



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학박사 학위논문

외란 및 제어 입력 포화에 강인한  
이산 시간 슬라이딩 모드 제어 방법  
및 산업용 서보 시스템의 응용

2021년 2월

서울대학교 대학원

전기·정보공학부

한 지 석




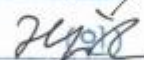
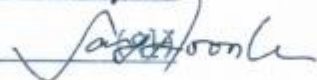
외란 및 제어 입력 포화에 강인한  
이산 시간 슬라이딩 모드 제어 방법  
및 산업용 서보 시스템의 응용

지도 교수 조 동 일

이 논문을 공학박사 학위논문으로 제출함  
2021 년 2 월

서울대학교 대학원  
전기·정보공학부  
한 지 석

한지석의 공학박사 학위논문을 인준함  
2021 년 2 월

위원장	심형보	
부위원장	조동일	
위원	양인순	
위원	김현진	
위원	이상훈	

## 초 록

본 논문은 산업용 서보 시스템에서 외란 및 제어 입력 포화에 강인한 위치 제어 방법을 개발하였다. 본 연구는 중소벤처기업부 월드 클래스(WC300) 사업의 “스마트머신/협업로봇 유연대응을 위한 로봇모션 제어 솔루션(S2563339)” 과제의 일환으로 수행하였으며, 과제 보고서 내용을 상당 부분 인용하고 있다. 기존 개발된 이산 시간 슬라이딩 모드 제어 방법(Sliding mode control with Decoupled disturbance compensator, 이하 SD)은 충분히 느린 매칭된 외란에 대해 분리 법칙(separation principle)을 만족하며, 슬라이딩 모드 다이내믹스와 외란 추정 오차 다이내믹스의 안정성을 보장한다. 그리고 이산 시간 SD 방법은 서보 시스템에서 외란에 강인하고 뛰어난 위치 제어 성능을 보였다. 하지만 가감속이 큰 레퍼런스 명령이 인가될 경우 제어 입력 포화 현상이 발생할 수 있다. 이산 시간 SD 방법 적용시 제어 입력 포화가 발생하면 분리 법칙을 만족하지 않으며, 시스템에 과도한 진동, 기구적인 손상을 줄 수 있다. 이에 본 논문에서는 보조 상태 변수(auxiliary state)를 이산 시간 SD 방법과 통합하여, 외란 및 제어 입력 포화에서도 강인한 새로운 이산 시간 제어 방법(Sliding mode control with Decoupled disturbance compensator and Auxiliary state, 이하 SDA)을 개발하였다. 이산 시간 SDA 방법은 제어 입력 포화에도 분리 법칙을 만족하며, 절환 함수 및 외란 추정 오차의 안정도를 제공한다. 그리고 제어 입력 포화 후, 에러 상태 변수가 등속 혹은 정지 명령 구간에서 안정화된다. 그리고 제어 입력 포화 발생 시 부하가 목표 위치 부근에서 진동적인 응답이 나타나지 않으면서 빠른 수렴이 가능하도록 하는 튜닝 방법론을 제시한다. 외란 및 제어 입력 포화가 있는 산업용 볼스크류 및 리니어 모터에서 제안하는 방법의 우수한 제어 성능을 보인다.

**주요어** : 산업용 서보 시스템, 이산 시간 슬라이딩 모드 제어, 보조 상태 변수, 외란 보상기, 제어 입력 포화.

**학번** : 2015-22815

# 목 차

제 1 장 서 론.....	1
1.1. 본 연구의 배경.....	1
1.2. 본 연구의 의의.....	8
1.3. 본 연구의 구성.....	10
제 2 장 외란 및 제어 입력 포화가 있는 산업용 서보 시스템에서 보조 상태 변수를 이용한 이산 시간 슬라이딩 모드 제어 방법.....	11
2.1. 서보 시스템 모델링 및 이산 시간 SD 방법[45].....	11
2.2. 제어 입력 포화 상황에서 이산 시간 SD 방법[56].....	17
2.3. 제어 입력 포화 상황에서 이산 시간 SDA 방법[57].....	19
2.3.1. 이산 시간 SDA 방법.....	19
2.3.2. 이산 시간 SDA 방법의 분리 법칙과 절환 함수 및 외란 추정 오차의 안정도 분석.....	23
2.3.3. 이산 시간 SDA 방법의 에러 상태 변수의 안정도 분석.....	28
2.4. 실험 결과.....	35
제 3 장 산업용 서보 시스템에서 이산 시간 SDA 제어 방법의 튜닝 방법.....	43
3.1. 제어 입력 미포화시 이산 시간 SDA 방법 제어 파라미터 튜닝 방법론[58].....	43
3.2. 제어 입력 포화시 이산 시간 SDA 방법 제어 파라미터 튜닝 방법론[59].....	50
3.2.1. 개요.....	50
3.2.2. 시뮬레이션 예시.....	52
3.2.3. 분리된 (Decoupled) 에러 다이내믹스 분석.....	55
3.2.4. 위상 그림(Phase portrait) 기반 분리된 에러 다이내믹스 설계 및 보조 상태 변수 게인 튜닝 알고리즘.....	57

3.2.5. 실험 결과 .....	6 6
제 4 장 결 론 .....	6 9

## 표 목차

표 2.4.1 실험 파라미터 및 값.....	3 7
표 2.4.2 실험 결과 요약 (감속 구간 이후).....	4 2
표 3.1.1 이산 시간 SD 방법 계인 세트 및 극점 위치.....	4 7
표 3.2.1 시뮬레이션 및 실험 파라미터 조건.....	5 2
표 3.2.2 실험 결과 요약 (목표 위치에서 측정).....	6 7



# 그림 목차

그림 1.1.1 슬라이딩 모드 제어 적용시 상태 변수의 상 그림(Phase Portrait) .....	6
그림 1.1.2 슬라이딩 모드 제어 적용시 제어 입력의 채터링 현상	7
그림 1.1.3 이산 시간 슬라이딩 모드 제어에서 준 슬라이딩 모드 현상 .....	7
그림 2.1.1 데드존 함수 입출력 관계 .....	1 2
그림 2.1.2 레퍼런스 명령 예시 .....	1 4
그림 2.3.1 이산 시간 SDA 방법의 슬라이딩 매니폴드 .....	2 0
그림 2.3.2 이산 시간 SDA 방법이 적용된 서보 시스템에서 등속 및 정지 명령이 인가될 때 페루프 시스템 개략도 .....	3 1
그림 2.3.4 도달 집합과 타원체 .....	3 3
그림 2.4.1 실험 환경 .....	3 6
그림 2.4.2 전체 시스템 블록도 .....	3 9
그림 2.4.3 레퍼런스 명령 .....	3 9
그림 2.4.4 볼스크류가 연결된 서보 시스템 실험 결과 .....	4 0
그림 2.4.5 볼스크류가 연결된 서보 시스템 실험 결과 (감속 구간 확대) .....	4 1
그림 3.1.1 외란 입력에 대한 위치 에러 전달함수의 극점-영점 위치 .....	4 8
그림 3.1.2 외란 입력에 대한 위치 에러 전달함수의 주파수 응답. .....	4 9
그림 3.2.1 $\alpha=0.920$ 일 때 시뮬레이션 결과 .....	5 3
그림 3.2.2 $\alpha=0.995$ 일 때 시뮬레이션 결과 .....	5 4
그림 3.2.3 $\alpha=0.920$ 일 때 감속 구간에서 위상 그림 .....	5 7
그림 3.2.4 $\alpha=0.995$ 일 때 감속 구간에서 위상 그림 .....	5 8
그림 3.2.5 제안하는 튜닝 알고리즘 적용 후 시뮬레이션 결과 ( $\alpha=0.973$ ) .....	6 4
그림 3.2.6 제안하는 튜닝 알고리즘 적용 후 에러 상태 변수의 위상 그림 ( $\alpha=0.973$ ) .....	6 5

그림 3.2.7 실험 셋업 (리니어 모터) .....	6 7
그림 3.2.1 실험 결과 (빨간색 선: $\alpha=0.920$ , 초록색 선: $\alpha=0.995$ , 파란색 선: $\alpha=0.972$ ).....	6 8

# 제 1 장 서 론

## 1.1. 본 연구의 배경

본 연구는 산업용 서보 시스템에서 우수한 위치 제어 성능과 외란에 강인한 성능을 제공하는 제어 방법을 개발하기 위하여 시작되었다. 전 세계적으로 4 차 산업 혁명 및 ICT 기술을 결합한 스마트공장을 지향하며 제조 산업이 전반적인 발전을 하고 있으며, 이에 높은 생산성을 갖춘 다양한 제조 로봇이 개발되고 있다. 아울러 모션 제어 분야의 경우 매우 정밀하고 빠른 택타임(tact time)<sup>1</sup> 을 갖춘 고성능 강인한 서보 제어 방법을 요구하고 있다. 일반적으로 서보 제어기는 높은 제어 성능을 확보하기 위해서 높은 계인을 사용해야 한다. 이때 공진 및 소음[2-8], 오버슈트[9-11], 모델링[12-15], 파라미터 및 속도 추정[16-21], 외란 및 제어 입력 포화[22-25] 등 많은 이슈들이 발생할 수 있으며, 이들을 제어로써 해결해야 한다. 본 논문에서는 외란 및 제어 입력 포화에 강인한 위치 제어 방법에 대해 자세히 다룬다.

일반적으로 서보 제어기는 고전 제어 방식인 비례-적분 기반 또는 비례-적분-미분 기반 제어기를 사용하고 있다. 비례-적분 기반 제어기는

---

<sup>1</sup> 서보 시스템에서 구간 위치 제어 시, 레퍼런스 명령이 목표 위치에 도달한 시점부터 부하가 목표 위치의 일정 위치 오차 이내로 도달하기까지 걸리는 시간

구조가 간단하고 튜닝이 직관적이기 때문에 오랜 기간 널리 사용되고 있다. 추가적인 제어 성능을 높이기 위해서 피드포워드 제어기(feedforward controller), 저역 통과 필터(low-pass filter), 안티 와인드업(anti-windup) 등 다양한 제어 요소들과 결합하여 사용이 가능하다. 하지만 이러한 고전 제어 방법들은 외란에 민감하며, 다양한 제어 요소가 결합될 경우 튜닝 복잡도가 높아지는 단점이 있다. 이에 외란에 강인하고, 구조가 간단하며, 튜닝이 편리한 고성능 서보 제어기가 요구되고 있다. 그 중 슬라이딩 모드 제어 방법<sup>2</sup>은 사용자가 설계한 슬라이딩 변수(sliding variable) 혹은 절환 함수(switching function)를 안정화 하는 제어로, 매칭(matching)된 외란에 대해 시스템 상태 변수가 슬라이딩 매니폴드(sliding manifold)에 유한 시간 내에 수렴하게 하고, 상태 변수를 슬라이딩 매니폴드 상에서 원점으로 점근 수렴(asymptotic convergence) 하게 하는 강인 제어 방법이다. 슬라이딩 모드 제어는 그림 1.1.1 과 같이 초기값(  $x(0)$  )에서 슬라이딩 매니폴드 (  $\{x:s=0\}$  )까지 도달하는 다이내믹스를 갖는 도달 모드(reaching mode), 매니폴드 위에서 원점으로 수렴하는 다이내믹스인 슬라이딩 모드(sliding mode)가 있다. 슬라이딩 모드의 특징은 외란이 있는 상황에서 사용자가 설계한 다이내믹스를 따르게 하는 불변성(invariance), 매칭된 외란에 대한

---

<sup>2</sup> 슬라이딩 모드 제어는 1960년대 소비에트 연방 연구 그룹에서 연구한 가변 구조 제어(variable structure control)가 발전되어 정립된 제어 방법이며, 가변 구조 제어의 특별한 제어 방법 중 하나이다[26, 27].

강인성(robustness), 상태 변수가 매니폴드 위에 유한 시간 내에 도달하는 유한 시간 수렴성(finite-time convergence), 그리고 슬라이딩 매니폴드 위에서 감소된 차수의 다이내믹스(reduced-order dynamics) 등이 있다. 하지만 그림 1.1.2 와 같이 비연속적인 제어(discontinuous control) 향으로 인한 채터링(chattering) 현상이 있는 단점이 있으며 이를 해결하기 위한 다양한 연구가 진행되었다[28-37]. 그리고 슬라이딩 모드 제어 기법은 다양한 응용 분야에 성공적으로 적용되었으며, 적응 슬라이딩 모드 제어를 이용한 피에조 나노 포지셔닝 제어[38], 적응 슬라이딩 모드 제어와 칼만 필터를 적용한 피에조 마이크로그리퍼[39], 퍼지 슬라이딩 모드 제어를 이용한 영구 자석 선형 동기 모터 제어[40] 및 모바일 로봇 제어[41] 등의 다양한 연구가 진행되고 있다.

산업용 서보 시스템에 슬라이딩 모드 제어 방법을 적용하기 위해서는, 제어기를 서보 드라이브에 내장되어 있는 디지털 신호 프로세서(digital signal processor)에 구현해야 한다. 연속 시간에서 설계된 슬라이딩 모드 제어기는 일정한 샘플링 주기로 이산화되며, 이때 이산화 에러가 발생한다. 따라서 연속 시간 슬라이딩 모드에서 보장하는 불변성, 강인성 등을 보장할 수 없게 된다. 즉, 상태 변수는 슬라이딩 매니폴드 상에 정확히 머무르기 어렵다. 그림 1.1.3 의 예시와 같이 슬라이딩 모드 제어 방법을 이산 시간 상 구현할 경우, 상태 변수를 슬라이딩 매니폴드 근처에서 지그재그 모션을 취하는 형태의 제어만 가능하다. 이러한

현상을 준 슬라이딩 모드(quasi-sliding mode)라 한다. 이러한 현상은 연속 시간에 설계된 슬라이딩 모드 제어 방법과 성능 차이를 보이며, 특히 제어 주기의 변화에 따라 그 오차는 매우 커질 수 있어서 사용자의 예상과 다른 성능을 보일 수 있다. 이에 이산 시간 도메인에서 설계된 이산 시간 슬라이딩 모드 제어 방법이 연속 시간 슬라이딩 모드 제어와는 별도의 주제로 연구되어 왔다[42-44]. 특히 [45]에서는 이산 시간 슬라이딩 모드 제어에 외란 보상기를 함께 적용한 이산 시간 SD 방법을 제안하였고, 컴퓨터 수치 제어(computer numerical control) 응용에서 좋은 속도 추정 성능과 외란에 대한 강인성을 보였다. 이산 시간 SD 방법은 구조가 간단할 뿐만 아니라 외란 추정 오차 다이내믹스와 슬라이딩 모드 제어 다이내믹스가 분리되는 분리 법칙과, 외란 추정 오차 및 절환 함수의 안정성을 보장한다. 그리고 이산 시간 SD 방법은 산업용 서보 시스템에 적용되어 우수한 위치 제어 성능을 보였다[50-54].

한편 제어 시스템에서는 플랜트에 인가할 수 있는 제어 입력 크기의 제한이 있는 경우가 일반적이다. 산업용 서보 시스템에서는 모터나 모터를 구동하는 서보 드라이브에서 출력할 수 있는 전류 크기의 제한이 있다. 제어 입력 포화는 주로 모터 및 드라이브 용량에 비해 실제 부하가 구동하기 어려운 매우 큰 가속을 갖는 구동을 하도록 레퍼런스 명령이 입력되는 경우에 나타날 수 있다. 제어 입력 포화 상태가

발생하면 큰 오버슈트, 언더슈트, limit cycle, 불안정성 등 시스템에 큰 영향을 줄 수 있다[55]. 이에 최근 외란과 제어 입력 포화에 대응하기 위한 강인 제어 방법이 많이 연구되었으며, 특히 보조 상태 변수를 이용한 방법들이 제안되었다[22-25]. 산업용 서보 시스템의 경우, 이산 시간 SD 방법에서 외란 추정 방법을 개선함으로써 제어 입력 포화에도 외란 추정 오차가 안정화될 수 있는 방법이 개발되었다[56]. 하지만 이 방법은 제어 입력 포화시 여전히 절환 함수가 안정화되지 않는다. 이에 본 논문은 보조 상태 변수를 이산 시간 SD 방법과 통합한 새로운 이산 시간 SDA 방법을 개발하였다[1, 57-60]. 제안하는 이산 시간 SDA 방법은 제어 입력 포화가 발생하여도 외란 추정 오차 및 절환 함수를 안정화시킬 수 있다. 뿐만 아니라 등속 또는 정지 명령 인가시 에러 상태 변수가 안정화된다. 추가적으로, 이산 시간 SDA 방법의 튜닝 방법론에 대해 상세히 다루었다[58, 59]. 산업용 볼스크류 부하 및 리니어 모터 부하에서 실험을 진행한 결과, 외란 및 제어 입력 포화에도 우수한 위치 제어 성능을 보였다.

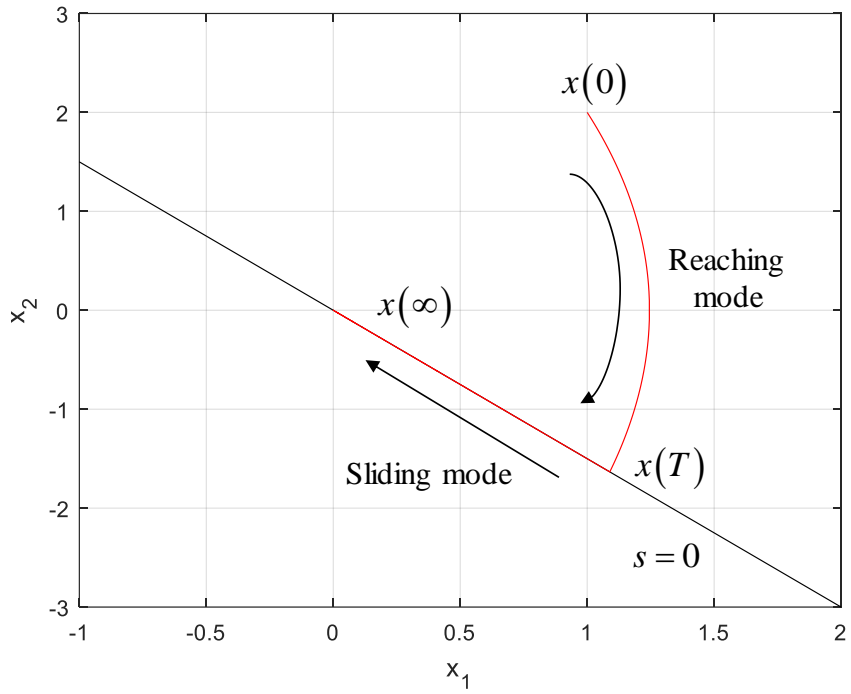


그림 1.1.1 슬라이딩 모드 제어 적용시 상태 변수의 상 그림(Phase Portrait)



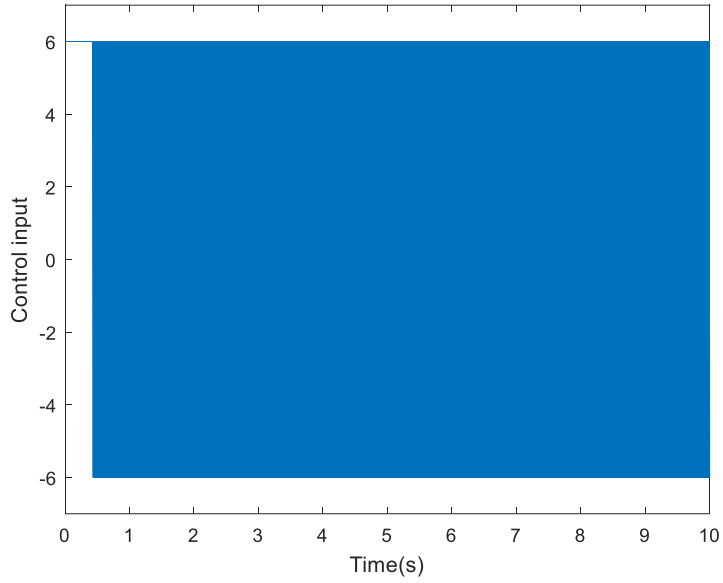


그림 1.1.2 슬라이딩 모드 제어 적용시 제어 입력의 채터링 현상

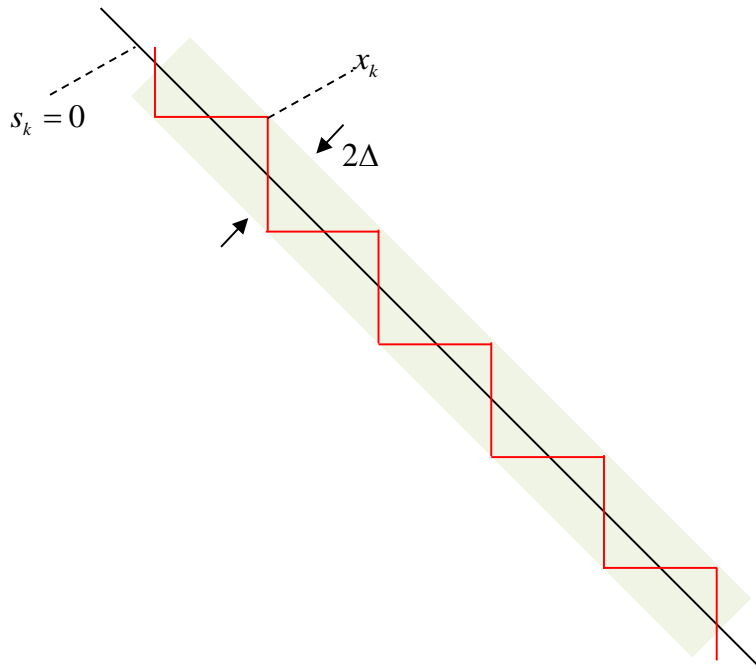


그림 1.1.3 이산 시간 슬라이딩 모드 제어에서 준 슬라이딩 모드 현상

## 1.2. 본 연구의 의의

본 논문은 산업용 서보 시스템에서 위치 제어시 외란 및 제어 입력 포화에 강인한 이산 시간 슬라이딩 모드 제어 방법을 개발하였다.<sup>3</sup> 본 논문의 의의를 정리하면 다음과 같다.

- 제안하는 이산 시간 SDA 방법은 구조가 간단하며, 외란 및 제어 입력 포화가 있어도 절환 함수 및 외란 추정 오차를 안정화 함.
- 등속 또는 정지 레퍼런스 명령이 인가될 때, 제안하는 이산 시간 SDA 방법은 제어 입력 포화가 발생하여도 위치 및 속도 에러를 안정화 함.
- 산업용 볼스크류 및 리니어 모터 부하 실험 결과, 제안하는 이산 시간 SDA 방법 적용시 외란 및 제어 입력 포화에도 안정적인 성능을 보임.
- 산업용 서보 시스템에서 이산 시간 SDA 방법의 튜닝 방법론을 제안함. 이산 시간 SD 제어 부분의 제어 파라미터들은 외란 입력에 대한 위치 에러 함수를 유도하여,

---

<sup>3</sup> 본 연구는 중소벤처기업부 월드 클래스 (WC300) 사업의 “스마트머신/협업로봇 유연대응을 위한 로봇모션 제어 솔루션(S2563339)” 과제의 지원으로 진행되었음. 그리고 (주)RS Automation 의 다양한 실험 환경 및 아낌없는 지원으로 연구되었음.

튜닝을 할 수 있음을 보임. 보조 상태 변수의 경우 감속 구간에서 제어 입력 포화시 변경되는 에러 다이내믹스를 분석하고, 위상 그림을 기반으로 튜닝 방법론을 제안함.

### 1.3. 본 연구의 구성

본 논문의 구성은 다음과 같다. 먼저 2 장에서는 서보 시스템을 모델링하고 제어 입력 포화시 문제점을 분석한다. 그리고 제안하는 이산 시간 SDA 방법의 분리 법칙과 에리 상태 변수의 안정도를 보이고, 산업용 볼스크류 부하에서 제안하는 방법의 제어 성능을 보인다. 3 장에서는 제안하는 이산 시간 SDA 방법의 튜닝 방법론을 제안하고 산업용 리니어 모터에서 실험 결과를 보인다. 마지막으로, 4 장에서는 제안하는 방법들과 의의에 대해 정리한다.

## 제 2 장 외란 및 제어 입력 포화가 있는 산업용 서보 시스템에서 보조 상태 변수를 이용한 이산 시간 슬라이딩 모드 제어 방법

### 2.1. 서보 시스템 모델링 및 이산 시간 SD 방법[45]

일반적인 서보 시스템은 다음과 같이 모델링 가능하다.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}u^{\text{lim}}\text{sat}\left(\frac{u_k}{u^{\text{lim}}}\right) + \mathbf{B}f_k, \quad (1)$$

이때  $\mathbf{x}_k = [\theta_k \ \omega_k]^T$  는 시스템 상태 변수,  $\theta_k$  는 모터 각변위,  $\omega_k$  는 모터 각속도,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  는 시스템 매트릭스,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} k_i T^2 / (2J) \\ k_i T / J \end{bmatrix}$  는 입력 매트릭스,  $u_k$  는 전류 명령,  $k_i$  는 토크 상수,  $J$  는 관성,  $T$  는 제어 주기,  $u^{\text{lim}}$  는 전류 제한값이다.  $f_k$  는 전류 단위의 매칭된 외란이며, 모델링 되지 않는 다이내믹스, 파라미터 오차, 외인성(external)의 외란 등을 포함한다. 포화 함수(saturation function)의 정의는 다음과 같다.

$$\text{sat}(u_k) = \begin{cases} \text{sgn}(u_k) & \text{if } |u_k| > 1 \\ u_k & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (2)$$

이때  $\text{sgn}(u_k)$  는 부호 함수(signum function)이다. 식 (1) 은 다음과 같이 재표현 가능하다.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}u_k - \mathbf{B}q_k + \mathbf{B}f_k, \quad (3)$$

이때  $q_k = dz(u_k) = u_k - u^{\text{lim}} \text{sat}\left(\frac{u_k}{u^{\text{lim}}}\right)$  이며, 제어기에서 계산한 전류 명령(포화 함수 통과 전)과 모터에 인가되는 전류(포화 함수 통과 후)의 차이값, 즉 전류 명령이 포화된 양이다.  $q_k$ 는 그림 2.1.1 과 같이 데드존 (deadzone) 함수의 입출력 관계를 갖는다.

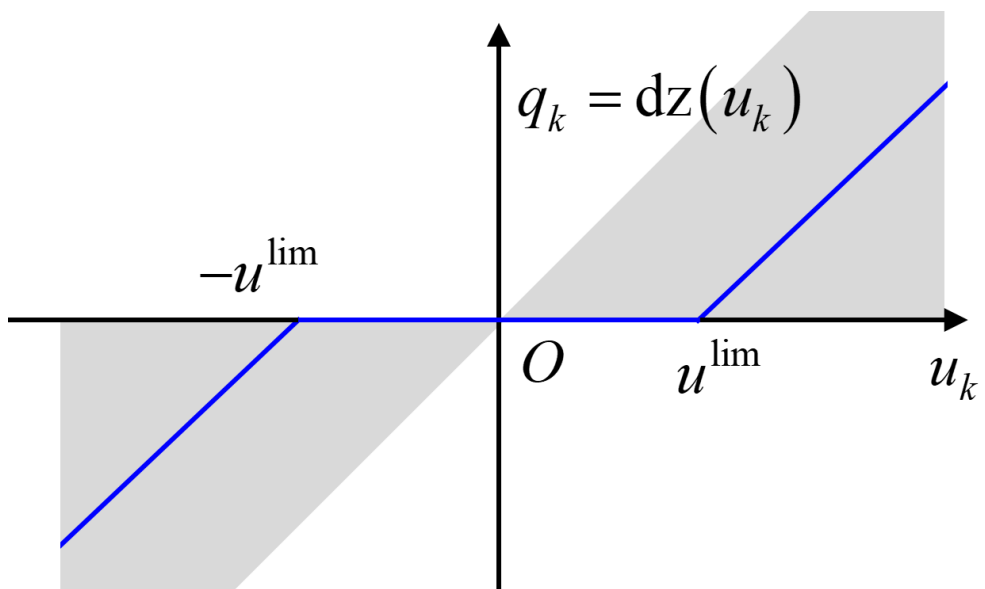


그림 2.1.1 데드존 함수 입출력 관계

상기 모델링한 서보 시스템에서 만약 제어 입력이 미포화된 상황에서는 시스템 모델을 다음과 같은 표현할 수 있다.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}u_k + \mathbf{B}f_k. \quad (4)$$

[45] 에서는, 식 (4)에 대해 레퍼런스 추종 제어를 위해 다음과 같은 이산 시간 SD 방법을 제안하였다. 절환 함수는 다음과 같이 정의된다.

$$s_k = \mathbf{G}\mathbf{e}_k = [c \quad 1] \begin{bmatrix} \tilde{\theta}_k \\ \tilde{\omega}_k \end{bmatrix} = [c \quad 1] \begin{bmatrix} \theta_k - \theta_k^{\text{ref}} \\ \omega_k - \omega_k^{\text{ref}} \end{bmatrix}, \quad (5)$$

이때  $s_k$  는 절환 함수,  $\mathbf{G} = [c \quad 1]$  는 계인 벡터,  $\mathbf{e}_k = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_k^{\text{ref}}$  는 에러 상태 변수,  $\mathbf{x}_k^{\text{ref}} = [\theta_k^{\text{ref}} \quad \omega_k^{\text{ref}}]^T$  는 레퍼런스 벡터이다. 일반적으로 서보 시스템은 구간 위치 제어서 레퍼런스 명령을 trapezoidal 또는 parabolic (S-curve) 형태의 프로파일을 사용한다[61-64]. 본 논문은 아래와 같은 정지, 가속, 등속, 감속, 정지 명령이 인가되는 trapezoidal 레퍼런스 명령을 고려한다.

$$\mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k^{\text{ref}} + \mathbf{B}u_k^{\text{ref}},$$

$$u_k^{\text{ref}} = \begin{cases} 0 & (0 \leq kT < T_1), \\ +u_{acc} & (T_1 \leq kT < T_2), \\ 0 & (T_2 \leq kT < T_3), \\ -u_{dec} & (T_3 \leq kT < T_4), \\ 0 & (kT \geq T_4), \end{cases} \quad (6)$$

이때  $u_k^{\text{ref}}$  는 레퍼런스 명령 식의 가상의 전류 값이며, 레퍼런스 명령의 가속도와 비례하는 값이다. 그림 2.1.2 에 레퍼런스 명령에 대한 예를 도시하였다.

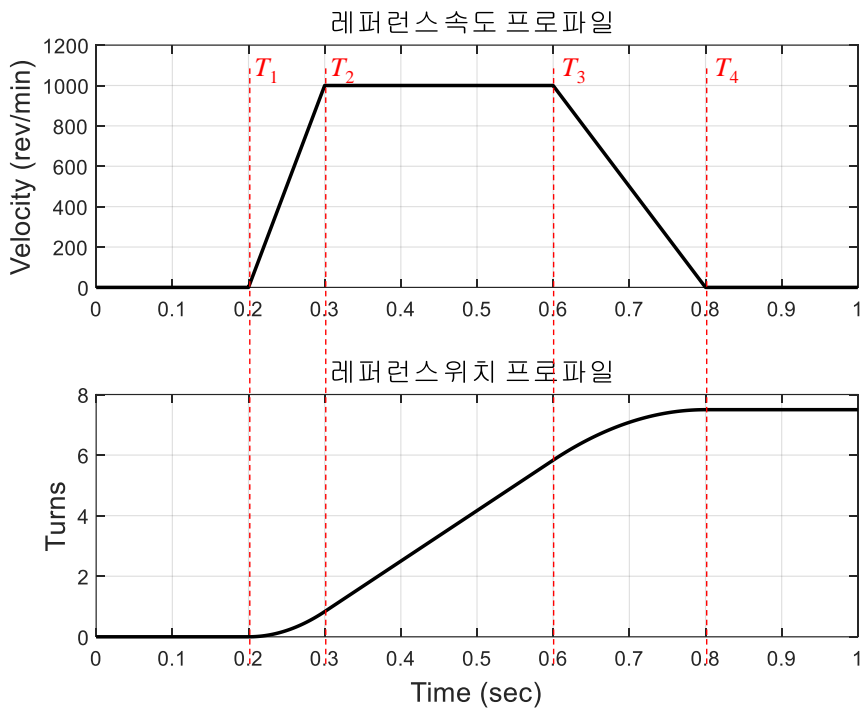


그림 2.1.2 레퍼런스 명령 예시



외란 추정 방법과 제어 입력 식은 다음과 같다.

$$\hat{f}_k = \hat{f}_{k-1} + g(\mathbf{GB})^{-1} \left[ s_k - qs_{k-1} + \eta \operatorname{sat} \left( \frac{s_{k-1}}{\phi} \right) \right], \quad (7)$$

$$u_k = -\hat{f}_k + (\mathbf{GB})^{-1} \left[ \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} - \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x}_k + qs_k - \eta \operatorname{sat} \left( \frac{s_k}{\phi} \right) \right], \quad (8)$$

이때  $\hat{f}_k$  는 외란 추정 값,  $g$  는 외란 추정 게인,  $q$  는 도달 법칙의 게인,  $\eta$  는 비연속 제어 게인,  $\phi$  는 경계층 두께이다.  $\mathbf{GB}$  값은 0 이 아닌 양의 실수값을 갖는 상황을 고려한다. 종합하면 식 (4)에 대해 식 (7)과 (8)을 적용시 다음과 같은 분리 법칙이 성립한다.

$$s_{k+1} = qs_k - \eta \operatorname{sat} \left( \frac{s_k}{\phi} \right) + \mathbf{GB}\tilde{f}_k, \quad (9)$$

$$\tilde{f}_{k+1} = (1-g)\tilde{f}_k + f_{k+1} - f_k, \quad (10)$$

이때  $\tilde{f}_k = f_k - \hat{f}_k$  는 외란 추정 오차이다. 식 (9)는 슬라이딩 모드 다이내믹스, 식 (10)은 외란 추정 오차 다이내믹스이다. 이때 외란은 변화율이 제한된, 즉  $|f_{k+1} - f_k| < m$  ( $m$ : 임의의 양의 상수)인 조건을 만족하고,  $0 < \eta/\phi < q < 1$ ,  $0 < g < 1$ ,  $\eta > (\mathbf{GB})(m/g)$  으로 파라미터를 설정한다면  $s_k$  와  $\tilde{f}_k$  은 안정하다는 것이 증명되었다[45]. 더

구체적으로는  $|s_k| < \frac{(\mathbf{GB})(m/g)}{1-q+\eta/\phi}$ ,  $|\tilde{f}_k| < m/g$  를 만족시킬 수 있다.

따라서 식 (9), (10)과 같이 분리 법칙에 의해 두 다이내믹스를 독립적으로 튜닝이 가능하다. 그리고 외란 추정 및 보상을 하고 슬라이딩 모드 제어의 비연속 제어의 계인인  $\eta$  를 작게 사용함으로써 채터링에 대한 영향을 크게 감소시킬 수 있다. 마지막으로 포화 함수를 사용함으로써 채터링에 대한 영향을 더 줄일 수 있지만 해당 영역에서는 선형 제어 구간이 되기 때문에 준 슬라이딩 모드가 발생하지 않는 단점이 있다. 하지만 경계층 절환함수를 매우 작은 값 이내로 가둘 수 있으며, 실제 산업용 서보 시스템에 적용시 좋은 성능을 보였다.

## 2.2. 제어 입력 포화 상황에서 이산 시간 SD 방법[56]

2.1 절에 기술한 시스템에서 이산 시간 SD 방법 적용시 제어 입력이 포화된 상황에서는 분리 법칙을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 s_{k+1} &= \mathbf{G}\mathbf{e}_{k+1} \\
 &= \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} \\
 &= \mathbf{G}\mathbf{A}_k + \mathbf{G}\mathbf{B}u_k - \mathbf{G}\mathbf{B}q_k + \mathbf{G}\mathbf{B}f_k - \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} \\
 &= \mathbf{G}\mathbf{A}_k + \mathbf{G}\mathbf{B} \left( -\hat{f}_k + (\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1} \left[ \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} - \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x}_k + qs_k - \eta \text{sat} \left( \frac{s_k}{\phi} \right) \right] \right) \\
 &\quad - \mathbf{G}\mathbf{B}q_k + \mathbf{G}\mathbf{B}f_k - \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} \\
 &= qs_k - \eta \text{sat} \left( \frac{s_k}{\phi} \right) - \mathbf{G}\mathbf{B}q_k + \mathbf{G}\mathbf{B}\tilde{f}_k,
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{k+1} &= f_{k+1} - \hat{f}_{k+1} \\
 &= f_{k+1} - \hat{f}_k - g(\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1} \left[ s_{k+1} - qs_k + \eta \text{sat} \left( \frac{s_k}{\phi} \right) \right] \\
 &= f_{k+1} - \hat{f}_k - g\tilde{f}_k + gq_k \\
 &= (1-g)\tilde{f}_k + f_{k+1} - f_k + gq_k.
 \end{aligned} \tag{12}$$

식 (11), (12)에서  $q_k$  항으로 인해, 2.1 절에서 언급한 분리 법칙이 성립하지 않게 된다.  $q_k$  는 제어 입력 포화시 나타나는 항으로, 일반적으로 급격하고, 예측이 어려운 값이다. 이에 [56]에서는 제어 입력 포화시 외란 추정 오차 다이내믹스의 안정성을 제공하기 위해 다음과 같은 외란 추정 법칙을 제안하였다.

$$\hat{f}_k = (1-g)\hat{f}_{k-1} + g(\mathbf{GB})^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{x}_k - \mathbf{Ax}_{k-1} - \mathbf{B}u_{k-1} + \mathbf{B}q_{k-1}). \quad (13)$$

식 (13)을 적용한다면 제어 입력 포화에도 외란 추정 오차가 식 (10)이 만족되도록 할 수 있다. 하지만 슬라이딩 모드 다이내믹스는 식 (11)과 같이 여전히  $q_k$  항을 포함하고 있고, 결국 분리 법칙은 성립하지 않는다. 이에 제어 입력 포화에도 분리 법칙 및 안정도를 보장할 수 있는 방법이 필요하다.

## 2.3. 제어 입력 포화 상황에서 이산 시간 SDA 방법[57]

### 2.3.1. 이산 시간 SDA 방법

본 절에서는 상기 기술한 제어 입력 포화가 있는 서보 시스템에서 보조 상태 변수를 이용한 이산 시간 슬라이딩 모드, 즉 이산 시간 SDA 방법을 제안한다. 보조 상태 변수는 다음과 같이 표현된다.

$$z_k = \alpha z_{k-1} + \mathbf{GB}q_{k-1}, \quad (14)$$

여기서  $z_k$ 는 보조 상태 변수,  $\alpha$ 는 보조 상태 변수 계인이다. 보조 상태 변수를 이용하여 아래와 같이 새로운 절환 함수를 정의한다.

$$\sigma_k = \mathbf{Ge}_k + z_k. \quad (15)$$

그리고 새로운 이산 시간 외란 추정 방법 및 제어 방법은 다음과 같다.

$$\hat{f}_k = \hat{f}_{k-1} + g(\mathbf{GB})^{-1} \left[ \sigma_k - q\sigma_{k-1} + \eta \operatorname{sat} \left( \frac{\sigma_{k-1}}{\phi} \right) \right], \quad (16)$$

$$u_k = -\hat{f}_k + (\mathbf{GB})^{-1} \left[ \mathbf{Gx}_{k+1}^{\text{ref}} - \mathbf{GAx}_k - \alpha z_k + q\sigma_k - \eta \operatorname{sat} \left( \frac{\sigma_k}{\phi} \right) \right]. \quad (17)$$

새로운 절환함수는 보조 상태 변수가 추가되면서, 차수가 한 차원 증가하였다. 만약 에러 벡터가 2 차원이라고 하면, 새로운 슬라이딩

매니폴드는 아래 그림 2.3.1 와 같이 3 차원 공간에서 어떤 평면으로 구성된 집합으로 볼 수 있다.

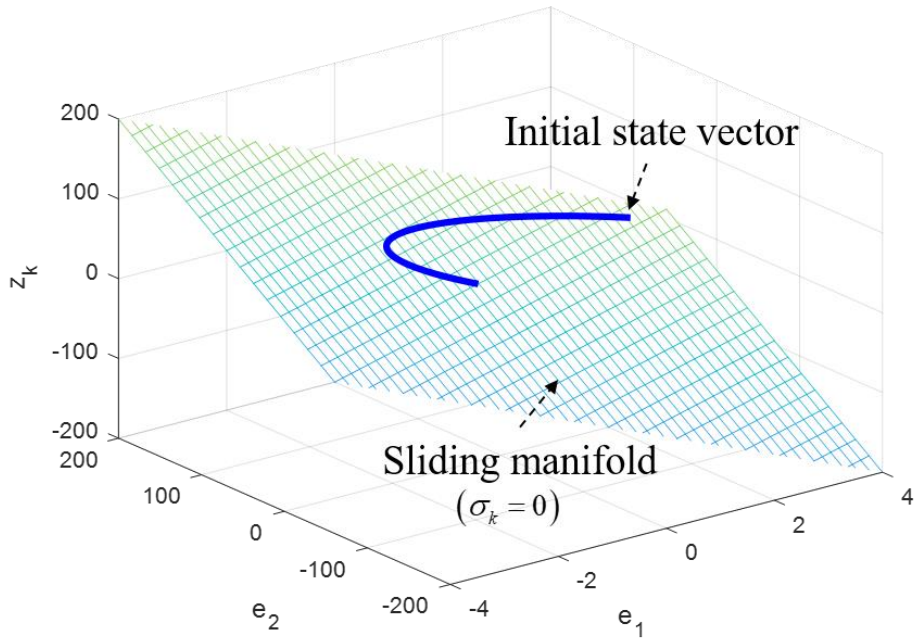


그림 2.3.1 이산 시간 SDA 방법의 슬라이딩 매니폴드

보조 상태 변수의 물리적인 의미는, 전류 명령이 포화된 양을 매 샘플 누적 및 감쇠시킨 값이라고 볼 수 있다. 그리고 이를 제어에 활용하면, 제어기에 인가되는 레퍼런스 명령의 가감속 성분을 줄여주는 효과가 있다. 식 (14)에  $\mathbf{B}q_{k-1}$  항은 전류 명령이 포화된 양으로 인해 발생한 위치 에러 및 속도 에러를 벡터화 한 값이다. 여기에  $\mathbf{G}$  를 곱할 경우 절환 함수와 동일한 물리량으로 변환된다. 보조 상태 변수를 다음과 같이 재표현 가능하다.

$$z_k = (\mathbf{GB}) \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n q_{k-n-1} = [c \quad 1] \begin{bmatrix} k_r T^2 / (2J) \\ k_r T / J \end{bmatrix} \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n q_{k-n-1}. \quad (18)$$

식 (18)을 식 (15)에 대입하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_k &= \mathbf{G}e_k + z_k \\ &= [c \quad 1] \begin{bmatrix} \theta_k - \theta_k^{\text{ref}} \\ \omega_k - \omega_k^{\text{ref}} \end{bmatrix} + [c \quad 1] \begin{bmatrix} k_r T^2 / (2J) \\ k_r T / J \end{bmatrix} \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n q_{k-n-1} \\ &= [c \quad 1] \begin{bmatrix} \theta_k - \left( \theta_k^{\text{ref}} - \frac{k_r T^2}{2J} \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n q_{k-n-1} \right) \\ \omega_k - \left( \omega_k^{\text{ref}} - \frac{k_r T}{J} \sum_{n=0}^{k-1} \alpha^n q_{k-n-1} \right) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (19)$$

식 (19)와 식 (5)를 비교할 때, 식 (19)에는 제어 입력 포화시 절환함수 계산에 사용하는 레퍼런스 명령 값의 가감속 성분이 줄어드는 효과가 있다. 이로 인하여 시스템은 제어 입력 포화에도 분리 법칙을 만족하게 되며, 에러 다이내믹스를 과도 응답 성능을 빠르게 또는 완만하게

조절할 수 있게 된다. 분리 법칙에 대한 설명은 다음 절에, 에러 다이내믹스의 과도 응답 성능을 제 3장에서 더 자세히 설명한다.



### 2.3.2. 이산 시간 SDA 방법의 분리 법칙과 절환 함수 및 외란 추정 오차의 안정도 분석

식 (1)에 대해서 제안하는 이산 시간 SDA 방법 적용시 분리 법칙은 다음과 같다.

정리 1: 외란 및 제어 입력 포화가 있는 식 (1)에 대해 식 (14)-(17) 적용시 다음과 같은 분리 법칙이 성립한다.

$$\sigma_{k+1} = q\sigma_k - \eta \operatorname{sat}\left(\frac{\sigma_k}{\phi}\right) + \mathbf{GB}\tilde{f}_k, \quad (20)$$

$$\tilde{f}_{k+1} = (1-g)\tilde{f}_k + f_{k+1} - f_k. \quad (21)$$

정리 1의 증명: 식 (1), (14)-(17)을 이용하면 다음과 같이 슬라이딩 모드 다이내믹스를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned} \sigma_{k+1} &= \mathbf{G}\mathbf{e}_{k+1} + z_{k+1} \\ &= \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1}^{\operatorname{ref}} + \alpha z_k + \mathbf{GB}q_k \\ &= \mathbf{G}\mathbf{A}_k + \mathbf{GB}u_k + \mathbf{GB}f_k - \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1}^{\operatorname{ref}} + \alpha z_k \\ &= \mathbf{G}\mathbf{A}_k + \mathbf{GB}\left(-\hat{f}_k + (\mathbf{GB})^{-1}\left[\mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1}^{\operatorname{ref}} - \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \alpha z_k + q\sigma_k - \eta \operatorname{sat}\left(\frac{\sigma_k}{\phi}\right)\right]\right) \\ &\quad + \alpha z_k + \mathbf{GB}f_k - \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1}^{\operatorname{ref}} \\ &= q\sigma_k - \eta \operatorname{sat}\left(\frac{\sigma_k}{\phi}\right) + \mathbf{GB}\tilde{f}_k. \end{aligned} \quad (22)$$

그리고 식 (16), (22)를 이용하여 다음과 같이 외란 추정 오차 다이내믹스를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}_{k+1} &= f_{k+1} - \hat{f}_{k+1} \\
 &= f_{k+1} - \hat{f}_k - g(\mathbf{GB})^{-1} \left[ \sigma_{k+1} - q\sigma_k + \eta \operatorname{sat} \left( \frac{\sigma_k}{\phi} \right) \right] \\
 &= f_{k+1} - \hat{f}_k - g\tilde{f}_k \\
 &= (1-g)\tilde{f}_k + f_{k+1} - f_k.
 \end{aligned} \tag{23}$$

(정리 1의 증명 끝)

따라서 식 (22), (23) 과 식 (9), (10) 를 비교해보면 동일한 구조임을 알 수 있다. 즉 제안하는 이산 시간 SDA 방법 적용시 외란 및 제어 입력 포화에도 분리 법칙이 성립함을 알 수 있다. 또한 다음과 같은 보조 정리 1 과 보조 정리 2 로 절환 함수와 외란 추정 오차의 안정성을 보일 수 있다.

*가정 1:* 외란은 변화율이  $m$  으로 제한된다. 즉  $|f_{k+1} - f_k| < m$  을 만족하며,  $m$  은 알고 있는 양의 상수이다.

*보조 정리 1:* 시스템 (1)에 대하여, 가정 1 을 만족하고, 식 (13)-(16)을 적용하면, 외란 추정 오차는 결국  $m/g$  값 이하로 제한된다. 즉 충분히 큰 자연수  $N$  에 대해  $|\tilde{f}_k| < m/g, \forall k > N$  을 만족한다. 그리고  $m=0$  이면, 외란 추정 오차는 점근 안정하다.

보조 정리 1의 증명: 다음과 같은 스칼라 이산 시스템을 고려하자.

$$v_k = (1-g)v_{k-1} + m, v_0 = \tilde{f}_0. \quad (24)$$

식 (24)는 다음과 같은 식과 동일하다.

$$v_k = (1-g)^k (v_0 - m/g) + m/g. \quad (25)$$

따라서 식 (25)은  $m/g$ 에 수렴한다. 마찬가지로 다음과 같은 식을 고려하자.

$$w_k = (1-g)w_{k-1} - m, w_0 = \tilde{f}_0. \quad (26)$$

식 (26)은 다음과 같은 식과 동일하다.

$$w_k = (1-g)^k (w_0 + m/g) - m/g. \quad (27)$$

따라서 식 (27)은  $-m/g$ 에 수렴한다. 따라서 비교 정리 (comparison lemma, [70])에 따르면 외란 추정 오차는  $m/g$ 과  $-m/g$ 사이로 제한된다.

(보조 정리 1의 증명 끝)

정리 2: 외란 및 제어 입력 포화가 있는 식 (1)에 대해 가정 1을 만족하고, 식 (14)-(17)를 적용한 시스템을 고려하자. 이때 개인 파라미터를  $0 < \eta/\phi < q < 1$ ,  $0 < g < 1$ ,  $\eta > (\mathbf{GB})(m/g)$ 으로 설정한다면,

절환 함수와 외란 추정 오차는 외란 및 제어 입력 포화에도 안정하다.

더 구체적으로는  $|\sigma_k| < \frac{(\mathbf{GB})(m/g)}{1-q+\eta/\phi} < \phi$ ,  $|\tilde{f}_k| < m/g$  를 만족시킬 수 있다.

정리 2 의 증명:  $\sigma_0 > \phi$  라 하자. 이 경우  $\sigma_k$  는 아래와 같은  $\sigma'_k$  변수 값 이하로 제한된다.

$$\sigma'_{k+1} = q\sigma'_k - \eta + \mathbf{GB}(m/g), \sigma'_0 = \sigma_0. \quad (28)$$

$\sigma'_k$  는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\sigma'_k = q^k \left( \sigma'_0 - \frac{\mathbf{GB}(m/g) - \eta}{1-q} \right) + \frac{\mathbf{GB}(m/g) - \eta}{1-q}. \quad (29)$$

결국  $\sigma'_k$  는  $(\mathbf{GB}(m/g) - \eta)/(1-q)$  에 수렴하고, 이 값은 음수다. 따라서  $\sigma_k$  역시 작아지게 되며  $\sigma_k < \phi$  를 만족하게 된다. 마찬가지로  $\sigma_0 < -\phi$  인 상황에도  $\sigma_0 > -\phi$  를 만족하게 된다. 따라서  $|\sigma_0| > \phi$  이면 충분한 시간 이내에  $|\sigma_k| < \phi$  를 만족하게 된다. 그리고  $|\sigma_k| < \phi$  인 상황에서  $\sigma_k$  는 다음과 같은 두 수열의 값 사이로 제한된다.

$$\sigma''_k = q^k \left( \sigma''_0 - \frac{\mathbf{GB}(m/g)}{1-q+\eta/\phi} \right) + \frac{\mathbf{GB}(m/g)}{1-q+\eta/\phi}, \sigma''_0 = \sigma_0. \quad (30)$$

$$\sigma_k^m = q^k \left( \sigma_0^m + \frac{\mathbf{GB}(m/g)}{1-q+\eta/\phi} \right) - \frac{\mathbf{GB}(m/g)}{1-q+\eta/\phi}, \quad \sigma_0^m = \sigma_0. \quad (31)$$

따라서  $\sigma_k$  는  $|\sigma_k| < \frac{(\mathbf{GB})(m/g)}{1-q+\eta/\phi} < \phi$  를 만족한다. 부등식

$$\frac{(\mathbf{GB})(m/g)}{1-q+\eta/\phi} < \phi \text{ 는 아래와 같은 부등식에서 양변에 } 1-q+\eta/\phi \text{ 을}$$

나누면 쉽게 유도된다.

$$(\mathbf{GB})(m/g) < \eta + \phi(1-q). \quad (32)$$

(정리 2 의 증명 끝)

따라서 보조 상태 변수를 이용한 제안하는 이산 시간 SDA 방법 적용시 외란과 제어 입력 포화에도 분리 법칙이 성립하며, 외란 추정 오차 및 절환 함수가 안정하다. 제어 입력 포화가 발생하지 않을 경우에는 제어 식이 이산 시간 SD 방법과 동치이므로, 이산 시간 SD 방법 제어기와 동일한 성능을 가질 수 있다.

### 2.3.3. 이산 시간 SDA 방법의 에러 상태 변수의 안정도 분석

다음은 이산 시간 SDA 방법 적용시 에러 상태 변수의 안정도를 분석한다. 이에 다음과 같은 제한된 크기의 외란 조건을 고려한다.

가정 2: 외란의 크기는 제어 입력 최대값보다 작은 값으로 제한된다. 즉  $|f_k| \leq M < u^{\text{lim}}$  을 만족한다.

가정 2 는 일반적으로 서보 시스템 구성시 서보 모터 및 서보 드라이브의 전류 제한 크기를 실제 발생할 수 있는 외란보다 충분히 크게 설계하기 때문에 실제 제어 상황에서 유효한 가정이다. 그리고 다음과 같은 에러 상태 변수의 안정도를 분석할 수 있다.

정리 3: 외란 및 제어 입력 포화가 있고 가정 1, 2 를 만족하는 서보 시스템 (1)을 고려한다. 레퍼런스 명령은 식 (6)에서 등속 및 정지인 상황을 고려한다. 식 (14)-(17) 의 이산 시간 SDA 방법을 적용하고, 개인 파라미터를  $0 < \eta / \phi < q < 1$ ,  $0 < g < 1$ ,  $\eta > (\mathbf{GB})(m/g)$ ,  $0 < \alpha < 1$  으로 설정한다. 이때 아래와 같은 행렬 부등식을 만족하는 양수이면서 대칭인 4 차 정방행렬  $\mathbf{P}$  와 임의의 양수인 상수들  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  이 존재한다면 에러 상태 변수는 안정하다.

$$\begin{bmatrix} \Phi^T \mathbf{P} \Phi - \mathbf{P} + \tau_1 \mathbf{P} & \Phi^T \mathbf{P} \Gamma_1 - \tau_2 \mathbf{H}^T & \Phi^T \mathbf{P} \Gamma_2 \\ * & \Gamma_1^T \mathbf{P} \Gamma_1 - 2\tau_2 & \Gamma_1^T \mathbf{P} \Gamma_2 \\ * & * & \Gamma_2^T \mathbf{P} \Gamma_2 - \frac{1}{M^2} \tau_3 \end{bmatrix} < 0, \quad (33)$$

$$\Phi = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{K} & -\mathbf{B} & -\delta\mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 1-g & 0 \\ \mathbf{0}_{1 \times n} & 0 & \alpha \end{bmatrix}, \Gamma_1 = \begin{bmatrix} -\mathbf{B} \\ 0 \\ \mathbf{G}\mathbf{B} \end{bmatrix}, \Gamma_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ g \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H} = [\mathbf{K} \quad 1 \quad \delta], \mathbf{K} = (\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{G} \left( \mathbf{A} - \left( q - \frac{\eta}{\phi} \right) \mathbf{I} \right), \delta = (\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1} \left( \alpha - q + \frac{\eta}{\phi} \right).$$

여기서 \*는 위 대각 성분의 대칭인 값이다.

*정리 3의 증명:* 정리 2에 의해 제어 입력 포화에도  $|\sigma_k| < \phi$  를 만족한다. 그리고 레퍼런스 명령이 등속 또는 정지일 때 식 (6)은 아래와 같다.

$$\mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k^{\text{ref}}. \quad (34)$$

따라서 식 (34)를 이용하면 제어 입력 식 (17)은 다음과 같이 표현 가능하다.

$$\begin{aligned} u_k &= -\hat{f}_k + (\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1} \left[ \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} - \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x}_k - \alpha z_k + q\sigma_k - \eta \text{sat} \left( \frac{\sigma_k}{\phi} \right) \right] \\ &= -\hat{f}_k + (\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1} \left[ -\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{e}_k - \alpha z_k + \left( q - \frac{\eta}{\phi} \right) (\mathbf{G}\mathbf{e}_k + z_k) \right] \\ &= -\hat{f}_k - \mathbf{K}\mathbf{e}_k - \delta z_k. \end{aligned} \quad (35)$$

식 (34)와 식 (35)을 이용하여 다음과 같이 에러 다이내믹스를 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}u_k - \mathbf{B}q_k + \mathbf{B}f_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_k^{\text{ref}} \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{BK})\mathbf{e}_k - \delta\mathbf{B}z_k - \mathbf{B}q_k + \mathbf{B}\tilde{f}_k.
\end{aligned} \tag{36}$$

식 (16)와 (20)식을 이용하여 외란 추정 식을 아래와 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\hat{f}_{k+1} &= \hat{f}_k + g(\mathbf{GB})^{-1} \left[ \sigma_{k+1} - q\sigma_k + \eta \text{sat} \left( \frac{\sigma_k}{\phi} \right) \right] \\
&= \hat{f}_k + g\tilde{f}_k \\
&= (1-g)\hat{f}_k + gf_k.
\end{aligned} \tag{37}$$

따라서 식 (14), (36), (37) 을 이용하여 다음과 같은 페루프 시스템을 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}_{k+1} &= \mathbf{\Phi}\mathbf{w}_k + \mathbf{\Gamma}_1 q_k + \mathbf{\Gamma}_2 f_k, \\
u_k &= -\mathbf{H}\mathbf{w}_k, \\
q_k &= u_k - u^{\text{lim}} \text{sat} \left( \frac{u_k}{u^{\text{lim}}} \right),
\end{aligned} \tag{38}$$

여기서  $\mathbf{w}_k = \left[ \mathbf{e}_k^T \quad q_k \quad \hat{f}_k \right]^T$  이다. 식 (38) 은 아래 그림 2.3.2 과 같이 표현 가능하다.



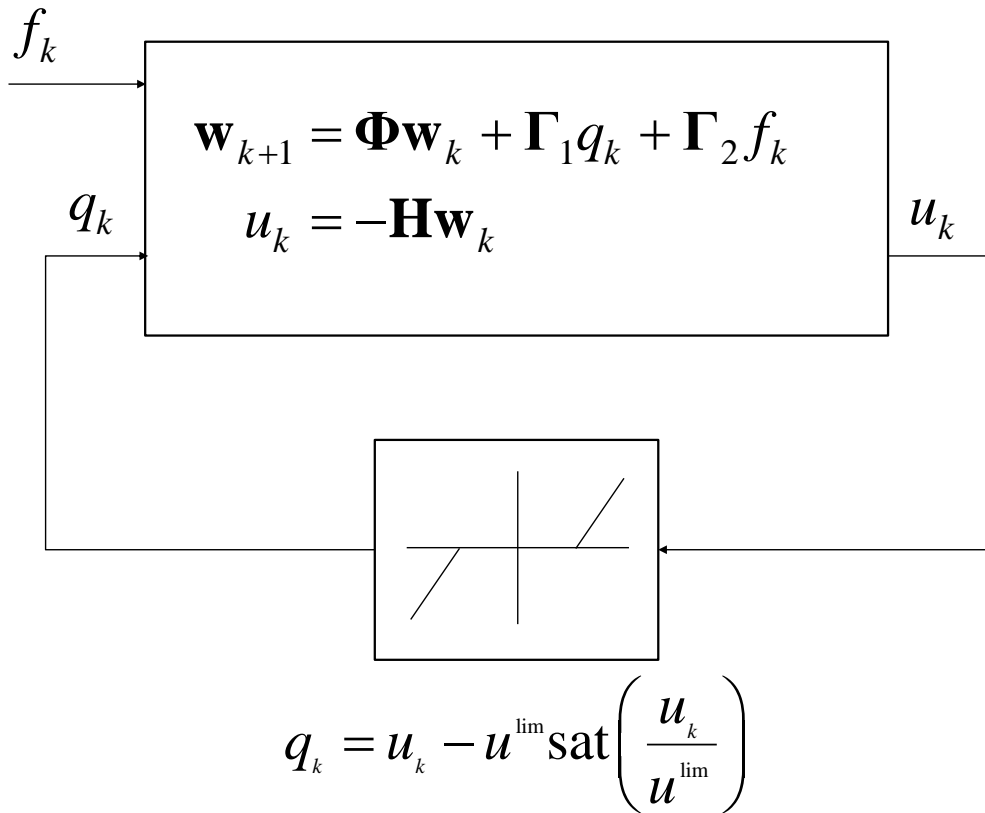


그림 2.3.2 이산 시간 SDA 방법이 적용된 서보 시스템에서 등속 및 정지 명령이 인가될 때 페루프 시스템 개략도

따라서 정리 3 은 식 (38)과 같이 레퍼런스 명령이 등속 및 정지 구간인 상황에서 제한된 크기의 외란 입력 및 제어 입력 포화가 있을 때, 위치 및 속도 에러가 안정화되는 것을 의미한다. 이를 분석하기 위해 다음과 같은 정의 1, 2 를 고려한다.

*정의 1 (도달 집합,  $\mathfrak{R}$ ) [71]:* 식 (38) 에서  $q_k$  가 0 이고  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$  인 시스템에서, 외란 입력  $f_k$  의 크기가 제한될 때  $\mathbf{w}_k$  가 도달 가능한 모든 집합을 의미함. 즉 다음과 같이 표현 가능함.

$$\mathfrak{R} = \{ \mathbf{w}_k \mid \mathbf{w}_k \text{ and } f_k \text{ satisfy (38) with } q_k = 0, \mathbf{w}_0 = \mathbf{0}, f_k^2 < M^2 \}. \quad (39)$$

*정의 2 (타원체,  $E$ ) [71]:* 식 (38)의  $\mathbf{w}_k$  에 대하여 아래와 같은 식을 만족하는 양수이면서 대칭인 어떤 4 차 정방행렬  $\mathbf{P}$  이 존재할 때 이에 해당하는  $\mathbf{w}_k$  의 집합을 타원체  $E$  라고 함.

$$E = \{ \mathbf{w}_k \mid \mathbf{w}_k^T \mathbf{P} \mathbf{w}_k \leq 1 \}. \quad (40)$$

$\mathbf{w}_k$  의 안정도를 분석하기 위해 크기가 제한된 외란 입력에 대한 도달 집합을 타원체로 근사한다. 즉  $f_k^2 < M^2$  인 입력이 주어질 때, 타원체 밖(  $\{ \mathbf{w}_k \mid V(\mathbf{w}_k) \geq 1 \}$  ) 에 있는 모든  $\mathbf{w}_k$  에 대하여  $\Delta V(\mathbf{w}_k) = V(\mathbf{w}_{k+1}) - V(\mathbf{w}_k) < 0$  를 만족하는  $\mathbf{P}$  가 존재한다면 타원체  $E$  는 도달

집합  $\mathcal{R}$ 의 과근사(over-approximation)한 집합이며,  $\mathbf{w}_k$ 는 안정하다. 집합의 포함 관계는 아래 그림 2.4.3을 참고할 수 있다.

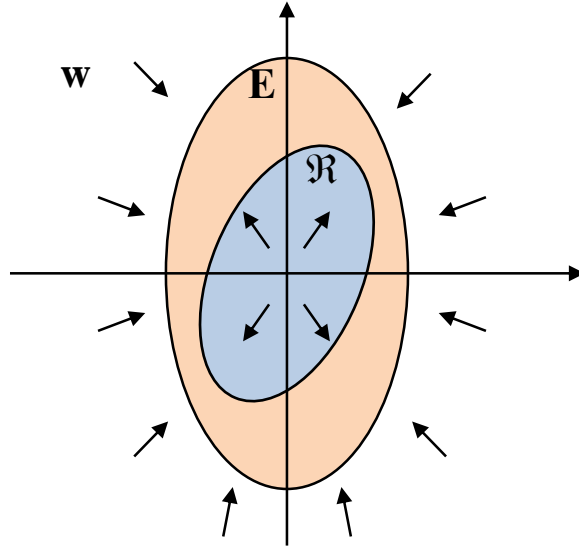


그림 2.3.3 도달 집합과 타원체

따라서 제한된 크기의 외란 입력이 있어도 안정하기 위한 조건은 다음과 같이 정리된다.

$$\Delta V(\mathbf{w}_k) < 0, \tag{41}$$

$$\mathbf{w}_k^T \mathbf{P} \mathbf{w}_k - 1 \geq 0, \tag{42}$$

$$-\frac{f_k^2}{M^2} + 1 \geq 0. \tag{43}$$

그리고 페루프 시스템에는 데드존 비선형성이 존재한다. 이를 아래와 같이 구간 조건(sector condition)인 입출력 부등식을 구할 수 있다.

$$2q_k(-\mathbf{H}\mathbf{w}_k - q_k) \geq 0. \quad (44)$$

따라서 식 (43), (44) 가 주어지고 식 (42)를 만족하는  $\mathbf{w}_k$  영역에서, 식 (41)이 항상 만족하기 위해서는 아래와 같은 S-procedure 를 적용할 수 있다.

$$\Delta V(\mathbf{w}_k) + 2\tau_2 q_k(-\mathbf{H}\mathbf{w}_k - q_k) + \tau_1(\mathbf{w}_k^T \mathbf{P}\mathbf{w}_k - 1) + \tau_3 \left( -\frac{f_k^2}{M^2} + 1 \right) < 0. \quad (45)$$

결국, 식 (45) 는 식 (33)처럼 행렬 부등식으로 표현가능하고, 가정에 의해  $\mathbf{P}$  가 존재하므로 시스템은 안정하다. 따라서 에러 상태 변수도 안정하다.

(정리 3 의 증명 끝)

## 2.4. 실험 결과

산업용 서보 시스템에서 제안하는 이산 시간 SDA 방법의 성능을 검토하였다. 서보 시스템 구성은 다음과 같다.

- 400W 서보 모터 및 23 bit 엔코더 (RS Automation, Korea)
- 400W 서보 드라이브 (RS Automation, Korea)
- 볼스크류 부하 및 커플링
- 제어 소프트웨어 (RS Automation, Korea)

볼스크류 부하 및 모터는 그림 2.4.1 과 같이 세팅하였다. 그리고 시스템 파라미터와 제어기의 게인값은 표 2.4.1 에 표시하였다.

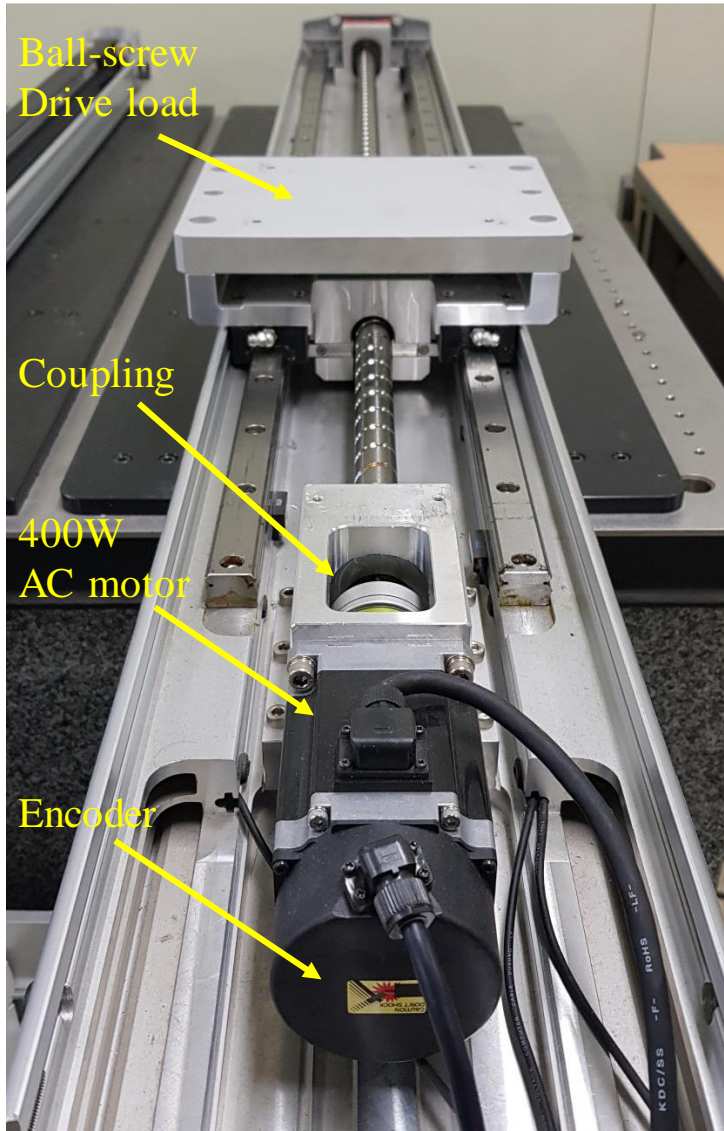


그림 2.4.1 실험 환경

표 2.4.1 실험 파라미터 및 값

파라미터	값	단위
$J$	$2.32 \times 10^{-4}$	kgm <sup>2</sup>
$k_t$	0.33	Nm/A
$T$	0.125	ms
$u^{\text{lim}}$	5	A
<b>G</b>	[200 1]	-
$q$	0.9	-
$g$	0.03	-
$\eta$	0.3	-
$\phi$	10	-
$\alpha$	0.97	-
$f_{LPF}$	2,000	Hz
$f_{NF1}$	871	Hz
$f_{NF2}$	1,615	Hz

제안하는 이산 시간 SDA 방법 이외에 시스템의 노이즈를 감소시키기 위한 2차 저역 통과 필터를 사용하였고, 볼스크류 부하에 내재되어 있는 고주파 공진을 억제하기 위해 노치 필터 2개를 적용하였다. 모터의 각변위는 모터에 부착된 광학식 엔코더에서 실시간으로 측정되고, 이는 피드백 제어로 활용된다. 이를 종합한 전체 시스템 블록도는 그림 2.4.2 과 같다.

본 실험에서는 목표 위치는 15 회전, 목표 속도는 2,000 rev/min, 가감속 시간은 5 ms 로, 매우 짧게 설정하였다. 레퍼런스 명령은 그림 2.4.3 과 같다. 실험은 제안하는 이산 시간 SDA 방법과 [56]에서 제안한 방법과 비교하였다. 실험 결과는 그림 2.4.4 와 같다. 그리고 목표 위치 부근에서 실험 결과를 확대하여 그림 2.4.5 에 도시하였다. [56]에서 제안하는 방법 적용시 목표위치에서 위치 에러 (위치 명령 - 모터 위치) 및 속도 에러(속도 명령 - 모터 속도)에 각각 두번째 피크 및 세번째 피크가 발생하였다. 반면 제안하는 방법 적용시 위치 에러 및 속도 에러에 각각 두번째 피크 및 세번째 피크가 발생하지 않았다. 마지막으로 전류 명령의 경우, 제안하는 방법이 [56]에서 제안하는 방법보다 제어 입력 포화 시간이 짧게 나타났다. 따라서 제안하는 방법이 제어 입력 포화가 발생하여도 추가적인 진동이 적고 부드럽게 목표 위치에 수렴함을 알 수 있다. 실험 결과는 표 2.4.2 에 요약하였다.



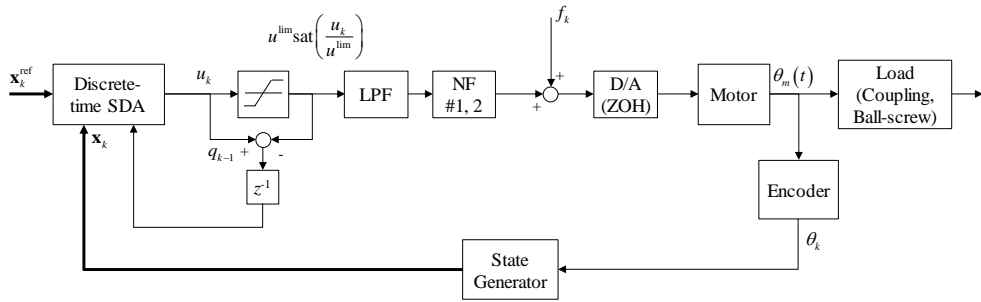


그림 2.4.2 전체 시스템 블록도

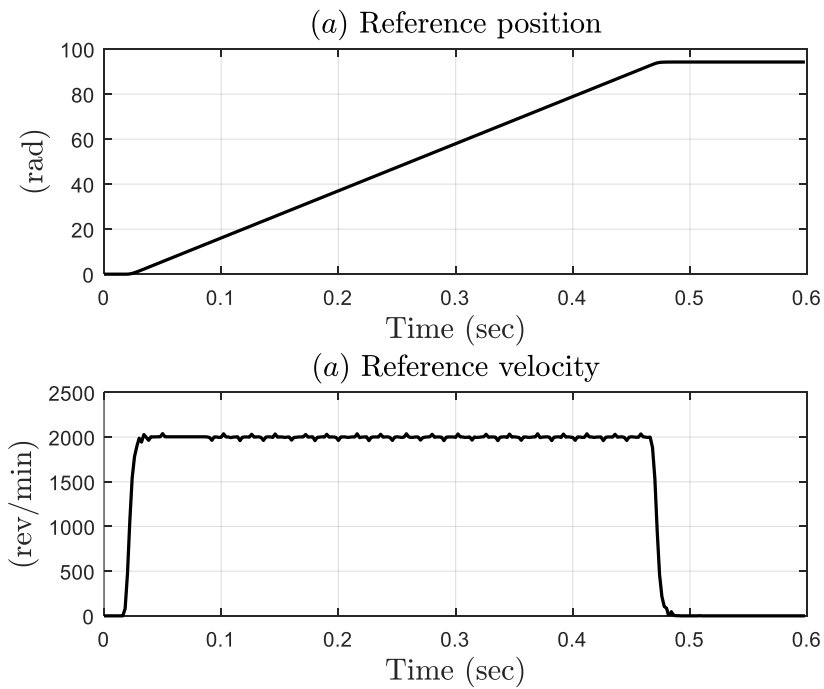


그림 2.4.3 레퍼런스 명령

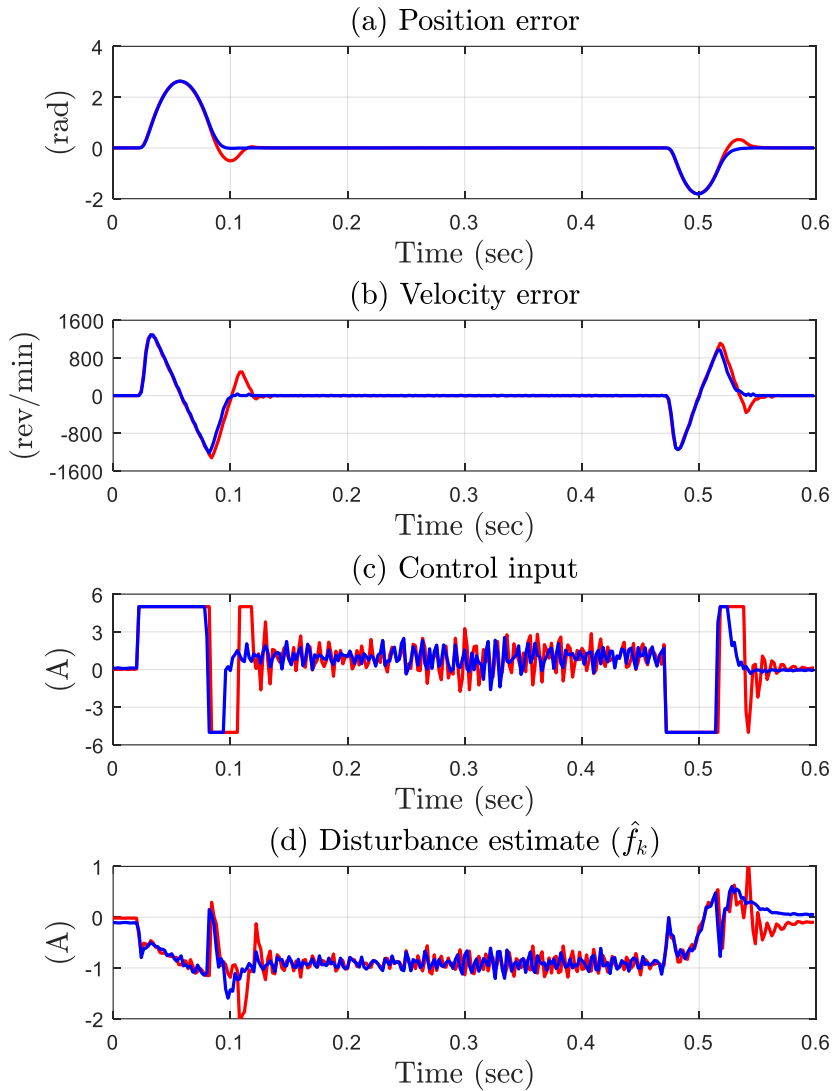


그림 2.4.4 볼스크류가 연결된 서보 시스템 실험 결과

(빨간색: [56] 방법 적용, 파란색: 제안하는 이산 시간 SDA 방법 적용)

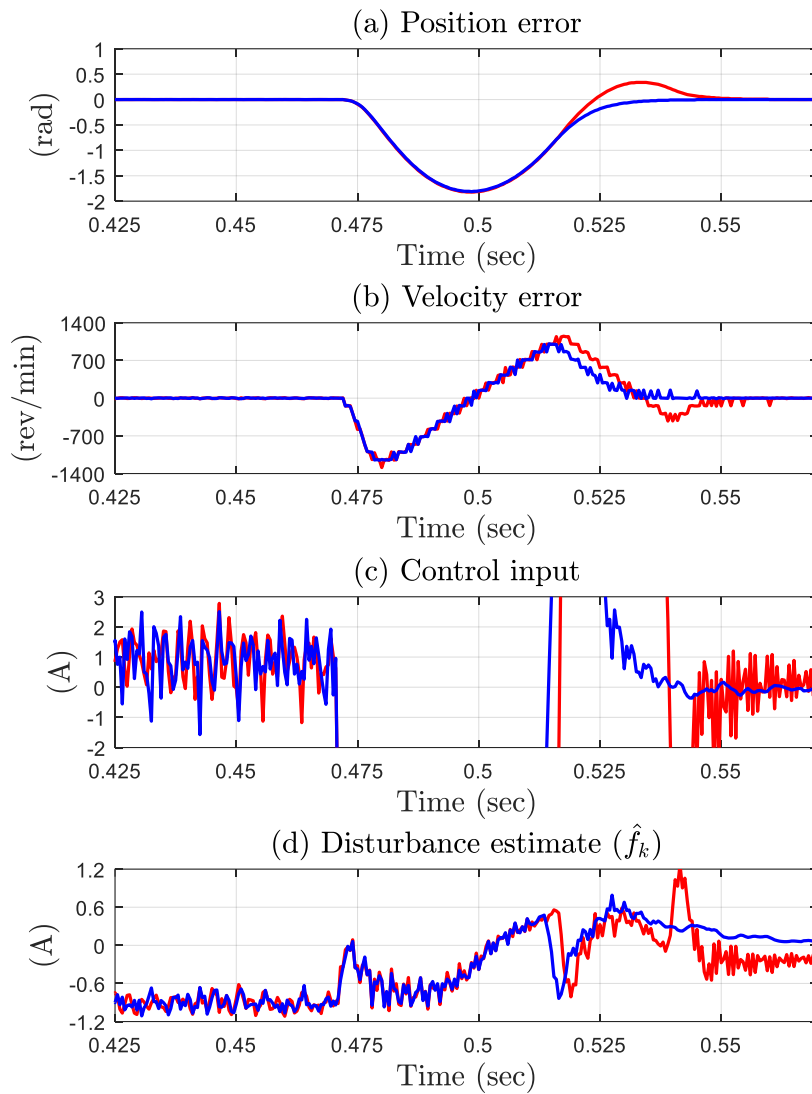


그림 2.4.5 볼스크류가 연결된 서보 시스템 실험 결과 (감속 구간 확대)

(빨간색: [56] 방법 적용, 파란색: 제안하는 이산 시간 SDA 방법 적용)

표 2.4.2 실험 결과 요약 (감속 구간 이후)

측정값	이산 시간 SD 방법 (외란 추정 식 개선) [56]	이산 시간 SDA 방법 [57]
위치 에러 첫번째 피크 (rad)	-1.8208	-1.8126
위치 에러 두번째 피크 (rad)	0.3375	0
속도 에러 첫번째 피크 (rev/min)	-322	-288
속도 에러 두번째 피크 (rev/min)	288	252
속도 에러 세번째 피크 (rev/min)	-106	0
제어 입력 포화 시간 (msec)	138	101

## 제 3 장 산업용 서보 시스템에서 이산 시간 SDA 제어 방법의 튜닝 방법

### 3.1. 제어 입력 미포화시 이산 시간 SDA 방법 제어 파라미터 튜닝 방법론[58]

본 장에는 산업용 서보 시스템인 리니어 모터 부하에서 이산 시간 SDA 제어 방법의 튜닝 방법론에 대해 정리한다. 본 절은 제어 입력 포화가 되지 않는 아래와 같은 모델은 고려한다.

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}u_k + \mathbf{B}f_k, \quad (46)$$

이때  $\mathbf{x}_k = [p_k \ v_k]^T$  는 시스템 상태 변수,  $p_k$  는 리니어 모터의 무버 위치,  $v_k$  는 무버의 속도,  $u_k$  는 전류 명령,  $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$  는 시스템

매트릭스,  $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{k_f T^2}{2M} & \frac{k_f T}{M} \end{bmatrix}^T$  는 입력 매트릭스,  $k_f$  는 힘 상수,  $M$  은

무버의 질량,  $f_k$  는 코깅력(cogging force), 마찰 등을 포함하는 매칭된 외란이다. 제어 입력 포화가 되지 않을 경우 이산 시간 SDA 방법은 이산 시간 SD 방법과 동일하며, 이산 시간 SD 방법 적용 시 시스템의 에러 다이내믹스를 분석한다. 레퍼런스 명령 식은 다음과 같다.

$$\mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} = \mathbf{A}\mathbf{x}_k^{\text{ref}} + \mathbf{B}u_k^{\text{ref}}, \quad (47)$$

여기서  $\mathbf{x}_k^{\text{ref}} = [p_k^{\text{ref}} \quad v_k^{\text{ref}}]^T$  는 레퍼런스 벡터이고,  $p_k^{\text{ref}}$  는 위치 명령,  $v_k^{\text{ref}}$  는 속도 명령,  $u_k^{\text{ref}}$  는 레퍼런스 명령의 가상의 전류값이며, 레퍼런스 명령의 가속도와 비례한다. 절환 함수는 다음과 같다.

$$s_k = \mathbf{G} \mathbf{e}_k, \quad (48)$$

여기서  $\mathbf{G} = [c \quad 1]$  는 게인 벡터,  $c$  는 슬라이딩 매니폴드 기울기를 의미한다.  $\mathbf{e}_k = [e_{1,k} \quad e_{2,k}]^T$  는 에러 벡터,  $e_{1,k} = p_k - p_k^{\text{ref}}$  는 위치 에러,  $e_{2,k} = v_k - v_k^{\text{ref}}$  는 속도 에러이다. 이산 시간 SD 방법은 앞장에서 설명한 식 (7), (8)과 같다. 이산 시간 SD 방법은 시스템 모델을 기반으로 사용자가 인가하는 레퍼런스 명령을 추종하게 하는 제어 방법이다. 만약 외란이 없다면 에러가 0 인 추종 제어를 한다. 하지만 실제 서보 시스템에는 외란이 존재하며, 제어기의 성능은 외란 입력이 인가될 때 위치 에러가 얼마나 크며, 얼마나 빨리 감소되는지로 판단할 수 있다. 이에 외란이 인가될 때 위치 에러가 어떤 과도 응답을 갖는지 분석하기 위해 에러 다이내믹스와 전달함수를 분석한다. 앞장에서 설명한 분리 법칙 및 안정도에 의해 절환 함수는 매우 작은 값으로 제어할 수 있으므로,  $|s_k| < \phi$  로 제어되는 상황에서 분석한다. 그리고 에러 다이내믹스는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mathbf{B}\mathbf{f}_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{B}\mathbf{u}_k^{\text{ref}} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{x}_k - \mathbf{B}\hat{\mathbf{f}}_k + \mathbf{B}(\mathbf{GB})^{-1} \left( \mathbf{G}\mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} - \mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{x}_k + \left( q - \frac{\eta}{\phi} \right) s_k \right) \\
&\quad + \mathbf{B}\mathbf{f}_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{B}\mathbf{u}_k^{\text{ref}} \\
&= \mathbf{A}\mathbf{e}_k + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}_k + \mathbf{B}(\mathbf{GB})^{-1} \mathbf{G} \left( -\mathbf{A}\mathbf{e}_k + \mathbf{B}\mathbf{u}_k^{\text{ref}} + \left( q - \frac{\eta}{\phi} \right) \mathbf{e}_k \right) - \mathbf{B}\mathbf{u}_k^{\text{ref}} \\
&= \left( \mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{GB})^{-1} \mathbf{G} \left( \mathbf{A} - \left( q - \frac{\eta}{\phi} \right) \mathbf{I} \right) \right) \mathbf{e}_k + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}_k \\
&= (\mathbf{A} - \mathbf{BR})\mathbf{e}_k + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{f}}_k,
\end{aligned} \tag{49}$$

여기서  $\mathbf{R} = [r_1 \ r_2] = (\mathbf{GB})^{-1} \mathbf{G} \left( \mathbf{A} - \left( q - \frac{\eta}{\phi} \right) \mathbf{I} \right)$  이고,  $r_1 = \frac{2Mc \left( 1 - q + \frac{\eta}{\phi} \right)}{k_f T (cT + 2)}$ ,

$r_2 = \frac{2M \left( cT + 1 - q + \frac{\eta}{\phi} \right)}{k_f T (cT + 2)}$  이다. 식 (49)와 (10)을 이용하여 아래와 같이

변수가 추가된(augmented) 에러 다이내믹스를 유도할 수 있다.

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{k+1} \\ \tilde{\mathbf{f}}_{k+1} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BR} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 - g \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k \\ \tilde{\mathbf{f}}_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix} (f_{k+1} - f_k), \\
e_{1,k} &= [1 \ 0 \ 0] \begin{bmatrix} \mathbf{e}_k \\ \tilde{\mathbf{f}}_k \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{50}$$

식 (50)에는 전체 시스템 에러 다이내믹스를 표현하고, 시스템 성능 출력으로 위치 에러를 출력으로 정의하였다. 이에 외란 입력에 대한 위치 에러의 전달 함수는 다음과 같다.

$$\frac{E_1(z)}{(z-1)F(z)} = [1 \ 0 \ 0] \left[ z\mathbf{I}_{3 \times 3} - \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{BR} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0}_{1 \times 2} & 1 - g \end{bmatrix} \right]^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{2 \times 1} \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{51}$$

여기서  $E_1(z)$  과  $F(z)$  는 각각 위치 에러 및 외란의  $z$  변환 값이다. 식 (51)을 전개하면, 역행렬 항 중 1 행 3 열의 항만 남게 된다. 그리고 결정자는 세 항으로 인수분해가 가능하다. 따라서 식 (51)을 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\frac{E_1(z)}{F(z)} = \frac{k_i T^2}{2J} \frac{(z+1)(z-1)}{\left(z - \frac{2-cT}{cT+2}\right)(z-(1-g))\left(z - \left(q - \frac{\eta}{\phi}\right)\right)}. \quad (52)$$

식 (52)을 통해 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 첫째, 상수 외란이 인가될 경우 위치 오차는 0 으로 수렴한다. 이는 최종값 정리(final value theorem)을 통해 아래와 같이 알 수 있다.

$$\begin{aligned} F(z) &= \frac{z}{z-1}, \\ \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E_1(z) & \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \frac{k_i T^2}{2J} \frac{(z+1)(z-1)^2}{\left(z - \frac{2-cT}{cT+2}\right)(z-(1-g))\left(z - \left(q - \frac{\eta}{\phi}\right)\right)} \frac{z}{z-1} = 0. \end{aligned} \quad (53)$$

둘째, 식 (52)는 극점 세 개를 갖고 있다. 이를  $p_1, p_2, p_3$  로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{2-cT}{cT+2}, \\ p_2 &= 1-g, \\ p_3 &= q - \frac{\eta}{\phi}. \end{aligned} \quad (54)$$

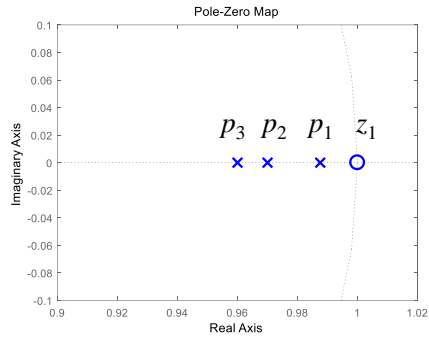
이 극점들은 0 과 1 사이의 값을 갖으며,  $z$  도메인 상에서 (1,0) 점에서 멀어질수록 빠른 응답을 보이고 위치 에러가 0 으로 빨리 수렴한다. 아래 표 3.1.1 에 해당하는 계인 세트에 대한 극점-영점 위치를 그림 3.1.1,



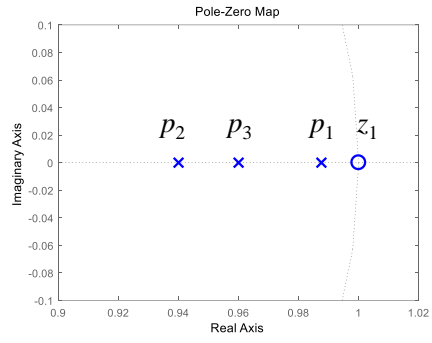
주파수 응답 결과를 그림 3.1.2 에 도시하였다. 샘플링 주기는 0.125 ms 이다.

표 3.1.1 이산 시간 SD 방법 계인 세트 및 극점 위치.

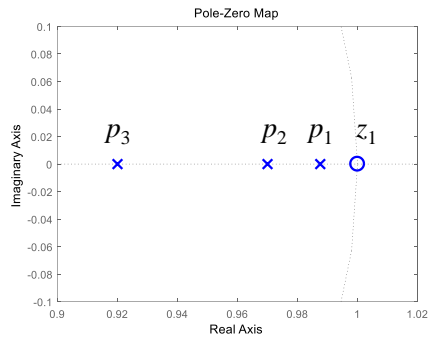
	$p_1$	$p_2$	$p_3$	$c$	$g$	$q$	$\eta$	$\phi$
Case 1	0.988	0.970	0.960	100	0.03	0.99	0.3	10
Case 2	0.988	0.940	0.960	100	0.06	0.99		
Case 3	0.988	0.970	0.930	100	0.03	0.95		
Case 4	0.969	0.940	0.960	250	0.06	0.99		



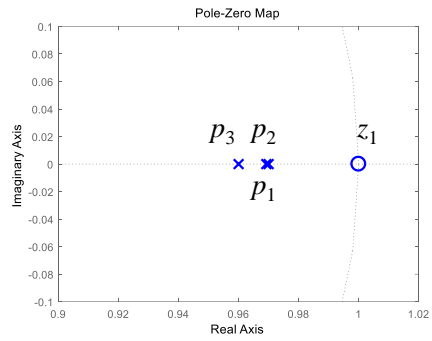
(a) Case 1



(b) Case 2



(c) Case 3



(d) Case 4

그림 3.1.1 외란 입력에 대한 위치 에러 전달함수의 극점-영점 위치.

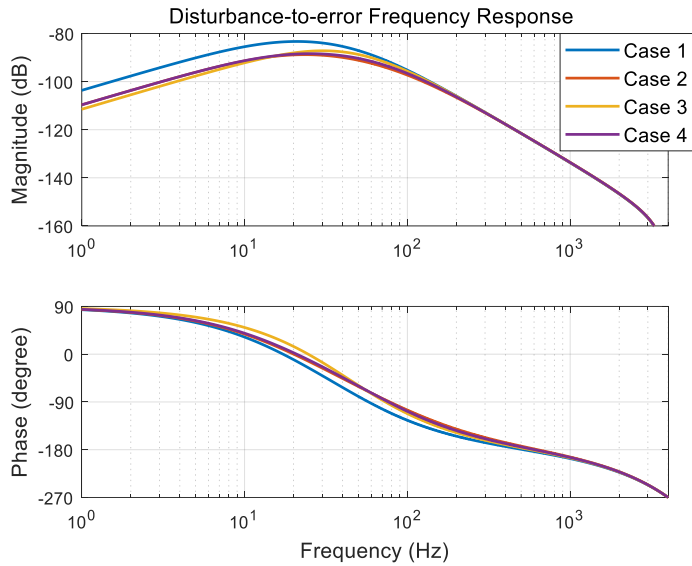


그림 3.1.2 외란 입력에 대한 위치 에러 전달함수의 주파수 응답.

즉 식 (52)과 같이 극점 세 개의 위치를 조정하여 서보 시스템에서 이산 시간 SD 방법의 성능 조절이 가능하다. 세 극점이 원점에 가까워질수록 에러를 0 으로 빠르게 수렴시킬 수 있다. 이를 위해서는  $c$  와  $g$  는 커야 하며,  $q - \frac{\eta}{\phi}$  는 작아야 한다. 그림 3.1.2 를 보면 극점을 원점에 가까이 배치할수록 외란에 대한 위치 에러의 크기가 줄어드는 것을 알 수 있다.

## 3.2. 제어 입력 포화시 이산 시간 SDA 방법 제어 파라미터 튜닝 방법론[59]

### 3.2.1. 개요

앞 절에서는 산업용 서보 시스템에서 제어 입력 포화가 발생하지 않은 경우에 이산 시간 SDA 방법의 튜닝 방법론을 설명하였다. 본 절은 제어 입력 포화시 이산 시간 SDA 방법의 튜닝 방법론에 대해 설명한다. 제어 입력 포화에도 좋은 성능을 보이기 위해서는 앞서 이산 시간 SD 방법의 제어 파라미터를 다시 튜닝할 필요가 없으며, 보조 상태 변수의 게인인  $\alpha$  만을 튜닝하면 되는 장점이 있다. 앞서 2.3.3 절에서는 등속 및 정지 레퍼런스 명령이 인가될 때, 제어 입력 포화가 발생하여도 에러 상태 변수가 안정함을 설명하였다. 하지만 과도 응답이 어떻게 나타나고 이에 대한 성능이 어떻게 나타나는지 설명하지 않았다. 만약 보조 상태 변수 게인인  $\alpha$  를 작게 설정할 경우, 제어 입력 포화가 발생하면 미포화 영역으로 진입하였다가 다시 포화 영역으로 진입하는 현상 등이 발생할 수 있고, 이에 위치 에러에 추가적인 진동이나 언더슈트 등이 나타날 수 있다. 반대로  $\alpha$  를 크게 설정할 경우 제어 입력 포화가 발생한 후 미포화 영역으로 진입시 위치 에러가 매우 천천히 수렴하는 현상이 나타날 수 있다. 이에 본 장에서는 제어 입력 포화가 발생하여도 위치

에러가 빨리 수렴하면서 추가적인 진동이 없는 보조 상태 변수의 체계적인 튜닝 방법을 제시한다.

### 3.2.2. 시뮬레이션 예시

아래는 3.1 절의 리니어 모터 시스템 모델에서  $\alpha=0.920$  인 경우와  $\alpha=0.995$  인 경우에 대한 시뮬레이션 결과이다. 나머지 상세 파라미터 조건은 표 3.2.1 에 표시하였다. 레퍼런스 명령의 목표 위치는 0.2 m, 최대 속도는 0.6 m/s, 가감속 시간은 6 ms 이다. 외란은 0.6 A 를 인가하였다. 시뮬레이션 결과는 각각 그림 3.2.1, 3.2.2 에 있다.

표 3.2.1 시뮬레이션 및 실험 파라미터 조건

파라미터	값	단위
$M$	6.44	kg
$k_f$	40.4375	N/A
$T$	0.125	msec
$u^{lim}$	3.96	A
$c$	339	-
$q$	0.9792	-
$\eta$	0.2078	-
$\varphi$	10	-
$g$	0.0416	-

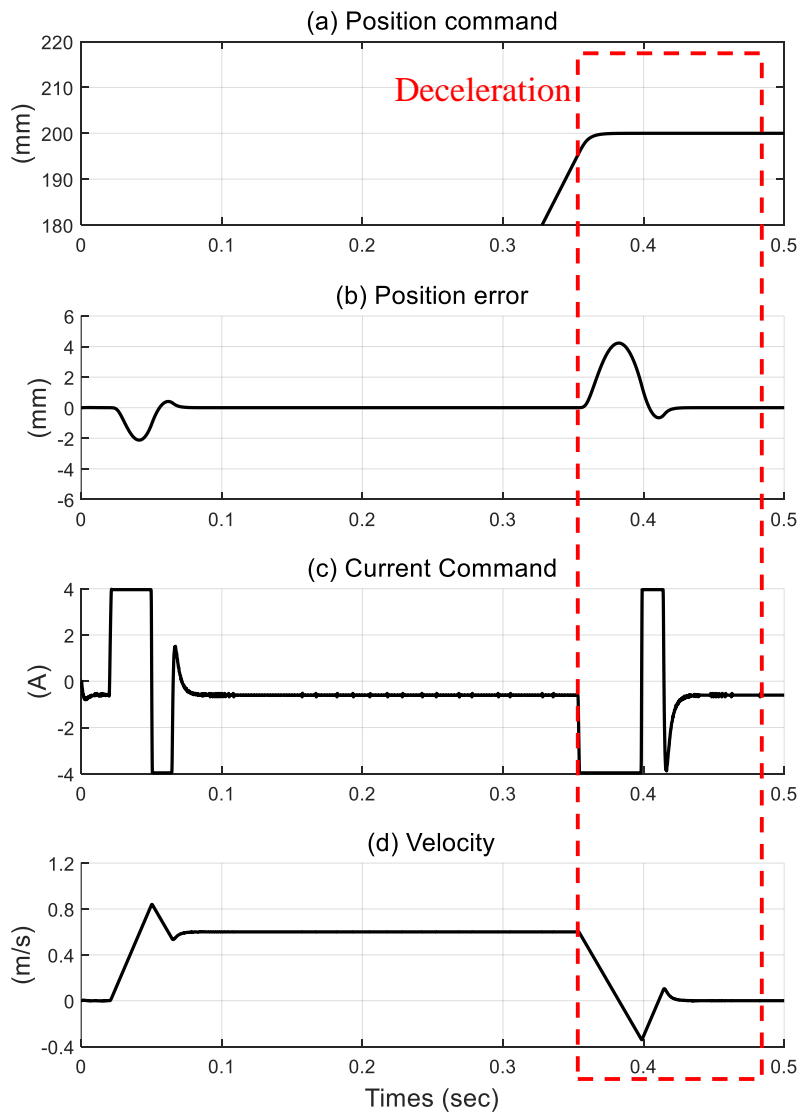


그림 3.2.1  $\alpha = 0.920$  일 때 시뮬레이션 결과

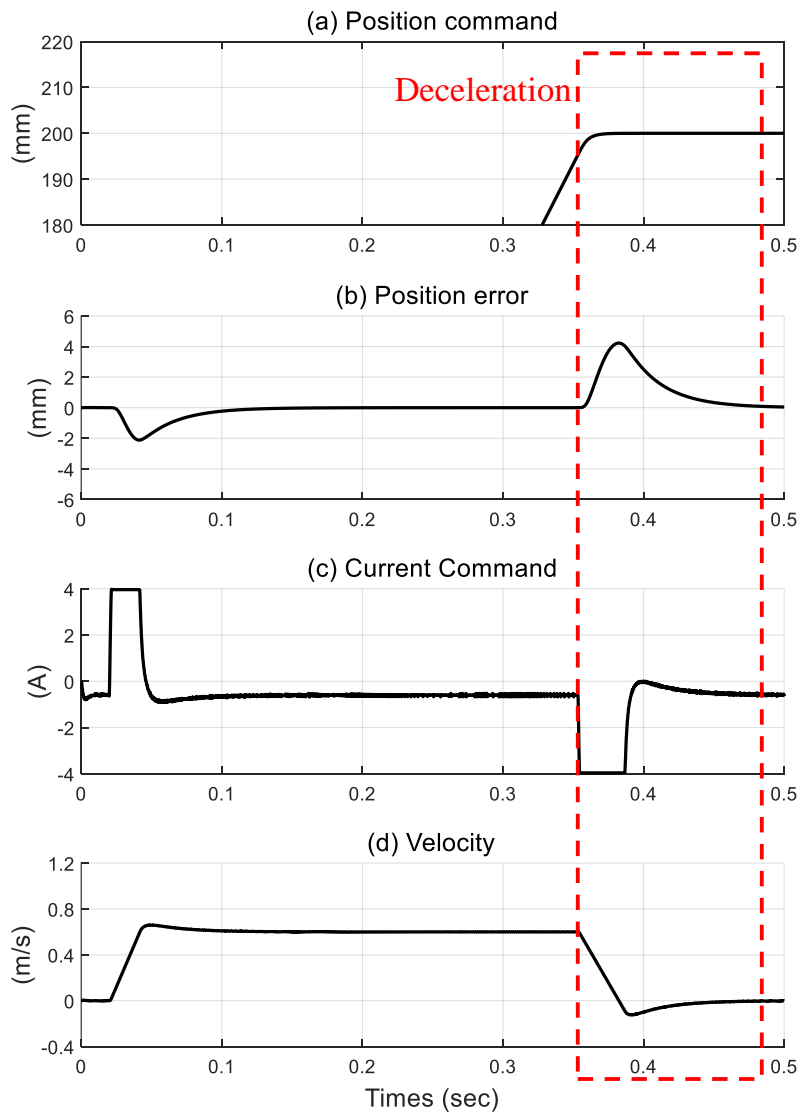


그림 3.2.2  $\alpha = 0.995$  일 때 시뮬레이션 결과



### 3.2.3. 분리된 (Decoupled) 에러 다이내믹스 분석

제어 입력 포화에도 진동이 없으면서 빠른 수렴 성능을 갖기 위해, 우선 제어 입력 포화시 에러 다이내믹스가 어떻게 나타나는지 분석한다. 제어 입력 미포화시 에러 다이내믹스는 다음과 같다.

$$\mathbf{e}_{k+1} = (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{R})\mathbf{e}_k + \mathbf{B}\tilde{f}_k, \quad (55)$$

여기서  $|s_k| < \phi$  로 제어되는 상황과 레퍼런스 명령이 식 (47)을 만족하는 상황을 가정한다. 여기서 제어 입력 포화가 발생하면 에러 다이내믹스는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}u^{\text{lim}} \text{sat}\left(\frac{u_k}{u^{\text{lim}}}\right) + \mathbf{B}f_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_k^{\text{ref}} - \mathbf{B}u_k^{\text{ref}} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{e}_k + \mathbf{B}(u^{\text{lim}} \text{sgn}(u_k) + f_k - u_k^{\text{ref}}). \end{aligned} \quad (56)$$

제어 입력 포화 상태 중에 레퍼런스 명령 식이 등속 및 정지 구간으로 진입하면 식 (56)은 아래 식과 같다.

$$\mathbf{e}_{k+1} = \mathbf{A}\mathbf{e}_k + \mathbf{B}(u^{\text{lim}} \text{sgn}(u_k) + f_k). \quad (57)$$

그리고 식 (57) 은 제 2.3.3 절에서 분석한 바와 같이 결국 안정화된다. 따라서 제어 입력은 다시 미포화 영역으로 진입하게 된다. 이때 에러 다이내믹스를 분석하기 위해 다음과 같은 추가적인 근사를 할 수 있다.

$$z_k = \sigma_k - \mathbf{G}\mathbf{e}_k \approx -\mathbf{G}\mathbf{e}_k. \quad (58)$$

식 (58)로 근사 가능한 이유는 제어 입력 포화 상황에서는  $z_k$  가 충분히 커진 상태이지만  $\sigma_k$  는 작은 값으로 제어가 되는 상황이기 때문이다. 따라서 제어 입력 미포화 영역으로 진입한 이후로 에러 다이내믹스는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1} &= \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_{k+1}^{\text{ref}} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{x}_k + \mathbf{B}u_k + \mathbf{B}\tilde{f}_k - \mathbf{A}\mathbf{x}_k^{\text{ref}} \\ &= \mathbf{A}\mathbf{e}_k + \mathbf{B}(\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1} \left[ -\mathbf{G}\mathbf{A}\mathbf{e}_k - \alpha z_k + \left( q - \frac{\eta}{\phi} \right) \sigma_k \right] + \mathbf{B}\tilde{f}_k \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{S})\mathbf{e}_k + \mathbf{B}\tilde{f}_k \\ &= \mathbf{\Phi}\mathbf{e}_k + \mathbf{B}\tilde{f}_k, \end{aligned} \quad (59)$$

여기서  $\mathbf{S} = [s_1 \quad s_2] = (\mathbf{G}\mathbf{B})^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{A} - \alpha\mathbf{I})$ ,  $\mathbf{\Phi} = \mathbf{A} - \mathbf{B}\mathbf{S}$  이다. 식 (59)와

(55)을 비교해보면 식 (55)의  $q - \frac{\eta}{\phi}$  가 식 (57)에는  $\alpha$  로 바뀐 것을 알

수 있다. 이에 식 (59)을 분리된 (decoupled) 에러 다이내믹스라 명명한다.

요약하면, 제어 입력 미포화시에는 식 (55)의 과도 응답을 갖으나, 제어

입력 포화 후 다시 풀릴 시에는 식 (59)의 과도 응답을 갖는다. 따라서

식 (59)를 잘 설계할 경우 제어 입력 포화가 한 번 발생하여도, 다시

포화되지 않으면서 위치 에러가 0 으로 빠르게 수렴할 수 있는 튜닝이

가능하다.

### 3.2.4. 위상 그림(Phase portrait) 기반 분리된 에러 다이내믹스 설계 및 보조 상태 변수 계인 튜닝 알고리즘

앞서 시뮬레이션 결과의 감속구간에서 에러 상태 변수를 위상  
그림(phase portrait)으로 표현하면 아래 그림 3.2.3, 3.2.4 와 같다.

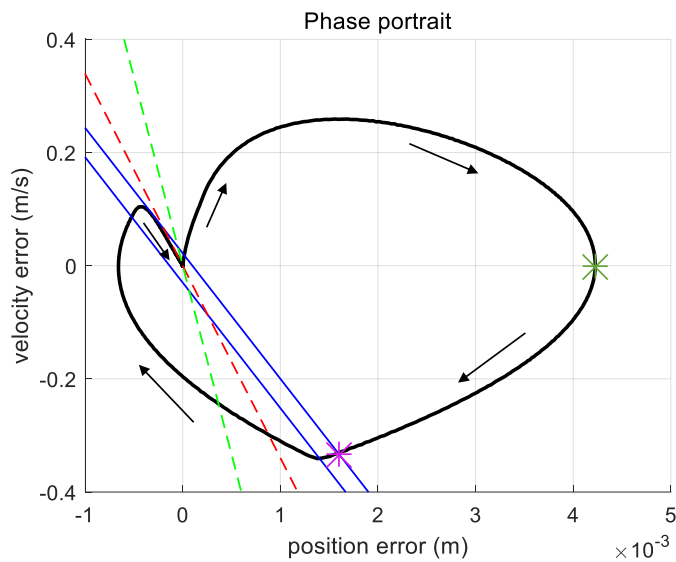


그림 3.2.3  $\alpha=0.920$  일 때 감속 구간에서 위상 그림

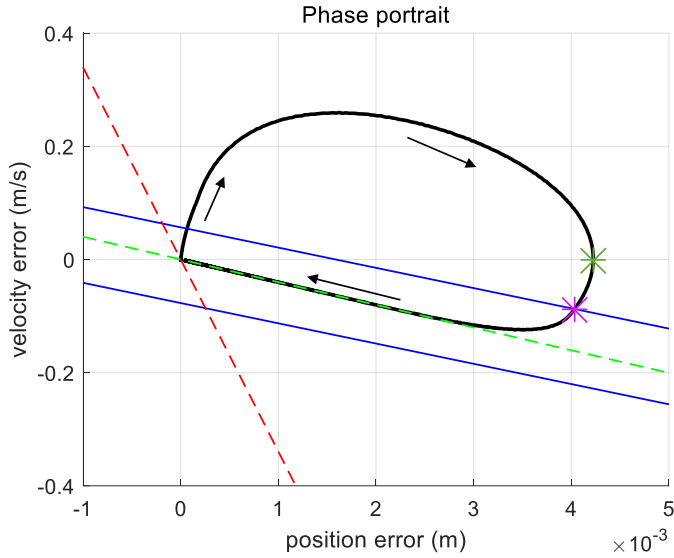


그림 3.2.4  $\alpha=0.995$ 일 때 감속 구간에서 위상 그림

그림 3.2.3 을 보면 부하가 감속할 때 음의 제어 입력 포화가 발생하며, 에러 다이내믹스는 식 (56)를 만족한다. 그리고 위치 에러와 속도 에러가 커진다. 이후 레퍼런스 명령이 등속 및 정지 조건을 만족하면 에러 다이내믹스는 식 (57)을 만족하면서 속도 에러는 줄어들고 위치 에러는 계속 커지다가 줄어든다. 이에 위치 에러는 최대값을 갖게 되고, 그 값은 초록색 점에 해당한다. 이후 위치 에러는 감소하고 속도 에러는 계속 줄어든다. 그림에는 파란색 선 두개가 있는데, 위쪽 파란색 선과 아래쪽 파란색 선은 음의 제어 입력 포화 영역, 제어 입력 미포화 영역, 양의 제어 입력 포화 영역을 구분하는 에러 상태 변수의 집합으로, 각각 아래와 같이 계산된다.

$$\begin{cases} \mathbf{e}_k | u_k = -\hat{f}_k - \mathbf{S}\mathbf{e}_k = -u^{\text{lim}}, \\ \mathbf{e}_k | u_k = -\hat{f}_k - \mathbf{S}\mathbf{e}_k = +u^{\text{lim}}, \end{cases} \quad (60)$$

이때  $\mathbf{S} = (\mathbf{GB})^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{A} - \alpha \mathbf{I})$ 이다. 그리고 상수 외란이 인가되고 있으므로 식 (60)의 외란 추정값은 해당 외란 값을 정확히 추정하고 있다. 에러 상태 변수가 위쪽 파란색 선 위의 영역에서 위쪽 파란색 선을 만나는 점 (보라색 점) 이후로는 시스템이 분리된 에러 다이내믹스인 (59)식을 만족하게 된다. 그리고 그림 3.2.3 의 경우 에러 상태 변수는 제어 입력 미포화 영역에서 아래쪽 파란색 선 밑의 영역으로 넘어가면서 양의 제어 입력 포화 영역으로 진입하게 되는 반면, 그림 3.2.4 처럼 에러 상태 변수가 제어 입력 미포화 영역에 머무르면서 원점으로 수렴하기도 한다. 제어 입력 미포화 영역에서 분리된 에러 다이내믹스에는 두개의 고유치와 각각에 해당하는 고유 벡터가 있다. 두 고유치와 두 고유 벡터는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \alpha, \quad \lambda_2 = \left(1 - c \frac{T}{2}\right) / \left(1 + c \frac{T}{2}\right), \\ \mathbf{v}_1 &= \begin{bmatrix} -\frac{T}{2} \frac{1+\alpha}{1-\alpha} & 1 \end{bmatrix}^T, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -\frac{1}{c} & 1 \end{bmatrix}^T. \end{aligned} \quad (61)$$

그림 3.2.3, 3.2.4 에서 초록색 점선은  $\mathbf{v}_1$ , 빨간색 점선은  $\mathbf{v}_2$ 를 의미한다. 그림 3.2.3 에서는 에러 상태 변수가 빨간색 점선에 수렴하고, 그림 3.2.4 에서는 에러 상태 변수가 초록색 점선에 수렴하는 것을 볼 수 있다.

특히 초록색 점선은 제어 입력 포화시에만 나타나는 고유 벡터이며, 숨겨진 (hidden) 점근선으로 볼 수 있다. 그리고 초록색 점선은 보조 상태 변수 계인을 튜닝하여 변경 가능하다.

따라서 시뮬레이션 결과와 위상 그림을 볼 때, 에러 상태 변수가 제어 입력 미포화 영역으로 진입할 때 아래 파란색 선 밑으로 넘어가지 않고 아래 파란색 선에 접하면서 초록색 점선에 접근 수렴하도록 보조 상태 변수를 튜닝할 경우 위치 에러에 추가적인 진동이 없으면서 원점으로 빠르게 수렴하게 할 수 있다. 에러 상태 변수가 아래 파란색 선에 접한다는 것은 제어 입력 미포화 영역에서 계산되는 제어 입력의 최대값이  $+u^{\text{lim}}$  을 만족하는 것을 의미한다. 제어 입력 값의 최대값 계산을 위해 다음과 같은 경우를 나누어서 고려한다. 첫째,  $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < 1$  인 경우를 보자. 이때  $c < \frac{2}{T} \frac{1-\alpha}{1+\alpha}$  이므로 그림 3.2.3 과 같이 초록색 선이 기울기가 더 가파른 경우다. 이때는 아래와 같이 대각화 (diagonalization) 및 새로운 에러 상태 변수  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$  로 좌표 변환을 수행할 수 있다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon}_{k+1} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_k, \\ \mathbf{e}_{k+1} &= \mathbf{QDQ}^{-1}\mathbf{e}_k, \end{aligned} \tag{62}$$

여기서  $\boldsymbol{\varepsilon}_k = [\varepsilon_{1,k} \quad \varepsilon_{1,2}]^T = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}_k$ ,  $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ ,  $\mathbf{Q} = [\mathbf{v}_1 \quad \mathbf{v}_2]$  이다.

그리고 보라색 점이  $\mathbf{e}_0$  이며,  $e_{1,0} > 0, e_{2,0} < 0$  임을 알 수 있다. 또한

새로운 에러 상태 변수  $\boldsymbol{\varepsilon}_k$ 의 초기값을 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^{-1} &= \frac{1}{\frac{1}{c} - \frac{T}{2} \frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ -1 & -\frac{T}{2} \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\varepsilon}_0 &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{1,0} \\ \varepsilon_{2,0} \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}_0 = \frac{1}{\frac{1}{c} - \frac{T}{2} \frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \begin{bmatrix} 1 & 1/c \\ -1 & -\frac{T}{2} \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{1,0} \\ e_{2,0} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{c} - \frac{T}{2} \frac{1+\alpha}{1-\alpha}} \begin{bmatrix} e_{1,0} + \frac{e_{2,0}}{c} \\ -e_{1,0} - \frac{T}{2} \frac{1+\alpha}{1-\alpha} \frac{e_{2,0}}{c} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (63)$$

여기서  $\mathbf{Q}^{-1}$ 의 결정자(determinant)는 양수이고,  $e_{1,0} > 0, e_{2,0} < 0$ 이며,  $e_{1,0}$ 과  $e_{2,0}$  모두 빨간색과 초록색 점선 위의 영역에 있으므로  $\varepsilon_{1,0} > 0$ ,  $\varepsilon_{2,0} < 0$  임을 알 수 있다. 따라서 제어 입력은 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} u_k &= -\hat{f}_k - \mathbf{S} \mathbf{e}_k \\ &= -\hat{f}_k + K_1 \lambda_1^k + K_2 \lambda_2^k, \end{aligned} \quad (64)$$

여기서  $K_1 = \left( \frac{T}{2} \frac{1+\alpha}{1-\alpha} s_1 - s_2 \right) \varepsilon_{1,0}, K_2 = \left( \frac{s_1}{c} - s_2 \right) \varepsilon_{2,0}, \boldsymbol{\varepsilon}_0 = [\varepsilon_{1,0} \quad \varepsilon_{1,0}]^T = \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{e}_0$

이다. 그리고  $K_1$ 과  $K_2$ 를 계산하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
K_1 &= \left\{ \frac{T}{2} \frac{1+\alpha}{1-\alpha} (\mathbf{GB})^{-1} c(1-\alpha) - (\mathbf{GB})^{-1} (cT+1-\alpha) \right\} \varepsilon_{1,0} \\
&= -(\mathbf{GB})^{-1} \left( \frac{cT}{2} + 1 \right) (1-\alpha) \varepsilon_{1,0} < 0, \\
K_2 &= \left\{ \frac{1}{c} \cdot (\mathbf{GB})^{-1} c(1-\alpha) - (\mathbf{GB})^{-1} (cT+1-\alpha) \right\} \varepsilon_{2,0} \\
&= -(\mathbf{GB})^{-1} cT \varepsilon_{2,0} > 0.
\end{aligned} \tag{65}$$

따라서  $K_1$  과  $K_2$  는 부호가 다름을 알 수 있다. 그리고  $K_1$  과  $K_2$  를 식 (64)에 대입하면 제어 입력은 항상 최대값을 갖는다는 것을 알 수 있다. 둘째,  $0 < \lambda_2 < \lambda_1 < 1$  인 경우는 그림 3.2.4 와 같고, 마찬가지로 분석할 때 제어 입력은 항상 최대값을 갖는다는 것을 알 수 있다. 마지막으로  $0 < \lambda_2 = \lambda_1 < 1$  인 경우는 조르단 형태(Jordan form)로 분석을 유사하게 할 수 있다. 따라서 제어 입력은 최대값을 갖고 그 값은 유일하다. 따라서 에러 상태 변수가 목표 위치에 빠르게 수렴하면서 추가적인 진동이 발생하지 않도록 설계할 수 있다. 그 방법은 다음과 같다.

*단계 1.* 주어진 계인 파라미터 및 레퍼런스 명령에 대하여 서보 시스템을 구동시킨다. 만약 제어 입력 포화가 발생한다면 위치 에러의 최대값을 측정한다.

*단계 2.* 1 단계에서 측정한 위치 에러 최대값을 이용하여 식 (60)의 위 파란색 선과 에러 상태 변수의 경로와 만나는 보라색 점을 계산한다.



단계 3. 보라색 점과 분리된 에러 다이내믹스인 식 (59)을 이용하여 제어 입력의 최대값을 계산한다.

단계 4. 제어 입력의 최대값이  $+u^{\text{lim}}$  보다 작으면 보조 상태 변수의 게인  $\alpha$  값을 조금 낮춘다. 반대로 제어 입력의 최대값이  $+u^{\text{lim}}$  보다 크면 보조 상태 변수의 게인  $\alpha$  값을 조금 키운다. 위 과정들을 반복하여 제어 입력의 최대값이  $+u^{\text{lim}}$  에 근사하면 알고리즘을 종료한다.

위 과정에서 단계 2 이후로는 오프라인(offline) 상에서 쉽게 계산이 가능하다. 앞서 시뮬레이션 조건에서 제안하는 튜닝 알고리즘을 적용한 결과, 보조 상태 변수의 게인은  $\alpha=0.973$  이 계산되었다. 이에 대한 시뮬레이션 결과와 위상 그림은 각각 아래 그림 3.2.5 과 3.2.6 에 도시하였다.

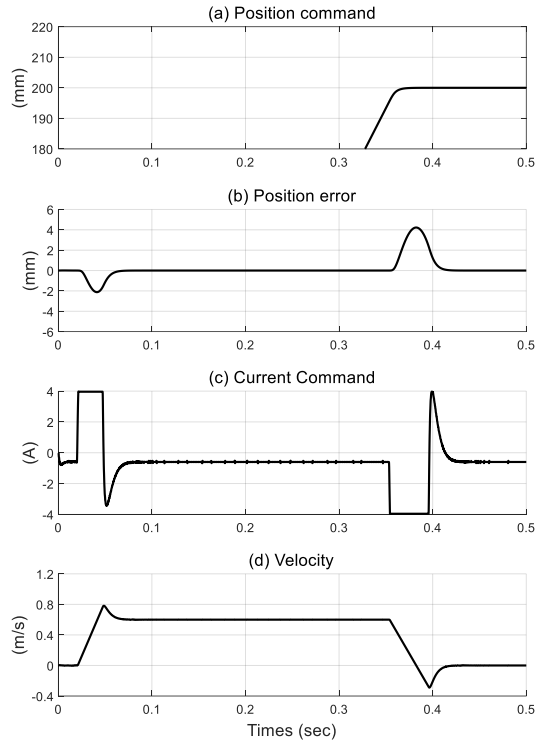


그림 3.2.5 제안하는 튜닝 알고리즘 적용 후 시뮬레이션 결과 ( $\alpha = 0.973$ )

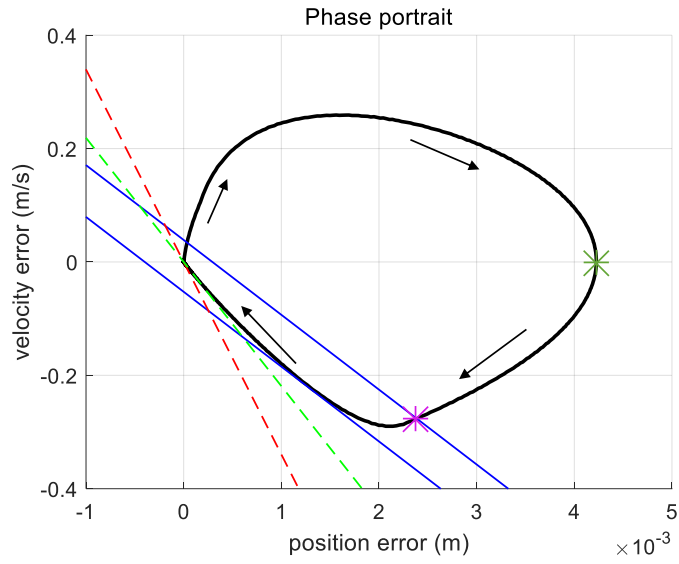


그림 3.2.6 제안하는 튜닝 알고리즘 적용 후 에러 상태 변수의 위상  
그림 ( $\alpha=0.973$ )

### 3.2.5. 실험 결과

산업용 리니어 모터 시스템에서 제안하는 이산 시간 SDA 방법의 튜닝 방법 성능을 검토하였다. 서보 시스템 구성은 다음과 같다.

- 400W 서보 모터 및 23bit 엔코더 (RS Automation, Korea)
- 400W 서보 드라이브 (RS Automation, Korea)
- 리니어 모터 (DCT Co., Ltd, Korea)
- 제어 소프트웨어 (RS Automation, Korea)

시스템 파라미터 및 제어 파라미터 조건은 표 3.2.1 과 동일하다. 리니어 모터 셋업은 그림 3.2.7 과 같다. 레퍼런스 명령의 목표 위치는 0.2 m, 최대 속도는 0.6 m/s, 가감속 시간은 6 ms 이다. 레퍼런스 프로파일은 그림 3.2.8(a)에 도시하였다. 레퍼런스 명령이 목표 위치에 도달한 순간부터 위치 에러가  $\pm 10 \mu\text{m}$  이내로 진입할 때까지 걸리는 시간을 기준으로 하는 택타임을 측정하였다. 외란이 상수가 아니지만 전류 제한값보다 크기가 충분히 작기 때문에 알고리즘에서  $\hat{f}_k = 0$  로 근사하였다. 실험 결과는 그림 3.2.8 과 같다. 빨간색 선은  $\alpha = 0.920$  을 적용할 때 실험 결과이며, 위치 및 속도에 언더 슈트가 나타난다. 초록색 선은  $\alpha = 0.995$  을 적용할 때 실험 결과이며, 위치나 속도에 언더 슈트가 나타나지 않지만 수렴 속도가 매우 느리다. 반면 제안하는 튜닝

방법론을 적용한 경우가 파란색 선이며,  $\alpha=0.972$  로 계산되었다. 실험 결과, 위치 에러 및 속도가 충분히 빠르게 수렴하면서도 추가적인 진동이 없다. 결국, 제안하는 이산 시간 SDA 방법의 튜닝 방법론을 적용하여 사용자가 원하는 성능을 확보할 수 있었다.

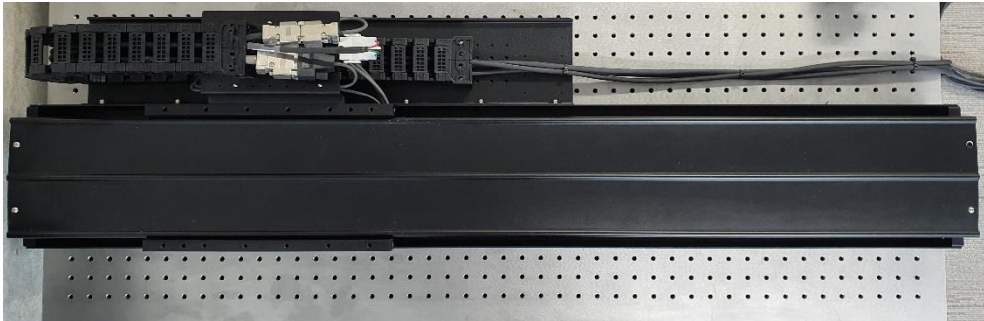


그림 3.2.7 실험 셋업 (리니어 모터)

표 3.2.2 실험 결과 요약 (목표 위치에서 측정)

	오버 슈트 (mm)	언더 슈트 (mm)	택타임 (ms)
$\alpha = 0.972$	3.4815	0.5496	46
$\alpha = 0.995$	3.5297	0.0079	186
$\alpha = 0.972$	3.4891	0.0021	40

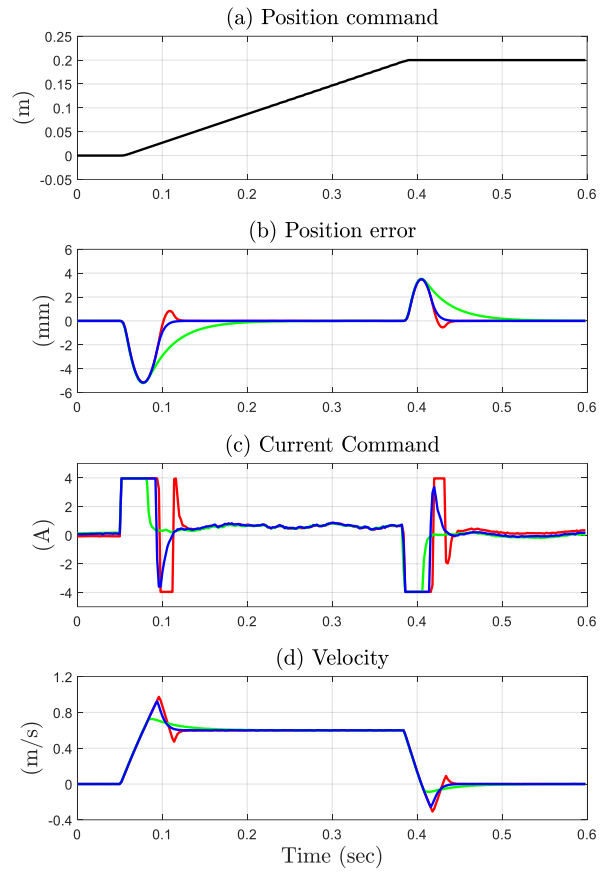


그림 3.2.1 실험 결과 (빨간색 선:  $\alpha=0.920$ , 초록색 선:  $\alpha=0.995$ , 파란색 선:  $\alpha=0.972$ )

## 제 4 장 결 론

본 논문에서는 산업용 서보 시스템에서 외란 및 제어 입력 포화에 강인한 이산 시간 슬라이딩 모드 제어 방법을 제안하였다. 기 개발된 이산 시간 SD 방법에 보조 상태 변수를 결합하여 제어 입력 포화에도 분리 법칙이 보존되는 새로운 제어 방법을 개발하였다. 또한 등속 또는 정지 레퍼런스 명령이 인가될 때, 에러 상태 변수의 안정도를 보였다. 그리고 산업용 서보 시스템 실험 결과 제어 입력 포화에도 안정적인 성능을 보였다. 그리고 제안하는 이산 시간 SDA 방법의 튜닝 방법론에 제시하였다. 제어 입력 미포화시에는 외란 입력에 대한 위치 에러의 전달함수를 구성하고, 극점의 위치를 변경시킴으로써 위치 수렴 성능을 조절할 수 있음을 보였다. 또한 제어 입력 포화가 발생하면 분리된 에러 다이내믹스가 나타나고, 위상 그림을 통해 보조 상태 변수의 튜닝 알고리즘을 제안하였다. 제안하는 튜닝 방법론은 산업용 리니어 모터에서 제어 입력 포화에도 안정적인 성능을 보였다. 제안하는 이산 시간 SDA 방법은 구조가 간단하면서도 고성능 및 강인성을 갖추고 있어서, 산업용 제어 시스템에 널리 사용될 가능성이 있을 것으로 기대된다.

## 참고문헌

- [1] 과제 보고서, 스마트머신/협업로봇 유연대응을 위한 로봇모션 제어 솔루션(S2563339), 중소벤처기업부, 월드 클래스 (WC300) 사업.
- [2] S. Vukosavić and M. Stojić, "Suppression of torsional oscillations in a high-performance speed servo drive," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 45, no. 1, pp. 108-117, Feb. 1998.
- [3] Y. Hori, H. Sawada and Y. Chun, "Slow Resonance Ratio Control for Vibration Suppression and Disturbance Rejection in Torsional System," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 46, no. 1, pp. 162-168, Feb. 1999.
- [4] Q. Li, Q. Xu and R. Wu, "Low-frequency Vibration Suppression Control in a Two-mass System by Using a Torque Feed-forward and Disturbance Torque Observer," *Journal of Power Electronics*, vol. 16, no. 1, pp. 249-258, Jan. 2016.
- [5] W. Bahn, T. Kim, S. Lee, and D. Cho, "Resonant frequency estimation for adaptive notch filters in industrial servo systems," *Mechatronics*, vol. 41, pp. 45-57, Feb. 2017.
- [6] Yoon, J., Bahn, W., Kim, T., Han, J., Lee, S., and Cho, D. "Discrete derivative method for adaptive notch filter-based frequency estimators," *Int. J. Control Autom. Syst.*, vol. 15, no. 2, pp. 668-679, Mar. 2017.
- [7] Kim, T., Han, J., Oh, T., Kim, Y., Lee, S., and Cho, D. "A new accurate discretization method for high-frequency component mechatronics systems," *Mechatronics*, vol. 62, Oct. 2019.
- [8] Oh, T. H., Han, J. S., Kim, Y. S., Yang, D. Y., Lee, S. H., and Cho, D. I., "Deep RL Based Notch Filter Design Method for Complex Industrial Servo Systems" *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol.



18, pp. 2983-2992, Dec. 2020.

- [9] D. Wu, F. Guo, and Y. Wang, "Reset Integral-Derivative Control for HDD Servo Systems," *IEEE Trans. Control Sys. Technol.*, vol. 15, no. 1, pp. 161–167, Jan. 2007.
- [10] H. Lim, T. Kim, J. Han, T. Oh, Y. Kim, S. Lee, and D. Cho, "Improving Overshoot Performance of Discrete-time Sliding Mode Control with Decoupled Disturbance Compensator for Ramp-Type Disturbance," *In proc. of the 19th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS 2019)*, Jeju, Korea, Oct. 15-18, 2019.
- [11] Q. Yin, Y. Shen, H. Li, J. Wan, D. Wang, F. Liu, X. Kong, B. He, and T. Yan, "Fuzzy PID Motion Control Based on Extended State Observer for AUV," *2019 IEEE Underwater Technology (UT)*, Kaohsiung, Taiwan, Apr. 16-19, 2019.
- [12] A. Hace, K. Jezernik and A. Šabanovi'c, "SMC With Disturbance Observer for a Linear Belt Drive," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 54, no. 6, pp. 3402-3412, Dec. 2007.
- [13] C. Li, B. Yao and Q. Wang, "Modeling and Synchronization Control of a Dual Drive Industrial Gantry Stage," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 23, no. 6, pp. 2940-2951, Dec. 2018.
- [14] R. Chen, L. Yan, Z. Jiao, and Y. Shang, "Dynamic modeling and analysis of flexible H-type gantry stage," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 439, no. 20, pp. 144-155, Jan. 2019.
- [15] C. Chen, S. Chen and L, Chen, "Disturbance Observer-Based Modeling and Parameter Identification for Synchronous Dual-Drive Ball Screw Gantry Stage," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 24, no. 6, pp. 2839-2849, Dec. 2019.
- [16] S. Yang and Y. Deng, "Observer-based inertial identification for auto-tuning servo motor drives," *14<sup>th</sup> IAS Annual Meeting. Conference Record of the*

2005 *Industry Applications Conference*, 2005, Kowloon, Hong Kong, China, Oct. 2-6, 2005.

- [17] C. Lian, F. Xiao, S. Gao, and J. Liu, "Load Torque and Moment of Inertia Identification for Permanent Magnet Synchronous Motor Drives Based on Sliding Mode Observer," *IEEE Trans. Power Electron.*, vol. 34, no. 6, pp. 5675-5683, Jun. 2019.
- [18] R. Lorenz, K. Patten, "High-resolution velocity estimation for all-digital, AC servo drives," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 27, no. 4, pp. 701-705, Jul./Aug. 1991.
- [19] S. Yang and S. Ke, "Performance evaluation of a velocity observer for accurate velocity estimation of servo motor drives," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 36, no. 1, pp. 98-104, Jan./Feb. 2000.
- [20] H. Zhu and T. Sugie, "Velocity Estimation of Motion Systems Based on Low-Resolution Encoders," *J. Dyn. Sys., Meas., Control*, vol. 135, no. 1, 011006, Oct. 2012.
- [21] T. Shi, Z. Wang and C. Xia, "Speed Measurement Error Suppression for PMSM Control System Using Self-Adaption Kalman Observer," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 62, no. 5, pp. 2753-2763, May 2015.
- [22] Z. Zheng and M. Feroskhan, "Path following of a surface vessel with prescribed performance in the presence of input saturation and external disturbances," *IEEE/ASME Trans. Mechatron.*, vol. 22, no. 6, pp. 2564–2575, Sep. 2017.
- [23] L. Sun and Z. Zheng, "Disturbance-observer-based robust backstepping attitude stabilization of spacecraft under input saturation and measurement uncertainty," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 64, no. 10, pp. 7994–8002, Oct. 2017.
- [24] L. Sun, W. Huo and Z. Jiao, "Disturbance observer-based robust relative pose control for spacecraft rendezvous and proximity operations under

- input saturation,” *IEEE Trans. Aerosp. Electron. Syst.*, vol. 54, no. 4, pp. 1605–1617, Aug. 2018.
- [25] L. Sun, W. Huo and Z. Jiao, “Adaptive backstepping control of spacecraft rendezvous and proximity operations with input saturation and full-state constraint,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 64, no. 1, pp. 480–492, Sep. 2017.
- [26] V. Utkin, "Variable structure systems with sliding modes," *IEEE Trans. Autom. Contr.*, Vol. 22, pp. 212-222.1977.
- [27] S. Spurgeon, "Sliding mode control : a tutorial," *In Proceedings of the 2014 European Control Conference (ECC)*, 2014, pp. 2272-2277.
- [28] M. Basin, P. Yu and Y. Shtessel, “Hypersonic missile adaptive sliding mode control using finite-and fixed-time observers,” *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 65, no. 1, pp. 930–941, Jan. 2018.
- [29] H. Li and D. Yao, “Adaptive sliding-mode control of Markov jump nonlinear systems with actuator faults,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol.62, no. 4, pp. 1933–1939, Apr. 2017.
- [30] J. Li, Q. Zhang, X. Yan and S. Spurgeon, “Robust stabilization of T–S fuzzy stochastic descriptor systems via integral sliding modes,” *IEEE Trans. Cybern.*, vol. 48, no. 9, pp. 2736–2749, Sep. 2018.
- [31] B. Jiang, H. R. Karimi, Y. Kao, and C. Gao, “A novel robust fuzzy integral sliding mode control for nonlinear semi-Markovian jump T–S fuzzy systems,” *IEEE Trans. Fuzzy Syst.*, vol. 26, no. 6, pp. 3594–3604, Dec. 2018.
- [32] L. Derafa, A. Benallegue and L. Fridman, “Super twisting control algorithm for the attitude tracking of a four rotors UAV,” *Journal of the Franklin Institute*, vol. 349, no. 2, pp. 685–699, Mar. 2012.
- [33] A. Chalanga, S. Kamal, L. M. Fridman, B. Bandyopadhyay, and J. A.

- Moreno, "Implementation of super-twisting control: super-twisting and higher order sliding-mode observer-based approaches," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 63, no. 6, pp.3677–3685, Jun. 2016.
- [34] J. Liu et al., "Extended state observer-based sliding-mode control for three-phase power converters," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 64, no. 1, pp. 22–31, Jan. 2017.
- [35] H. Oza and S. Spurgeon, "Novel environment for the practical implementation of higher order sliding mode controllers," *In Proc. of the 52nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Dec. 2013, pp. 4254–4259.
- [36] A. Saghafinia, H. Ping, M. Uddin, and K. Gaeid, "Adaptive Fuzzy Sliding-Mode Control Into Chattering-Free IM Drive," *IEEE Trans. Ind. Appl.*, vol. 51, no. 1, pp. 692-701, Jan./Feb. 2015.
- [37] P. Leśniewski and A. Bartoszewicz, "Hyperbolic tangent based switching reaching law for discrete time sliding mode control of dynamical systems," *in Proc. of the 2015 International Workshop on Recent Advances in Sliding Modes (RASMS)*, Istanbul, Turkey, Apr. 9-11, 2015.
- [38] Q. Xu, "Precision Motion Control of Piezoelectric Nanopositioning Stage With Chattering-Free Adaptive Sliding Mode Control," *IEEE Trans. Autom. Sci. Eng.*, vol. 14, no. 1, pp. 238-248, Jan. 2017.
- [39] Y. Zhang and Q. Xu, "Adaptive Sliding Mode Control With Parameter Estimation and Kalman Filter for Precision Motion Control of a Piezo-Driven Microgripper," *IEEE Trans. Control Sys. Technol.*, vol. 25, no. 2, pp. 728-735, Mar. 2017.
- [40] S. Chen, H. Chiang, T. Liu, and C. Chang, "Precision Motion Control of Permanent Magnet Linear Synchronous Motors Using Adaptive Fuzzy Fractional-Order Sliding-Mode Control," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 24, no. 2, pp. 741-752, Apr. 2019.

- [41] X. Wu, P. Jin, T. Zou, Z. Qi, H. Xiao, and P. Lou, "Backstepping Trajectory Tracking Based on Fuzzy Sliding Mode Control for Differential Mobile Robots," *Journal of Intelligent & Robotic Systems*, vol. 96, pp. 109-121, Jan. 2019.
- [42] Y. Dote and R. G. Hoft, "Microprocessor based sliding mode controller for dc motor drives", in *Proc. Industrial Application Society Annual Meeting*, Cincinnati, OH, 1980.
- [43] S. Z. Sarpturk, Y. Istefanopulos, and O. Kaynak, "On the stability of discrete-time sliding mode control systems," *IEEE Trans. Automat. Contr.*, vol. 32, no. 10, pp. 930-932, 1987.
- [44] W. Gao, Y. Wang, and A. Homaifa, "Discrete-time variable structure control systems," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 42, no. 2, pp.117-122, 1995.
- [45] Y. Eun, K. Kim, J. Kim, and D. Cho, "Discrete-time variable structure controller with a decoupled disturbance compensator and its application to a CNC servomechanism," *IEEE Trans. Control Sys. Technol.*, vol. 7, no. 4, pp. 414-423, Jul. 1999.
- [46] Y. Eun and D. Cho, "Robustness of multivariable discrete-time variable structure control," *International Journal of Control*, vol. 72, no. 12, pp. 1106-1115, Nov. 1999.
- [47] J. Kim and D. Cho, "Discrete-time variable structure control using recursive switching function," in *Proceedings of the 2000 American Control Conference (ACC)*, 2000, pp. 1113-1117.
- [48] J. Kim, S. Oh, D. Cho, and J. Hedrick, "Robust Discrete-Time Variable Structure Control Methods," *J. Dyn. Sys., Meas., Control.*, vol. 122, pp. 766-775, Dec. 2000.
- [49] K. Zhang, H. Su, K. Zhuang, and J. Chu, "Comments on "Discrete-Time Variable Structure Controller With a Decoupled Disturbance Compensator and Its Application to a CNC Servomechanism"," *IEEE Trans. Control Sys.*

*Technol.*, vol. 11, no. 1, Jan. 2003.

- [50] W. Bahn, S. Lee, S. Lee, and D. Cho, "Tuningless servo controller using variable structure control and disturbance compensation," in *2014 IEEE International Conference on Industrial Technology (ICIT)*, 2014, pp. 96-99.
- [51] W. Bahn, S. Lee, S. Lee, and D. Cho, "Control of 400 watt belt-drive and 400 watt ball-screw servo systems using discrete-time variable structure control," In *Proc. of the 19th World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC WC)*, Aug. 2014, pp. 8378–8383.
- [52] J. Han, et al., "Frequency-domain design method of discrete-time sliding mode control with generalized decoupled disturbance compensator for industrial servo systems," In *12th IFAC Symposium on Robot Control (SYROCO)*, Aug. 2018, pp. 27–30.
- [53] C. Milosavljevic, B. Perunicic-Drazenovic and B. Veselic, "Discrete-time velocity servo system design using sliding mode control approach with disturbance compensation," *IEEE Trans. Ind. Inf.*, vol. 9, no. 2, pp. 920–927, May 2013.
- [54] L. Ma, D. Zhao and S. Spurgeon, "Disturbance observer based discrete time sliding mode control for a continuous stirred tank reactor," In *Proc. of the 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*, Jul. 2018, pp. 372–377.
- [55] X. Wang, H. Su, X. Wang, and G. Chen, "Fully Distributed Event-Triggered Semiglobal Consensus of Multi-agent Systems With Input Saturation," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 64, no. 6, pp. 5055-5064, 2017.
- [56] J. Han, W. Bahn, T. Kim, J. Park, S. Lee, S. Lee, and D. Cho, "Decoupled disturbance compensation under control saturation with discrete-time variable structure control method in industrial servo systems," In *Proc. of the 16th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, Oct. 2016, pp. 16–19.

- [57] J. Han, T. Kim, T. Oh, S. Lee, and D. Cho, "Effective disturbance compensation method under control saturation in discrete-time sliding mode control," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 67, no. 7, pp. 5696-5707, Jul. 2020.
- [58] J. Han, T. Kim, T. Oh, Y. Kim, J. Lee, S. Kim, S. Lee, S. Lee, and D. Cho, "Error-dynamics-based performance shaping methodology for discrete-time sliding mode control with disturbance observer," in *Proc. of the 8th IFAC Symposium on Mechatronic Systems (Mechatronics 2019)*, Sep. 2019, pp. 460-464.
- [59] J. Han, T. Oh, Y. Kim, H. Lim, D. Yang, S. Lee, and D. Cho, "Performance optimization methodology for discrete-time sliding mode control in industrial servo systems under control input saturation and disturbance," In *Proc. of the 1st Virtual World Congress of the International Federation of Automatic Control (IFAC-V 2020)*, Jul. 2020.
- [60] J. Han, T. Oh, Y. Kim, H. Lim, D. Yang, S. Lee, and D. Cho, " Velocity control of servo systems under control input saturation and disturbance using robust discrete-time sliding mode control method," In *Proc. of the 20th International Conference on Control, Automation and Systems (ICCAS)*, Oct. 2020, pp. 1034–1038.
- [61] H. Li, M. Le, Z. Gong, and W. Lin, "Motion Profile Design to Reduce Residual Vibration of High-Speed Positioning Stages," *IEEE/ASME Trans. Mechatronics*, vol. 14, no. 2, pp. 264-269, Apr. 2009.
- [62] H. Chen, H. Mu and Y. Zhu, "Real-time generation of trapezoidal velocity profile for minimum energy consumption and zero residual vibration in servomotor systems," *2016 American Control Conference (ACC)*, Boston, MA, USA, Jul. 6-8, 2016.
- [63] H. Yoon, S. Chung, H. Kang, and M. Hwang, "Trapezoidal Motion Profile to Suppress Residual Vibration of Flexible Object Moved by Robot,"

*electronics*, vol. 8, no. 30, Jan. 2019.

- [64] V. Montalvo, A. Estévez-Bén, J. Rodríguez-Reséndiz, G. Macias-Bobadilla, J. Mendiola-Santibañez, and K. Camarillo-Gómez, "FPGA-Based Architecture for Sensing Power Consumption on Parabolic and Trapezoidal Motion Profiles," *electronics*, vol.9, 1301, Aug. 2020.
- [65] N. Wang, S. Su, M. Han, and W. Chen, "Backpropagating constraints-based trajectory tracking control of a quadrotor with constrained actuator dynamics and complex unknowns," *IEEE Trans. Syst., Man, Cybern. B, Cybern: Systems*, vol. 49, no. 7, pp. 1322–1337, May 2018.
- [66] M. Massimetti, L. Zaccarian, T. Hu, and A. Teel, "LMI-based linear anti-windup for discrete time linear control systems," *In Proc. of the 45th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, Dec. 2006, pp. 6173–6178.
- [67] G. Grimm, J. Hatfield, I. Postlethwaite, A. Teel, M. Turner, and L. Zaccarian, (2003), "Antiwindup for stable linear systems with input saturation: an LMI-based synthesis," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 48, no. 9, pp. 1509–1525, Sep. 2003.
- [68] A. Syaichu-Rohman and R. Middleton, "Anti-windup schemes for discrete time systems: An LMI-based design," *In Proc. of the 5th Asian Control Conference (ACC)*, Jul. 2004, pp. 554–561.
- [69] R. Cui, X. Zhang and D. Cui, "Adaptive sliding-mode attitude control for autonomous underwater vehicles with input nonlinearities," *Ocean Eng.*, vol. 123, no. 1, pp. 45–54, Sep. 2016.
- [70] Z. Jiang and Y. Wang, "A converse Lyapunov theorem for discrete-time systems with disturbances," *Syst. Control Lett.*, vol. 45, no. 1, pp. 49–58, Jan. 2002.
- [71] S. P. Boyd, L. El Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1994.





Abstract

# Robust Discrete–time Sliding Mode Control Method for Disturbance and Control Input Saturation and Its Application to Industrial Servo Systems

HAN Jiseok

Electrical and Computer Engineering Major

Department of Electrical and Computer Engineering

The Graduate School

Seoul National University

This paper presents a discrete–time sliding mode controller for industrial servo systems subject to disturbance and control input saturation. The discrete–time Sliding mode control with Decoupled disturbance compensator (SD) method preserves the separation principle, which is a decoupled property of the sliding mode dynamics and disturbance estimation error dynamics. However, when control input saturation occurs, the separation principle does not hold. In this paper, a new discrete–time sliding mode controller is proposed, which is called the discrete–time Sliding mode control with Decoupled disturbance compensator and Auxiliary state (SDA). The

proposed method preserves the separation principle even in the presence of control input saturation. Furthermore, the stability of the error state is analyzed with a given restricted reference profile. The design methodology for the discrete-time SDA is also proposed in industrial servo systems. When the control input saturation does not occur, the performance can be adjusted by locating the poles of the disturbance-to-error transfer function. When the control input saturation occurs, the error dynamics are changed, which are called the decoupled error dynamics. These dynamics can be designed in the way that the error state converges to zero fast and does not exhibit additional oscillations. The proposed method and tuning methodology are applied into an industrial ball-screw system and a linear motor system. The experimental results show the high-performance and robustness to the disturbance and control input saturation. The proposed method is expected to provide high practicability in various industrial servo applications.

**Keywords:** Industrial servo systems, discrete-time sliding mode control, decoupled disturbance compensator, auxiliary state, separation principle, control input saturation.

**Student number:** 2015-22815