단서에 포함되지 않는 권위 구조의 일반적 지표	수업 내 발화 예시
외재적 요인 (Transcendent factors)	권위의 담화 (Discourse as authority)	· 필요성을 제안하는 조동사	요구하는 사람이 없는 곳에서 특정 행동을 해야 한다는 증거	· 항상 소수가 되어야 합니다. · 전혀 필요 없는 것 같아요.
	담화적 필연성 (Discursive inevitability) [10]	· 현재진행 미래용법의 동사	사람들이 알고 있는 이유를 밝히지 않고 일어날 일을 알고 있는 것처럼 말하는 증거	· 해가 존재하게 되는 거예요. · 가장 큰 성분이 존재하게 될 것인데.

10) Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)의 후속 연구에서 '담화적 필연성(Discursive inevitability)' 대신 '절대적 담화의 권위(Implicit discursive authority)'라는 표현을 사용하고 있다(Andersson & Wagner, 2019; Wagner & Herbel-Eisenmann, 2018 참조). 이를 도출해내는 지표상의 차이가 없다는 점에서, 이 연구에서는 '담화적 필연성'의 용어를 채택하여 사용한다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 발표자의 전환된 권위

이번 절에서는 자신의 증명을 전달하는 발표자가 나타낸 전환된 권위의 양상을 살펴본다. 에피소드별로 하나의 증명에 대해 여러 학생이 발표하기도 했으며, 한 명의 학생이 여러 번 자신의 증명을 청중에게 전달하기도 하였다. 자신의 권위를 소개하는 과정에서 발표자는 전환된 권위의 모습을 보였다. 발표자가 보였던 권위의 전환과 그것의 의미를 중심으로 분석한다.

1.1. 외재적 요인의 권위로의 전환

발표자는 개인적 범위 혹은 개인적 권위와 같은 내재적 요인의 권위를 나타내면서 발표를 시작하였다. 자신이 발표할 명제를 소개하고, 증명의 방향을 설정하는 것으로부터 내재적 요인의 권위를 드러냈다. 발표자가 증명에 대한 의사소통을 지속하는 과정에서 권위의 담화 혹은 담화적 필연성과 같은 외재적 요인의 권위로의 전환이 포착되었다. 이러한 형태의 권위의 전환은 모든 발표자에게서 발견할 수 있었다. 이번 하위 절에서는 내재적 요인의 권위를 드러내는 것으로 발표를 시작하여 한번의 권위의 전환을 통해 외재적 요인의 권위를 드러내는 것으로 발표를 마무리한 학생의 발표 사례를 중심으로 제시한다.

에피소드 4는 위수 정의를 위해 필요한 성질 중의 하나로서 다뤄지는 증명을 다루었다. 에피소드 4 이전에 두 자연수가 서로소라는 조건을 바탕으로 자연수의 거듭제곱을 활용한 합동식의 증명이 다루어졌다. 이 증명은 귀류법을 사용하여 거듭제곱꼴 형태의 두 자연수가 합동이 되지 않는 자연수가 존재한다는 점을 보임으로써 모순을 유도하는 명제였다. 발표자였던 호승 역시 귀류법을 이용하여 증명하였고, 증명 발표에서의 구체적인 호승의 발화는 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 에피소드 4 발표자(호승)의 발화 및 권위 구조

발표자의 발화	발표자의 권위 구조
어, 4.4 정리가 말해주는 건 "a랑 n이 서로소일 때, 임의의 i랑 j가 같지 않은 두 자연수 i, j가 존재해서 a_i랑 a_j랑 법 n에 대해서 합동이 되는 i, j를 **찾을 수 있다" 라는 얘기인데요.**	개인적 범위
귀류법 가정, 귀류법 증명 방식을 사용해서 모든 i, j에 대해서	
그냥 여기는 **자연수로 바꾸는 게 낫겠네요.**	개인적 범위
모든 i, j에 대해서 a^i랑 a^j이 **법 n에 대해서 합동이 아니다라고 해볼게요.**	개인적 권위
그러면 a부터 a^n까지 모아놓은 집합은 complete residue system**이 되어요.** 왜냐하면 여기 개수가 n개고 모든 i, j에 대해서 **합동이 아니라고 했으니까**	담화적 필연성
모순이 생겨서 이렇게 합동이 되는 i, j가 존재하게 돼요.	담화적 필연성

호승은 발표할 증명의 명제를 소개하는 과정에서 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈으며, 귀류법 가정을 통해서 도입을 서술할 수 있었던 수식을 소개하는 과정에서 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈다. 그 과정에서 어떠한 자연수 i, j를 생각하더라도 a^i과 a^j이 서로 합동일 수 없다는 점을 설정하는 부분에서 청중의 암묵적인 동의를 유도하는 개인적 권위의 권위 구조를 드러냈다. 자신의 조건 설정으로 인해 집합 $\{a, a^2, ..., a^n\}$은 완전잉여계 집합이 된다는 점을 이전의 서술로부터 유기적으로 연역을 통해 설명하였으며, 이 과정에서 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다. 완전잉여계 집합의 원소의 개수가 n개이지만, 자연수가 되는 임의의 원소 a^n에서 a^{n+1}을 생각할 때, 합동이 되는 원소를 완전잉여계 집합에서 생각해줄 수 있기 때문에 합동이 되는 두 개의 완전잉여계 집합의 원소를 찾을 수 있어 모순이 된다는 점을 담화적 필연성의 권위 구조를 드러내며 설명하였다.

호승이 나타낸 권위는 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환이 있었다. 이러한 전환은 호승의 발표에서 한번만 나타났으며, 호승은

자신이 증명에 사용한 이전에 배웠던 정리를 이용하는 과정을 설명하는 과정에서 권위의 전환의 모습을 보였다. 증명 발표에서 작성한 호승의 증명을 정리하면 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 에피소드 4 발표자(호승)의 위수 정의를 위한 도입에 관한 증명

발표자	발표를 위해 칠판에 작성한 증명
호승	$(a,n)=1$, $\exists$ i, $j\in\mathbb{N}$ with $i\neq j$ s.t $a^i\equiv a^j \pmod n$ pf) Contrarily, suppose that for $\forall$ i, $j\in\mathbb{N}$, $a^i\not\equiv a^j \pmod n$ Then, the set $\{a,a^2,\ldots,a^n\}$ are complete residue system by thm 3.17. Since $a^n\in\mathbb{N}$, $a^{n+1}\equiv a^j \pmod n$ for $1\leq j\leq n$. This contradicts to the suppose. Thus, there exists i, $j\in\mathbb{N}$ with $i\neq j$ s.t. $a^i\equiv a^j \pmod n$.

호승의 증명의 도입은 귀류법 가정을 이용하기 위해 자연수 i, j의 존재성을 부정함으로써, 모든 자연수 i, j에 대해서 법 n에 대해 합동이 되는 a^i와 a^j은 존재하지 않는다는 가정을 세우고 여기에서 모순을 이끌어내는 아이디어를 활용하였다. 모순을 이끌어내는 과정에서 어떠한 두 개의 정수가 법 n에 대해서 합동이라면 법 n에 대해 완전잉여계 집합이 된다는 정리 3.17을 이용하였다. 임의의 자연수 지수의 완전제곱꼴의 형태가 되는 a^n에 대해서, a^{n+1}은 완전잉여계 집합의 정의에 의해 완전잉여계 집합의 원소 중에서 동일한 원소를 필요로 한다. 이 사실로부터 가정에 모순을 유도할 수 있기 때문에 증명을 마무리할 수 있다.

앞서 서술되었던 것과 같이 집합 $\{a,a^2,\ldots,a^n\}$가 완전잉여계 집합이 된다는 점을 이전에 배웠던 정리를 이용하여 설명하는 과정에서 호승의 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환이 발생하였다. 정리 3.17은 학습의 위계에 비추어보았을 때, 학습 이후에 어느 정도 시간이 지난 후에 호승에 의해 다루어진 것이다. 따라서 정리 3.17의 내용을 바탕으로

증명의 타당화 과정을 거친 호승은 자신이 사용한 명제의 내용을 청중에게 명확하게 전달해야 했다. 이를 위해 호승은 권위의 전환을 통해 증명 발표를 수행하였다.

발표자는 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환이 있었다. 이는 증명을 발표하는 모든 학생에게서 나타난 공통적인 특징이었으며 증명 구성의 내용, 증명 방법에 관한 설명을 위해서 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환이 있었다.

1.2. 내재적 요인의 권위로의 전환

발표자 중에서 일부는 외재적 요인의 권위에서 내재적 요인의 권위로의 전환을 드러내기도 했다. 이러한 전환은 반복적인 권위의 이동이 되어 다시금 외재적 요인의 전환으로 연결되기도 했다. 이번 하위 절에서는 외재적 요인의 권위를 드러내는 것에서 내재적 요인의 권위를 드러내는 것으로의 전환을 보인 발표 사례를 중심으로 결과를 제시한다.

에피소드 1은 유일 소인수분해 정리가 활용되는 명제에 관한 증명 발표였다. 이 증명은 유일 소인수분해를 학습한 뒤에 나오는 내용으로, 1과 $2n$ 사이에 있는 $n+1$개의 자연수 중에서 어떤 한 자연수가 다른 한 자연수의 배수가 되는 것을 증명하는 것이다. 학생에게 제공된 강의 자료에도 이 증명은 산술의 기본정리를 이용하여 해결할 수 있는 명제임이 힌트로 제공되어 있다. 이 명제의 증명은 유일 소인수분해 정리를 이용하여 a_i를 표현하는 것과 $i \neq j$일 때, a_i와 a_j의 크기에 관계없이 $a_i | a_j$임과 비둘기집의 원리를 이용하여 $a_i = a_j$를 만족하는 i, j가 존재함을 작성하는 것이 주요한 증명 구성에 필요한 내용이다. 이 증명은 여필과 성은 두 명의 학생이 발표하였고, 먼저 증명 발표에서의 구체적인 여필의 발화는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

여필은 자신의 오류를 청중에게 보고하는 과정과 자신의 짐작을 설명하는 과정에서 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈다. 자신의 주장을 특별한 정당화 없이 사실이어야 한다는 점을 설명하는 과정에서 담화적 필

<표 Ⅳ-3> 에피소드 1 발표자(여필)의 발화 및 권위 구조

발표자의 발화	발표자의 권위 구조
아무튼 설명해보자면, 1부터 $2n$까지의 숫자를 놓고요.	
1부터 $2n$까지의 숫자가 있는데 이걸 반으로 쪼개서 1부터 n하고 $n+1$과 $2n$ 사이의 범위로 나누는데	
1하고 n 사이에서는 x개를 했고, $n+1$하고 $2n$ 사이에는 y개를 뽑았어요.	
그런데 여기서 조금 난해, **문제가 있는 것 같은데,** 1과 n 사이에 x개를 뽑은 숫자는 $n+1$과 $2n$사이에 적어도 x개가 있으니까 **적어도 x개의 배수가 있다고 생각해요.**	개인적 범위
이거는 설명 못 하겠어요. 당연하다고 생각했는데, **당연한 게 아닌 것 같은 게 되어서.**	개인적 범위
(중략)	
(배수가) 최소 한 개씩은 있다는 거죠.	담화적 필연성
여기 있는 숫자들의 배수가 **각각 한 개씩은 있어서 x개가 된다는 거예요.** 최소한.	담화적 필연성
그래서 그런데, 결론적으로 뽑을 때는 $x+y$가 $n+1$개가 되게 뽑았는데, **y의 최대 개수는 n이잖아요?**	개인적 권위
그래서 x는 **꼭 한 개 체크해야하는데,** x가 한 개 있을 때, 한 개는 그 배수가 **뽑혀야 하니까** 이 범위에서.	담화적 필연성
그래서 이거를 만족하는 **해가 존재하게 되는 거예요.**	담화적 필연성

연성의 권위 구조를 나타냈다. 이것을 참이라고 가정했을 때, $x+y=n+1$을 만족하게 되면 y는 $n+1$과 $2n$ 사이에서 선택할 수 있는 정수의 개수이므로 $\max(y)=n$이 된다는 점을 닫힌 질문의 형태로 전달함으로써 개인적 권위의 권위 구조를 드러냈다. 여기서 $x=1$이고, 자신이 이전에 작성한 증명 내의 주장에 의해 x의 배수를 $n+1$과 $2n$ 사이에서 하나의 정수를 선택할 수 있다는 점을 담화적 필연성의 권위 구조를 드러내어 설명하였다.

여필은 내재적 요인의 권위와 외재적 요인의 권위 사이의 반복적인 전환을 보였다. 먼저, 여필은 자신이 사실이라고 상정하는 부분에서의 설명과 $x+y=n$으로부터 $x=1$임을 정당화 과정에서 내재적 요인에서 외

재적 요인의 권위로의 전환을 나타냈다. 자신이 작성한 증명에서 중심이 되는 아이디어를 전달하기 위해 명제의 설명이나 전략을 전달하는 것과는 다른 외재적 요인의 권위로의 전환을 유도한 것이다. 다음으로, 후속 논의를 위한 증명의 서술을 설명하는 과정에서 외재적 요인에서 내재적 요인의 권위로의 전환을 나타냈다. 이는 증명을 결론을 도출하기 위한 자신의 증명의 방향을 재설정하는 과정에서 내재적 요인의 권위로의 전환이었다. 증명 발표에서 작성한 여필의 증명을 정리하면 <표 Ⅳ-4>와 같다.

<표 Ⅳ-4> 에피소드 1 발표자(여필)의 유일 소인수분해 정리 활용에 관한 증명

발표자	발표를 위해 칠판에 작성한 증명
여필	We pick x numbers between 1 and n. And we pick y numbers between $(n+1)$ and $2n$. Then we know that x numbers between 1 and n **have at least x multiples between $(n+1)$ and $2n$ and they' re different.** Since $x+y=n+1$ and $\underline{\max(y)=n,}$ **there must exist a pair**, say a_i, a_j with $i \neq j$ s.t $a_i \mid a_j$.

여필이 작성한 증명은 유일 소인수분해를 이용하지 않은 증명으로 이전에 배웠던 정리를 활용하여 명제의 구조를 해석하는 과정에서 교과서적 증명과 차이가 있었다. 여필은 강의 자료의 힌트에도 불구하고, 유일 소인수분해 정리를 이용하지 않고, $2n$개의 자연수를 두 개의 묶음으로 나누어, 각각의 배수가 존재한다는 점을 이용해서 증명을 작성하였다. 발표 이전에 이미 여필은 스스로 이러한 방법에 오류가 있을 수 있다고 자각하였기 때문에 여필의 발표는 자신의 증명의 아이디어를 소개하고 자신의 증명이 가능할 수 있는지의 여부에 대해서 논하게 되었다.

실제로 이 증명에는 오류가 있다. 예를 들어, $n=4$일 때를 생각해보자. 1과 4 사이에서 x를 4라고 하면, $n+1=5$와 $2n=8$ 사이에서 1, 2, 3, 4

의 배수를 서로 다른 수가 되도록 선택할 수는 없다. 따라서 여필의 증명에서 사용된 표현에는 오류가 있었다.

여필은 증명에서 오류가 발생할 여지가 있는 언어적 표현을 설명하는 과정에서 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환을 드러냈다. 먼저, 1과 n 사이에서 x개의 자연수를 택하였을 때, x개의 서로 다른 배수가 $n+1$과 $2n$에서 나타나는 점을 주장하는 부분에서 전환이 발생했다. 그것은 작성된 증명에서 이전에 배웠던 정리의 사용 없이 여필의 직관에 의존하여 서술된 표현이었다. 또한, $x=1$이 되어 대응되는 배수가 있다는 점을 설명하는 부분에서 전환이 일어났다. $x+y$는 명제에서 주어진 자연수의 개수가 $n+1$이므로 판단될 수 있으며, y는 여필의 증명에 따르면 $n+1$과 $2n$ 사이에 택할 수 있는 정수의 개수이므로, $\max(y)$는 n이다. 그렇기 때문에 $x=1$이며, 그것의 의미는 1과 n 사이에 선택되는 자연수의 개수가 1개다. 이 자연수는 여필의 설명에 기초하였을 때, 배수가 존재해야만 한다는 것이다.

한편, 여필은 자신이 이용한 수학적 사실을 바탕으로 하여 $\max(y)=n$임을 설명하는 과정에서 외재적 요인에서 내재적 요인의 권위로의 전환이 있었다. $x+y=n+1$이고, $\max(y)=n$이라는 점은 여필이 이용한 수학적 사실에 기초하여 증명을 구성한 것이다. 이는 여필이 자신의 직관에 의존한 수학적 사실에 기초하여 증명의 방향을 설정한 것으로 해석할 수 있다.

에피소드 1에서 성은은 여필의 발표에 이어 자신의 증명을 발표하였다. 성은의 증명은 여필의 증명 아이디어와는 다른 아이디어를 통해 증명된 것이다. 구체적인 성은의 발화는 <표 Ⅳ-5>와 같다.

<표 Ⅳ-5> 에피소드 1 발표자(성은)의 발화 및 권위 구조

발표자의 발화	발표자의 권위 구조
Unique Factorization **정리에서 a_i가 이런 식으로 인수분해 되거든요.** a_i들이 1부터 $n+1$까지	담화적 필연성
그 다음에 map을 정하는데, 얘는 우리가 모아 놓은 a_i들에서 1에서 n까지의 집합으로 **가는 건데요.**	개인적 범위
어떻게 정의하냐하면 p_i로 하는데 여기서 이것만 가져오는 map이에요.	
그러면 p_i들은 애초에 **이거 셋팅에 의해서 여기 들어가게 돼요.**	권위의 담화
그리고 Unique Factorization**에 의해서 이게 Well-defined 되어 있어요.**	담화적 필연성
그러니까 다른 표현이 그 지수가 같은데 p_i 여기 있는 **홀수부가 다를 수 없다는 거예요.**	담화적 필연성
그러면 Well-defined되고, 그런데 여기는 애초에 distinct a_i들을 모아놨기 때문에 이거의 cardinality는 $n+1$이고 여기는 n이기 때문에 Pigeonhole Principle**에 의해서 Injective가 되어요.**[11]	담화적 필연성
Injective 정의에 의해서 어떤 index가 있어서 **그 이미지가 같겠죠.**	담화적 필연성
p_i랑 p_j가 같은 경우가 생기는데 이걸 간단히 p라고 할게요.	
그걸 다시 **a_i로 돌아가는 거예요.**	개인적 범위
그러면 a_i와 a_j는 이렇게 되어 있잖아요.	
그러면 r_i랑 r_j는 자연수이니까 **비교가 가능해요.**	개인적 범위
그래서 Without loss of generality, suppose하고 이렇게 **가정할 수 있어요.**	개인적 범위
그러면 우리가 전에 배웠던 2장에 어떤 정리에 의해서, **이 셋팅에 의해서 a_i가 a_j를 나누게 돼요.**	권위의 담화

성은은 유일 소인수분해를 이용하여 a_i를 정리하는 과정에서 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다. 자신이 설정한 함수 f의 정의를 설명하는 부분에서 개인적 범위의 권위 구조가 나타났다. 이러한 함수가 잘 정의된(Well-defined) 함수라는 점과 단사함수(injective function)가 되기 때문에 같은 상이 존재한다는 점을 설명하는 과정에서 담화적 필연성의 권

11) 비둘기집의 원리(Pigeonhole Principle)에 의해 단사함수가 되지 않는다는 점을 증명에 작성하였지만, 성은은 발화에서 잘못 언급하였다.

위 구조를 드러냈다. 함수의 상의 표현을 이용하여 a_i와 a_j의 크기를 비교하여 a_i가 a_j의 표현을 이용하여 작성하는 부분의 설명에서 개인적 범위의 권위 구조가 드러났다. 과거에 자신이 배웠던 정리를 이용하여 a_i가 a_j를 사실이 된다는 점을 언급하는 과정에서 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다.

성은의 발표에서는 내재적 요인과 외재적 요인의 권위가 반복적으로 전환되는 모습을 포착할 수 있었다. 먼저, 자신이 설정한 표현을 이용하는 부분과 자신이 정의한 함수를 설명하는 부분에서 외재적 요인에서 내재적 요인으로의 권위 전환이 있었다. 다음으로, 설명을 강화하기 위한 근거를 설명하는 부분에서 내재적 요인에서 외재적 요인으로의 권위 전환이 있었다. 특히, 성은의 이러한 전환은 권위의 담화로의 전환이었다는 점에 주목할 수 있다. 자신의 증명의 정당화를 위해, 이전에 설정해 두었던 수학적 사실이나 이전에 배웠던 정리의 권위에 의존하였던 것으로부터 권위의 담화의 권위 구조가 나타난 것이다. 증명 발표에서 작성한 성은의 증명을 정리하면 <표 Ⅳ-6>과 같다.

<표 Ⅳ-6> 에피소드 1 발표자(성은)의 유일 소인수분해 정리 활용에 관한 증명

발표자	발표를 위해 칠판에 작성한 증명
성은	By U-F, $a_i=2^{r_i}p_i$ for $1 \le i \le n+1$ where $r_i \ge 0$, $p_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ Def a map $\underline{f:\{a_i\}_{i=1}^{n+1} \to \{1,2,\ldots,n\}}$ $\boldsymbol{f(a_i) \in p_i}$ By P. P. f is not injective. $\exists i \ne j,\ p_i = p_j = p$ $\underline{a_i=2^{r_i}p}$, $a_j=2^{r_j}p$ $r_i \le r_j$ $\boldsymbol{a_i \mid a_j}$.

성은의 증명은 유일 소인수분해 정리를 이용하여 a_i를 표현하였고 비둘기집의 원리를 이용하였다는 점에서 기존의 교과서적 증명과 비교하였을 때 차이가 없어 보인다. 다만, 비둘기집의 원리를 이용하는 방법에서 교과서적 증명과 차이가 있었다. 성은은 자연수 두 개의 집합을 설정하여 두 집합 사이의 함수 f를 설정하고, 이것이 단사함수가 되지 않는다는 점에 기초하여 증명하였다.

성은은 자신이 설정한 정의역과 공역을 들어 함수 f의 표현과 유일 소인수분해 정리를 사용한 a_i, a_j의 표현을 통해 이후의 논의를 전개하는 과정에서 외재적 요인에서 내재적 요인의 권위로의 전환이 있었다. 이는 자신의 증명의 전체적인 방향이나 증명에 활용되는 계산에 필요한 설정을 명확히 하기 위한 전환이었다. 또한, 유일 소인수분해 정리를 이용하는 과정과 성은이 이전에 배웠던 정리를 활용하는 과정에서 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환이 있었다. 성은이 작성한 증명 표현에서의 근거를 명확히 함으로써, 내용을 효과적으로 전달하기 위해 권위의 전환이 이루어진 것이다.

다른 에피소드에서도 이러한 발표자의 권위의 전환이 포착되었다. 소수의 무한성에 관한 정리에 관한 증명 발표인 에피소드 2에서 이 정리를 증명하는 일반적인 증명 아이디어는 귀류법을 이용하여 소수가 유한개 있음을 가정하고 유한개의 소수로부터 새로운 소수를 유도해냄으로써 소수의 개수가 유한하다는 가정에 모순을 이끌어내는 것이다. 이 명제의 발표자 태홍은 귀류법을 이용하여 증명하였고, 증명 발표에서의 태홍의 발화는 <표 Ⅳ-7>과 같다.

<표 Ⅳ-7> 에피소드 2 발표자(태홍)의 발화 및 권위 구조

발표자의 발화	발표자의 권위 구조
이거 이제 처음에 가정할 때, prime number가 finite하다고 가정을 하면, 그런 finite한 prime들을 묶어놓은 것을 집합 A라고 했을 때, A의 개수가	
이거 사실 '해석학 참조'라고 썼는데, **이건 좀 잘못된 것이겠죠?** 네…	개인적 범위
이게.. Compact 이런 걸 써가지고.	
어쨌든 A가 **finite한 prime number들의 집합이기 때문에 가장 큰 이제 A 성분이 하나 존재할 것인데,**	담화적 필연성
그거를 $M(A)$라고 뒀을 때, **둘 수가 있는데,**	개인적 범위
그런데 그거를 이제 2.34에서 어떤 자연수 n보다 무조건 큰 prime number가 언제나 존재한다는 걸 증명했으니까 그거를 사용하면 $M(A)$ **보다도 큰 prime number인 p가 어딘가에 p가 있어야 하는데,**	담화적 필연성
그거는 애초에 $M(A)$가 가장 큰 prime number라는 것에 모순이 되므로 이러한 finite하다는 가정이 틀리다는 것을 **보여줄 수 있는 것 같습니다.**	개인적 범위
그래서 infinite한 prime number가 **존재한다고 할 수 있다고 생각을 합니다.**	개인적 범위

태홍은 자신의 증명에서 작성한 '해석학 참조'와 같은 내용은 다른 교과에서 사용되는 개념임을 인지하고, 이를 자신의 증명 작성에서 선택에 의해 작성하게 되었다는 점을 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈다. 유한개의 소수의 집합 A에서 가장 큰 원소가 하나 존재한다는 점을 설명하는 과정에서 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다. 이러한 원소를 $M(A)$로 표현할 수 있다는 점을 개인적 범위의 권위 구조를 나타내며 설명하였다. 이전에 배웠던 정리 2.34의 사실에 기초하여 $M(A)$보다 큰 소수 p가 존재한다는 점을 담화적 필연성의 권위 구조를 드러내며 설명하였다.[12] 이로부터 가정에 대한 모순을 도출하는 과정에서의 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈다.

태홍은 내재적 요인과 외재적 요인의 권위 사이의 반복적인 전환이 있었다. 먼저, 유한한 개수의 소수의 집합에서 소수를 택하는 것과 이보다

12) 정리 2.34의 명제는 부록에서 확인할 수 있다.

더 큰 소수를 설명하는 과정에서 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환이 있었다. 다음으로, $M(A)$와 같은 증명에서의 표현이나 모순을 유도하는 설명에서 외재적 요인에서 내재적 요인의 권위로의 전환이 있었다. 특히, 태홍의 발표에서 특징적인 것은 개인적 범위의 권위 구조를 드러냄으로써 발표를 마무리한 것이다. 결과에 대한 판결로서 자신의 증명을 전달하는 것이 아닌 자신의 증명에 대한 방향을 언급하는 것으로 증명 발표를 마무리하였다. 증명 발표에서 작성한 태홍의 증명을 정리하면 <표 Ⅳ-8>과 같다.

<표 Ⅳ-8> 에피소드 2 발표자(태홍)의 소수의 무한성에 관한 증명

발표자	발표를 위해 칠판에 작성한 증명
태홍	Use Contradiction. Suppose there are finite prime numbers. Let $A=\{a \mid a,$ prime number$\}$. Since the number of A' s components are finite, there exists <u>$M(A)$</u> which is the greatest among A' s components(해석학 참조) But, by 2.34, there exists a prime number p which is greater than $M(A)$. <u>This fact contradicts for the fact</u> $M(A)$ is the greatest prime number. There are infinite prime numbers.

태홍의 증명은 귀류법을 이용하여 증명하였다는 점에서 교과서적 증명의 아이디어와 크게 다르지 않음을 알 수 있다. 태홍은 유한한 소수가 존재하는 집합에서 가장 큰 소수를 설정할 수 있는데, 그것보다 더 큰 소수가 존재한다는 점을 이전에 배웠던 정리에 기초하여 증명을 작성하였다. 다만, 태홍이 작성한 증명에서 '해석학 참조'라든가 '$M(A)$'와 같은 표현과 활용이 구성원들 사이에서 합의가 되지 않았다. 유한한 원소를 갖는 집합 A에 대해서 최대의 원소를 갖는다는 점을 표현하고자

$M(A)$를 작성한 것이다. 이러한 표현을 사용하지 않고 증명을 작성해도 논리적으로 문제가 없다.

태홍은 유한한 소수의 집합에서 최대의 원소가 존재한다는 점을 작성한 증명에서 설명하는 것과 'by 2.34'를 어떻게 사용한 것인지를 설명하는 부분에서 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환이 있었다. 에피소드 2의 성은처럼 근거를 명확히 하고 청중에게 전달하는 과정에서 권위의 전환이 일어난 것이다. '$M(A)$'의 표현과 귀류법 가정의 모순을 나타내는 'This contradicts to'를 설명하는 부분에서 외재적 요인에서 내재적 요인의 권위로의 전환이 있었다. 이는 증명 작성에서 자신이 사용한 표현이나 귀류법 가정에서 모순을 유도해내므로 이를 사용한 문구를 설명하는 과정에서 권위의 전환이 있었다.

경훈은 에피소드 2에서 선수 발표자인 태홍에 이어 소수의 무한성을 증명할 수 있는 새로운 아이디어를 발표하였다. 증명 발표에서의 경훈의 발화는 <표 Ⅳ-9>와 같다.

<표 Ⅳ-9> 에피소드 2 발표자(경훈)의 발화 및 권위 구조

발표자의 발화	발표자의 권위 구조
p_1, p_2, … , p_n까지 있다고 가정을 하고, **이게 수식 하나로 증명이 되거든요?**	개인적 권위
…(중략)…	
이런 아이디어로 생각을 해보면 자연수의 합을 이런 식으로 소인수 그러니까 **이런 식의 곱으로 표현할 수 있다.**	개인적 범위
이런 생각을 할 수 있거든요?	개인적 범위
똑같이 역수도 **똑같이 되는 것이죠.**	담화적 필연성
역수도 똑같이 이제 각각을 역수로 생각을 해보면 이런 식으로 **할 수 있는 것인데**, 똑같이 해서	개인적 범위
1을 하고 싶으면 1을 뽑아서 **곱하면 되는 것이고** $\frac{1}{2}$를 하고 싶으면 여기에서 $\frac{1}{2}$를 뽑고	담화적 필연성
나머지는 다 1을 뽑아서 **곱하면 되는 것이고,**	담화적 필연성
…(중략)… 얘는 **각각 수렴하겠죠.**	담화적 필연성
얘네 각각이 지금 유한 개 있으니까 **곱도 수렴하겠죠.**	담화적 필연성
그런데 문제는 얘가 지금 얘랑 같은데 **얘가 지금 test를 해보면 발산하잖아요?**	개인적 권위
그러니까 **이게 등호 성립이 안 돼요.**	담화적 필연성

경훈은 수식 한 줄로 증명이 가능하다는 점을 설명하면서 자신의 발표의 방향을 환기하였고, 청중이 암묵적으로 자신의 방향을 따를 수 있게 개인적 권위의 권위 구조를 드러냈다. 1보다 큰 자연수에 대해서 산술의 기본 정리를 이용하고 자연수의 합의 표현을 이용하여 자연수를 표현할 수 있음을 개인적 범위의 권위 구조를 나타냄으로써 설명하였다. 이것이 분모의 수가 1보다 큰 자연수라면 역수를 취하더라도 자연수일 때와 같이 적용할 수 있음을 설명하면서 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다. 공비가 1보다 작은 무한급수가 수렴한다는 점과 그 무한한 곱이 수

렴한다는 결과를 전달하는 과정에서 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다. 더불어, 적분판정법을 이용하면 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$가 발산한다는 점을 질문을 통해 청중의 합의를 이끌어냈다. 이는 암묵적으로 청중이 모두 이해하고 있다는 사실을 전제하고 설명하였다는 점에서 개인적 권위를 드러낸 것이다. 이러한 설명의 근거하여 결론적으로 등호가 성립이 되지 않음을 담화적 필연성의 권위 구조를 드러내며 설명하였다.

경훈 역시 내재적 요인과 외재적 요인의 권위 사이의 반복적인 전환의 모습을 보였다. 먼저, 산술의 기본정리를 분모의 자연수에 대해서도 적용할 수 있다는 점을 설명하는 과정에서 외재적 요인으로의 권위 전환이 있었다. 또한, 곱셈을 통해 반복적으로 수를 택하여 만들어내는 과정을 통해 수렴성을 판단하는 과정을 설명하기 위해 외재적 요인으로의 권위 전환이 있었다. 증명의 결과의 필연성을 설명하기 위해서 외재적 요인으로의 전환이 있었다. 다음으로 증명의 방향을 환기하거나 경훈이 사용한 증명 방법에 대해 청중의 동의를 유도하는 과정에서 내재적 요인으로의 권위 전환이 있었다. 이러한 반복적인 전환을 나타낸 경훈의 증명 발표에서 증명 발표에서 작성한 경훈의 증명을 정리하면 <표 Ⅳ-10>과 같다.

<표 Ⅳ-10> 에피소드 2 발표자(경훈)의 소수의 무한성에 관한 증명

발표자	발표를 위해 칠판에 작성한 증명
경훈	$p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ $\prod_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^m} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ $=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots)(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\ldots)$

귀류법을 이용한 점은 태홍과 동일한 방법이었지만, 경훈은 산술의 기

본정리를 활용하여 무한급수의 합의 유한한 곱과 무한급수가 동일하다는 명제에서 모순을 도출한 것이다. 경훈의 증명에는 산술의 기본정리를 이용하여 '$\prod_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^m}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$' 이라는 식을 세웠다는 점과 무한급수의 수렴과 발산을 판정할 때, 비판정법과 적분판정법을 이용한다는 점이 내재되어 있다. '$\prod_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^m}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$' 에서 $\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^m}$은 비판정법을 이용하면 수렴하지만, $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$는 적분판정법을 이용하면 발산하기 때문에 등식이 성립하지 못한다는 점에서 모순을 유도하였다.

경훈은 자신이 청중에게 명확하게 의미를 전달해야 할 수식을 마주했을 때, 설명하려는 그 순간 권위의 전환을 드러냈다. 경훈은 이 수식에 대한 설명에 도달하였을 때, 수식을 세우게 된 경위를 설명하고 발표를 전개하였다.

합동식 산술 단원 주요한 내용의 골자는 다항 합동식의 계산, 중국인의 나머지 정리이다. 에피소드 3은 중국인의 나머지 정리를 증명하기 위한 내용의 기초로서, 무수히 많은 정수 x에 대해서 정수 계수 다항식 $f(x)$은 합성수임을 증명하는 것이다. 다시 말하면, 정수 계수 다항식 $f(x)$가 무수히 많은 정수 x에 대해서 소수를 무한히 만들어내는 다항식은 없다는 것을 증명하는 정리이다. 이는 강의 자료에 제공되어 있던 '최고차항의 계수가 양수인 n차 다항식 $f(x)$에 대해, $f(x)>M$을 만족하는 x보다 큰 정수 k가 존재한다' 라는 내용을 이용하여 증명하는 것이 일반적이다. 증명 발표에서의 영웅의 발화는 <표 Ⅳ-11>과 같다.

<표 Ⅳ-11> 에피소드 3 발표자(영웅)의 발화 및 권위 구조

발표자의 발화	발표자의 권위 구조
귀류법을 써서 $f(x)$가 finitely many x에다가 composite라고 하면, $f(x)$가 합성수가 된다는 게 한정되어 있다는 말이고	
$f(x)$가 가질 수 있는 가장 큰 합성수를 N이라고 할 수 있습니다.	개인적 범위
그래서 그 Theorem에 따라서 x가 어떤 수보다 클 때, $f(x)$가 **N보다 크게 잡을 수 있고,**	개인적 범위
이 M_1보다 큰 임의의 x를 x_1으로 선택하면 $f(x_1)$은 **당연히** 그 자연수 중에 합성수가 아니면 소수 또는 1**이어야 하는데**, N은 1보다 크니까 $f(x_1)$은 **항상 소수가 되어야 합니다.**	권위의 담화
그래서 $f(x_1)$은 p인데, x_1과 x_1+p가 $\bmod p$에 대해서 합동이므로 $f(x_1)$과 $f(x_1+p)$가 $\bmod p$에 대해서 합동이고, $f(x_1)$이 **p의 배수이므로 $f(x_1+p)$도 p의 배수여야 되는데**	담화적 필연성
그 $f(x_1+p)$도 소수여야 되니까 결국 $f(x_1+p)$도 p를 만족해야합니다.	담화적 필연성
그래서 **계속 이렇게 할 수 있고**	개인적 범위
그 똑같이 해서 $f(x)-p=0$이 infinitely many solution을 갖기 때문에 모순이 됩니다.	담화적 필연성

영웅은 자신이 세운 귀류법의 가정을 설명하고, $f(x)$가 가질 수 있는 값이 유한하기 때문에 $f(x)$의 최댓값을 N으로 설정하였다는 점은 자신이 설정한 것에 대한 변화의 가능성을 표현함으로써 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈다. 다음으로, 영웅이 이전에 배웠던 정리를 사용하여 '$f(x)>N$의 조건의 $x>M_1$을 만족하는 어떤 정수 M_1가 존재한다' 라는 내용을 설명할 때, $f(x)>N$이 N에 따라서 변화할 수 있음을 설명하는 과정에서 역시 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈다. 영웅은 이전에 배운 정리를 '$x>M_1$이면 $f(x)>M$이다' 로 받아들였기 때문에, 어떤 정수 M_1에 대해서 M_1보다 큰 x_1을 설정하였다. 이때 $f(x_1)$은 M보다 크고, M이 1보다 크면서 가장 큰 합성수이기 때문에 $f(x_1)$이 소수가 될 수밖에 없다는 점을 권위의 담화의 권위 구조를 드러내며 설명하였다.

또한, $f(x)$가 무한히 나타난다는 점으로 모순을 이끌어내기 위해 앞서 성은이 증명하는 과정에서 사용되었던 정리를 이용하였고[13], 가장 큰 합성수인 M보다 $f(x_1+p)$가 커야하고, 이것이 항상 소수가 되어야 한다는 점을 설명하는 과정에서 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다. 마지막으로, $f(x_1+p)$, $f(x_1+2p)$ 등과 같이 지속적인 변화를 언급하는 과정에서 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈다.

영웅은 증명을 구성하는 초기 단계에서 문자를 설정하고 이전에 배웠던 정리를 이용하는 과정을 설명할 때, 내재적 요인의 권위를 드러냈다. 영웅의 가정대로라면 무수히 많은 합성수 x를 찾아 모순을 유도하는 것이 목적이었고, 이전의 정리를 이용하여 $f(x_1)$이 소수가 된다는 점을 정리의 내용을 들어 설명하는 과정에서 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환이 일어났다. 과정을 반복할 수 있고 이를 청중으로 하여금 이해할 수 있게 동의를 유도한다는 점에서 외재적 요인에서 내재적 요인의 권위로의 전환이 일어났다. 반복되는 결과를 통해서 결론을 도출하는 과정에서 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환이 있었다. 증명 발표에서 작성한 영웅의 증명을 정리하면 <표 Ⅳ-12>와 같다.

영웅은 명제를 증명하기 위해 귀류법을 사용하였다. 영웅은 이전의 정리를 사용하기는 하였지만, 이 증명을 구성하기 위해 가정을 세우는 과정에서 '무한한 정수 x에 대한 다항식 $f(x)$가 합성수' 임을 보이는 과정에서 기존의 명제에서 '$f(x)$ is a composite number for infinitely many integers x' 의 'for infinitely many integers x' 에 부정을 취함으로써 귀류법 가정을 세웠다. 귀류법 가정을 통해서 유도해낸 사실을 설명하는 과정에서 권위의 전환을 확인할 수 있었다.

영웅은 제시한 귀류법을 사용한 증명 방법은 다수의 수강생들이 사용한 방법이면서 증명이 짧았기 때문에 가장 많은 호응을 받은 증명이다.

---

13) 영웅은 별다른 언급 없이 다음과 같은 정리를 이용하였으며, 이를 언급하는 과정에서 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다.: Suppose $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ is a polynomial of degree $n>0$ with integer coefficients. Let a, b and m be integers with $m>0$. If $a\equiv b \pmod m$, then $f(a)\equiv f(b) \pmod m$.

<표 Ⅳ-12> 에피소드 3 발표자(영웅)의 다항식 합동의 활용에 관한 증명

발표자	발표를 위해 칠판에 작성한 증명
영웅	(귀류법) $f(x)$ is composite for finitely many $x \in \mathbb{Z}$. $x > M_1 \Rightarrow f(x) > N$ (N:=($f(x)$가 가질 수 있는 가장 큰 합성수)) $x_1 > M_1 \Rightarrow \boldsymbol{f(x_1)} = p$($p$는 **소수**) $p = f(x_1) = f(x_1 + p) = f(x_1 + 2p) = \ldots$ Thus, $\boldsymbol{f(x) - p = 0}$ **has infinitely many solutions.** It is contradiction.

하지만, 영웅의 증명에는 귀류법 가정에 오류가 있다. 귀류법은 증명의 결론을 부정하여 가정에 모순을 유도하는 것인데, 이 명제의 결론은 '다항식 $f(x)$가 합성수이다($f(x)$ is a composite number)' 라는 사실이다. 따라서 결론을 부정하기 위해서는 영웅의 방법에서와 같이 '무한히 많은 정수 x(for infinitely many integers x)' 를 부정하여 '유한한 정수 x(for finitely many integers x)에 대해서 다항식 $f(x)$가 합성수이다' 로 귀류법의 가정을 세우는 것은 적절하지 않다. 귀류법을 이용한다면 'There exists that $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ is not composite except finitely many integers x' 와 같이 귀류법 가정을 세워야 한다.

다수의 발표자는 외재적 요인에서 내재적 요인의 권위로의 전환이 있었다. 이는 증명 발표에서 증명의 결론에 도달하기 위해, 증명의 방향을 재설정하는 과정에서 발생하였다. 이러한 전환은 다시 증명 구성이나 증명 방법을 설명하기 위해 외재적 요인의 권위의 전환으로 연결되기도 했다. 따라서 발표자마다 내재적 요인과 외재적 요인의 권위 사이의 전환이 반복되어 나타났다. 다음 하위 절에서는 이러한 반복의 의미에 대해 분석할 것이다.

1.3. 명료한 전달을 위한 반복적인 권위의 전환

에피소드 3의 증명 발표에는 성은이 자원하였는데, 성은이 칠판에 적은 증명은 약어가 다수 포함되어 있어, 청중이 이해하기 어려웠기 때문에 증명을 두 번에 걸쳐 작성하였고 발표 역시 두 번 수행하였다. 성은은 이를 증명하기 위해서 이전에 증명했던 정리[14]를 이용하고, 합성수의 정의를 이용하여 마지막 증명을 구성했다는 점에서 교과서적 정리의 증명 구성 아이디어와 일부 일치한다. 하지만, 무한한 x에 대해서 $f(x)$가 합성수로 표현된다는 점을 구성하는 방식이 기존의 증명과 차이가 있다. 1차 증명 발표에서의 성은의 발화는 <표 Ⅳ-13>과 같다.

성은은 자신의 증명의 개요를 설명하는 과정에서 개인적 범위의 권위 구조를 드러내는 것으로 증명의 발표를 시작하였다. 이러한 개인적 범위는 증명 구조의 가능성을 드러냈다. $f(x)$를 법으로 하는 모든 원소의 집합을 설정하고, 이를 명료하게 말하는 과정에서 청중에게 질문을 던짐으로써 자신의 설명을 설득하였다. 이 과정에서 성은은 개인적 권위의 권위 구조를 드러냈다. 앞서 합동식의 계산을 통해서 0과 합동이 된다는 점을 밝힘으로써 집합 S의 모든 원소가 $f(x)$로 나누어떨어질 수밖에 없음을 설명하는 과정에서 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다. 증명 발표를 마무리하는 단계에서 개인적 범위의 권위 구조를 드러냄으로써 다시 한번 증명 결론의 방향을 언급하였다.

14) 정리 3.12 명제는 부록에 수록되어 있다.

<표 Ⅳ-13> 에피소드 3 발표자(성은)의 1차 발표의 발화 및 권위 구조

발표자의 발화	발표자의 권위 구조
...(중략)... 3.8은 polynomial이 congruence를 보존한다는 점이고요.	
3.12는 unbounded function이라는 점입니다.	
이거 두 개만 이용해서 **이걸 증명할 수 있습니다.**	개인적 범위
그러면 여기서부터 증명을 시작해보겠습니다.	
먼저 3.12에 의해서 f가 unbounded이니까 특별히 1보다 큰, **image가 1 보다 크게 만들 수 있죠.**	개인적 범위
그런 x가 있어요.	
그 다음에 x를 잡고 $f(x)$를 a라고 둘게요.	
그 다음에 어떤 집합을 생각하냐 하면 x와 modulo a에 대해서 congruent 한 걸 싹 다 모아놓은 **집합으로 생각하는 거예요.**	개인적 권위
그러니까 x의 class이죠?	개인적 권위
이걸 S라고 부를게요.	
그 다음에 3.8에 의하면 S에서 그런 원소 y를 뽑아볼게요.	
그럼 여기다가 f image를 씌우면 **3.8 정리에 의해서 congruence가 유지가 되는 거예요.**	담화적 필연성
여기까지는 3.8 정리의 내용이고 그 다음에 여기가 얘를 얘로 뒀어요.	
그런데 이만큼씩 자기 자신에 대해서 **0이 된단 말이에요.**	담화적 필연성
그런데 이 말을 잘 보면 **y를 임의로 뽑았잖아요?**	담화적 필연성
그러니까 이 말은 S의 f의 image에 속하는 **모든 원소들이 a로 나누어 떨어진다는 것이죠.**	담화적 필연성
그러니까 $f(S)$는 a의 배수 집합의 부분집합이 되는 거예요.	
그래서 여기서 f의 그러니까 image set이 infinitely many composite가 짐을 **증명이 된 것이죠.**	개인적 범위

성은의 권위의 전환에는 수학적인 설명을 구체화하거나, 자신의 설명을 기초로 하여 후속의 논의에서 이를 재확인하는 과정에서 드러났다는 점에 공통적인 특징이 있다. 먼저 다항식 $f(x)$가 갖는 함숫값이 1보다 큰 경우를 설정할 수 있다는 점을 설명하는 과정에서 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈는데, 이러한 x를 설정할 수 있다는 것은 $f(x)$가 설정되어 있는 상황에서 반드시 x가 존재할 수밖에 없다는 점을 담화적 필

연성의 권위 구조로 설명하였다. 다음으로, 이러한 $f(x)$의 값을 법으로 하여 모아놓은 x의 집합을 설정하고, 그 집합이 원소 x에 대한 집합임을 청중으로 하여금 재확인할 수 있게 하였다. 이 과정에서 개인적 권위로의 전환이 발생하였다. 마지막으로 임의로 선택한 y로부터 f의 함숫값으로 모두 나누어떨어질 수밖에 없음을 담화적 필연성의 권위 구조를 드러내며 설명하였다. 다시 말해서, 성은의 권위의 전환은 자신의 수학적 아이디어에 기초하고 있으며, 이를 재진술하거나 후속 논의를 전개하기 위해서 발생하였다.

성은의 증명은 법 m에 대해서 합동인 두 정수를 각각의 다항식에 대입하더라도, 그 합동이 유지된다는 성질과 임의의 정수 M보다 큰 값을 갖는 $f(x)$에 대응되는 x는 정수 k가 존재하여 그것보다 크다는 점을 이용하였다. 전술한 바와 같이 성은이 작성한 식은 발표를 위해 증명을 작성하는 과정에서 다수의 약어가 포함되어 있었기 때문에 발표 상황이라는 짧은 시간 동안에 성은의 증명을 이해하는 것에는 다소 어려움이 있었다. 이에 성은의 증명을 더 이해할 수 있도록 성은은 2차 발표를 수행하였으며, 2차 증명 발표에서의 성은의 발화는 <표 Ⅳ-14>와 같다.

<표 Ⅳ-14> 에피소드 3 발표자(성은)의 2차 발표의 발화 및 권위 구조

발표자의 발화	발표자의 권위 구조
이런 상태의 polynomial인데요.	
최고차항이 0보다 크고 nonconstant인 f를 잡았어요.	
그러면, infinitely many 이렇게 대충 쓸게요.	
...(중략)...그래서 여기까지 설명을 했어요.	
f가 이런 조건을 갖는다고.	
그래서 이제 3.12에 의해서 f가 1보다 크게 만드는 **x를 잡을 수 있겠죠.**	개인적 범위
그렇게 잡았고, a를 $f(x)$라고 둘게요.	
그 다음에 S라는 집합을 x와 modulo a에 대해서 congruent한 모든 원소들의 집합으로 정의를 했어요.	
그러니까 x의 class들이죠?	
그런데 **여기서 관찰할 게 뭐냐면,** y가 S에 속하면 y는 x와 congruent한데, **3.8에 의해서** 여기다가 f를 씌워도 congruence가 **유지가 되거든요.**	권위의 담화
그러면 여기까지 왔어요.	
그러면 우리가 셋팅을 하기를 **$f(x)$를 a라고 두기로 했잖아요?**	개인적 권위
그러니까 $f(y)$는 a와 congruent한데, **그게 0과 congruent하죠.**	담화적 필연성
이 말은 a가 얘를 나눈다는 뜻이에요.	
그런데 이 f image of, $f(S)$는 S에 대한 모든 원소에다가 image를 씌운 건데	
지금 그러면 얘를 보면 이거의 **정의에 의해서 여기에다 모든 원소들이 a에 의해서 divide되죠.**	담화적 필연성
하여간 얘는 a 배수의 부분집합이에요.	
그런데 **저는 $f(S)$가 infinite한 걸 증명하고 싶어요.**	개인적 권위
만약에 걔가 증명이 된다면, 여기는 잠깐 무시하고 여기로 오세요. (이동한다)	
...(중략)...	
만약에 a가 composite이었다고 생각해볼게요.	
그러면 **이 집합을 생각해보세요.**	개인적 권위
$f(S)$에서 0을 뺀 집합이에요.	
얘가 **지금 infinite set이니까 하나를 빠져도 infinite set이거든요?**	담화적 필연성
그런데 여기 있는 모든 원소들은 a에 의해서 나누어떨어진다고 했으니까 **당연히 모든 x는 composite이겠죠.**	권위의 담화
composite를 약수로 가지고 있으니까요.	
얘가 만약에 prime이었다고 그러면 **다시 이 집합을 보는 거예요.**	개인적 권위
여기서 $\pm a$를 뺀 집합을 생각하는 거예요.	
얘가 여전히 infinite예요. 무한에서 두 개를 뺐으니까.	담화적 필연성

그런데 다시 여기에 있는 모든 애들은 **p에 의해서 나누어떨어지는데,** 거기서 $\pm a$를 아니 그러니까 **a에 의해서 나누어떨어지는데**	담화적 필연성
거기서 $\pm a$를 뺐으니까 **당연히 얘도 composite set일 수밖에 없는 것이죠.**	권위의 담화
이렇게 여기까지 오는 과정을 이걸 직접 보이겠다는 게 아니라 **unbounded를 보이겠다는 것이에요.**	권위의 담화
unbounded이면 infinite set이니까 확실하지 않다면 **얘가 finite이면 bounded가 되어요.**	담화적 필연성
얘는 contrapositive에 의해서 **쉽게 알 수 있어요.**	개인적 범위
(다시 이동한다) 그래서 $f(S)$가 unbounded인 걸 **보이려고 해요.**	개인적 권위
그런데 unbounded를 어떻게 보이냐면 어떤 실수 M을 잡아도 그보다 큰 얘의 원소가 있으면 된다는 거 **그거만 보이면 되는 거거든요.**	권위의 담화
그래서 M을 임의로 택하기로 했어요.	
그전에 그래서 M을 뽑았는데 3.12가 뭘 말해주냐면 어떤 k가 있어서 k보다 모든 큰 정수들에 대하여 그 image가 1보다 **크다는 걸 알 수 있거든요.**	개인적 범위
k보다 크기만 하면 $f(x)$가 M보다 큰 거예요.	담화적 필연성
그게 3.12의 내용이에요.	

그런데 저는 여기서 S에 들어가는 **원소를 찾고 싶어요.**	개인적 권위
그런데 이게 왜 가능하냐면 S가 이런 꼴의 집합이란 말이에요 $x+ak$, k는 정수	
그런데 k가 섞였으니까 k 대신 n 안 썼	
small m 첫째항이 x이고 공차가 a인 등차수열이에요.	
a가 지금 0이 아니니까 **얘가 한없이 늘어나고 또 한없이 줄어들죠.** 무한대부터 마이너스 무한대까지.	담화적 필연성
그래서 얘가 unbounded set이에요.	담화적 필연성
그러니까 k보다 큰 s를 뽑을 수 있는 거예요 unbounded 정의에 의해서	담화적 필연성
그런데 여기다가 s쪽, 그런데 우리가 애초에 이렇게 셋팅을 해놨거든요.	
k보다 큰 원소들은 $f(x)$가 M보다 크다.	
그런데 s가 k보다 크니까 **당연히 $f(s)$는 M보다 크겠죠.**	담화적 필연성
그런데 이게 얘를 대표하는 원소예요.	
여기에 있는 모든 애들은 이 꼴을 가지고 있어요.	
그리고 M도 arbitrarily예요.	
아무거나 갖고 왔어요.	
그러니까 이 집합이 unbounded가 되죠.	담화적 필연성
unbounded가 증명이 되고 따라서 infinite가 되고 나머지 저쪽에 있는 내용(이동하기 전에 발표한 내용)**에 의해서 증명이 끝나요.**	담화적 필연성

성은의 두 번째 발표에서 첫 번째 발표에서 적었던 증명을 보다 구체적으로 작성함으로써 청중의 이해를 도울 수 있도록 하였다. 먼저, 앞서 이용하였던 '법 m에 대해서 합동인 두 정수를 각각의 다항식에 대입하더라도, 그 합동이 유지된다'는 성질과 '임의의 정수 M보다 큰 값을 갖는 $f(x)$에 대응되는 x는 정수 k가 존재하여 그것보다 크다'는 점은 그대로 이용하였다. 첫 번째 발표의 내용을 청중이 들었다는 점을 전제로 하여 설명을 이어나갔다. 구체적인 증명을 확인하면 <표 Ⅳ-15>와 같다.

성은이 언급한 정리 3.12의 내용은 '임의의 정수 M보다 큰 값을 갖는 $f(x)$에 대응되는 x는 정수 k가 존재하여 그것보다 크다'는 것이다. 여기서 성은은 M이 임의의 정수이므로 1로 택하여 설명함으로써, 이때 조건을 만족하는 x가 존재의 가능성을 개인적 범위의 권위 구조를 드러냄으로써 설명하였다. 증명 과정에서 자신이 설정한 집합을 활용하여 설명하고 확인이 필요한 부분을 '관찰할 것'으로 설명하고 있는데, 이는 증명에 필요한 부분을 설명한다는 점에서 성은의 권위의 담화의 권위 구조가 드러난 부분이라 볼 수 있다. 이 증명이 $f(x)$가 무한한 개수의 합성수를 갖는다는 점을 증명하는 것이므로 성은이 설정한 집합이 무한개의 원소를 갖는다는 점을 의문문과 완곡한 표현으로 청중의 동의를 이끌어내고 있다. 여기서 성은의 개인적 권위의 권위 구조가 드러났다고 볼 수 있다. 성은이 설정한 집합의 모든 원소가 $f(x)$로 나눠진다는 점에서, x가 합성수가 된다는 점을 담화적 필연성의 권위 구조를 드러내며 설명하였다. 또한, 성은이 설정한 집합이 유계가 아님을 보여야만 증명이 완결된다는 점을 권위의 담화의 권위 구조를 나타내며 설명하였다. 그 과정에서 사용되는 정리 3.12의 내용을 설명하는 과정에서 k의 존재성을 설명하는 과정에서 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다. 집합 S의 조건을 만족하는 원소를 찾고자 하는 목표를 언급하고 그것을 확인하는 과정에서 성은의 개인적 권위와 담화적 필연성의 권위 구조를 확인할 수 있었다.

두 차례에 걸친 성은의 발표에서 다른 증명의 발표자처럼 내재적 요인

의 권위와 외재적 요인의 권위 사이의 반복적인 전환이 있었음을 확인할 수 있었다. 특히, 성은의 발표는 같은 증명을 두 번에 걸쳐 발표하였는데, 1차 발표에 비해 2차 발표의 권위 전환의 횟수가 늘어남을 알 수 있다. 이는 증명 구성 아이디어와 증명 방법에 대해 설명하고자 하는 외재적 요인의 권위로의 전환과 증명의 방향을 재설정하는 내재적 요인의 권위로의 전환이 1차 발표보다 2차 발표에서 더 반복적으로 일어난 것이다. 이를 통해 증명 내용을 명료하게 전달할 수 있도록 발표자가 권위 전환을 더욱 빈번하게 수행한다는 점을 알 수 있다.

<표 Ⅳ-15> 에피소드 3 발표자(성은)의 다항식 합동의 활용에 관한 증명

발표자	성은	
	1차 발표에서 작성한 증명	2차 발표에서 작성한 증명
발표를 위해 칠판에 작성한 증명[15]	f: nonconstant polynomial with positive leading coeff. $\Rightarrow$ imf has inf. many composites. pf) As hinted, we use 3.8: "f preserves congruence" 3.12: "f is unbounded" 3.12 $\Rightarrow$ ($y \in S$) $\exists x \in \mathbb{Z}$: $f(x) > 1$ $a := f(x)$ $S :=$ set of $y \equiv x (\mathrm{mod}\ a)$ Claim: $f(S)$: unbounded. Fix M $\Rightarrow \exists k$: $x > k \Rightarrow$ $f(x) > M$(S: unbounded), ($a \neq 0$) $\therefore \exists s \in S$: $s > k \Rightarrow f(s) > M$, M: arbitrary $\Rightarrow$ $f(S)$: unbounded $\Rightarrow$ infinite $\therefore \forall$ claim of $f(S)$ is composite (except for $\pm a$) if n: prime	(이동 전) $f: a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ with $a_n > 0$, $n \geq 1$ $\Rightarrow$ $f(x)$ is composite for inf. many $x \in \mathbb{Z}$ pf. By 3.12, $\exists x \in \mathbb{Z}$: $f(x) > 1$. Put $a = f(x)$ Def: $S = \{y \mid y \equiv x (\mathrm{mod}\ a)\}$ Observe $y \in S \Rightarrow$ $y \equiv x (\mathrm{mod}\ a) \Rightarrow f(y) \equiv f(x)\ (\mathrm{mod}\ a)$ by 3.8 Since $f(x) = a$, $f(y) \equiv a \equiv 0\ (\mathrm{mod}\ a)$ $\therefore$ $f(S) := \{f(s) \mid s \in S\} \subseteq \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$ Claim: $f(S)$ is unbounded. Fix M. By 3.12, $\exists k$: $x > k \Rightarrow f(x) > M$ Note : $S = \{x + am \mid m \in \mathbb{Z}\}$ is unbounded since $a \neq 0$ $\exists s \in S$ s.t $s > k$ ($\Rightarrow f(s) > M$) (이동 후) Since M is arbitrary, $f(S)$ is unbounded $\therefore$ $f(S)$ is infinite If a is composite, then every element of $f(S) - \{0\}$ is composite. If a is prime, then $f(S) - \{0, \pm a\}$ is composite. infinite

15) 성은의 증명 발표에서 사용한 정리의 내용은 부록에서 자세하게 확인할 수 있다.

1.4. 전환된 권위의 의미

대학생의 증명 발표에서 나타난 발표자의 권위의 변화를 외재적 요인과 내재적 요인의 권위를 기준으로 하여 분석하였다. 증명 발표에서 동일한 증명에 대해서 여러 가지의 증명 방법이 제시되었고 발표에 참여한 학생이 드러낸 권위 구조는 발표 상황마다 전환이 발생했다는 점은 공통적이었다. 권위 구조의 전환이 반복적으로 발생하는 학생이 있던 반면, 그렇지 않은 경우도 있었다. 이러한 발표자의 권위 구조의 양상을 정리하면 [그림 Ⅳ-1]과 같다.[16]

발표자의 권위 구조의 전환에서 공통으로 나타난 패턴은 '내재적 요인'에서 '외재적 요인'으로의 권위의 전환이었다. 발표자는 자신의 증명을 발표할 때 작성된 증명의 첫 줄부터 마지막 줄까지 순차적으로 설명하였다. 이 과정은 발표자의 독백에 의해 수행되는 것이 일반적이었다. 발표 중간에 청중과 교수자의 개입이 발생하기도 했지만, 청중과 교수자의 권위가 외연적으로 드러나지 않았으며, 이러한 개입으로 인해 발표자가 자신이 증명 내용의 방향을 수정하지 않고, 지속적으로 자신의 증명에 대한 설명을 이어나갔다. 이러한 발표 내용에는 증명의 방법, 이전에 배웠던 정의와 정리와 같은 증명 구성 아이디어의 원천 등이 포함되어 있었다.

여기서 발표자의 권위 구조가 전환이 일어나는 원인에 대한 논의가 필수적이다. 권위 구조의 전환을 살펴보기 위해 발표자가 작성한 증명과 발표자의 발화를 비교해보면서, 전환이 일어난 순간을 포착하고자 하였다. 이 과정에서 권위 구조의 전환이 일어나는 순간은 발표자가 작성한 증명 중에서 수업 구성원 모두가 발표자의 작성한 표현이나 수학적인 진위를 판정해야 하는 진술을 마주하였을 때 발생하였다. 다시 말하면, 증

16) Herbel-Eisenmann & Wagner(2014a)에서 개인적 권위, 개인적 범위의 권위 구조는 내재적 요인의 권위, 권위의 담화, 담화로서의 필연성의 권위 구조는 외재적 요인의 권위로 분류하였다. [그림 Ⅳ-1]의 발표자의 나타낸 권위의 양상에서 내재적 요인은 음영을 표시하지 않고, 외재적 요인은 음영을 표시함으로써 둘 사이의 전환을 시각적으로 확인할 수 있게 하였다.

명 발표라는 수업의 제한된 시간 내에서 발표자의 작성의 의도와 논리를 발표자의 설명 없이 이해하기 어려운 내용이거나 발표자의 증명의 일부가 청중과 공유되어 있지 않은 내용을 설명하려고 시작하는 순간에 발표자의 권위의 전환을 포착할 수 있었다.

발표자는 수업 내에서 자신의 증명을 주어진 시간 내에 효과적으로 자신의 증명을 설명해야 하는 책임을 부여받는다. 이러한 책임을 수행하는 과정에서 작성한 증명에 대한 관련된 모든 정의와 정리, 수사적인 어구에 초점을 두지 않았다. 작성된 증명 중에서 자신의 설명만으로 설명되어야 하는 자신의 전략이 포함된 부분의 설명에서 '내재적 요인'에서 '외재적 요인'의 권위로의 전환이 발생하였다. 이러한 권위의 전환은 모든 발표자에게서 동일하게 나타났다.

한편, '외재적 요인'에서 '내재적 요인'의 권위로의 전환을 관찰할 수 있었다. 이는 모든 발표자에게서 나타낸 패턴은 아니지만, 다수의 발표자의 발표에서 확인할 수 있는 전환의 모습이었다. 이러한 전환의 모습은 크게 두 가지로 구분하여 논의할 수 있다.

먼저, 내재적 요인의 권위 구조를 드러내며 발표를 마무리하는 경우이다. 이 경우 발표자는 증명 내에서 핵심적으로 전달해야 할 수학적인 아이디어를 명료화하고 청중을 설득하는 과정에서 외재적 요인의 권위를 드러냈다. 그 이후에 자신의 증명의 전략을 환기하는 과정에서 내재적 요인의 권위를 드러냄으로써 증명 발표를 마무리하였다.

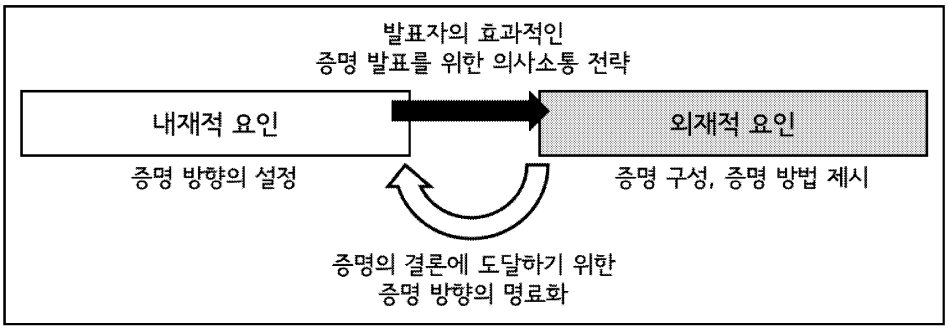
<table>
<tr><td>에피소드명</td><td>발표자</td><td colspan="24">발표자가 나타낸 권위 구조</td></tr>
<tr><td rowspan="2">에피소드 1</td><td>여필</td><td colspan="4">개인적 범위</td><td colspan="4">담화적 필연성</td><td colspan="4">개인적 권위</td><td colspan="4">담화적 필연성</td></tr>
<tr><td>성은</td><td colspan="3">담화적 필연성</td><td colspan="3">개인적 범위</td><td colspan="3">권위의 담화</td><td colspan="3">담화적 필연성</td><td colspan="3">개인적 범위</td><td colspan="3">권위의 담화</td></tr>
<tr><td rowspan="2">에피소드 2</td><td>태홍</td><td colspan="4">개인적 범위</td><td colspan="4">담화적 필연성</td><td colspan="4">개인적 범위</td><td colspan="4">담화적 필연성</td><td colspan="4">개인적 범위</td></tr>
<tr><td>경훈</td><td colspan="3">개인적 권위</td><td colspan="3">개인적 범위</td><td colspan="3">담화적 필연성</td><td colspan="3">개인적 범위</td><td colspan="3">담화적 필연성</td><td colspan="3">개인적 권위</td><td colspan="3">담화적 필연성</td></tr>
<tr><td rowspan="3">에피소드 3
17)</td><td>성은
(1차)</td><td colspan="6">개인적 범위</td><td colspan="6">개인적 권위</td><td colspan="6">담화적 필연성</td><td colspan="6">개인적 범위</td></tr>
<tr><td>성은
(2차)</td><td>개인적 범위</td><td>권위의 담화</td><td>개인적 권위</td><td>담화적 필연성</td><td>개인적 권위</td><td>담화적 필연성</td><td>권위의 담화</td><td>개인적 권위</td><td>담화적 필연성</td><td>권위의 담화</td><td>담화적 필연성</td><td>개인적 범위</td><td>개인적 권위</td><td>권위의 담화</td><td>개인적 범위</td><td>담화적 필연성</td><td>개인적 권위</td><td>담화적 필연성</td></tr>
<tr><td>영웅</td><td colspan="4">개인적 범위</td><td colspan="4">권위의 담화</td><td colspan="4">담화적 필연성</td><td colspan="4">개인적 범위</td><td colspan="4">담화적 필연성</td></tr>
<tr><td>에피소드 4</td><td>호승</td><td colspan="8">개인적 범위</td><td colspan="8">개인적 권위</td><td colspan="8">담화적 필연성</td></tr>
</table>

[그림 Ⅳ-1] 발표자의 권위의 양상

17) 에피소드 3에서 성은은 명료한 증명의 전달을 위해 증명을 두 번에 걸쳐 발표하였다.

다음으로, 내재적 요인의 권위 구조를 드러내며 발표를 마무리하지는 않았지만, 발표 중에 다수의 권위 구조의 전환을 보이며 '내재적 요인'에서 '외재적 요인'의 권위로의 전환을 포착할 수 있는 경우이다. 에피소드 3에서 성은의 경우 같은 증명을 두 번에 걸쳐 발표하게 되었다. 첫 번째 작성한 증명에서는 다수의 약어와 제한된 시간 내에 성은의 설명을 받아들이기 어려웠기 때문에, 교수자로부터 증명의 명료화를 독려받았다. 이로 인해 자신이 작성한 증명을 구체적으로 재작성하였다. 성은의 1차 발표에서는 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환이 있었다. 반면, 성은의 2차 발표에서는 권위의 전환이 반복적으로 일어남을 확인할 수 있었다. 명료하게 전달하도록 독려된 발표 상황에서 성은은 효과적으로 자신의 증명에 대한 의사소통을 수행하기 위해 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환이 다수 발생하였다. 또한, 자신의 증명의 결론에 도달하기 위한 방향을 명료하게 하기 위한 외재적 요인에서 내재적 요인의 권위로의 전환이 있었다.

이러한 전환된 권위의 의미를 정리하여 도식화한 것이 [그림 Ⅳ-2]와 같다. 자신의 증명에 대하여 발표한 발표자는 공통적으로 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환이 있었다. 이는 증명 발표에서 효과적으로 자신의 증명 아이디어와 기술을 전달하기 위해 권위의 전환이 발생하였다. 또한, 다수의 학생에게서 외재적 요인에서 내재적 요인의 권위로의 전환이 있었는데 자신의 증명에서 결론에 도달하기 위한 증명의 방향을 명확하게 하고, 이를 정리하는 과정에서 권위의 전환이 발생하였다.



[그림 Ⅳ-2] 발표자의 전환된 권위의 의미

Otten 외(2017)는 교수자 중심의 수업에서 나타나는 전문가로서의 교수자의 권위가 반영된 증명 활동에서의 패턴을 찾는 것에 초점을 두었다. 교수자의 발화에서 패턴을 발견하는 것은 교수자의 권위가 증명 활동에 어떻게 반영되고 실행되는지를 발견할 수 있다. Otten 외(2017)에서는 교수자가 전체 토론의 증명 활동에서 드러낸 '증명 도입 - 증명 구성 - 증명 타당화'의 과정에 기초한 권위의 패턴을 부호화하여 제시하였다. 즉, 이는 수학 교육에서의 권위에 기초하여 권위의 패턴을 분석한 것이 아니며 수학 전문가로서 수업에서 드러나는 교수자의 권위의 패턴을 증명 과정을 기초로 하여 분석한 것이다.

이 연구에서는 발표자가 발표에서 나타나는 권위의 양상을 살펴보았고, 그것이 전환된 권위임을 파악할 수 있었다. 발표자는 내재적 요인과 외재적 요인 사이의 권위 전환이 반복적으로 일어났음을 확인할 수 있었다. 이러한 권위 전환의 반복은 명료하게 증명을 전달하기 위한 것이었다. Otten 외(2017)의 연구에서 제시한 증명 발표의 패턴은 교수자의 발화에 기초한 것이었으며, 이 연구의 결과는 학생의 증명 발표의 패턴을 확인할 수 있었다. 또한, 하나의 증명에 대해 다수의 발표자의 발표가 있었으며, 한 명의 발표자가 하나의 증명을 여러 번 발표하는 사례가 있었다. 이를 통해 Otten 외(2017)의 연구에서 살펴볼 수 없었던 반복적인 권위 전환과 그 의미를 도출할 수 있었다.

2. 발표자와 청중 간의 대응된 권위

이번 절에서는 발표자와 청중 사이에 나타난 권위의 양상을 살펴본다. 에피소드별로 발표자와 청중은 질의응답을 통해, 발표자의 증명에 대한 의견을 제시하였다. 이 과정에서 한번의 질의응답을 거치거나 여러 번의 발표가 거듭되는 경우 여러 번의 질의응답이 수행되었다. 발표자와 청중은 질의응답에서 각자 자신의 권위를 드러내었고, 이 과정에서 대응된 권위의 모습을 포착할 수 있었다.

2.1. 상반된 성격의 권위의 대응

질의응답 과정에서 발표자 혹은 청중이 선수 발화자가 되어 의견 혹은 질문을 제시하거나 증명에 대해 설명하였다. 후속 발화자는 선수 발화자의 의견이나 질문에 자신의 의견을 설명하였다. 여기서 서로 상반된 성격을 가진 내재적 요인의 권위와 외재적 요인의 권위가 서로 대응되는 것을 관찰할 수 있었다. 이번 하위 절에서는 발표자와 청중 사이의 의사소통에서 상반된 성격의 권위가 서로 대응되는 형태로 관찰된 질의응답의 사례를 중심으로 제시한다.

에피소드 2에서 태홍의 증명은 집합을 설정하는 과정에서 해석개론과 같이 다른 교과에서 주로 사용하는 기호를 이용했다는 점에서 교과서적 증명에서 소수를 유한개 설정하여 증명하는 방법과는 일부 차이가 있었다. 이러한 증명 구성의 차이에 주목한 경수는 소수의 개수를 유한개 설정하고, 유한개의 소수를 통해 만들어내는 새로운 소수에 의해 모순을 이끌어내는 방법을 발표자에게 설명하며 질의하였다. 구체적인 질의응답의 발화는 <표 Ⅳ-16>과 같다.

<표 Ⅳ-16> 에피소드 2 발표에 대한 질의응답: 발표자(태홍)와 청중(경수)의 발화 및 권위 구조

발화자	발화	권위 구조
경수	prime에 prime이 k개 있다고 해서 p_1부터 p_k라고 한 다음에 다 **곱한 것보다 큰 prime이 있으니까, 걔는 p_1부터 p_k까지랑 전부 다 다르기 때문에**	담화적 필연성
태홍	저게 결국 같다. [18]	
경수	다 곱한 k보다 더 크니까 a_n하고 **안 같겠죠.**	담화적 필연성
	그래서 ...(중략)... 그러니까 **저 소수보다도 큰 소수가 있겠죠.**	담화적 필연성
	$a_1a_2...a_t$까지 곱한	
태홍	그러니까 저번에 저희가 문제 풀 때, 이거 사용해서 a_1	
	저게 소수인지는 모르니까	
	음 그러니까 이게 저번에도 증명 이거 할 때, 이게 소수인 경우랑 composite인 경우를 나눠가지고 했었는데, composite인 경우에서 이것들로 얘가 안 나눠졌으므로, 이것보다 더 큰 소수가 존재한다는 걸	
	그래서 어쨌든 이 a_t보다 더 큰 소수가 이거를 통해서도 존재한다는 게 보여지므로 **finite하다는 가정에 모순이 되는 것 같습니다.**	개인적 범위
	사실 **이게 더 좋은 것 같네요.**	개인적 범위
	저렇게(태홍 자신의 증명처럼) 쓰는 것보다	

경수가 유한개의 소수의 곱보다 큰 새로운 소수를 만들어내고, 이러한 소수가 존재할 수밖에 없다는 점을 설명하면서 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다. 태홍은 경수의 방법으로 증명하지 않았기 때문에, 자신이 이해한 범위 내에서 경수의 증명 방법을 설명하였다. 교실 내에서 공유될 수 있는 수학적 사실에 기초하여 태홍은 스스로 판단하였고, 이러한 판단으로부터 태홍은 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈다.

에피소드 2에서 증명 구성의 아이디어에 의해 추가적인 증명 발표가 이어졌고, 후속 발표자인 경훈의 증명에 질의응답이 이어졌다. 교과서적

18) 태홍의 발화 시점과 경수의 발화 시점의 차이가 미미하다.

증명과는 다른 방법을 이용한 경훈의 증명의 핵심적인 수학적 아이디어를 이해했을 때, 청중이 경훈의 증명 방법에 동의할 수 있었다. 태홍은 경훈의 증명 구성 아이디어에 주목하였고, 무한급수를 무한 번 곱하는 것을 정수를 주로 다루고 있는 현재 수업의 맥락에서 사용할 수 있는 것인지에 대한 질문을 던졌다. 구체적인 질의응답의 발화는 <표 Ⅳ-17>과 같다.

<표 Ⅳ-17> 에피소드 2 발표에 대한 질의응답: 발표자(경훈)와 청중(태홍)의 발화 및 권위 구조

발화자	발화	권위 구조
태홍	무한을 곱하는 것은 **자연수에서 해도 되는지.**	개인적 범위
	...(중략)... (저의) 질문을 (스스로) 잘 모르겠는데, 무한인 것을 다 곱하는데 사실 상식적으로 생각을 해보면	
경훈	무한합이니까 이렇게 할 수 있냐?	
	수렴하니까 생각이 들기는 들어요 ...(중략)...	
	제가 생각한 건 각각이 **이제 수렴한다는 것이 보장이 되어 있으니까** 얘네 각각을 무한 번 곱해줘도	담화적 필연성

태홍은 개인적 범위의 권위 구조를 드러냄으로써 자연수를 선택하였을 때, 무한급수를 무한 번 곱할 수 있는지에 관하여 질문하였다. 경훈은 이러한 태홍의 질문에 대해 수렴하는 결과를 갖는 무한급수라는 것이 명확히 보장되어 있기 때문에 무한 번 곱하더라도 수렴한다는 점이 변함이 없을 거라는 점을 담화적 필연성의 권위 구조를 나타내며 응답하였다. 이 과정에서 경훈은 자신의 수학적 판단에 기초하여 답변하였고, 이러한 판단이 경훈의 담화적 필연성의 권위 구조를 드러내도록 하였다.

에피소드 2에서 태홍과 경수는 자신의 수학적 판단에 근거하여 질의응답 하였고, 경훈과 태홍은 증명의 가능성에 관하여 질의응답 하였다. 이 과정에서 학생들 사이에 서로 상반되는 성격의 권위가 대응되었다. 먼저, 경수가 외재적 요인의 권위를 드러낸 것에 대해 태홍이 내재적 요인의 권위로 대응하였다. 다음으로, 태홍이 내재적 요인의 권위를 드러낸

것에 대해 경훈이 외재적 요인의 권위로 대응하였다. 이러한 상반된 성격의 권위의 대응은 수업 구성원으로서 참여하고 있는 발표자와 청중이 자신의 의견을 피력하고, 수학 학습의 주체로서의 역할을 수행한 것이다. 더불어 이러한 권위의 대응을 통해 발표자와 청중 간의 내용상의 합의를 이루었다.

에피소드 2에서 성은은 증명 발표에서의 자신의 증명을 명료하게 전달하기 위해 두 번의 발표를 거쳤다. 두 번의 발표 끝에, 청중은 성은의 발표 내용을 이해할 수 있었다. 경수는 명제의 조건에 '무수히 많은 x (for infinitely many x)에 대해서 $f(x)$가 합성수'라는 표현에 주목하여 질문하였다. 구체적인 질의응답의 발화는 <표 Ⅳ-18>과 같다.

<표 Ⅳ-18> 에피소드 3 발표에 대한 질의응답: 발표자(성은)와 청중(경수)의 발화 및 권위 구조

발화자	발화	권위 구조
경수	치역의 개수가 **유한개이면 모순인 거 아니에요?**	개인적 범위
	f의 상이, S에 대한 f의 상이 유한개이면 **말이 안 되는 거 아니에요?**	개인적 범위
성은	아, 그러니까 **S에는 여기 들어가 있을 거고요.**	담화적 필연성
	예를 들어 여기 있다고 하면, 이 집합이 무한한데, 이 집합은 유한하니까 다른 애들이 있어서 여기 0이 아닌데,	
	만약에 f image에 0이 들어가 있었다면, 여기에 있는 S에 있는 원소들이 **중복되서 0으로 간다는 거죠.**	담화적 필연성

정의역에 해당하는 x가 무수히 많은 것이므로 이에 대응되는 $f(x)$가 무수히 많아야 하기 때문에, 치역에 해당하는 $f(x)$의 값들이 유한개이면 모순이 발생하는 것이 아닌지를 질문하였다. 이 과정에서 경수의 개인적 범위의 권위 구조가 드러났다. 성은은 합동식 계산에 기초해서 치역의 원소의 개수에 대응이 일대일이 아니기 때문에 치역이 유한하더라도 증명의 논의에 반하는 것이 아님을 담화적 필연성의 권위 구조를 나타내며 설명하였다.

성은의 질의응답은 에피소드 2의 경훈의 응답처럼, 성은의 수학적인 판단에 기초하여 반응하였다는 점을 알 수 있다. 성은의 증명 아이디어

를 분명하게 이해하고 나아가 다른 증명 방법이 있는지에 관한 소집단 토론 시간을 학생에게 제공하였다. 이 소집단 토론 학습을 통해 모둠별 증명 발표가 이어졌고, 수업 마무리에는 모둠별 증명 중에서 가장 논리적이면서도 참신한 증명이 무엇인지에 관한 투표가 이루어졌다. 여기서 영웅의 증명이 가장 많은 득표를 얻었다. 영웅의 증명 발표에 대한 구체적인 질의응답의 발화는 <표 Ⅳ-19>와 같다.

<표 Ⅳ-19> 에피소드 3 발표에 대한 질의응답: 발표자(영웅)와 청중(성은)의 발화 및 권위 구조

발화자	발화	권위 구조
성은	$f(x_1+kp)$가 $\pm p$까지인지는 알 수 있는데 **뭐가 정확히 p이고 뭐가 정확히 $-p$인지까지는 모르잖아요?** 근데 그래도 상관이 없는 게 p를 주는 것이랑 $-p$를 주는 것 중 어느 그룹은 무한하니까	개인적 범위
영웅	저는 kp를 안 썼는데, **저는 그냥 무조건 더하기로**	권위의 담화
성은	아 저게 N보다 크면, 저게 M_1보다 크니까 상관이 없네요.	

성은은 영웅의 증명에서 '$p=f(x_1)=f(x_1+p)=f(x_1+2p)=\ldots$'의 부분을 '$k$가 정수일 때 $f(x_1)=f(x_1+kp)=p$'라는 것으로 받아들였다. 이 과정에서 k가 음수일 때, x_1-kp가 x_1보다 작아지는 상황에 대한 가정을 질문하였고, 이 과정에서 성은의 개인적 범위의 권위 구조가 드러났다. 영웅은 자신의 증명에서 성은의 설명과 같이 k가 정수일 때, x_1+kp를 설정함으로써 x_1보다 작은 수를 설정하지 않았음을 설명하였다. x_1보다 큰 수만 나타날 수 있게 자신의 증명을 구성하였다는 점을 설명하는 과정에서 권위의 담화의 권위 구조를 드러냈다. 성은은 영웅의 답변을 통해 다시금 생각해보게 되었으며, $x>M_1$일 때 $f(x_1)$이 N보다 크다는 영웅의 논리를 받아들이는 것으로 질의응답이 마무리되었다.

에피소드 3에서 성은과 경수, 영웅과 성은 모두 증명에서의 논리적 근거에 대해 질의응답 하였다. 이 과정은 서로 상반되는 성격의 권위가 대응되었다. 먼저, 경수가 내재적 요인의 권위를 드러낸 것에 대해 성은은

외재적 요인의 권위로 대응하였다. 다음으로, 영웅이 내재적 요인의 권위를 드러낸 것에 대해 성은이 외재적 요인의 권위로 대응하였다. 에피소드 2와 마찬가지로 에피소드 3에서, 이와 같은 상반된 성격의 권위의 대응은 발표자와 청중의 서로의 의견을 제시하고, 내용상의 합의를 이뤄냄으로써 수학 학습을 수행하고 있는 주체적인 학생의 역할을 수행한 것이다.

발표자와 청중은 질의응답에서 대응된 권위의 모습을 관찰할 수 있었다. 즉, 선수 발화자와 후속 발화자가 드러낸 권위가 각각 내재적 요인의 권위와 외재적 요인의 권위가 서로 대응된 것으로, 이는 발화자로 하여금 상반된 성격의 권위를 대응한 것이다. 이러한 권위의 대응은 발표자와 청중 사이의 내용상의 합의를 이끌어냈다.

2.2. 동일한 성격의 권위의 표출

이번 하위 절에서는 발표자와 청중 사이의 의사소통에서 동일한 성격의 권위를 드러냄으로써, 권위가 대응되지 못한 채 발표자와 청중이 자신의 권위만을 표출한 질의응답의 사례를 제시한다. 이는 증명 발표 중심 수업에서 발표자와 청중 사이에 나타난 대응된 권위와 반대되는 사례이다. 다만, 발표자와 청중의 발화에서 동일한 성격의 권위가 나타난 경우 증명 내용에 대한 내용상의 합의가 이루어지지 못했다. 이러한 사례를 대응된 권위가 나타난 사례와 대조한 후에, 이 연구에서 관찰된 대응된 권위의 의미를 살펴볼 것이다.

여필은 에피소드 1에서 자신이 사실로 받아들이고서 증명에 활용한 사실을 예시를 들어 설명하였다. 이는 1과 자연수 n 사이에 x개의 자연수를 선택할 때, 자연수 $n+1$과 $2n$ 사이에 서로 다른 x의 배수가 있다는 것이었다. 이 과정에서 n을 5로 설정하여 설명을 이어나갔다. 구체적인 질의응답의 발화는 <표 Ⅳ-20>과 같다.

<표 Ⅳ-20> 에피소드 1 발표에 대한 질의응답: 발표자(여필)와 청중(경수)의 발화 및 권위 구조

발화자	발화	권위 구조
여필	n을 10이라고 하고 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 이렇게 있는데요.	
	이렇게 반 나누고, 그러면 여기서 두 개를 뽑았어요. (여기서는 1, 2, 3, 4, 5를 칭함)	
	2, 3을 뽑았는데, **2, 3의 배수가 여기는 4개 있죠 적어도.** (여기는 6, 7, 8, 9, 10을 칭함)	담화적 필연성
경수	**저거 안 될 것 같은데요?** x개의 multiple이 있다는 것.	개인적 범위
	1, 2, 3, 4, 5, 6하고 7, 8, 9, 10, 11, 12 이렇게 하면요.	
	위에서 6개 다 뽑았어요.	
	그러면 밑에서 못 만들 거든요.	담화적 필연성
	아니 위에서 6개를 뽑았어요.	
	그 6개가 각각 배수를 못 만든다고요.	담화적 필연성
	서로 다르니까 저게 되잖아요.	
	서로 다른 걸 못 만들어요.	담화적 필연성
여필	네, 그렇네요. ...(중략)... 틀린 걸 오늘 알았어요.	

여필은 n을 10으로 택했다고 표현하였지만, 실제로는 n을 5로 택한 것이다. 이때, 1, 2, 3, 4, 5와 6, 7, 8, 9, 10 두 개의 묶음으로 구분하여 2와 3의 자연수 두 개를 선택하였다. 여기서 2 혹은 3의 배수가 7을 제외한 나머지 수 4개가 존재하여 2와 3의 자연수 개수 2가 4를 나눈다는 것으로 설명하였다. 이 과정에서 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다. 이러한 결론은 임의의 2개의 숫자를 1과 2개의 배수가 존재한다는 결론이 아니기 때문에 여필의 발화에는 오류가 있었다.

한편, 경수는 n을 6으로 택하여 1, 2, 3, 4, 5, 6과 7, 8, 9, 10, 11, 12로 구분한 상황을 제시하였다. 여기에서 1, 2, 3, 4, 5, 6의 자연수 6개를 선택한 상황이다. 여필이 제시한 사실이 참이라면 1, 2, 3, 4, 5, 6에서 선택된 수의 배수가 중복 없이 7, 8, 9, 10, 11, 12에서 나타나야 했다. 하지만, 7과 11은 소수이기 때문에 1의 배수로만 선택되어야 한다. 따라서 경수는 여필의 판단이 오류가 있음을 개인적 범위의 권위 구조를 드러내며, 여필의 의견에 반대되는 의견을 보였고 담화적 필연성의 권위 구조를 자신의 반례를 설명하였다.

여필은 자신이 설정한 수학적 사실이 참임을 정당화하기 위해 담화적 필연성이라는 외재적 요인의 권위 구조를 드러냈다. 경수는 개인적 범위라는 내재적 요인의 권위를 드러냈지만, 경수의 발화에서 주요하게 등장한 경수의 권위 구조는 담화적 필연성이었다. 따라서 여필과 경수의 질의응답에는 외재적 요인의 권위가 표출되었음을 알 수 있다. <표 Ⅳ-20>의 여필의 마지막 발화에서 알 수 있는 것처럼 여필과 경수의 질의응답을 통해 여필의 증명이 오류가 있었음을 알 수 있다. 이러한 동일한 성격의 권위의 표출은 오류가 없는 증명의 후속 발표를 유도하게 했다.

에피소드 4의 명제에 정수 a와 n이 서로소라는 조건이 포함되어 있었는데, 이 조건이 증명에 사용되는지를 영웅은 질문하였다. 실제로 영웅은 자신의 서면 과제에서 정수 a와 n이 서로소임을 이용하지 않고 증명을 작성했기 때문에, 이러한 질문이 가능하였다. 구체적인 질의응답의 발화는 <표 Ⅳ-21>과 같다.

<표 Ⅳ-21> 에피소드 4 발표에 대한 질의응답: 발표자(호승)와 청중(영웅)의 발화 및 권위 구조

발화자	발화	권위 구조
호승	영웅이 질문이 있다는데	
영웅	이게 이 Theorem을 증명할 때, a와 n이 **서로소인 것만 써도 되는데**, 왜 이게 표기가 되어 있는지 궁금합니다.	개인적 범위
교수자	여기서는 필요가 없나요? 썼어요? 호승이는?	
호승	그러니까 이게 의미하는 바가 여기서 좀 이게 complete residue system이라는 것을 **좀 설명하는 것 같아서**	개인적 범위
	그러니까 이게 만약에 1이 아니면 애초에 이 n개짜리를 모아놓은 법 n에 대해서 complete residue system이 **될 수가 없는 경우도** 생겨서	개인적 범위

호승의 발표에서 영웅은 정수 a와 n이 서로소라는 조건이 필요한지의 여부에 대해서 호승에게 질문하였다. 영웅은 정수 a와 n이 서로소라는 점을 사용하지 않고 증명할 수 있다는 점을 자신의 개인적 범위의 권위 구조를 나타내며 질문하였다. 여기서 호승은 명확한 근거를 제시하지 못했고 완전잉여계(complete residue system)를 언급하면서 자신의 의견을

피력하였다. 그 과정에서 호승은 자신의 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈다.

질의응답에서 영웅과 호승은 모두 개인적 범위의 권위 구조를 드러내었고, 다시 말해 내재적 요인의 권위를 드러냈다. 내재적 요인의 권위라는 동일한 성격의 권위를 표출한 것이다. 여기서 영웅과 호승의 질의응답이 내용상의 명확한 합의가 이루어지지 않음을 확인할 수 있다. 영웅과 호승이 모두 정수 a와 n이 서로소라는 조건을 증명에서 활용하지 않았고, 이 조건이 명제에 포함될 수 있는지의 여부에 대해 명확한 판단을 내릴 수 없었다. 이러한 권위의 표출로 인해, 명제의 조건의 활용 여부에 대한 수업 구성원 간의 합의가 필요했다. 따라서 소집단 토론을 통해 이 조건에 대해 협의할 수 있도록 하였다.

발표자와 청중 간의 동일한 성격의 권위의 표출은 수업 구성원의 내용에 대한 합의를 이루지 못했기 때문에 후속 발표자의 증명 발표나 학생의 소집단 토론이 진행되어야 했다. 이는 질의응답 과정에서 발화자가 상반된 성격의 권위의 대응을 드러냄으로써 증명 내용에 대한 합의가 이루어진 것과는 반대되는 결과인 것이다.

2.3. 대응된 권위의 의미

에피소드별로 청중과 발표자의 질의응답이 있었으며, 이러한 질의응답은 발표자와 청중 사이에 구성하는 권위 구조를 확인할 수 있는 주요한 자원이 된다. 에피소드 1과 에피소드 4에서는 한번의 질의응답이 있었고, 에피소드 2과 에피소드 3의 경우 다수의 질의응답이 있었다. 이에 따른 권위 구조를 정리하면 [그림 Ⅳ-3]과 같다.[19]

19) 에피소드 1을 제외한 질의응답은 청중으로부터 먼저 시작되었지만, 질의응답 과정은 발표자의 부가적인 설명으로부터 청중이 의견을 제시하는 과정이 포함된다. 따라서 발화의 순서대로 권위 구조를 제시한다. 더불어 [그림 Ⅳ-1]과 같이 내재적 요인의 권위에는 음영을 표시하지 않고, 외재적 요인의 권위에만 음영을 표시한다.

에피소드명	발표자와 청중이 나타낸 권위 구조	
에피소드 1	담화적 필연성	담화적 필연성
에피소드 2	담화적 필연성	개인적 범위
	개인적 범위	담화적 필연성
에피소드 3	개인적 범위	담화적 필연성
	개인적 범위	권위의 담화
에피소드 4	개인적 범위	개인적 범위

[그림 Ⅳ-3] 발표자와 청중의 권위의 양상

에피소드 2와 에피소드 3에서 청중과 발표자의 의사소통 과정에서 드러난 권위 구조는 선수 발화자가 개인적 범위를 드러냈다면, 후속 발화자가 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다. 선수 발화자가 개인적 범위를 드러낸 것은 증명을 구성하는 과정에서 변화를 가정하거나 청중이 진위를 판단하는 과정에서 발표자로부터 설득을 얻기 위한 행동이 된다. 후속 발화자는 선수 발화자를 설득하기 위해서 수학적인 판단에 기초하여 증명을 설명하는 과정에서 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다. 반면, 선수 발화자가 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다면, 후속 발화자는 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈다. 타인과의 수학적 견해가 차이가 있는 경우에 청중을 설득하는 과정에서 선수 발화자가 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈다. 후속 발화자는 선수 발화자의 방법대로 증명을 시도하지 않았기 때문에, 선수 발화자의 수학적 견해에 기초하여 발생할 수 있는 상황을 자신의 판단 범위 내에서 설명하였다.

에피소드 1과 에피소드 4는 발표자와 청중 모두 동일한 성격의 권위를 드러냈다. 에피소드 1에서 발표자와 청중은 모두 담화적 필연성의 권위 구조를 드러냈고, 발표자의 증명에서 사용한 수학적 사실의 오류가 있음을 질의응답을 통해 확인할 수 있었다. 에피소드 4는 발표자와 청중 모두 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈으며, 청중은 증명 과제를 해결하는 과정에서 자신이 갖게 된 의문을 제기했지만, 발표자는 이에 대해 청중이 납득할 만한 근거를 제시하지 못했다. 따라서 발표자와 청중 사이

에 증명 내용상의 합의가 이루어지지 못했다.

학생 간의 질의응답은 발표자의 증명의 표현, 발표자의 설명에서 갖게 된 의문 혹은 수업 밖 환경에서 증명을 공부할 때 갖게 된 의문 그리고 자신의 증명과 차이점이 있는 경우에 청중으로부터 질의가 시작되어 발표자는 이에 대해 응답하였다. 이러한 질의응답은 수업 구성원 간의 협의 과정으로서 증명에 필요한 부수적인 기술, 증명 구성 방법이나 아이디어에 대한 논의로 이어져 구성원 간의 공동의 이해를 이끌어낼 수 있었다. 여기서 모든 질의응답에서 학생의 권위가 드러나는 것은 아니다. 발표자가 청중의 질문을 정확하게 이해하지 못했을 경우에는 대답을 하지 못하거나, 명확하게 자신의 의견을 전달하지 못했다. 즉, 발표자와 청중 사이에 증명에 대한 논의에서 합의가 이루어지지 않았을 경우에는 발표자나 청중의 권위가 나타나지 않았거나 상반된 형태의 대응된 권위의 모습을 포착할 수 없었다. 발표자와 청중 사이에 내용상의 합의가 이루어졌을 때, 대응된 권위의 모습을 포착할 수 있었다.

이러한 결과를 종합하면, 발표자와 청중 사이에 드러난 권위는 내재적 요인의 권위와 외재적 요인의 권위의 상반되는 대응의 형태가 나타났다고 할 수 있다. 질의 과정에서 내재적 요인의 권위 구조가 드러났다면, 응답 과정에서 외재적 요인의 권위 구조가 드러남을 알 수 있다. 마찬가지로 질의 과정에서 외재적 요인의 권위 구조가 드러났다면, 응답 과정에서 내재적 요인의 권위 구조가 드러났음을 알 수 있다. 학생이 발표자와 청중의 역할을 수행하면서, 증명 의사소통 과정의 참여자로서의 권위를 구성하고 서로 반대되는 권위 구조가 반복적으로 나타난 것을 확인할 수 있었다. 이러한 과정에서 학생은 증명 구성에 대한 아이디어 제시 혹은 진위를 판정하는 등의 활동을 수행하였다. 따라서 발표자와 청중 사이에 나타난 권위의 모습은 대응된 권위로 설명할 수 있다.

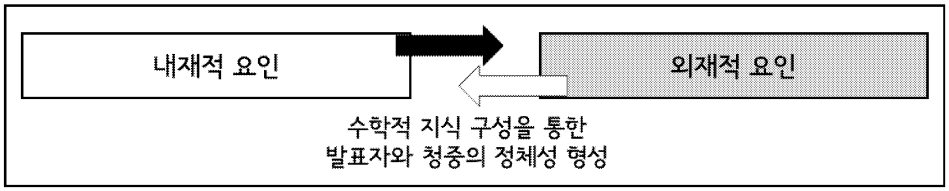
기존의 수학 교육에서의 권위에 관한 선행 연구에서는 여러 사람 사이에 발생하는 권위의 개념을 논할 때, 권위의 협의의 측면을 주요하게 살펴보았다. 먼저, Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)은 새로운 환경에서 학생을 지도하게 된 교사가 수학 교실 내에서의 교수자와 학생 사이의

권위를 학생과 협의하는 과정을 분석하였다. 이는 수학적 내용에 대한 공동의 이해를 위한 협의가 아닌, 교수자와 학생 사이에 발생되는 권위가 존재하고, 이를 협의하는 과정에 대한 것이었다. 권위 관계에 놓이게 된 교수자와 학생이 수업에서 발생되는 권위에 대해 실제적으로 협의한 것이며, 이러한 협의에서 다뤄진 권위는 혼합된 형태였다. 다음으로, Langer-Osuna(2016)는 Engle 외(2014)에서 다뤘던 영향 모델(a model of influence)을 바탕으로 학생 간의 지적 권위와 사회적 권위가 영향을 받는지를 분석하였다. 나아가 Langer-Osuna(2018)는 지적 권위와 사회적 권위를 Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)이 언급했던 권위를 갖는 것(being an authority)과 권위에 있는 것(being in authority)으로 분류하였다. 여기서 학생 사이의 의사소통을 통해 권위의 협의가 일어남을 제시하였다. 이러한 연구에서 권위의 협의는 공통적으로 의사소통과 행동으로부터 발생되며 교수자와 학생 혹은 학생 간의 위치(positioning)에 대한 협의로부터 발생됨을 언급하였다. 구체적으로 의사소통과 행동을 통해 주도권을 잡는 자와 그를 따르는 자로 구분하는 것과 그러한 상황에 놓이게 되는 것을 지적 권위와 사회적 권위 사이의 협의로 설명한 것이다.

증명 발표 상황에서는 발표자와 청중, 교수자와 학생이라는 명확한 역할이 교실 내에 존재하며, 자신의 증명을 발표하는 발표자는 증명에 대한 내용 전달자로서 교수자의 역할을 수행하고 있고, 청중은 발표자에게 질문하고 발표자는 청중의 질문에 대해 답해야 하는 책임이 부여되어 있다. 따라서 발표자와 청중이라는 관계 속에서 지적 권위와 사회적 권위의 협의는 이미 형성된 것으로 볼 수 있다. 이러한 위치에서 발표자와 청중은 의사소통과 행동에 기초하여 질의응답을 수행한다. 여기서 질의응답이 가진 내재적 성질로 인해 발표자와 청중 사이의 협의의 과정이 있었지만, 이를 권위의 협의로 바라볼 수는 없다.

질의응답을 통해 발생하게 된 발표자와 청중의 협의의 과정에서 발표자와 청중은 각자의 위치가 형성되어 있다. 즉, 권위의 협의 과정을 관찰할 수 없으며, 이미 권위 관계가 형성되어 있는 것이다. 각자의 증명 발표에서 다루어진 내용에 대한 질의응답을 권위의 틀로서 분석하였을

때, 발표자와 청중은 자신의 위치에서 각각 의사소통을 통해 자신의 권위를 드러내고 이를 상반된 성격의 권위로 대응하는 형태의 모습을 보였다. 따라서 이 연구에서 나타난 대응된 권위의 모습은 선행 연구에서 언급했던 권위의 협의와는 다른 형태임을 알 수 있다. 발표자와 청중 사이의 대응된 권위의 모습을 도식화하여 나타내면 [그림 Ⅳ-4]와 같다.



[그림 Ⅳ-4] 발표자와 청중의 대응된 권위의 의미

이제 발표자와 청중의 대응된 권위를 권위의 논의를 넘어 정체성의 담론에서 논의하여 보자. Wenger(1999)는 정체성의 형성이 곧 학습이며, 학습이 곧 정체성의 형성이라는 점을 언급하였다. 수학적 아이디어를 소유하고, 정당화하고 논의하는 기회는 학생으로 하여금 자신을 수학적 권위에 학생을 위치하게 한다. 이러한 기회가 누적됨에 따라 지적인 힘을 소유하고 있는 개인의 정체성과 연관된 수학 지식의 구성을 지지한다(Langer-Osuna & Esmonde, 2017). 이 연구 결과에서 발표자와 청중은 자신의 발표에 대한 주도권을 가고 있는 발표자와 이러한 발표를 청취하는 청중의 권위 관계가 형성되어 있다. 발표 내용에 대한 질의응답을 통해 발표자와 청중이 각자의 위치에서 대화를 통해 각자의 권위를 드러내고, 이 과정에서 자신의 수학적 아이디어를 명확하게 제시함으로써 내용에 대한 합의를 이루었다. 이는 발표자와 학생이 수학적 지식을 갖춘 자신의 정체성을 형성해가는 모종의 시도로 볼 수 있다.

발표자와 청중이 각자의 위치에서 자신의 권위를 대응하는 것은 수학 수업에서 수학적 전문적 지식을 갖추어가는 학생으로서 정체성을 형성하는 하나의 학습의 과정으로 해석할 수 있다. 이는 권위와 정체성이 발화자와 청자의 위치를 근간으로 하여 발생되어 권위의 논의가 정체성에 관

한 논의로 확장될 수 있기 때문에 가능한 것이다.

3. 교수자의 결합된 권위

이번 절에서는 대학생의 증명 발표 상황에서 교수자가 나타낸 권위의 양상을 살펴본다. 에피소드별로 발표자의 증명 발표, 발표자와 청중 사사이의 질의응답이 진행되었다. 이전 절에서 내용 중심의 증명 수업 환경과는 다르게 학생의 위치(positioning)가 변화하였을 때 나타나는 발표자, 발표자와 청중 간의 권위의 모습을 살펴보았다. 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업이라 하더라도, 이 수업은 교수자와 학생이라는 권위 관계가 변형된 것이 아니었기 때문에 전반적인 수업의 방향은 교수자에 의해 통제되었다. 이 과정에서 교수자는 결합된 권위의 모습을 드러냈다.

3.1. 상반된 성격의 권위의 결합

교수자는 학생의 증명 발표와 질의응답을 유도하였으며, 전체 토론과 소집단 토론이 병행될 수 있도록 수업 전반의 상황을 통제하였다. 학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 학생의 자율성이 보장되어 있지만, 교수자와 학생이라는 권위 관계는 유지되어 있으므로 학생의 올바른 지식의 구성을 위해 교수자는 적절히 개입하였다. 이번 하위 절에서는 상반된 성격의 권위가 결합된 형태로 관찰된 교수자의 발화를 중심으로 제시한다.

에피소드 1에서 여필의 증명에 대한 질의응답의 결과, 여필은 자신의 증명에서 여필이 자신이 전제한 수학적 사실에 오류가 있음을 자각하였다. 이 과정에서 여필은 청중과의 권위의 대응을 이루지 못하였기에, 수업 구성원은 추가적인 증명 발표로 증명을 이해해야 했다. 여필의 발표로부터 다른 발표자의 발표를 유도하고, 학생을 이끄는 교수자의 구체적인 발화는 <표 Ⅳ-22>와 같다.

<표 Ⅳ-22> 에피소드 1 발표자(여필)에 대한 교수자의 발화 및 권위 구조

교수자의 발화	교수자의 권위 구조
혹시, 틀린 걸 알고 **다른 걸 생각해보지 않았나요?**	개인적 범위
그런데 여러분들이 증명을 보면 이걸 **뭘로 해야 한다는 냄새가** 나지 않아요?	권위의 담화
아, 이거 **뭘로 해야되겠다는 그런 거.**	담화적 필연성
비둘기집의 원리로 해야겠다는 냄새가 좀 나지 않나요?	담화적 필연성

교수자는 여필의 발표의 오류로부터 다른 증명 구성 과정에서의 핵심적인 아이디어인 '비둘기집의 원리'를 학생으로 하여금 표현할 수 있게 유도하였다. 비둘기집 원리로의 논의의 전환을 유도하기 위해 교수자는 열린 질문으로 논의를 이끌어갔고, 여기서 교수자는 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈다. 더불어, 비둘기집의 원리가 이 정리를 증명하기 위한 핵심적인 아이디어로서, 증명 과정에 필요함을 언급하였다. 이 과정에서 교수자의 권위의 담화의 권위 구조가 나타났다. 정리의 표현에 기초하였을 때, 증명 방향을 잡아나갈 수 있다는 점과 그 방향은 비둘기집의 원리에 기초하여 잡아나갈 수 있다는 점을 담화적 필연성의 권위 구조를 나타내며 설명하였다.

교수자의 발화에서 내재적 요인의 권위와 외재적 요인의 권위가 함께 나타났다는 점을 알 수 있다. 교수자의 내재적 요인의 권위를 통해서 기존의 증명 발표 이외에 다른 증명 발표에 대한 논의가 필요하다는 점이 학생에게 전달될 수 있었다. 또한, 교수자는 외재적 요인의 권위를 드러냄으로써, 이 증명을 구성하는 주요한 개념이 비둘기집의 원리임을 학생에게 전달하였다. 논의의 연장뿐만 아니라 전문가로서의 지식을 전달하려는 교수자는 결합된 권위의 모습을 통해 자신의 역할을 수행하였다.

여필의 증명에 대한 질의응답에서 동일한 성격의 권위의 표출로 인해 발표자와 청중 간의 논의는 합의를 이루지 못했다. 여기서 교수자의 권위의 결합을 통해, 다른 발표자의 증명 발표로 이어질 수 있었다. 후속 발표에 성은이 자원하였으며, 성은은 교과서적 증명 방법과 같이, 비둘기집의 원리를 이용하여 증명하였다. 다만, 성은의 발표에서 교수자는 성은이 함수를 설정하여 증명하였다는 점과 성은의 발화의

‘Well-defined’라는 표현에 주목하여 설명하였다. 교수자의 구체적인 발화는 <표 Ⅳ-23>과 같다.

<표 Ⅳ-23> 에피소드 1 발표자(성은)에 대한 교수자의 발화 및 권위 구조

교수자의 발화	교수자의 권위 구조
성은이 한 말 중에서 Well-defined라는 말이 있었는데 **혹시 그 말 아세요?**	개인적 권위
Well-defined, 수학에서 Well-defined라는 말이 자주 나와요,	
정의해놓고 이게 Well-defined임을 보이자.	
정의 다 되어 있는데 ‘왜 그걸 보여야 하지?’ **그런 생각이 들지 않나요?**	개인적 범위
Well-defined 여기서는 어떤 게 map 정의를 했어요.	
그러니까 함수를 이렇게 정의했는데, **이게 함수가 되는지를 보이는 것이죠** 결국은.	담화적 필연성
어떤 걸 정의했는데, **정의했다고 그게 그 조건에 맞는 건 아니잖아요?**	개인적 범위
그래서 이게 함수가 되는 걸 **보이는 것이죠.**	담화적 필연성
그런데 거기에 Unique factorization이 되는 걸 **보이는 것이죠.**	담화적 필연성

성은이 ‘Well-defined’라는 표현을 사용하였는데, 교수자는 질문을 통해 학생이 초점을 기울여야 할 증명을 구성하는 함수의 정의에 대한 논의가 이루어질 수 있게 하였다. 이 과정에서 교수자의 개인적 권위 및 개인적 범위의 권위 구조가 드러났다. 결국, 함수를 정의했을 때 함수가 되는지를 확인하는 과정이 필요하다는 점을 담화적 필연성의 권위 구조를 드러내면서 설명하였다.

교수자의 발화에서 내재적 요인과 외재적 요인의 권위를 동시에 나타냈다는 점을 알 수 있다. 교수자가 내재적 요인의 권위를 드러냄으로써 단순히 학생의 증명 발표로서 마무리되는 것이 아니라 증명을 구성하는 수학적 요인에 대한 논의가 연장될 수 있게 하였다. 또한, 교수자가 외재적 요인의 권위를 드러내면서 학생이 함수의 정의에 관한 다른 상황에서도 ‘잘 정의됨(Well-definedness)’을 고려해야 한다는 점을 학습할 수 있게 하였다. 이처럼 교수자는 서로 상반된 성격의 권위를 결합된 형태로 드러냄으로써 증명 구성에 필요한 아이디어를 전달하고, 그 논의가

학생의 발표에서 마무리되는 것이 아니라 확장될 수 있게 하였다.

에피소드 3의 성은의 증명 발표 이후에 소집단 토론 활동이 진행되었고, 각 모둠별로 하나의 증명을 발표하였다. 이때 투표를 진행하였으며, 영웅의 증명이 가장 많은 학생의 득표를 얻었다. 이후 수업을 마치고 Classprep 과제를 통해 성은은 영웅이 사용한 귀류법 가정의 적절성에 대한 질문을 던졌다. 영웅의 증명을 재검토한 결과 이러한 가정에 오류가 있음을 진단하고, 이 증명에 대한 추가적인 논의가 이루어졌다. 이러한 논의를 도입하는 교수자의 구체적인 발화는 <표 Ⅳ-24>와 같다.

<표 Ⅳ-24> 에피소드 3의 교수자의 발화 및 권위 구조

교수자의 발화	교수자의 권위 구조
그런데, **생각해봐야할 것은** 성은 학생의 코멘트였어요.	개인적 권위
...(중략)...	
같이 생각해봅시다. 이제 성은이한테만 질문하는 게 아니라 모든 학생한테 **시간을 좀 줘야할 것 같아서.**	개인적 권위
귀류법의 결론을 부정한 게 이게 맞나요?	개인적 범위
결론의 '$f(x)$ is composite'를 그대로 두고 'for finitely many n'에 대해서로 'for infinitely many'에 대해서를, 그것만 부정을 했더라고요?	
이 전체 명제의 **귀류법을 쓸 때 부정은 어떻게 해야하나요?**	개인적 범위
...(중략)...	
leading coefficient는 positive예요.	
그런 infinitely many n에 대해서 $f(x)$는 composite number라는 것을 우리가 보여야 하는 건데, 지금 여러분들이 쓴 귀류법의 가정이 '$f(x)$ is composite for finitely many n' 이렇게 되어 있어요.	권위의 담화
...(중략)...	
성은이의 질문을 다시 생각해보니까 여러분들이 귀류법의 가정을 조금 **잘못 생각한 건 아닌가 하는 생각이 들었어요.**	개인적 범위
그래서 **다시 한번 생각해보면 어떨까요?**	개인적 범위

교수자는 성은의 질문을 언급하면서 수업 논의의 초점을 맞춰가는 과정에서 개인적 권위의 권위 구조를 드러냈다. 나아가 영웅의 증명에서의 귀류법의 가정이 적절하지 않음을 설명하기 위해 질문을 던졌고, 여기서 개인적 범위의 권위 구조를 드러냈다. 또한, 명제의 결론부인 'Then,

$f(x)$ is composite for infinitely many n' 을 언급하면서, 결론부에서 증명이 되어야 할 사실이 '$f(x)$가 합성수' 라는 점을 분명히 하였다. 증명의 되어야 할 대상을 언급하는 과정에서 권위의 담화의 권위 구조를 드러냈다. 성은과 영웅의 발표에 기초하여 소집단 토론 활동을 유도하는 교수자는 개인적 범위의 권위 구조를 나타냈다.

에피소드 3의 명제는 두 차시에 걸쳐 논의가 진행되었으며, 수업 도입부에 <표 Ⅳ-24>와 같이 교수자는 자신의 권위를 드러냄으로써 논의의 방향을 설정하고 이전 차시에서 다루었던 귀류법의 가정에 관한 내용을 전달하였다. 교수자의 발화에서 내재적 요인과 외재적 요인의 권위가 동시에 나타났다는 점을 알 수 있다. 교수자는 권위를 통해 귀류법 가정에 대해 학생이 논의하고 이를 발표할 수 있도록 논의가 전개되었고, 에피소드 3의 명제의 가정부와 결론부의 구조를 명확하게 전달하였다.

에피소드 4에서 호승과 영웅은 동일한 성격의 권위를 표출하였고, 이 과정에서 호승은 청중과 권위의 대응을 이루지 못하였다. 따라서 수업 구성원은 추가적인 증명 발표를 수행하거나 이 증명에 포함되어 있는 '정수 a와 n이 서로소' 라는 조건에 대한 논의가 필요한 상황이었다. 교수자는 호승과 영웅의 질의응답 이후에 다른 학생 중에서 'a와 n이 서로소라는 조건' 을 이용하여 증명을 완성한 경우가 있는지를 확인하였다. 이러한 상황을 조정하는 교수자의 구체적인 발화는 <표 Ⅳ-25>와 같다.

<표 Ⅳ-25> 에피소드 4 발표자(호승)에 대한 교수자의 발화 및 권위 구조

교수자의 발화	교수자의 권위 구조
호승이 어디갔어요?	
아직 해결이 좀 덜 되어서요.	
3.17을 어떻게 사용했는지 좀 설명해줄 수 있을까요?	개인적 범위
...(중략)... 호승이 증명 말고 **a하고 n이 서로소인 걸 써서 증명한 학생이 있어요?**	개인적 범위
그게 증명 과정에 꼭 필요했던 경우	
다 호승이처럼 증명했나요? 아니면 아까 그 다른 학생은 비둘기집의 원리를 (썼다고 하던데).	

그러면 잠시 호승이의 증명하고 아까 비둘기집의 원리를 증명한 거를 3분 정도 **팀에서 같이 한번 논의를 해보고 다시 증명을 해보는 걸로.**	개인적 권위
만약에 없어도 된다면 **우리가 지금 위수를 정의하려고 그러는 것이죠?**	개인적 권위
그래서 가장 중요한 위수에서는 **Well-ordering axiom이 있으니까 이런 해가 적어도 한 개가 있는 게 가장 필요한 게 정리 4.5 이잖아요?**	권위의 담화
그렇다면 위수의 정의는 a, n이 서로소가 아니고 **4.6 정리만 있으면 위수를 정의할 수 있는데,** 4.6 정리 때문에 지금 다 하고 있는 것이죠.	개인적 범위

교수자는 후속 명제에서 다루어지는 위수의 정의를 위해, 이 명제의 사실이 필요한 것이고 후속 명제에서 제시될 명제의 조건에 a와 n이 서로소라는 조건이 제시되어 있음을 설명하였다. 또한, 정리 3.17을 호승이 어떻게 사용한 것인지를 다시금 설명할 수 있게 유도하였다. 이 과정에서 후속 논의와 호승의 증명에 대한 재고를 위해 교수자는 개인적 범위, 개인적 권위의 권위 구조를 드러냈다. 또한, 이 단원에서의 해당 정리의 성격을 설명하기 위해 후속 정리와 비교하면서 설명하였는데, 이 과정에서 권위의 담화의 권위 구조를 드러냈다.

에피소드 4의 질의응답으로부터 발생된 'a와 n이 서로소라는 조건'의 여부에 대한 논의를 학생 사이에서 촉진될 수 있게 교수자는 내재적 요인의 권위와 외재적 요인의 권위를 동시에 드러냈다. 여기서 이 조건이 명제의 증명에 필요한지의 여부가 학생으로 하여금 확인해 볼 필요가 있다고 판단한 교수자는 학생에게 소집단 토론의 시간을 배분하였고, 이것에 대한 논의를 진행하였다.

대학생의 증명 발표에서 교수자는 서로 상반된 성격의 권위를 동시에 표출하는 모습을 보였다는 점을 기술하였다. 즉, 내재적 요인과 외재적 요인의 권위를 동시에 나타냄으로써 수업 논의의 방향을 조정하거나 학생에게 전달해야 할 사실을 명확하게 전달하였다.

3.2. 단일한 성격의 권위의 표출

이번 하위 절에서는 교수자의 설명에서 드러난 권위가 결합되지 않고, 단일한 성격의 권위가 표출된 사례를 중심으로 제시한다. 이는 증명 발표 중심 수업에서 나타난 교수자의 결합된 권위의 모습에 해당하지 않는 사례이지만, 기존 선행 연구에서 다뤄진 바 있는 권위의 모습이다. 따라서 기존의 결과와 비교 분석한 후에, 이 연구에서 조명하는 결합된 권위의 의미를 살펴볼 것이다.

앞선 하위 절에서 살펴보았던 것과 같이, 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자는 결합된 권위의 모습을 표출함을 확인할 수 있었다. 다만, 교수자는 발표자의 증명에 대한 코멘트 혹은 설명하는 과정에서 단일한 성격의 권위를 표출하기도 하였다. 먼저, 교수자의 내재적 요인의 권위만이 드러난 교수자의 구체적인 발화는 <표 Ⅳ-26>과 같다.

<표 Ⅳ-26> 에피소드 3 발표자(성은)에 대한 교수자의 발화 및 권위 구조

교수자의 발화	교수자의 권위 구조
질문과 코멘트가 없다면, 아마 성은이처럼 증명한 사람은 **성은이 밖에 없는 것 같아요.**	개인적 범위
제가 한 바퀴를 돌아보니까, 그래서 **또 다른 증명이 있는 것 같아요.**	개인적 범위
아이디어는 약간 비슷하지만, notation을 set을 잡지 않고 **polynomial을 구체적으로 해서 composite number라고 보인 사람도 있는 것 같아요.**	개인적 범위
증명을 보여주면 어떨까요?	개인적 범위

성은의 증명은 다른 수강생들의 증명이나 교과서적 증명과는 다른 증명이었기 때문에 교수자는 수강생들에게 다른 증명에 대해 발표할 수 있게끔 유도하였다. 즉, 성은의 증명과는 다른 증명이 존재할 수 있고, 이를 발표할 수 있게 독려하였다. 이 과정에서 교수자의 개인적 범위의 권위 구조가 드러났다. 이를 통해 학생으로 하여금 다른 증명의 존재성을

인지할 수 있고, 다른 증명을 발표할 수 있게 지원하였다. 실제로 이로부터 이 정리의 증명 방법에 대한 소집단 토론 학습으로 논의가 확장되었다.

교수자의 발화를 통해 내재적 요인의 권위만이 드러남을 알 수 있다. 이미 교실 내에서 증명 방법에 대한 공유가 되었기 때문에, 교수자의 발화를 통해 성은의 증명 방법이나 증명 작성을 포함하여 추가적인 논의로 이어질 수 있었다. Ju & Kwon(2007)은 이러한 성격의 교수자의 발화를 조망한 바 있다. 교수자는 교실 내의 수업 구성원을 칭하는 '우리(we)' 라는 표현을 통해 공유된 지식의 정교화를 도모한다는 것이다. Ju & Kwon(2007)에서 제시한 교수자의 발화는 Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)의 개인적 범위의 권위 구조에서의 언어적 증거가 된다. 즉, 내재적 요인의 권위의 표출이다. 따라서 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자의 내재적 요인의 권위의 표출은 증명 학습에 대한 논의의 확장을 위한 교수자의 역할을 수행하는 것이다.

다음으로, 교수자의 외재적 요인의 권위만이 드러난 교수자의 구체적인 발화는 <표 Ⅳ-27>과 같다.

<표 Ⅳ-27> 에피소드 2 발표자(태홍)에 대한 교수자의 발화 및 권위 구조

교수자의 발화	교수자의 권위 구조
이것이 해석학의 뭘 참조한 건지	
그런 것이랑 관계없는 **이건 유한개의 집합이니까,** 유한개의 집합에서 **항상 maximum이나 minimum있죠.**	권위의 담화
해석학까지 **갈 필요가 전혀 없는 건데, 전혀 필요 없는 것 같아요.**	권위의 담화
유한개의 집합에 대해서는 최댓값이나 최솟값이 있으니까, 기본으로 (최댓값이나 최솟값이) 있는 것이죠, 기본이죠.	
...(중략)...	
그런 어려운 단어 전혀 쓸 필요가 없어서, 해석학을 안 들은 사람한테 **두려움을 줄 필요가 없다라는 것이죠.**	권위의 담화

태홍의 발표에서 사용된 '해석학 참조' 라는 표현과 태홍의 설명에서 컴팩트 집합과 관련된 내용이 언급되었다는 점에 주목하여 설명하였다. 현재의 증명이 컴팩트 집합과 관련된 내용은 고등적인 내용이며, 유한개

의 정수 집합은 항상 최댓값과 최솟값을 갖는다는 점을 이용하여 증명을 작성 가능하다는 점을 설명하였다. 이 과정에서 컴팩트 집합을 이용하지 않아도 된다는 점을 권위의 담화의 권위 구조를 드러냈다.

에피소드 2에서 교수자는 발표자의 발표와 청중과 질의응답을 거쳐, 발표자의 증명에 사용된 수학적 아이디어에 대해 설명하는 과정에서 외재적 요인의 권위만을 드러냈다. 이러한 권위를 드러내는 것은 교수자의 수학 전문가로서의 권위이다. <정수론> 수업에서 컴팩트 집합의 내용을 이용하지 않고도 충분히 증명을 작성할 수 있음을 청중에게 전달한 것이다. 이는 선행 연구에서 동일한 맥락의 성격의 교수자의 발화임을 알 수 있다.

먼저, Amit & Fried(2005)에서 수학 교육에서의 권위 중에서 전문가 권위와 동일한 맥락이다. 교수자는 자신의 수학 학문의 전문가로서의 권위를 실제 교실에서 발현한 것이다. 이를 공유된 권위의 맥락에서 서술하였을 때, 해당 명제에 대한 증명의 담화 영역에서의 공유가 있었기 때문에 학문 내용 영역에서의 공유로 이어진 것이다.

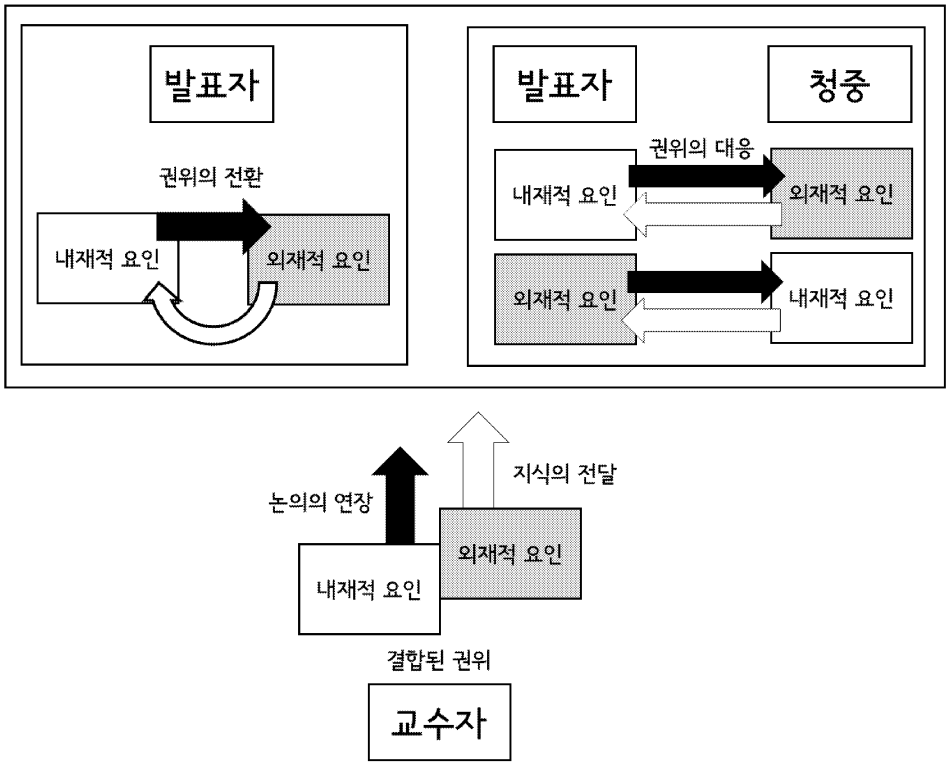
다음으로, Gerson & Bateman(2010)의 제도적 권위와도 연결된다. 제도적 권위란 교수자의 위치에 기초하여 발생되는 수업 내에서 다뤄지는 주장의 합법성을 판단하는 교수자의 권위를 의미한다. 태홍이 설명했던 '해석학 참조' 또는 '$M(A)$'와 같은 표현으로 인해 태홍은 경수와의 질의응답을 수행했고, 이러한 질의응답을 바탕으로 교수자는 태홍의 증명에 사용된 표현의 합법성을 결정해야 했다. 이를 위해 교수자는 자신의 위치에서 제도적 권위를 발현하였고, 학생은 교수자의 발화를 통해서 참가자는 태홍의 증명의 진술의 수용 여부를 결정할 수 있다.

앞선 논의를 통해 교수자가 단일한 성격의 권위를 표출하는 것이 기존의 선행 연구의 결과와 성격이 동일하다는 점을 알 수 있다. 이 연구의 결과를 통해서 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자는 학생에게 결합된 권위의 모습을 보였다는 점을 확인할 수 있었다. 이는 발표자의 논의에 기초한 확장적인 논의나 소집단 토론을 위한 학습 장면의 전환을 위한 것뿐만 아니라 학생에게 명확한 지식을 전달하기 위해 발생

되는 것임을 알 수 있었다.

3.3. 결합된 권위의 의미

교수자는 증명 발표자의 발표와 질의응답을 조정하고 적극적으로 지원하였으며, 이 과정에서 교수자의 권위를 관찰할 수 있었다. 교수자는 학생이 발표한 정리의 수학적 내용에 기초하여 권위를 드러냈다. 이를 정리하여 그림으로 나타내면 [그림 Ⅳ-5]와 같다. 이는 앞서 제시한 발표자의 전환된 권위 및 발표자와 청중 간의 대응된 권위를 모두 포함한 형태로 제시한다.



[그림 Ⅳ-5] 교수자의 결합된 권위의 의미

교수자의 발화에서 내재적 요인의 권위를 포착할 수 있었고, 이는 크게 두 가지 상황에서 확인할 수 있었다. 먼저, 교수자의 전문가적 지식을 학생에게 제공하기 위해 내재적 요인의 권위가 등장하였다. 이는 에피소드 3에서 확인할 수 있듯이, 교수자는 수업에서의 논의의 주제를 명확히 하기 위해 학생의 오류를 언급하는 과정에서 내재적 요인의 권위를 나타냈다. 이것으로부터 증명에 대한 논의가 확장되어 소집단 토론이 형성되었으며, 그것을 바탕으로 학생의 다른 증명 방법에 대한 발표로 이어졌다는 점에서 발표자의 전환된 권위와 발표자와 청중 사이의 대응된 권위가 나타나는 것의 단초가 되었다.

다음으로, 증명 발표 상황에서 학생의 질문을 재성(Revoicing)하여 논의를 이끌어가는 과정에서 내재적 권위가 유발되었다. 이는 에피소드 2와 에피소드 4에서 확인할 수 있는 것과 같이, 발표 상황에서 학생이 이해하고 넘어가야 할 개념이나 증명의 아이디어를 교수자가 명확히 전달하는 과정에서 교수자의 개인적 권위가 함께 나타났다. 교수자의 내재적 요인의 권위는 소집단 토론 학습 혹은 다른 발표자의 다른 방법의 증명의 발표로의 전환의 발판이 되기도 하였다.

또한, 교수자의 발화에서 외재적 요인의 권위를 포착할 수 있었다. 이는 주로 수학적 설명으로 증명에 대한 본질적인 논의에서 관찰된 것으로서, 교수자가 나타낸 권위는 수학 전문가로서의 권위로 해석할 수 있다. 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자는 수학 전문가로서 증명 발표자와 청중에게 올바른 지식을 전달자로서의 역할을 수행하였다. 이는 선행 연구에서 제시해왔던 교수자의 수학 전문가로서의 권위와 동일하다(Amit & Fried, 2005; Gerson & Bateman, 2010). 학생의 발표가 중심이 되는 수업에서, 교수자는 명확한 지식의 전달을 위해서 전문가로서 자신의 권위를 드러낸다는 점은 어렵지 않게 예측할 수 있다.

증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자는 내재적 요인과 외재적 요인의 권위를 함께 나타내는 모습을 보였다. 강의 중심의 수업에서의 교수자처럼 전문가적 권위를 드러냈다는 점과 탐구 지향 수업에서 교수자의 역할을 드러내기 위한 내재적 요인의 권위를 드러냈다는 점은 기존의

선행 연구의 결과와 유사하다. 이 연구는 이러한 형태의 권위를 나타내는 방식에서 내재적 요인과 외재적 요인의 권위가 함께 나타났다는 점에 차이가 있다. 정확한 수학적 지식의 전달을 위해서 외재적 요인의 권위가 드러남과 동시에 새로운 담화로의 전환이나 같은 상황에서 깊이 있는 논의로의 전환을 유도하는 촉매로서 내재적 요인의 권위가 나타났다.

기존의 증명 발표에 관한 연구는 교수자 중심으로 교수자의 사고를 분석하거나, 교수자의 증명 발표에서의 예시에 대한 분석, 증명 발표에서 구성하는 교수자의 사회 수학적 규범을 제시하였다(Fukawa-Connelly, 2012a; Fukawa-Connelly, 2012b; Mills, 2014; Pinto & Karsenty, 2018). 이러한 연구는 증명 발표가 수행되는 교실에서의 전문가로서의 교수자만을 조망하였다. 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자는 자신의 권위를 발표자에게 일부 이양하였다. 그럼에도 외재적 요인의 권위를 나타냄으로써 전문적인 수학의 지식 전달자로서의 역할을 수행하였을 뿐만 아니라 내재적 요인의 권위를 나타내면서 하나의 증명에 대해 다양한 학생의 증명 방법을 발표하게 하는 수업 운영자로서의 역할을 수행하였다.

한편, Ju & Kwon(2007)은 교수자의 내재적 요인의 권위의 가치를 조망한 바 있다. 내재적 요인의 권위를 학생에게 드러냄으로써, 교수자와 학생 사이에 수학 내용 지식에 대한 공동의 이해와 구성을 도모할 수 있다는 것이다. 이 연구에서는 이러한 내재적 요인의 권위가 수학 전문가로서의 교수자의 외재적 요인의 권위가 함께 등장함을 확인할 수 있었다. Ju & Kwon(2007)이 내재적 요인의 권위를 전달하는 과정에서 논의의 주제를 형성해가는 교수자의 역할만을 조망하였다면, 이 연구에서의 교수자는 지식의 전달자로서 명확한 지식을 학생에게 전달하는 교수자의 역할을 함께 수행함을 확인할 수 있었다.

교수자의 권위의 결합을 통해 학생의 증명에 대한 발표와 질의응답이 촉발되었다. 즉, 학생의 증명 발표 중심 수업이라 하더라도 교수자는 전체적인 내용, 발표, 토론에 개입하고 조정하거나 이끌어나가는 수업 통제자로서의 역할을 수행하였다. 이를 바탕으로 학생의 발표와 질의응답

이 수행되었고, 이러한 활동을 통해 발표자의 전환된 권위와 발표자와 청중 간의 대응된 권위의 모습을 확인할 수 있었다.

4. 논의

이 연구에서는 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자와 학생의 권위의 양상을 살펴보았다. 실제 수업에서 변화하는 교수자와 학생의 위치에 따른 교수자와 학생의 권위 구조를 포착할 수 있었다. 첫째, 발표자는 전환된 권위의 모습을 보였다. 둘째, 발표자와 청중 간에는 대응된 권위의 모습을 보였다, 셋째, 교수자는 결합된 권위의 모습을 보였다. 이러한 권위의 모습을 포착하기 위해서 크게 두 가지 면에서 교수·학습 환경이 설계되었다.

먼저, 실제 수업에서는 증명 발표와 증명에 대한 논의가 풍부하게 이루어질 수 있도록 교육과정이 설계되었다. 이 수업은 수업 밖 환경에서 일주일의 수업 동안 다루게 될 개념과 증명을 미리 학습하고 실제 수업에 참여해야 했다. 전체 토론과 소집단 토론을 병행하는 수업 환경에서, 수업에 참여하는 학생으로 하여금 자신의 풀이를 타인에게 소개하거나, 자신의 풀이가 맞는 것인지를 확인받고자 하는 욕구로부터 수학 학습 동기가 형성될 수 있다(박석준, 이경원, 권오남, 근간). 따라서 이 수업의 교육과정 설계로부터 자신의 증명을 타인에게 전달하는 발표자의 참여와 내용에 대한 지식의 구성이 어느 정도 이루어진 청중의 참여가 일어날 수 있었다. 발표자와 청중은 의사소통을 매개로 하여 각자의 권위를 드러냄으로써 자신의 의견을 피력할 수 있었다.

다음으로, 발표자와 청중의 위치에 변화를 줄 수 있는 교실 구조에서 연구가 수행되었다. 이 수업이 행해진 교실은 ALC(Active Learning Classroom)로서 교실의 책상 배열을 조정할 수 있고, 삼면이 칠판으로 이루어져 있기 때문에 교수자와 학생의 위치 변화를 유도하기 쉽다. 따라서 이러한 교실의 구조는 학생의 적극적인 참여를 유도할 수 있다

(Park & Choi, 2014). 증명 발표와 질의응답에서 학생은 기존의 수학 교실의 구조에서보다 적극적인 참여의 모습을 보였고, 이는 증명에 대한 활발한 발표와 질의응답을 유도하였다.

4.1. 작성된 증명을 설명하기 위한 기술적 용어의 사용

최근 증명 교수·학습 분야에서 학부생의 증명 작성에서의 언어적 요인에 관한 논의에 초점을 기울이고 있다(예, Lew & Mejía-Ramos, 2019; Mejía-Ramos, Weber, & Fuller, 2015). Lew & Mejía-Ramos(2019)의 증명 작성에서의 언어적 규범에 관한 연구에서 학부 수준의 학생은 증명 작성에서의 언어적 규범을 인지하지 못하며, 수학자들이 인지하고 있는 정형적인 증명을 작성하기 위해 필요한 요인을 인지하지 못하고 있음을 조명하였다. 이러한 연구 결과는 학부 수준의 증명 수업에서 학생의 증명 작성에 대한 논의가 필요하다는 점을 반증한다.

이 연구에서 증명 발표는 발표자가 작성된 증명을 발표하는 것과 증명을 작성하는 것 사이의 구분을 두지 않았다. 다만, 발표자가 증명에 대한 의사소통을 위해 구어적인 요인에만 의존한 것이 아니다. 다시 말해, 증명 발표에서 타인을 설득하기 위해 칠판에 증명을 작성하고 작성된 증명을 바탕으로 이를 구어적으로 표현하여 발표자로서의 역할을 수행한다. 발표자는 작성된 증명의 표현에 기초하여 증명에 대한 의사소통을 수행하는 것이다.

발표자의 권위의 양상을 살펴보는 것은 기존에 조명하지 않았던 학생의 증명에 대한 의사소통 실제를 탐구할 수 있게 해주었다. 발표자는 권위의 전환을 통해서 자신의 증명을 소개하였는데, 이 과정을 기술적 용어(technical terms)의 사용과 연결하여 설명할 수 있다. 기술적 용어란 수학 교육의 담론, 수학의 담론과 같이 특정한 담론 내에서 특정한 의미를 갖는 용어를 가리키며, 이러한 기술적 용어의 사용은 학생의 효과적인 의사소통을 강화한다(Ryve, Nilsson, & Pettersson, 2013). 권위의 전환은 증명 발표가 만들어내는 증명에 대한 담론 내에서 이해될 수 있는 증

명 내의 발표자의 아이디어와 전략을 나타내는 기술적 용어의 사용과 함께 발생했다. 따라서 권위의 전환은 발표자의 효과적인 의사소통의 일종의 전략으로 해석할 수 있었다.

작성된 증명의 표현은 증명을 타인에게 전달하는 과정에서 발표자의 권위의 전환과 질의응답에서 발표자와 청중의 권위의 대응을 유발하였다. 에피소드 2의 태홍의 경우 교과서적 증명에서 사용하지 않았던 '해석학 참조'라는 표현은 태홍에게 발표자의 권위를 드러내고, 전환하는 과정에 영향을 주었다. 또한, 에피소드 3에서 성은은 영웅의 증명 작성 표현에 주목하여 질문하였고, 영웅은 자신의 증명 작성에 기초하여 응답하였다. 따라서 증명 작성자의 증명 작성의 언어적 표현은 발표자의 권위의 전환 또한 발표자와 청중 사이의 권위의 대응을 촉발하게 하는 요인이 되었다.

4.2. 증명 구성 아이디어의 공유

증명 교수·학습 분야에서의 선행 연구는 증명 구성에 관한 어려움을 조망한 바 있다(예, Raman, 2003; Weber, 2001). 이러한 연구 결과로부터 비추어볼 때, 학부 수준의 증명 수업은 학생들이 증명 구성의 어려움을 극복할 수 있도록 증명 구성에 관한 아이디어를 논의할 수 있는 환경이 되어야 할 것이다. 이 연구 환경은 증명 발표 중심 수업으로 발표자의 증명 발표 이후에 질의응답과 교수자의 코멘트가 이어졌다. 즉, 발표자의 증명 구성에 관한 논의가 활발하게 논의될 수 있는 환경이었다. 이러한 논의로부터 발표자와 청중 사이의 권위의 대응과 교수자의 권위의 결합을 포착할 수 있게 하였다.

먼저, 발표자와 청중은 증명을 구성하는 아이디어에 대한 논의를 하는 과정에서 권위의 대응의 모습을 보였다. 에피소드 2의 경우 새로운 소수를 구성하는 방법과 무한급수의 곱에 관한 질의응답에서 발표자와 청중 사이의 대응된 권위를 확인할 수 있었다. 또한, 에피소드 3에서 성은의 증명에서 함수의 개념에 관한 논의가 진행되었고, 여기서 성은과 경수

사이에 발생한 대응된 권위를 포착할 수 있었다. 질의응답에서 주요한 논의 주제가 된 것은 증명 구성에 대한 아이디어였다.

다음으로, 교수자는 증명을 구성하는 아이디어에 관한 논의가 필요하다고 판단하여 소집단 토론을 하거나 직접 내용을 전달하고자 하는 경우에 권위의 결합의 모습을 보였다. 에피소드 1에서 비둘기집의 원리를 이용하거나 증명 구성 과정에서 함수를 새롭게 정의하는 과정에 '잘 정의됨(Well-definedness)' 을 확인해야 한다는 점을 전달하는 부분에서 교수자의 결합된 권위를 확인할 수 있었다. 또한, 에피소드 3에서 귀류법 가정의 적절성을 논의하는 과정에서 역시 교수자의 결합된 권위를 확인할 수 있었다. 이러한 증명에 대한 논의는 모두 증명을 구성하는 아이디어에 관한 논의였다는 점을 알 수 있다.

발표자와 청중의 질의응답과 교수자의 논의의 연장과 지식의 전달의 과정에서 증명을 구성하는 아이디어의 공유가 주요한 주제가 되었다. 다시 말해, 증명 구성 아이디어에 관한 논의로부터 발표자와 청중의 권위의 대응 및 교수자의 권위의 결합을 유발하는 요인이 되었다.

V. 결론

1. 요약

이 연구는 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 학부 수준의 수업에서 증명에 대한 의사소통을 권위의 틀로 관찰하고, 발화자가 드러내는 권위의 양상을 살펴보고자 했다. 이를 위한 연구 문제는 다음과 같다.

첫째, 대학생의 증명 발표에서 나타난 발표자의 권위의 양상은 어떠한가?
둘째, 대학생의 증명 발표에서 나타난 발표자와 청중 간의 권위의 양상은 어떠한가?
셋째, 대학생의 증명 발표에서 나타난 교수자의 권위의 양상은 어떠한가?

이러한 연구 질문에 답하기 위하여 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 〈정수론〉 수업에서 연구가 수행되었다. 〈정수론〉 수업은 여타의 대학 수학 수업보다 타 교과와의 연계성이 적기 때문에, 증명에 대한 교수자와 학생의 의사소통을 살펴볼 수 있는 적절한 환경이 된다. 연구자는 2017년 2학기 〈정수론〉 수업의 교과 조교로서, 수업 전반을 보조하고 학생의 활동을 참여 관찰하였기에 자료를 해석하기에 용이하였다.

증명 발표를 분석하기 위해 학생의 발표와 질의응답, 교수자의 피드백을 비디오 녹화하여 자료를 수집하였다. 녹화된 비디오에 포함된 음성을 전사하고, 학생이 작성한 증명을 문서화하여 분석에 활용하였다. 이 과정에서 학생이 작성하여 제출한 서면 과제와 Classprep 과제를 분석을 위한 보조자료로 활용함으로써 분석 과정에서의 어려움을 최소화하였다. Wagner & Herbel-Eisenmann(2014a)의 연구에서 제시한 권위 구조 분석 틀을 바탕으로 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자와 학생이 나타내는 권위를 분석하였다. 권위의 범주를 내재적 요인(immanent factors)과 외재적 요인(transcendent factors)으로 구분하여, 권위 사이의

변화를 관찰하였다. 여기서 내재적 요인의 하위 요소에는 개인적 권위와 개인적 범위의 권위 구조가 있으며 외재적 요인의 하위 요소에는 권위의 담화와 담화적 필연성의 권위 구조가 존재한다. 각각의 하위 요소를 통해 발화자가 드러내는 권위 구조를 코딩한 후에 내재적 요인과 외재적 요인의 변화를 분석한 것이다. 이는 전사된 자료로부터 반복적인 코딩 작업을 통해 교수자와 학생이 나타내는 권위를 분석하였다. 이를 통한 연구 결과는 다음과 같다.

첫째, 대학생의 증명 발표에서 발표자가 드러낸 권위는 공통적으로 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환과 다수의 학생에게서 외재적 요인에서 내재적 요인의 권위로의 전환의 모습을 보였다. 발표자의 내재적 요인에서 외재적 요인의 권위로의 전환은 발표자의 증명 내에서 자신의 증명 아이디어와 전략을 설명하는 부분에서 발생하였으며, 외재적 요인에서 내재적 요인의 권위로의 전환은 증명의 결론에 도달하기 위해 증명의 방향을 명료화하는 과정에서 발생하였다. 발표자의 증명 발표 상황에 따라 권위 전환은 반복되기도 하였으며, 이러한 발표자의 권위의 전환은 효과적인 증명 의사소통을 위한 전략적인 시도로 해석할 수 있다.

둘째, 대학생의 증명 발표에서 발표자와 청중은 상반적인 성격의 권위가 대응되는 모습을 나타냈다. 발표자와 청중 사이의 질의응답 과정에서 드러난 권위 구조는 선수 발화자가 내재적 권위를 드러냈다면, 후속 발화자가 외재적 권위를 드러냈고 반대로 선수 발화자가 외재적 권위를 드러냈다면 후속 발화자가 내재적 권위를 드러냈다. 이는 권위 관계가 형성되지 않았을 때 대화와 행동을 통해 관찰할 수 있는 권위의 협의와는 다르며, 권위 관계가 이미 형성되어 있는 상태에서 나타나는 권위의 형태인 것이다. 발표자와 청중이 권위가 대응되는 모습을 보임으로써, 이들 사이의 발표된 증명에 대한 내용상의 합의로 이어졌으며, 권위가 대응되지 않은 경우 내용상의 합의로 이어지지 못했다. 이는 발표자와 청중이 수학적 내용에 대한 자신의 정체성을 구성하는 학습의 과정으로 해석될 수 있다.

셋째, 대학생의 증명 발표에서 교수자는 수학 전문가로서의 권위를 나타내는 외재적 요인의 권위가 논의의 전환이나 확장을 위한 내재적 요인의 권위가 결합되어 나타나는 모습을 확인할 수 있었다. 학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 교수자는 전반적인 활동을 조정하고 통제하는 역할을 수행한다. 즉, 학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업이라 하더라도 교수자의 전문가로서의 권위는 변함이 없다. 하지만, 한 발표자의 증명 발표로부터 논의를 중단하거나 확장하는 과정 혹은 다른 발표자의 증명 발표를 유도하는 과정에서 드러난 권위는 내재적 요인의 권위가 드러났고, 전문가로서의 권위로 대변되는 외재적 요인의 권위와 함께 나타났다. 이러한 교수자의 결합된 권위는 증명 교수 · 학습 연구 담론에서 언급되어 왔던 전문가로서의 권위의 성격을 포함하고 있지만, 보다 확장된 형태의 권위의 모습으로 해석할 수 있다.

이 연구는 증명에 대한 의사소통에서 나타나는 교수자와 학생의 권위에 대하여 분석하였다. 본래 증명하기(proving) 활동은 권위의 영향을 받는 활동이지만, 이를 수학 교육 담론에서 정의하고 있는 권위의 틀로서 분석한 바는 찾아보기 힘들다. 따라서 교수자와 학생의 공유된 권위를 효과적으로 살펴볼 수 있는 환경은 증명 발표가 중심이 되는 수업이며, 그중에서도 학생의 증명 발표가 주를 이루는 수업이다. 여기서 수학 교육 담론에서 정의하고 있는 권위의 틀로 교수자와 학생의 증명하기(proving) 활동을 분석하였다. 이 연구의 의의는 다음과 같다.

첫째, 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 증명에 대한 학생의 의사소통을 권위의 틀을 이용하여 면밀히 관찰하였다는 점이다. 선행 연구에서 제시된 바와 같이 사회적 맥락에서 증명이 갖고 있는 의사소통 기능에도 불구하고(de Villers, 1990; Schoenfeld, 1994), 학부 수준에서의 증명 수업에서 증명 의사소통 활동을 관찰한 연구는 찾아보기 힘들며, 증명 발표에 관한 연구는 주로 교수자의 증명 발표에 초점을 기울여왔다(Fukawa-Connelly, 2012a; Fukawa-Connelly, 2012b; Mills, 2014). 이에 이 연구는 학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서의 발표자의 발화를 권위의 틀로 분석하였다. 발표자는 하나의 증명에 대해 여러 번 발표하기

도 하였고, 하나의 증명에 대해서 여러 발표자가 증명을 발표하기도 하였다. 발표자가 자신의 증명에 대해 전달하는 과정에서 권위를 전환하였으며, 이러한 전환은 효과적인 의사소통과 증명의 결론에 도달하기 위한 방향의 명료화를 위해 발생하였다. 권위의 틀로써 대학생의 증명 발표를 심층적으로 관찰할 수 있었다. 이러한 작업은 대학생의 증명 발표 수행의 의미를 도출할 수 있게 해주었다.

둘째, 수업의 일원으로 참여하고 있는 학생이 발표자로서의 역할을 수행할 때 발표자와 청중으로 대변되는 학생 간의 권위, 수업을 주도하고 통제하는 교수자의 권위를 분석하였다. 기존의 권위에 관한 연구는 교수자가 드러낸 권위를 분석하거나(Wagner & Herbel-Wisenmann, 2014a), 교수자가 배제된 협력적 문제 해결 상황에서 구성해나가는 학생 간의 권위의 구성을 제시하였다(Langer-Osuna, 2016). Amit & Fried(2005)가 제시한 권위에 따르면, 수학 교실 내에서 드러나는 권위는 수학 학문에 대한 전문가적 권위와 학문적 지식으로서의 수학과 실제 수업 맥락에서 다루어지는 수학 사이의 공유에서 비롯되는 내용 영역의 권위와 담화의 공유로서 드러나는 과정 영역의 권위로 구분된다. 공유된 권위의 맥락에서 내용 영역과 과정 영역 사이의 권위는 구분될 수 없다는 점이다. 교수자가 드러낸 권위를 분석하거나 협력적 문제 해결 상황에서 학생의 권위에 대한 분석은 공유된 권위를 면밀히 관찰하기 어렵다. 따라서 이 연구는 공유된 권위를 관찰할 수 있는 수업 환경 내에서 발표자, 발표자와 청중, 교수자의 권위의 양상을 살펴보았다. 즉, 기존의 연구에서 제한적이었던 공유된 권위를 보다 넓은 맥락에서 조망하였다는 점에 차별점이 있다. 공유된 권위가 강조된 교실 맥락에서 학생이 권위를 구성하고 내용에 대해 합의하는 모습을 살펴볼 수 있었다. 이는 소집단 협력 학습이 아닌 전체 토론 수업에서의 학생의 역할을 조명한다. 나아가 증명 발표가 중심이 되는 수업에서 논의를 확장하거나 전환하는 교수자의 역할을 조명한다.

2. 연구의 한계 및 제언

이 연구는 학생의 증명 발표, 질의응답 활동과 학생의 증명 능력 사이의 관계까지 살펴보지 못했다는 한계를 갖는다. 이 연구의 초점은 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업에서의 교수자와 학생의 권위의 양상이며, 학생의 증명 능력에는 초점을 기울이지 않았다. 또한, 증명 발표 상황에서 학생이 소집단 내에서 형성하는 권위까지는 살펴보지 못했다는 한계를 갖는다. 수집한 자료에서 발표자의 발표가 진행되는 동안 학생은 주변 동료와 발표자의 증명에 대한 논의를 진행하였고, 수집한 자료에서 학생 간의 권위가 드러남을 일부 확인할 수 있었다. 하지만, 이 연구의 자료 수집에서 소집단 내의 학생 간의 논의까지 자료를 수집하지 않았기 때문에 자세한 양상을 살펴볼 수는 없었다. 이에 따른 후속연구를 위한 제언은 다음과 같다.

첫째, 대학생의 증명 발표가 중심이 되는 수업을 수강한 학생과 교수자의 증명 발표가 중심이 되는 수업을 수강한 학생 사이의 증명 능력 비교 연구를 수행할 수 있다. Harel & Sowder(1998)는 교수자 중심의 증명 발표 수업에서 학생이 권위자 증명 도식을 구성할 수 있으며, 이러한 도식의 구성은 증명 학습의 어려움을 촉진할 수 있음을 지적하였다. 이 연구는 교실 내에서 교수자의 권위의 일부를 학생에게 이양하였을 때 나타나는 교수자와 학생의 권위의 양상을 실증적으로 관찰하였다. 하지만, 학생의 증명 능력이 기존의 수업 방식과 비교했을 때 더 높은 성취를 기록하였는지 확인할 수 없었다. 대학생의 증명 발표 중심 수업을 수강한 학생과 그렇지 않은 학생 사이의 증명 학습 능력을 비교하는 후속 연구를 진행할 수 있다. 이를 통해 학부 수준의 증명 수업에서 교수자의 권위에 따른 대학생의 증명 학습 성취도를 해석할 수 있을 것이다.

둘째, 증명에 대한 의사소통이 중심이 되는 수업에서 소집단에서의 권위의 양상을 살펴볼 필요가 있다. Langer-Osuna(2016) 역시 협력적 문제 해결 과정에서 드러난 학생의 권위의 구성에 대해서 분석한 바 있다. 또한, 이 연구 맥락에서 증명 발표 도중에 교수자가 소집단 내에서 논의가

필요하다고 판단한 경우에는 소집단 토론이 진행되었다. 여기서 발생되는 학생 간의 권위는 지적 권위와 사회적 권위의 구성 과정과 권위의 협의를 관찰할 수 있을 것이다. 하지만, 이 연구는 소집단의 논의 자료를 수집하지 못했으며 토론 과정에서 드러난 학생 간의 권위의 양상이 있을 것으로 짐작된다. 따라서 증명 발표 사이에 마련된 소집단 내의 토론에서 학생 간에 나타난 권위의 양상을 살펴보는 후속 연구는 이 연구 결과를 확장하는 데 기여할 것이다.

참고문헌

권오남. (2009). 무어교수법. **대한수학회소식, 126**, 24-28.

류희찬, 강경민. (2013). 중심사영과 투시도의 작도 학습에서 나타나는 중학교 수학영재들의 수학적 사고특성과 교사의 역할. **학교수학, 15**(4), 921-940.

박경미. (2009). Lakatos의 증명과 반박 방법에 따른 기하 교수·학습 상황 분석 연구. **학교수학, 11**(1), 55-70.

박석준, 이경원, 권오남. (근간). 동료 간 토의 중심의 수학 수업에서 대학생들의 수학 학습 동기와 수학 학습 감정의 관계: 욕구를 중심으로. **한국수학교육학회 시리즈 E <수학교육논문집>.**

박성선. (2007). 수학 교실 문화 개선을 위한 교사의 역할. **한국수학교육학회 시리즈 C <초등수학교육>, 10**(2), 151-161.

성창근. (2013). 문제해결에서 비형식적 증명 활동의 기능과 교사의 역할에 대한 사례연구. **학교수학, 15**(3), 651-665.

오예린, 박주용, 권오남. (2018). 증명 동료평가의 신뢰도 및 타당도 분석: 대학 정수론 수업의 사례를 중심으로. **한국수학교육학회 시리즈 A <수학교육>, 57**(3), 215-229.

Alcock, L. (2008). Mathematicians' perspectives on the teaching and learning of proof. *CBMS Issues in Mathematics Education, 16*, 73-100.

Amit, M., & Fried, M. N. (2005). Authority and authority relations in mathematics education: a view from an 8th grade classroom. *Educational Studies in Mathematics, 58*(2), 145-168.

Andersson, A., & Wagner, D. (2019). Identities available in intertwined discourses: mathematics student interaction. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 51*(3), 529-540.

Balacheff, N. (1988). A study of students' proving processes at the junior high school level. In I. Wirszup & R. Streit (Eds.), *Proceedings of the Second UCSMP International Conference on Mathematics*

Education (pp. 284-297). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Beene, K. D. (1970). Authority in education. *Harvard Educational Review, 40*, 385-410.

de Villers, M. (1990). The role and function of proof in mathematics. *Pythagoras, 24*, 17-24.

Engle, R. A., Langer-Osuna, J. M., & McKinney de Royston, M. (2014). Toward a model of influence in persuasive discussions: Negotiating quality, authority, privilege, and access within a student-led argument. *Journal of Learning Sciences, 23*(2), 245-268.

Fukawa-Connelly, T. (2012a). Classroom sociomathematical norms for proof presentation in undergraduate in abstract algebra. *Journal of Mathematical Behavior, 31*(3), 401-416.

Fukawa-Connelly, T. (2012b). A case study of one instructor's lecture-based teaching of proof in abstract algebra: making sense of her pedagogical moves. *Educational Studies in Mathematics, 81*(3), 325-345.

Fried, M. N. (2014). Authority and mathematics education. In Lerman, S (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 51-54). New York: Routledge.

Gerson, H., & Bateman, E. (2010). Authority in an agency-centered, inquiry-based university calculus classroom. *Journal of Mathematical Behavior, 29*(4), 195-206.

Griffiths, P. A. (2000). Mathematics at the turn of the millennium. *American Mathematical Monthly, 107*(1), 1-14.

Hanna, G. (1983). *Rigorous proof in mathematics education*. Toronto, Canada OISE Press.

Hanna, G. (1989). More then formal proof. *For the Learning of Mathematics, 9*(1), 20-23.

Hanna, G. (1991). Mathematical proof. In D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking*. Dordrecht, Netherlands: Kluwer.

Hareé, R., & van Langenhove, L. (1999). *Positioning theory: Moral contexts of intentional action*. Oxford, UK: Blackwell Publishers.

Harel, G., & Rabin, J. M. (2010). Teaching practices associated with the authoritative proof scheme. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(1), 14-19.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from an exploratory study. In A. H. Schoenfeld, J. Kaput, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in college mathematics education III* (pp. 234-283). Providence: American Mathematical Society.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester Jr. (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: Information Age; Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Healy, L., & Hoyles, C. (2001). Software tools for geometrical problem solving: Potentials and pitfalls. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 6*(3), 235-256.

Hemmi, K. (2006). Approaching proof in a community of mathematical practice (Doctoral dissertation). Stockholm University, Sweden. Retrieved from http://www.diva-portal.org/smash/get/diva2:189608/FULLTEXT01.pdf

Herbel-Eisenmann, B., & Wagner, D. (2010). Appraising lexical bundles in mathematics classroom discourse: obligation and choice. *Educational Studies in Mathematics, 75*(1), 43-63.

Herbst, P., & Balacheff, N. (2009). Proving and understanding in classrooms. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton & E. J. Knuth (Eds.), *Teaching and learning proof across the grades: A K-16 perspective*

(pp. 307-322). New York: Routledge.

Hufferd-Ackles, K., Fuson, K. C., & Sherin, M. G. (2004). Describing levels and components of a math-talk learning community. *Journal for Research in Mathematics Education, 35*(2), 81-116.

Inglis, M., & Alcock, L. (2012). Expert and novice approaches to reading mathematical proofs. *Journal for Research in Mathematics Education, 43*(4), 358-390.

Inglis, M., & Mejía-Ramos, J. P. (2009). The effect of authority on the persuasiveness of mathematical arguments. *Cognition and Instruction, 27*(1), 25-50.

Ju, M-K, & Kwon, O. N. (2007). Ways of talking and ways of positioning: Students' beliefs in an inquiry-oriented differential equations class. *Journal of Mathematical Behavior, 26*(3), 267-280.

Kim, D. W. (2008). The process of negotiation of proofs acceptable to mathematics classroom. 수학교육학연구, 18(4), 455-467.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. *Journal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 61-88.

Lai, Y., & Weber, K. (2014). Factors mathematics profess to consider when presenting pedagogical proofs. *Educational Studies in Mathematics, 85*(1), 93-108.

Langer-Osuna, J. M. (2016). The social construction of authority among peers and its implications for collaborative mathematics problem solving. *Mathematical Thinking and Learning, 18*(2), 107-124.

Langer-Osuna, J. M. (2017). Authority, identity, and collaborative mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 48*(3), 237-247.

Langer-Osuna, J. M. (2018). Exploring the central role of student authority relations in collaborative mathematics. *ZDM-The International*

Journal on Mathematics Education, 50(6), 1077-1087.

Langer-Osuna, J. M., & Esmonde, I. (2017). Identity in research on mathematics education. In J. Cai (Ed.), *The compendium for research in mathematics education* (pp. 637-648). Reston VA: NCTM.

Lew, K., Fukawa-Connelly, T. P., Mejía-Ramos, J. P., & Weber, K. (2016). Lectures in advanced mathematics: Why students might not understand what the mathematics professor is trying to convey. *Journal for Research in Mathematics Education, 47*(2), 162-198.

Lew, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2019). Linguistic conventions of mathematical proof writing at the undergraduate level: Mathematicians' and students' perspectives. *Journal for Research in Mathematics Education, 50*(2), 121-155.

Manin, Y. (1977). *A course in mathematical logic*. New York: Springer-Verlag.

Mariotti, M. A. (2000). Introduction to proof: The mediation of a dynamic software environment. *Educational Studies in Mathematics*, *44*(1-3), 25-53.

Mejía-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 3-18.

Mejía-Ramos, J. P., & Inglis, M. (2009). Argumentative and proving activities in mathematics education research. In F. L. Lin, F. J. Hsieh, G. Hanna, & M. de Villers (Eds.), *Proceedings of the ICMI study 19 conference: Proof and proving in mathematics education* (Vol. 2, pp. 88-93). Tapei, Taiwan.

Mejía-Ramos, J. P., & Weber, K. (2014). Why and how mathematicians read proofs: further evidence from a survey study. *Educational Studies in Mathematics, 85*(2), 161-173.

Mejía-Ramos, J. P., & Weber, K., & Fuller, E. (2015). Factors influencing students' propensity for semantic and syntactic reasoning in proof writing: a case study. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(2), 187-208.

Mills, M. (2014). A framework for example usage in proof presentations. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 106-118.

Moore, R. C. (2016). Mathematics professors' evaluation of students' proofs: a complex teaching practice. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 2*(2), 246-278.

Otten, S., Bleiler-Baxter, S. K., & Engledowl, C. (2017). Authority and whole-class proving in high school geometry: The case of Ms. Finley. *Journal of Mathematical Behavior, 46*, 112-127.

Oyler, S. (1996). *Making Room for Students: Sharing Teacher Authority in Room 104*. New York: Teacher College Press.

Pace, J. L., & Hemmings, A. (2007). Understanding authority in classrooms: A review of theory, ideology, and research. *Review of Educational Research, 77*(1), 4-27.

Park, E. L., & Choi, B. K. (2014). Transformation of classroom spaces: traditional versus active learning classroom in colleges. *Higher Education, 68*(5), 749-771.

Pinto, A., & Karsenty, R. (2018). From course design to presentations of proofs: How mathematics professors attend to student independent proof reading. *Journal of Mathematical Behavior, 49*, 129-144.

Raman, M. (2003). Key ideas: What are they and how can they help us understand how people view proof? *Educational Studies in Mathematics, 52*(3), 319-325.

Reid, D. (2002). Conjectures and refutations in grade 5 mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 33*(1), 5-29.

Robert Ree Moore. (n.d.). Retrieved July 14, 2019, from

https://en.wikipedia.org/wiki/Robert_Lee_Moore

Ryve, A., Nilsson, P., & Pettersson, K. (2013). Analyzing effective communication in mathematics group work: The role of visual mediators and technical terms. *Educational Studies in Mathematics, 82*(3), 497-514.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic.

Schoenfeld, A. H. (1994). What do we know about mathematics curricula? *Journal of Mathematical Behavior, 13*(1), 55-80.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem? *Journal for Research in Mathematics Education, 34*(1), 4-36.

Selden, A., & Selden, J. (2013). Proof and problem solving at university level. *Montana Mathematics Enthusiast, 10*(1), 303-334.

Shepherd, M. D., & van de Sande, C. C. (2014). Reading mathematics for understanding—from novice to expert. *Journal of Mathematical Behavior, 35*, 74-86.

Skovsmose, O. (2001). Landscapes of investigation. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 33*(4), 123-132.

Smith, J. C. (2006). A sense-making approach to proof: Strategies of students in traditional and problem-based number theory courses. *Journal of Mathematical Behavior, 25*(1), 73-90.

Smith, J. C. (2009). Building a community of inquiry in a problem-based undergraduate number theory course. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. Knuth (Eds.) *Teaching and leaning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 307-322). New York, NY: Routledge.

Stake, R. E. (1995). *The Art of Case Study Research*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on

the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. In J. Cai (Ed.), *The compendium for research in mathematics education* (pp. 237-265). Reston VA: NCTM.

Stylianou, D. A., Blanton, M. L., & Rotou, O. (2015). Undergraduate students' understanding of proof: Relationships between proof conceptions, beliefs, and classroom experiences with learning proof. *International Journal for Research in Undergraduate Mathematics Education, 1*(1), 91-134.

Thurston, W. P. (1994). On proof and progress in mathematics. *Bulletin of the American Mathematical Society, 30*(2), 161-177.

Truxaw, M. P. & DeFranco, T. (2008). Mapping mathematics classroom discourse and its implications for models of teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(5), 489-525.

Wagner, D., & Herbel-Eisenmann, B. (2014a). Identifying authority structures in mathematics classroom discourse: a case of a teacher's early experience in a new context. *ZDM-The International Journal on Mathematics Education, 46*(6), 871-882.

Wagner, D., & Herbel-Eisenmann, B. (2014b). Mathematics teachers' representations of authority. *Journal of Mathematics Teacher Education, 17*(3), 201-225.

Wagner, D., & Herbel-Eisenmann, B. (2018). A discourse-based framework identifying authority structures in mathematics classrooms. In U. Gellert, C, Knipping, & H. Straehler-Pohl (Eds.), *Inside the Mathematics Class* (pp. 291-313). Cham, Switzerland: Springer.

Webel, C. (2010). Shifting mathematical authority from teacher to community. *Mathematics Teacher, 104*(4), 315-318.

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 48*(1), 101-119.

Weber, K. (2004). Traditional instruction in advanced mathematics courses: a case study of one professor's lectures and proofs in an introductory real analysis course. *Journal of Mathematical Behavior, 23*(2), 115-133.

Weber, K. (2008). How mathematicians determine if an argument is a valid proof. *Journal for Research in Mathematics Education, 39*(4), 431-459.

Weber, K. (2010) Mathematics majors' perceptions of conviction, validity, and proof. *Mathematical Thinking and Learning, 12*(4), 306-336.

Weber, K., & Alcock, L. (2009). Proof in advanced mathematics classes: Semantic and syntactic reasoning in the representation system of proof. In D. A. Stylianou, M. L. Blanton, & E. Knuth (Eds.) *Teaching and leaning proof across the grades: A K-16 perspective* (pp. 323-338). New York, NY: Routledge.

Weber, K., Inglis, M., & Mejía-Ramos, J. P. (2014). How mathematicians obtain conviction: Implications for mathematics instruction and research on epistemic cognition. *Educational Psychologist, 49*(1), 36-58.

Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2011). Why and how mathematicians read proofs: an exploratory study. *Educational Studies in Mathematics, 76*(3), 329-344.

Weber, K., & Mejía-Ramos, J. P. (2013). On mathematicians' proof skimming: A reply to Inglis and Alcock. *Journal for Research in Mathematics Education, 44*(2), 464-474.

Weber, M. (1947). *The Theory of Social and Economic Organization*. Henderson, A. R. and Parsons, T. (Trans.), William Hodge ad Company Limited, London.

Wenger, E. (1999). *Communities of practice: Learning, meaning, and identity*. Cambridge, MA: Cambridge University Press.

Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458-477.

부록

[부록 1: <정수론> 교육과정]

주	일정	강의주제
1	9월 1일 ~ 9월 7일	1장 Division Algorithm, Euclidean Algorithm, Linear Diophantine Equations and Introduction to Modular Arithmetic
2	9월 8일 ~ 9월 14일	
3	9월 15일 ~ 9월 21일	2장 The Prime Number
4	9월 22일 ~ 9월 28일	
5	9월 29일 ~ 10월 5일(추석)[20]	3장 Modular Arithmetic
6	10월 6일 ~ 10월 12일	
7	10월 13일 ~ 10월 19일	4장 전반부 Fermat's Little Theorem
8	10월 20일 ~ 10월 26일	
9	10월 27일 ~ 11월 2일	10월 31일 중간고사
10	11월 3일 ~ 11월 9일	4장 후반부 Fermat's Little Theorem 5장 Public Key Cryptography
11	11월 10일 ~ 11월 16일	6장 Polynomial Congruences and Primitive Roots
12	11월 17일 ~ 11월 23일	
13	11월 24일 ~ 11월 30일	7장 Quadratic Reciprocity
14	12월 1일 ~ 12월 7일	12월 7일 기말고사
15	12월 8일 ~ 12월 14일	총정리

각 주별 과제는 4문항의 Classprep 과제와 10문항 내외의 서면 과제로 구성되어 있었다. Classprep 과제는 서면 과제의 일부를 사진, 한글 또는 워드의 형태로 제출하는 것이었기 때문에, 서면 과제를 충실히 수행한 학생이라면 과제 제출에 어려움이 없었다.

20) 연구가 수행되었던 2017년 2학기는 추석 연휴 기간이 예년보다 길었다. 연휴 주간에는 수업이 이루어지지 않았지만, 연휴 이후의 수업에서의 보강을 통해 정규 수업 시수를 지킬 수 있었다.

[부록 2: 에피소드 1의 유일 소인수분해 정리 활용 증명]

1. 교과서적 증명

명제	Given $n+1$ natural numbers, say a_1, a_2, ... , a_{n+1}, all less than or equal to $2n$, then there exists a pair, say a_i and a_j with $i \neq j$, such that $a_i \mid a_j$.
증명	Let $a_i = 2^{k_i} \times (2m_i - 1)$ for $k_i \geq 0$ and $m_i \in \mathbb{N}$. Since $1 \leq 2m_i - 1 \leq 2n$, $\frac{1}{2} \leq m_i \leq n + \frac{1}{2}$. So, $1 \leq m_i \leq n$ since $m_i \in \mathbb{N}$. By the Pigeonhole principle, there exist i, j such that $a_i = 2^{k_i}(2m_i - 1) = 2^{k_j}(2m_j - 1) = a_j$ where $1 \leq i, j \leq n+1$. Without loss of generality, $a_i \leq a_j$. Thus, $a_i \mid a_j$.

2. 여필의 증명

발표 시 작성한 증명	We pick x numbers between 1 and n. And we pick y numbers between $(n+1)$ and $2n$. Then we know that x numbers between 1 and n have at least x multiples between $(n+1)$ and $2n$ and they' re different. Since $x + y = n+1$ and $\max(y) = n$, there must exist a pair, say a_i, a_j with $i \neq j$ s.t $a_i \mid a_j$.
서면 과제 증명	We pick x numbers between 1 and n. And we pick y numbers between $(n+1)$ and $2n$. Then we know that x numbers between 1 and n have at least x multiples between $(n+1)$ and $2n$ and they are different. Since $x + y = n+1$ and $\max(y) = n$, there exist a pair, say a_i, a_j with $i \neq j$, s.t $a_i \mid a_j$ ■

3. 경수의 증명

서면 과제 증명	if there exists a pair of (a_i, a_j) s.t $a_i = a_j$ with $i \neq j$, then clearly $a_i \mid a_j$. Hence suppose that $a_i \neq a_j$ if $i \neq j$ for $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$. we will show the statement above by induction on n. when $n = 1$, $a_1,\ a_2 \in \{1, 2\}$ and $a_1 \neq a_2$. WLOG, let $a_1 = 1$ and $a_2 = 2$, then $a_1 \mid a_2$. suppose that the statement holds if $n = k$ for $k \in \mathbb{N}$. now consider distinct $(k+2)$ natural numbers, say a_1, a_2, ... a_{k+2}, all less than or equal to $2k+2$. Let $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{k+2}\}$. ① If all elements of A are less than or equal to $2k$, we are done by induction hypothesis. ② If only one elements of A is greater than $2k$, we are done by induction hypothesis. ③ Suppose $\{2k+1, 2k+2\} \subset A$. let $B := A - \{2k+1, 2k+2\}$. if $k+1 \in B$, then $(k+1) \mid (2k+2)$ and so we are done. if $k+1 \notin B$, then let $C := B \cup \{k+1\}$. Then C has distinct $(k+1)$ natural numbers, which are less or equal to $2k$. By induction hypothesis, C has a pair of elements, say c_1 and c_2, s.t $c_1 \mid c_2$ with $c_1 \neq c_2$. if $c_1 \neq k+1$ and $c_2 \neq k+1$, then $c_1,\ c_2 \in A$ and so we are done. suppose that $c_2 = k+1$, then $c_1 \mid (k+1)$ and $c_1 \mid 2(k+1)$. since $c_1 \neq c_2$, then $c_1 \in A$ and so we are done. Suppose that $c_1 = k+1$, then $(k+1) \mid c_2$ and so $c_2 = (k+1) \cdot z$ for $z \in \mathbb{N}$ with $z > 1$. since $c_2 \in C$, then $2k \geq c_2 = (k+1) \cdot z \geq (k+1)2$, which is contradiction. Hence the statement holds when $n = k+1$. By induction, the statement holds for all $n \in \mathbb{N}$. □

4. 성은의 증명

발표 시 작성한 증명	By U-F, $a_i = 2^{r_i} p_i$ for $1 \le i \le n+1$ where $r_i \ge 0$, $p_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ Def a map $f : \{a_i\}_{i=1}^{n+1} \to \{1, 2, \ldots, n\}$ $f(a_i) \in p_i$ By P. P. f is not injective. $\exists\, i \ne j$, $p_i = p_j = p$ $a_i = 2^{r_i} p$, $a_j = 2^{r_j} p$ $r_i \le r_j$ $a_i \mid a_j$.
서면 과제 증명	If some two of $a_1, \ldots, a_{n+1}$ are equal, then we are done. Suppose that all of them are distinct. By unique factorization, $a_i = 2^{r_i} p_i$ where $p_i \equiv 1 (\mathrm{mod}\ 2)$ and $r_i \ge 0$. Then $p_i \le n$. Note that if a_i is odd, then $r_i = 0$. Define a map $\{a_1\}_{i=1}^{n+1} \to \{1, \ldots, n\}$ by $a_i \mapsto p_i$. By Pigeonhole principle, this map fails to be injective. Thus $p := p_i = p_j$ for some $i \ne j$. Without loss of generality, suppose $r_i \le r_j$. Then $a_i = 2^{r_i} p$ divides $a_j = 2^{r_j} p$ by Theorem 2.12.
정리 2.12 명제	Let a and b be natural numbers greater than 1 and let $p_1^{r_1} p_2^{r_2} \ldots p_m^{r_m}$ be the unique factorization of a and let $q_1^{t_1} q_2^{t_2} \ldots q_s^{t_s}$ be the unique factorization of b. Then $a \mid b$ if and only if for all $i \le m$ there exists a $j \le s$ such that $p_i = q_j$ and $r_i \le t_j$.

[부록 3: 에피소드 2의 소수의 무한성 증명]

1. 교과서적 증명

명제	There are infinitely many prime numbers.
증명	Suppose that there are finitely many prime numbers; Call them p_1, p_2, ... , p_r. Consider the positive integer $P = p_1 p_2 \cdots p_r + 1$. If P itself is prime, we' re done. If P is not prime, there exists a prime divisor p by Theorem 2.1 because every number bigger than 1 can be written as a product of primes by FTA. But p_1, p_2, ... , p_r are the only prime numbers, so that p must be equal to one of p_1, p_2, ... , p_r. Since $p \mid p_1 p_2 \cdots p_r$ and $p \mid P$, $p \mid 1$ by Theorem 1.2. The only positive divisor of 1 is 1 itself and, because $p > 1$, it is a contradiction.
정리 1.2 명제	Let a, b and c be integers. If $a \mid b$ and $a \mid c$, then $a \mid (b-c)$.
정리 2.1 명제	If n is a natural number greater than 1, then there exists a prime p such that $p \mid n$.
정리 2.3 명제	FTA(Fundamental Theorem of Arithmetic) Every natural number greater than 1 is either a prime number or it can be expressed as a finite product of prime numbers where the expression is unique up to the order of the factors.

2. 태홍의 증명

발표 시 작성한 증명	Use Contradiction. Suppose there are finite prime numbers. Let $A=\{a\|a,$ prime number$\}$. Since the number of A's components are finite, there exists $M(A)$ which is the greatest among A's components(해석학 참조) But, by 2.34, there exists a prime number p which is greater than $M(A)$. This fact contradicts for the fact $M(A)$ is the greatest prime number. There are infinite prime numbers.
서면 과제 증명	I'll prove it by using contradiction. Suppose there are finite prime numbers. Let $A=\{a\|a:$ prime numbers$\}$. Since the number of A's components are finite. There exists $M(A)$ which is the greatest among A's components. Then $M(A)+1>M(A)$ & $M(A)+1\in\mathbb{N}$. Since $M(A)+1\in\mathbb{N}$, by 2.34 there exists a prime number p, which is greater than $M(A)+1$. This contradicts to the fact $M(A)$ is the greatest prime number. $\Rightarrow$ The assumption above is not true. $\Rightarrow$ There are infinite prime numbers.
정리 2.34 명제	Let k be a natural number. Then there exists a prime larger than k.

3. 경수의 증명

서면 과제 증명	Suppose the contradiction, that is, the number of all prime numbers is finite. Let $S=\{p_1,p_2,\dots,p_k\}$ be the set of all prime numbers. ($k\in\mathbb{N}$). now, clearly $p_1p_2\cdots p_k\in\mathbb{N}$ and by thm 2.34, there exists prime p s.t. $p>p_1p_2\cdots p_k$. since $p>p_1p_2\cdots p_k>p_i$ for $i=1,2,\dots,k$, then $p\not\in S$, which is contradiction.

4. 경훈의 증명

발표 시 작성한 증명	$p_1,\ p_2,\ \dots\ ,\ p_n$ $\prod_{i=1}^{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^m}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$ $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots$ $=(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots)(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots)$
서면 과제 작성 증명	① Suppose there are only finite primes, say $p_1,\ p_2,\ \dots\ ,\ p_n$ fore some $n\in\mathbb{N}$. Let $m=p_1p_2\dots p_n+1$. Since $m\neq p_i$ for some $i\in\{1,2,\dots,n\}$, and not 1, m must be composite. Then $(\exists\, i\in\{1,2,\dots,n\})$ s.t $p_i\vert m$. However, if this holds, then since $p_i\vert m$ and $p_i\vert p_1p_2p_3\dots p_n$, $p_i\vert(m-p_1p_2\dots p_n)$. Then $p_i\vert 1$, which is a contradiction with the assumption that p_i is a prime. Thus there are infinitely many prime numbers. ② Suppose there are finite primes, say $p_1,\ p_2,\ \dots\ ,\ p_n$. Then by FTA, for every natural number N, $N=p_1^{r_1}p_2^{r_2}\dots p_n^{r_n}$, where $r_i\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ for $i=1,2,\dots,n$. Let $S=\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}\right)$. In this summary, there exists a multiplicative inverse of every natural number, by FTA. Thus $\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}\right)=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}$. Since $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{p_i^k}$ converges for every i by ratio test, the finite product of series also converges. However, $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j}$ diverges by integral test. Thus the equation does not hold, which implies the number of prime number isn’t finite.

[부록 4: 에피소드 3의 다항식 합동의 활용 증명]

1. 교과서적 증명

명제	Suppose $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ is a polynomial of degree $n>0$ with integer coefficients. Then $f(x)$ is a composite number for infinitely many integers x.
증명	By Theorem 3.12, there exists k such that for all $x \geq k$ implies that $f(x)>1$. Let $f(k)=t>1$. Then, $f(k+rt)=a_n(k+rt)^n+a_{n-1}(k+rt)^{n-1}+\ldots+a_1(k+rt)+a_0$ where $r \geq 1$, $r \in \mathbb{N}$. That is, $f(k+rt)=f(k)+tg(r)=t(1+g(r))$ for leading term $g(r): a_nt^{n-1}r^n$ By Theorem 3.12, applying $1+g(r)$, then there exists R such that $1+g(r)>1$ for all $r>R$ So, $f(k+rt)=t(1+g(r))$ is a composite number for $t>1$ and $1+g(r)>1$.
정리 3.12 명제	Suppose $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ is a polynomial of degree $n>0$ and suppose $a_n>0$. Then for any number M, there is an integer k (which depends on M) such that if $x>k$, then $f(x)>M$.

2. 성은의 증명

1차 발표에서 작성한 증명	2차 발표에서 작성한 증명
f: nonconstant polynomial with positive leading coeff. $\Rightarrow$ imf has inf. many composites. pf) As hinted, we use 3.8: "f preserves congruence" 3.12: "f is unbounded" 3.12 $\Rightarrow$ $(y \in S)$ $\exists x \in \mathbb{Z}$: $f(x) > 1$ $a := f(x)$ $S :=$ set of $y \equiv x (\mathrm{mod}\ a)$ Claim: $f(S)$: unbounded. Fix M $\Rightarrow \exists k$: $x > k \Rightarrow f(x) > M$($S$: unbounded), $(a \neq 0)$ $\therefore \exists s \in S$: $s > k \Rightarrow f(s) > M$, M: arbitrary $\Rightarrow$ $f(S)$: unbounded $\Rightarrow$ infinite $\therefore \forall$claim of $f(S)$ is composite (except for $\pm a$) if n: prime	$f: a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$ with $a_n > 0$, $n \geq 1$ $\Rightarrow$ $f(x)$ is composite for inf. many $x \in \mathbb{Z}$ pf. By 3.12, $\exists x \in \mathbb{Z}$: $f(x) > 1$. Put $a = f(x)$ Def: $S = \{y \mid y \equiv x (\mathrm{mod}\ a)\}$ Observe $y \in S$ $\Rightarrow$ $y \equiv x (\mathrm{mod}\ a)$ $\Rightarrow$ $f(y) \equiv f(x)$ $(\mathrm{mod}\ a)$ by 3.8 Since $f(x) = a$, $f(y) \equiv a \equiv 0$ $(\mathrm{mod}\ a)$ $\therefore$ $f(S) := \{f(s) \mid s \in S\} \subseteq \{ka \mid k \in \mathbb{Z}\}$ Claim: $f(S)$ is unbounded. Fix M. By 3.12, $\exists k$: $x > k \Rightarrow f(x) > M$ Note : $S = \{x + am \mid m \in \mathbb{Z}\}$ is unbounded since $a \neq 0$ $\exists s \in S$ s.t $s > k$ ($\Rightarrow$ $f(s) > M$) Since M is arbitrary, $f(S)$ is unbounded $\therefore$ $f(S)$ is infinite If a is composite, then every element of $f(S) - \{0\}$ is composites If a is prime, then $\underline{f(S) - \{0, \pm a\}}$ is composite infinite

서면 과제 증명	By Theorem 3.11, $f(x) > 1$ for some integer x. Put $f(x) = a$. Let S be the set of integers that are congruent to x. Note that S is unbounded. If $y \in S$, i.e. $y \equiv x (\bmod a)$, then $f(y) \equiv f(x) \equiv 0 (\bmod a)$ by Theorem 3.8. Thus $f(S)$ is a subset of the set of multiples of a. Claim $f(S)$ is unbounded. Fix M. Then there is a number k such that $f(x) > M$ if $x > k$ by Theorem 3.12. Since S is unbounded, some element $s \in S$ is larger than k, so that $f(s) > M$. Since M is arbitrary, $f(S)$ is unbounded, and consequently infinite. Therefore $f(S)$ contains infinitely many multiples of a, all of which are composites, possibly except for $\pm a$ when a is prime.
정리 3.8 명제	Suppose $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ is a polynomial of degree $n > 0$ with integer coefficients. Let a, b and m be integers with $m > 0$. If $a \equiv b (\bmod m)$, then $f(a) \equiv f(b) (\bmod m)$.
정리 3.12 명제	Suppose $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ is a polynomial of degree $n > 0$ and suppose $a_n > 0$. Then for any number M, there is an integer k (which depends on M) such that if $x > k$, then $f(x) > M$.

3. 경수의 증명

서면 과제 증명	By thm 3.12, there is an integer c s.t. $f(c)=m>1$. By thm 3.12, there is $k\in\mathbb{Z}$ s.t if $x>k$ then $f(x)>m$. by archimedian property, there is $q\in\mathbb{N}$ s.t. $q>\frac{k-c}{m}$, that is, $c+mq>k$. (*) clearly $mq+c\equiv c(\mathrm{mod}\ m)$. then by thm 3.8, $f(mq+c)\equiv f(c)(\mathrm{mod}\ m)$. since $f(c)=m\equiv 0(\mathrm{mod}\ m)$, then $f(mq+c)\equiv 0(\mathrm{mod}\ m)$ by thm 1.11 and so m divides $f(mq+c)$. by (*), $f(mq+c)>m$ and m divides $f(mq+c)$ with $m>1$, which implies $f(mq+c)$ is composite. in this way for all integer $q'\geq q$, $f(mq'+c)$ is composite, which implies there are infinitely many integers x s.t. $f(x)$ is composite.
정리 3.8 명제	Suppose $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ is a polynomial of degree $n>0$ with integer coefficients. Let a, b and m be integers with $m>0$. If $a\equiv b(\mathrm{mod}\ m)$, then $f(a)\equiv f(b)(\mathrm{mod}\ m)$.
정리 3.12 명제	Suppose $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ is a polynomial of degree $n>0$ and suppose $a_n>0$. Then for any number M, there is an integer k (which depends on M) such that if $x>k$, then $f(x)>M$.

4. 영웅의 증명

발표 시 작성한 증명	(귀류법) $f(x)$ is composite for finitely many $x \in \mathbb{Z}$. $x > M_1 \Rightarrow f(x) > N$ ($N := (f(x)$가 가질 수 있는 가장 큰 합성수)) $x_1 > M_1 \Rightarrow f(x_1) = p$($p$는 소수) $p = f(x_1) = f(x_1 + p) = f(x_1 + 2p) = \ldots$ Thus, $f(x) - p = 0$ has infinitely many solutions. It is contradiction.
서면 과제 증명	Contrarily, suppose that $f(x)$ is a composite number for finitely many integer x. 그럼 $f(x)$가 합성수가 되는 최대인 x가 존재할 것인데, 그 x를 M_1이라 하자. 그럼 $x > M_1$일 때, $f(x)$는 합성수가 아니다. Suppose $a_n > 0$, 그럼 Thm 3.11에 의해 $x > M_2$일 때 $f(x) > 0$인 integer M_2가 존재한다. Let $M = \max\{M_1, M_2\}$. 그럼 $x > M$일 때 $f(x)$는 자연수이고 따라서 1, 소수, 합성수 중 하나인데 가정에 의해 소수 또는 1이다. i) $f(x) = 1$ for all $x > M$ 그럼 $f(x) - 1 = 0$의 해가 무수히 많은데 $f(x)$는 n차 다항식이므로 해는 최대 n개 가질 수 있으므로 모순이다.

서면 과제 증명	ii) $f(x)=p$ for some $x>M$ (p: 소수) $x \equiv x+p(\bmod p)$ 이므로 Thm 3.8에 의해 $f(x) \equiv f(x+p)(\bmod p)$이다. 이때 $f(x)$는 p의 배수이고 $f(x+p)$도 p의 배수이고 $f(x+p)$는 소수이므로 $f(x+p)=p$이어야 한다. 비슷하게 $p=f(x)=f(x+p)=f(x+2p)=\ldots$이고 따라서 $f(x)-p=0$의 해는 무수히 많아지고 위와 비슷하게 모순을 이끌 수 있다. 결론적으로 정리는 참이다. ($a_n<0$인 경우는 우리가 합성수를 자연수에서만 정의하였기 때문에 알 수 없다. 하지만 $a_n<0$이어도 $g(x)=-f(x)$로 정의하면 위와 같은 과정을 적용시킬 수 있다.)
정리 3.8 명제	Suppose $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ is a polynomial of degree $n>0$ with integer coefficients. Let a, b and m be integers with $m>0$. If $a \equiv b(\bmod m)$, then $f(a) \equiv f(b)(\bmod m)$.
정리 3.11 명제	Suppose $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_0$ is a polynomial degree $n>0$ and suppose $a_n>0$. Then there is an integer k such that if $x>k$, then $f(x)>0$.

[부록 5: 에피소드 4의 위수 정의를 위한 도입 증명]

1. 교과서적 증명

명제	Let a and n be natural numbers with $(a,n)=1$. Then there exist natural numbers i and j with $i \neq j$ such that $a^i \equiv a^j \pmod{n}$.
증명	For all k, there exists unique b_k such that $a^k \equiv b_k \pmod{n}$ where $0 \leq b_k < n$. For $i \neq j$, $b_i \neq b_j$. Then, b_0, b_1, ... , b_{n-1} are distinct integers. The number of $\{k \mid b_k$ for integers k from 0 to $n-1\}$ is n. Suppose for all i, $j \in \mathbb{N}$ with $i \neq j$, $a^i \not\equiv a^j \pmod{n}$. Then there exist b_i and b_j where $b_i = b_j$ with $i \neq j$. This is a contradiction.

2. 호승의 증명

발표 시 작성한 증명	$(a,n)=1$, $\exists$ i, $j\in\mathbb{N}$ with $i\neq j$ s.t $a^i\equiv a^j \pmod n$ pf) Contrarily, suppose that for $\forall$ i, $j\in\mathbb{N}$, $a^i\not\equiv a^j \pmod n$ Then, the set $\{a,a^2,\ldots,a^n\}$ are complete residue system by thm 3.17. Since $a^n\in\mathbb{N}$, $a^{n+1}\equiv a^j \pmod n$ for $1\leq j\leq n$. This contradicts to the suppose. Thus, there exists i, $j\in\mathbb{N}$ with $i\neq j$ s.t. $a^i\equiv a^j \pmod n$.
서면 과제 증명	Contrarily, suppose that for $\forall i$, $j\in\mathbb{N}$, $a^i\not\equiv a^j \pmod n$. Then, the set $\{a,a^2,\ldots,a^n\}$ are complete residue system by thm 3.17. Since $a^{n+1}\in\mathbb{N}$, $a^{n+1}\equiv a^j \pmod n$ for $1\leq j\leq n$ by def of complete residue system. This contradicts to the suppose. Thus, there exists i, $j\in\mathbb{N}$ with $i\neq j$ s.t $a^i\equiv a^j \pmod n$.
정리 3.17 명제	Let n be a natural number. Any set, $\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$, of n integers for which two are congruent modulo n is a complete residue system modulo n.

3. 영웅의 증명

서면 과제 증명	비둘기집 원리에 의해, a^1, a^2, ... , a^{n+1}을 n으로 나눈 나머지는 적어도 두 개는 같아야 한다. 그 두 수를 a^i, a^j라 하면 Thm 1.24에 의해 $a^i \equiv a^j (\bmod n)$을 만족한다. ■
정리 1.24 명제	Let a, b and n be integers with $n > 0$. Then $a \equiv b$ $(\bmod n)$ if and only if a and b have the same remainder when divided by n. Equivalently, $a \equiv b$ $(\bmod n)$ if and only if when $a = nq_1 + r_1 (0 \le r_1 \le n-1)$ and $b = nq_2 + r_2 (0 \le r_2 \le n-1)$, then $r_1 = r_2$.

Abstract

A Study of Instructor's Authority and Students' Authorities in Undergraduate Students' Proof Presentations

Kyungwon Lee
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

Proof is an essential topic at the undergraduate mathematics education. Since proof is generally handled in the social context, it is necessary to shed light on social activities in the teaching and learning of proof. Proof presentation is a way to explore social activities in a practical class at the undergraduate level.

The process of determining the truth or falsehood of the proof is substantially affected by the authority of the proof author. Although there are differences between experts and novices in ways of proof reading, they are often influenced by the authority of experts. However, the expert authority has been mainly dealt with in the area

of teaching and learning of proof. Authority in the context of mathematics education is posited as the concept including the expert authority as well as the shared authority in the practical class. Previous research focused on the discourse analysis of the instructor and students to explore authority. Also, they primarily focused on one subject such as the authority of the instructor or the authority of students. The authority of both the instructor and the students needs to be explored in the context of shared authority. Therefore, in this study, students' proof presentations are designed to examine the shared authority.

This study was conducted in a number theory course, which is not affected by the hierarchy of the subject at the undergraduate level. This class is designed for students to learn the definitions, theorems and proofs that will be handed out in class in an out-of-class environment and the actual classroom is designed to focus on students' proof presentations and discussions. The presenters explained their proofs and answered questions with the audience. The instructor controlled both students' presentations, questions and answers. In this class environment, the presenters' proof presentations, questions and answers, and comments from the instructor were recorded. Also, the students' written assignments and Classprep assignments which related to the background of their discussions in class were collected. Based on the framework of authority structures, results of the discourse analysis about the presenters, audience and the instructor in five classes were suggested for the answers to the research questions.

First, presenters showed the switched authority to communicate their proofs clearly. The switch from the authority of immanent factors to the authority of transcendent factors was explored for all presenters, and the reverse switch was explored for the majority of the presenters.

Presenters showed their switched authority in proving process for presenting contents of the proof and setting a clear direction for their proof presentations. This was for effective communication of the proofs. Second, presenters and audience showed their responses to the authority of the opposite nature during question and answer time. This was to enable presenters and the audience to achieve consensus on the learning contents through questions and answers, and to play their roles as the subject of mathematical learning. Third, the instructor showed the combined authority in students' proof presentations. In the process of conveying the expert knowledge of mathematics as well as extending the discussions of proofs, the instructor revealed two opposing authorities simultaneously. This was for the performance of the instructor's role in the class where proof presentations were centered.

This study is significant in that it examined the concrete aspects of students' proof presentations at the undergraduate level. It is also worth noting that the shared authority of both the instructor and students was analyzed specifically.

Keywords: Proof Presentations, Authority, Undergraduate Mathematics Education

Student Number: 2016-23223