Newsvendor 모형과 예측 세분화

남 익 현*

《目 次》

Ⅰ. 들어가며

신문배달 소년이 신문에 대한 수요의 불확실성 하에서 최적의 신문구매량을 결정하는 과정을 다루는 것을 Newsvendor 모형이라고 부른다. Newsvendor model의 기본전제는 신문의 수요가 불확실하다는 것이며, 이러한 불확실성은 신문 수요량을 확률변수 D와 확률밀도함수 f(누적 확률분포함수는 F)로 표현함으로써 반영할 수 있다. 신문배달 소년이 신문업체로부터 신문을 구입하는 원가는 한 부당 c원이고, 이 신문을 일반인에게 한 부당 p원을 받고 판매한다고 하자. 하루가 지나면 신문의 가치는 급격히 떨어지므로, 저녁까지 판매하지 못한 신문은 한 부당 s원을 받고 고물상에게 넘긴다고 하자.

본 논문에서는 널리 알려진 Newsvendor model에 대해 요약하고, 이를 개선할 수 있는 방안에 대해 논의해보기로 한다. 개선을 위한 방법으로 추가적인 정보를 이용한 수요 예측의 세분화를 중점적으로 살펴본다. 또한 구체적인 예제를 통해 수요 예측의 세분화가 목적함수 값을 증가시킬 수 있음을 보이기로 한다.

Ⅱ. Newsvendor model의 구성

신문배달 소년이 q를 주문하고 신문수요가 D일 경우 신문배달 소년의 이익을 나타내는 식은 다

* 서울대학교 경영대학 교수

음과 같이 표시할 수 있다.

$$p\min\{D,q\}-cq+s\max\{q-D,0\}$$

첫 항은 신문팔이 소년이 신문을 소비자에게 판매함으로써 얻는 수익을 말한다. 실제 신문 판매량은 $\min\{D,q\}$ 인데, 이는 신문구입량과 수요량 중에 작은 값에 의해 실제 판매량이 결정됨을 나타내는 것이다. 두 번째 항은 신문 구입원가를 나타내는 것이다. 마지막 항은 신문이 판매되지 않아 재고로 남은 경우 고물상에게 판매하여 얻는 추가 수익을 나타내는 것이다. $\max\{q-D,0\}$ 이 미판매되어 고물상에게 넘어가는 신문 수량을 나타낸다. 신문배달 소년은 이러한 이익함수의 기댓값을 최대화하려고 할 것이다. 따라서 위 이익식의 기댓값은 다음과 같이 표현할 수 있다. 여기서 우리는 분석의 편의상 신문의 수요를 나타내는 D가 연속형 확률변수라고 가정하고 확률밀도함수를 $f(t)$로 표시하자.

$$R(q)=E[p\min\{D,q\}-cq+s\max\{q-D,0\}]=\int_0^\infty[p\min\{t,q\}-cq+s\max\{q-t,0\}]f(t)dt$$

적분으로 표현된 기댓값은 다음과 같이 정리할 수 있다. 특히 min과 max 항은 적분의 구간을 도입함으로써 제거할 수 있다.

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty[p\min\{t,q\}-cq+s\max\{q-t,0\}]f(t)dt\\&=\int_0^q ptf(t)dt+\int_q^\infty pqf(t)dt-cq+\int_0^q s(q-t)f(t)dt.\end{aligned}$$

적분구간에 따라 항을 정리하고 f의 누적 확률밀도함수가 F임을 이용하여
(즉, $\int_0^q f(t)dt=F(q)$) 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$R(q)=\int_0^q(p-s)tf(t)dt+\int_q^\infty pqf(t)dt-cq+sqF(q)$$

신문배달 소년의 문제는 의사결정 변수인 주문량 q를 결정하여, 목적함수인 이익 R(q)를 최대화하는 문제임을 알 수 있다. 이는 $Max_{q\geq 0}R(q)$로 표현할 수 있다.

Ⅲ. Newsvendor model의 최적해

$Max_{q \geq 0} R(q)$로 표현되는 Newsvendor model을 풀기 위해서 우리는 미분에서 배운 내용을 2단계로 적용하고자 한다. 우선 R(q)의 극값을 구하고 다음에 R(q)가 오목함수(concave function)임을 보임으로써 우리가 앞서 구한 극값이 최대값임을 증명하는 것이다.

미분에서 배운 바에 따라 함수의 극값을 구하기 위해서는 미분을 구하여 0으로 놓고 방정식을 풀어야 한다. 따라서 일차적으로 R(q)를 q에 대해 미분을 하기로 하자. 그런데 미분의 대상이 되는 R(q)식을 살펴보면 적분구간이 상수가 아니라 q의 함수가 포함되어 있음을 알 수 있다. 따라서 R(q)를 미분함에 있어 Leibniz rule을 적용하여야 한다.

$R(q) = \int_0^q (p-s)tf(t)dt + \int_q^\infty pqf(t)dt - cq + sqF(q)$ 를 구성하는 항들 중에서 적분으로 표현된 두 개의 항에 Leibniz rule을 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dq}\int_0^q (p-s)tf(t)dt = (p-s)qf(q)$$

$$\frac{d}{dq}\int_q^\infty pqf(t)dt = -pqf(q) + \int_q^\infty \frac{\partial}{\partial q} pqf(t)dt = -pqf(q) + \int_q^\infty pf(t)dt = -pqf(q) + p[1-F(q)].$$

여기에 연쇄법칙(chain rule)을 적용하면 $\frac{d}{dq}qF(q) = F(q) + qf(q)$을 구할 수 있고 이를 이용하면 R(q)의 미분을 최종적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R'(q) = (p-s)qf(q) - pqf(q) + p[1-F(q)] - c + sF(q) + sqf(q) = p - c + (s-p)F(q)$$

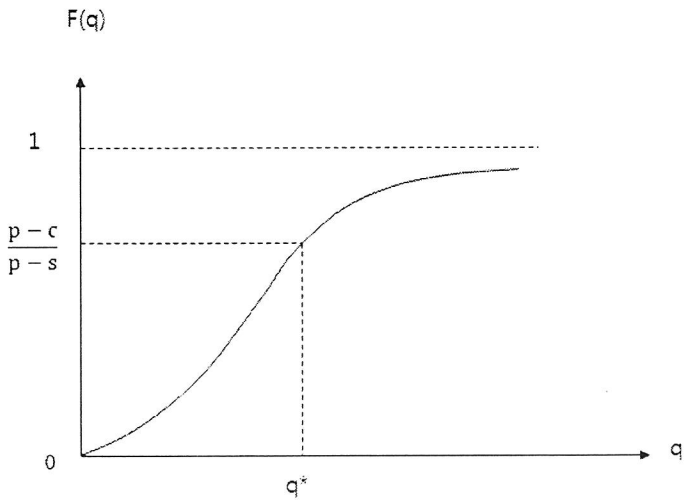
극값을 구하기 위해 $R'(q) = p - c + (s-p)F(q) = 0$을 풀면 $F(q) = \frac{p-c}{p-s}$이 되고 극값은 다음과 같이 표현될 수 있다. 여기서 F^{-1}는 F의 역함수를 나타내는 것이다.

$$q^* - F^{-1}(\frac{p-c}{p-s})$$

우리는 $R(q)$ 함수가 q^*에서 극값을 갖게 됨을 알게 되었는데, 이제 2단계로 이익함수 R(q)가 오목함수임을 보이기로 하자. 오목함수 여부를 알기 위해서 2차 미분을 하면 우리는 $R''(q) = (s-p)f(q) < 0$을 알 수 있고 이로부터 R(q)는 오목함수임을 알 수 있다. $R''(q) < 0$라는 부등식은 s<p이라는 가정으로부터 도출된다. 따라서 R(q)가 오목함수이기 때문에 $R'(q) = 0$

으로부터 구한 q^*는 극값이자 최대값이 됨을 알 수 있다.

$F(x) = \int_0^x f(t)dt$는 누적확률밀도함수로 증가함수이고, x가 증가함에 따라 1에 근사하게 된다. (즉, $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$). 따라서 최적주문량 q^*는 다음의 그래프에서처럼 구할 수 있다.



〈그림 1〉 최적주문량의 도출

Ⅳ. 재고비용

여기서 Newsvendor model의 최적해 q^*와 관련하여 두 가지 개념의 비용을 살펴보기로 하자. 단위당 재고초과비용(overage cost)은 신문배달 소년이 신문을 실제 수요보다 한 부 초과하여 보유할 경우 발생하는 비용을 말한다. 신문을 실제 수요보다 초과하여 보유할 경우 발생하는 손해는 신문을 c원에 구입하여 고물상에게 s원에 판매하게 되므로 초과보유하는 신문 한 단위당 c-s의 손해가 발생하게 되며 이러한 초과비용을 c_o로 표시하기로 하자.

$$c_o = c - s$$

반면에 단위당 재고부족비용(underage cost)은 신문배달 소년이 신문을 실제 수요보다 한 부 부족하게 보유할 경우 발생하는 비용을 말한다. 신문을 실제 수요보다 부족하게 보유할 경우 발생하는 손해는 신문을 c원에 구입하여 손님에게 p원에 판매하여 얻을 수 있는 이익인 p-c를 얻지 못

하게 되는 기회비용이며 이를 c_u로 표시하기로 하자. 만약 재고부족에 따라 소비자의 불신에 따른 비용이 추가로 발생한다면 이를 c_u에 추가하여 반영하면 될 것이다.

$$c_u = p - c$$

우리가 극값을 구하기 위해 다룬 $F(q) = \frac{p-c}{p-s}$ 에서 최적해의 기준값이 되는 수치는 $\frac{p-c}{p-s} = \frac{c_u}{c_u + c_o} = r$임을 알 수 있고, 이러한 비율 수치 r을 critical ratio 라고 부른다. 우리는 $r = \frac{c_u}{c_u + c_o}$의 표현으로부터 몇 가지 의미를 도출할 수 있다. 우선 $p > c > s$라는 가정으로부터 $c_u > 0, c_o > 0$이므로 $0 < r < 1$를 알 수 있고 따라서 누적분포함수로부터 $F^{-1}(r) = q^*$을 구할 수 있다. 그리고 c_u가 증가함에 따라 r은 1에 다가가고 이 경우 F가 증가함수이므로 최적해인 q^*가 커지게 된다. c_u가 증가한다는 것은 재고부족의 경우 기회비용이 커진다는 것을 의미하고 따라서 최적의 주문량은 커져야 할 것으로 우리의 직관과 일치된다. 반면에 c_o가 증가함에 따라 r은 0에 다가가고 이 경우 q^*가 작아지게 된다. c_o가 증가한다는 것은 재고가 발생할 경우 비용이 커진다는 것을 말하며 이에 따라 최적주문량은 감소하여야 할 것이다.

V. 최적목적함수값

이번 절에서는 신문팔이 소년이 최적의 주문량 q^*만큼 주문을 실행할 경우 발생하는 이익의 기댓값인 최적목적함수값 $R(q^*)$을 보다 구체적으로 구해보기로 하자.

$$R(q^*) = \int_0^{q^*} (p-s)tf(t)dt + \int_{q^*}^{\infty} pq^* f(t)dt - cq^* + sq^* F(q^*)$$

이 식에서 부분적분(integration by parts)을 적용하면 $\int tf(t)dt = tF(t) - \int F(t)dt$을 알 수 있고 $F(q^*) = r$을 이용한다면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R(q^*) = (p-s)[q^* r - \int_0^{q^*} F(t)dt] + pq^*(1-r) + (rs-c)q^* = (p-c)q^* - (p-s)\int_0^{q^*} F(t)dt$$

$$= (p-c)F^{-1}(r) - (p-s)\int_0^{F^{-1}(r)} F(t)dt \quad \cdots\cdots \text{식(1)}$$

Ⅵ. 예측 세분화를 통한 Newsvendor model의 개선

우리는 여기서 전통적인 Newsvendor model을 개선하여 그 적용효과를 높일 수 있는 방안을 검토해 보기로 하자. 전통적인 Newsvendor model에서는 수요가 불확실한 상황을 다루는데 이러한 수요의 분포가 단일의 분포로 표현된다는 것이다. 그런데 현실적으로 수요의 분포라는 것은 여러 개의 세분화된 수요의 확률적인 결합으로 나타나는 경우가 많다.

Newsvendor 기본 모형을 개선하게 된 동기에 대해 일상적인 사례를 들어 설명하기로 하자. 동네 편의점 주인이 매일 어묵을 주문하여 손님이 편의점에서 간단히 국물과 함께 간식으로 먹을 수 있도록 한다고 하자. 준비한 어묵은 유통 기한이 하루라고 가정할 경우 어묵에 대한 최적 주문량의 결정은 전형적인 Newsvendor model이 된다. 편의점 주인이 전통적인 Newsvendor model을 적용하는 과정을 살펴보기로 하자. 편의점 주인은 지금까지 경험한 어묵에 대한 수요를 조사하여 이를 바탕으로 확률밀도함수 f를 추정할 것이다. 그리고 어묵의 구매원가, 판매가격, 남은 어묵의 가치 등을 고려하여 앞서 논의한 방식에 따라 최적 주문량을 결정하여 매일 최적주문량을 주문할 것이다.

그런데 여기서 개선하려는 것은 수요에 대한 확률밀도함수 f에 관한 것이다. 확률적 수요가 추가적인 정보에 의해 세분화되고, 세분화된 수요에 대한 예측력이 보다 개선되는 경우가 있다. 우리가 다룬 어묵의 경우 판매 당일의 기온에 의해 수요가 영향을 받을 것으로 예상할 수 있다. 추운 겨울날에는 어묵에 대한 수요는 증가할 것이며 반면에 따뜻한 날에는 수요가 급감할 것이다. 우리가 Newsvendor model에서 다루었던 수요에 대한 확률밀도함수는 이러한 기온별 차이를 종합적으로 고려한 하나의 함수로 통합되어 나타나는 것이지만 기온을 매개변수로 수요에 대한 확률밀도함수를 세분화하여 적용하는 것이 보다 예측력에 있어 우수할 것이다.

우리가 다루고 있는 어묵의 사례와 관련하여 매개변수로 사용할 기온을 나타내는 확률변수를 Y라고 하자. 기온을 나타내는 확률변수 Y의 확률밀도함수를 g라고 하자. 그러면 Y=y일 때 수요를 나타내는 확률변수 D=x일 확률은 조건부 확률(conditional probability)이 되며 이를 표현하는 조건부 확률밀도함수(conditional p.d.f.)를 $f(x|y)$로 나타내기로 하자. 조건부 확률은 2 개의 확률적 사건이 동시 확률분포(joint probability)를 이룰 때, 하나의 사건이 주어질 경우 다른 사건이 발생할 확률을 나타내는 것이다. 우리의 예에서는 조건부확률을 나타내는 확률밀도함수는 $f(x|y)=\dfrac{h(x,y)}{g(y)}$을 알 수 있다. 여기서 $h(x,y)$는 수요와 기온에 대한 동시 확률밀도함수(joint p.d.f.)를 2변수 함수로 표시한 것이다. 기온을 고려하지 않고 구했던 종합적인 수요에 대한 확률

밀도함수 f는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x,y)dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x|y)g(y)dy \quad \cdots\cdots \text{식 (2)}$$

f는 h에 대한 수요 x의 주변확률밀도함수(marginal p.d.f.)라고 할 수 있다. 또한 이는 기온 y가 수요에 미치는 효과를 통합하여 나타난 최종수요의 확률밀도함수라고 할 수 있다. 기온 Y 가 변화할 경우, 각각의 기온에 대해서 수요의 조건부 확률밀도함수가 존재한다. 기온을 고려하지 않고 수요의 확률만을 고려할 경우에는 수요 D의 확률밀도함수 f는 기온 Y의 변화에 따라 변동하는 수요의 조건부 확률의 기댓값으로 표현할 수 있다. 식 (2)는 우리가 사용하는 수요에 대한 확률밀도함수 f가 세분화를 위해 도입되는 확률변수 Y의 조건부 확률의 총합으로 구성된다는 것을 말한다.

특정 기온의 상황별로 주문을 하는 경우 Y=y 일 때 전통적인 Newsvendor model에서와 동일한 논리로 최적주문량은 $q^*(y) = F_{Y=y}^{-1}(r)$이 되고 평균주문량은 $\int_{-\infty}^{\infty} q^*(y)g(y)dy$이 될 것이다. 이와 같이 확률밀도함수를 세분화하여 보다 정교한 주문량을 산정하기 위해서는 역시 보다 상세한 정보의 수집이 전제되어야 한다. 우리가 다룬 경우에서는 조건부 확률밀도함수인 $f(x|y)$에 대한 정보를 수집하여야 한다. 기존의 전통 newsvendor model에서는 기온이 미치는 영향에 대한 중간과정과는 무관하게 최종 수요에 대한 확률밀도함수인 f만을 구하면 충분하였다. 현실적으로 중요한 것은 보다 세분화된 상황에 따른 수요의 확률밀도함수인 $f(x|y)$를 구하는 것과 함께, 수요에 대한 차별화 효과가 현저한 상황변수인 Y를 적절하게 설정하는 것이다. 상황별 변수의 값이 수요에 미치는 영향이 차별화되지 않을 경우 개선효과는 없다고 할 수 있다.

식 (2)가 성립하여 세분화가 이루어질 경우 각 상황별로 구분하여 주문하는 것이 보다 정교한 최적화로써 전통적인 방식의 최적화의 경우보다 기댓값에 있어 우수할 것이다. 이를 다음의 정리로 표현하기로 하자.

〔Theorem 1〕

식 (2)가 성립할 경우 각 상황별로 구분하여 최적주문량($q^*(y) = F_{Y=y}^{-1}(r)$)을 결정하는 것이 종합적인 확률밀도함수 f만을 고려한 전통적인 방식에서 구한 최적주문량($q^* = F^{-1}(r)$)보다 목적함수의 기댓값에 있어 우수하다.

〔증명〕

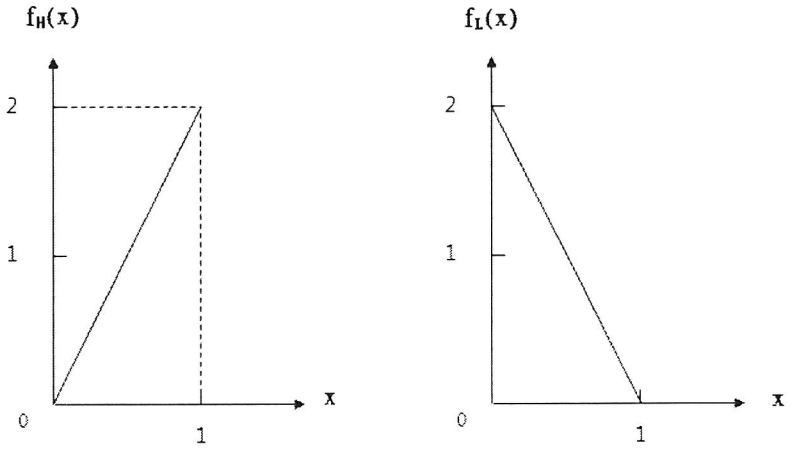
$R(q^*(y)|y) \geq R(q^*|y)\ \forall y$

$$\int [\max_q R(q|y)]g(y)dy = \int R(q^*(y)|y)g(y)dy \geq \max_q \int R(q|y)g(y)dy = \int R(q^*|y)g(y)dy = R(q^*)$$

〔Theorem 1〕을 다음 절에서 예제를 통해 보여주기로 하자.

Ⅶ. 예제

Newsvendor model에서 신문에 대한 수요가 두 가지 상황에 따라 달라진다고 하자. 국민적 관심사가 있는 경우 신문에 대한 수요가 확률적으로 늘어나며, 반대로 일상적인 경우 신문에 대한 수요가 확률적으로 적어진다고 한다. 구체적으로 고수요 상황에서 신문수요에 대한 확률밀도함수는 $f_H(x) = 2x, x \in [0,1]$이고, 저수요 상황에서는 $f_L(x) = 2-2x, x \in [0,1]$라고 하자.

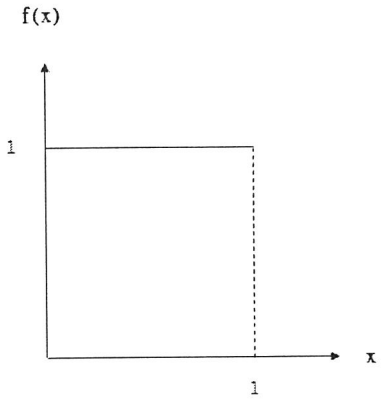


〈그림 2〉 상황별 수요에 대한 확률밀도함수

고수요 상황과 저수요 상황은 각각 1/2의 확률로 발생한다고 하고 이를 사전확률(prior probability)이라고 부르자. 우리가 다루는 f_H, f_L은 상황에 따른 조건부 확률밀도함수라고 할 수 있으며 고수요와 저수요의 상황에 따라 신문 수요시장을 시기적으로 나누어 분석하는 것으로 볼 수 있다. 전통적인 Newsvendor model에서는 고수요와 저수요 상황으로 구분하여 분석하는 것이 아니라 전체적인 신문수요를 다루는 것이다. 전통적 모형에서 다루는 것처럼 수요상황을 고려하지 않는 경우

의 신문수요에 대한 확률분포는 조건부 확률로 볼 수 있는 f_H, f_L에 사전확률을 적용하여 구해진다. 즉 다음의 식에 의해 f가 결정 된다: $f(x) = f_H(x)*0.5 + f_L(x)*0.5 = 1, x \in [0,1]$

즉 우리의 예에서는 종합적인 신문수요는 〔0,1〕에서 균등분포(uniform distribution)를 따르는 것을 알 수 있다. 우리의 예제에서 필요한 자료로 p=4, c=2, s=1이라고 상정하자.



〈그림 3〉 균등 확률밀도함수

전통적인 newsvendor model에서는 수요의 확률밀도함수로 f만을 조사하게 된다. 우리의 예제에서는 이러한 수요의 확률밀도함수로 균등분포를 얻은 것이다. 반면에 전통적인 newsvendor model을 개선하기 위해 제안된 본 논문의 내용에 따르면 상황변수를 추가로 도입하여 상황별 수요에 대한 확률변수에 대한 자료를 수집하여야 한다. 우리의 예제에서는 두 가지 상황에 따라 수요의 확률밀도함수인 f_H, f_L을 구하여야 한다. 따라서 전통적인 Newsvendor model을 개선하기 위해서는 세분화된 상황별로 수요에 대한 확률밀도함수를 수집하는 것이 필요하다.

이 예제에서 고수요와 저수요의 상황에 따라 최적 주문량이 어떻게 달라지며 수요상황을 고려하지 않은 경우와 비교하여 최적목적함수값에서 어떠한 차이가 발생하는지 살펴보기로 하자.

〔풀이〕

먼저 p=4, c=2, s=1로부터 r=2/3을 구할 수 있다. 또한 각각의 누적분포함수를 구해보면

$$F_H(x) = x^2, F_L(x) = 2x - x^2, F(x) = x$$

임을 알 수 있다.

그리고 $q^* = F^{-1}(r)$ 로부터 다음과 같이 고수요와 저수요의 상황별, 그리고 종합적 수요에 대해 최적주문량을 구할 수 있다.

$$q_H^* = \sqrt{2/3}, q_L^* = 1 - \frac{1}{\sqrt{3}}, q^* = 2/3$$

상황별 주문량의 기댓값은 종합적 수요의 최적 주문량에 비해 작은 것으로 계산된다.

$$0.5q_H^* + 0.5q_L^* = 0.5\sqrt{2/3} + 0.5(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}) < q^* = 2/3$$

이를 바탕으로 앞서 구한 6절의 식 (*)에 따라 고수요 및 저수요의 상황별, 종합적 수요의 경우에 해당하는 최적목적함수값을 구할 수 있다.

$$R(q_H^*) = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}, R(q_L^*) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}, R(q^*) = \frac{2}{3}$$

고수요와 저수요의 상황에 맞추어 주문량을 달리 하면서 최적화를 한 경우의 기댓값은 $0.5R(q_H^*) + 0.5R(q_L^*) = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}}$ 이 됨을 알 수 있다. 종합적 수요를 고려한 경우의 최적목적함수값은 2/3으로 유도되었다. 우리는 간단한 계산을 통해 $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{1}{3}} > \frac{2}{3}$ 를 알 수 있으며 이는 상황별로 최적주문량을 조절하는 것이 종합적인 수요만을 고려하는 경우보다 기대값 측면에서 유리함을 나타낸다.

Ⅷ. 맺음말

본 연구는 Newsvendor model에 대해 소개하고, 기존의 모형을 개선할 수 있는 방안에 대해서 살펴보았다. 주요한 개선방향으로 추가적인 정보를 이용하여 수요예측을 세분화하고 이를 적용하여 최적화를 실행할 경우, 기업의 이익이 증가할 수 있음을 보였다.

그런데, 추가적인 정보를 이용한 수요예측의 세분화의 적용에 있어서 몇 가지 유의사항이 존재한다. 예를 들어, 추가적인 정보의 획득에는 비용이 존재하고, 정보획득 비용이 수요 예측 세분화를 통한 이익보다 클 경우에는 수요예측을 세분화하지 않는 것이 기업의 이익에 도움을 줄 수 있다. 또한, 본문에서 논의된 바와 같이, 수요에 대한 차별화 효과가 현저한 상황변수를 설정하여 최

적화를 실행할 경우에 수요 예측 세분화로 인한 효과가 크게 나타날 수 있다.

이와 같이 정보획득 비용이나 차별화 효과가 현저한 변수의 설정 등을 고려하여 수요 세분화를 실행한다면, 기존의 모형에서 제시된 방안보다 기대이익이 훨씬 향상된다고 할 수 있다. 이러한 연구결과를 바탕으로 볼 때, 경영자들은 항상 수요의 차별화에 효과가 큰 상황변수를 탐색할 필요성이 있으며, 수요예측 세분화와 정보획득비용 간의 상관관계에 대해서 고려해야 한다고 사료된다.

참 고 문 헌

1. Hogg, R. V. & Craig, A. T. 1995. Introduction to Mathematical Statistics. Prentice Hall.
2. Hopp, W. J. & Spearman, M. L. 2008. Factory Physics, McGraw-Hill.
3. Nahmias, S. 1993. Production and Operations Analysis, IRWIN.
4. Protter, M. H. & Morrey, C. B. 1977. A First Course in Real Analysis, Springer-Verlag.