교육학석사학위논문

학교수학의 수열 개념에 대한 분석적 고찰

2021년 8월

서울대학교 대학원

수학교육과

박 제 호

학교수학의 수열 개념에 대한 분석적 고찰

지도교수 최 영 기

이 논문을 교육학석사학위논문으로 제출함
2021년 6월

서울대학교 대학원
수학교육과
박 제 호

박제호의 석사학위논문을 인준함
2021년 7월

위 원 장 윤 상 균

부위원장 이 경 화

위 원 최 영 기

국문초록

수열과 관련된 내용은 최근 학습량 경감이라는 기조 하에 교육과정 개정을 거치며 축소, 변경되었다. 2015 개정교육과정에서는 미적분의 도입방식과 관련한 변화가 있었고 구분구적법의 삭제는 수열 단원 구성에 실제적인 영향을 미칠 수 있으나, 수열과 관련한 내용 구성은 이전 교육과정과 차이가 없었다. 특히 교육과정 문서에서는 수열 단원에서 다양한 규칙성에 대한 경험을 강조하고 있었는데, 지속적인 내용 감축을 거친 수열 단원 구성이나 교과서의 구성이 이를 뒷받침 할 수 있는지에 대한 의문을 제기할 수 있다. 한편 국내의 선행 연구에서 수열, 급수, 극한은 교수학습 연구의 소재로 활발하게 다루어지고 있었지만 수열의 교육적 가치에 초점을 맞추어 단원 구성의 적정성 등을 다룬 연구는 찾기 어렵다. 따라서 학교수학의 수열 개념이 본래의 가치를 잃어가고 있다는 문제의식 하에서, 수열이 왜 교육내용으로서 선정되었는지를 포함한 수열의 교육적 가치에 대한 연구가 필요하다.

본 연구는 이러한 문제의식 및 필요성과 함께, '학교수학에서 수열을 왜 가르치고 배우는가?' 라는 질문에서 출발하여 학교수학의 수열 개념에 대해 분석적으로 고찰하였고, 학교수학에서 수열의 위치를 재정립하는 논의의 장을 여는 것을 목적으로 한다. 역사적 분석을 통해 수열의 교육적 가치를 탐색하고, 국내외 교육과정에 가치가 어떻게 반영되어 있는지 교육과정 비교분석을 진행하였다. 또한 가치 반영의 결과물 중 하나인 '학습목적'에 주목하였고, 교육과정에 진술된 '학습목적' 하에 교과서가 어떻게 구성되어 있는지 교과서 분석을 진행하였다. 그 결과는 다음과 같다.

역사적 배경을 바탕으로 본 연구에서는 수열의 교육적 가치로 '패턴과 일반화의 경험', '극한과 무한급수의 기초개념'을 수열의 교육적 가치로 제안하고, 각각을 '수열의 대수적 가치', '수열의 해석적 가치'라 한다. 2009 개정교육과정은 수열의 대수적 가치보다는 수열의 해석적 가치를 지향하고 있으며, 2015 개정교육과정에

서는 학습목적의 역할을 하는 '도입글'을 통하여 수열의 대수적 가치가 주로 반영되어 있다. 이 때, 2015 개정교육과정이 2009 개정교육과정과 학습 내용 구성 및 성취기준을 그대로 유지하고 있다는 점과, 미적분의 도입방식이 수열과 관련이 없도록 변화했음에도 '수열의 극한'과 관련하여 "미분과 적분의 기초 개념"이라는 진술을 유지하고 있다는 점을 2015 개정교육과정에 나타난 수열과 관련한 혼란이라고 할 수 있다.

한편 미적분 도입방식이 우리나라와 같은 일본, 핀란드, 영국에서는 미적분 도입에서 수열의 역할을 약화한 대신 우리나라와 달리 수열의 대수적 가치를 학습내용에 중점적으로 반영하고 있으며, 우리나라의 교육과정에서는 여러 가지 규칙성과 관련한 내용이 상대적으로 부족하다. 또한 우리나라와는 달리, 일본, 영국, 핀란드의 교육과정에서는 혼란이 나타난 부분을 찾기 어렵다. 국내 교과서를 통하여 학습목적에서 강조한 자연 및 사회현상의 규칙성과 다양한 규칙성을 경험할 기회가 부족하고, 학생들이 교과서 문제에서 마주하는 규칙성은 대다수가 맥락이 없거나 자연 및 사회현상이라고 하기는 어려운 인위적인 맥락을 기반으로 하고 있다.

분석을 바탕으로 본 연구에서는 학교수학의 수열 개념에 대한 시사점을 도출하였다. 첫째, 수열의 가치와 더불어 일본, 핀란드, 영국 등의 해외 사례를 참고하여 수열 단원의 재구성에 대한 논의가 이루어질 필요가 있다. 둘째, 수열의 가치와 수학교육의 목적을 고려하여 학습목적으로 해석될 수 있는 교육과정 문서의 내용을 재진술하는 방향에 대해 논의가 이루어질 필요가 있다.

앞으로도 학교수학의 개념들이 어떻게 교육내용으로 선정되었는지, 따라서 해당 개념의 교육적 가치로 어떤 것들이 제안될 수 있는지에 대한 후속연구가 필요할 것이다.

주요어 : 수열, 수열의 역사, 교육적 가치, 수열의 가치, 학습목적

학 번 : 2019-26232

목 차

표 목 차

그 림 목 차

Ⅰ. 서론

1. 연구의 필요성 및 목적

본 연구는 '수열을 왜 가르치고 배워야 하는가?'라는 단순하고도 중요한 질문에서부터 시작한다. 이러한 질문은 일선 교육현장의 교사 또는 학생이 자연스럽게 할 수 있는 질문이지만, 그에 대한 답은 쉽지 않을 것이다. 교사의 입장에서는 이것이 개념의 도입을 구상하고 수업의 방향을 결정할 때 필요한 필수적인 질문일 것이며, 수학을 왜 가르치는 지에 대한 명확한 인식이 있는 교사는 그렇지 않은 교사와 비교해 볼 때 수학 교과의 특성에 걸맞게 수업을 진행할 가능성이 높고 그 결과로 수학 학습을 통해 달성될 기대 목표에 도달하기 쉬울 것이다(방정숙, 정유경, 김상화, 2011). 학생의 입장에서는 수열 개념이 앞으로 배울 고급 수학과 어떤 관련이 있는지, 어떤 중요성이 있는지 혹은 자신의 삶에 어떤 도움이 될 것인지에 대한 생각을 바탕으로 질문을 제기할 것이고, 어느 쪽이든 이 질문은 모두 수학을 배우는 목적과 관계된다(남진영, 2008). 보다 좁은 범위에서, 이러한 질문은 바로 '수열'을 가르치고 배우는 목적과 관계된다고 볼 수 있을 것이다. 이 때, 본 연구에서는 '가르치고 배우는 목적'을 학습자의 입장에서 '학습목적'[1]이라 한다.

---

1) '목적'의 사전적 의미는 '실현하려고 하는 일이나 나아가는 방향(국립국어원, 1999)'이고, '목표'의 사전적 의미는 '어떤 목적을 이루려고 지향하는 실제적 대상을 삼음. 또는 그 대상(국립국어원, 1999)'이다. 본 연구에서는 '특정 개념을 왜 가르치고 배워야 하는가?' 라는 질문에 대한 답은 '목적'의 하위 개념으로 여겨질 수 있는 '목표' 보다는 '목적'의 용어 사용이 적합하다고 판단하였다. 방정숙, 정유경, 김상화(2011)는 '수학을 왜 가르치고 배워야 하는가?' 라는 질문에 대한 답으로서 목표나 기대 효과 등을 포함하여 보다 포괄적인 의미로 '목적'이라는 용어를 사용하였고, 남진영(2008)은 "이것을 왜 배워야 하나요?"라는 질문이 수학을 배우는 목적과 관계있다고 보았다. 따라서 본 연구에서는 '특정 개념을 왜 가르치고 배워야 하는가?' 에 대한 답을 '학습목적'이라 하고, 특정 개념과 관련한 교수학습을 통해 학생이 즉각적으로 도달할 것으로 기대되는 결과를 '학습목표'로 구분하였다. 예를 들어, "적분의 학습을 통해 수학적 문제 해결 능력과 창의·융합적 사고를 기를 수 있다(교육부, 2015)."는 적분의 학습목적이 될 수 있으며, "다항함수의 정적분을 구할 수 있다."는 적분의 학습목표가 될 수 있다.

현재 우리나라 학생들의 수학에 대한 흥미 및 가치인식이 다른 나라와 비교했을 때 최하위권인 현실에서(한국교육과정평가원, 2020), '특정한 수학 개념을 왜 배워야 하는가?' 라는 질문에 대하여 설득력 있는 답을 제시하는 것은 학생들의 수학에 대한 흥미와 가치인식을 높이는 데에도 기여할 수 있을 것이다. 그렇다면 우리는 어디에서 이러한 질문의 설득력 있는 답을 찾을 수 있을 것인가? 다시 말해, 수열의 학습목적은 어디에서 찾을 수 있는가? 학생이 수업에서 수학과 만나는 매개체이자 교사가 수업을 계획하고 진행할 때 활용하는 것이 주로 교과서이고 교육과정의 실질적인 집약적 결과물이 교과서임을 감안하면(김민혁, 2013), 교과서 또는 교육과정 문서가 답을 줄 수 있을 것이다.

수학과 교육과정 문서 체제에 '목적'이 따로 존재하지는 않으나, 2015 개정교육과정 문서 체제에서는 '도입글'을 두어 "다루게 될 수학 내용이 어떤 수학 내적, 외적 유용성을 지니는지, 그리고 학생들이 그 내용을 배움으로써 어떤 능력을 함양하게 되는지" 등을 기술하였다(박경미 외, 2015). 따라서 이를 본 연구에서 정의한 '학습목적'으로 해석하는 데에는 무리가 없을 것이다. 이러한 맥락에서, 2015 개정교육과정의 수열 학습목적은 다음과 같다.

> "수열을 통해 자연 현상이나 사회 현상에 내재되어 있는 다양한 규칙성을 찾아 일반화된 식으로 표현하고 수학적으로 정당화함으로써 수학의 유용성과 가치를 경험하고 귀납적 추론 능력과 연역적 추론 능력을 기를 수 있다(교육부, 2015)."

문서화된 교육과정에 진술된 학습목적은 '왜 이것을 가르치고 배우는가?'라는 질문에 대한 국가 차원의 공적인 답으로서 어떤 개념이 교육과정 내에 존재하는 공인된 이유이기도 할 것이다. 단일 교육과정 체제인 우리나라 교육의 특징을 감안하면, 교육과정의 진술은 교과서의 구성이나 교사의 수업 계획 및 실제, 학생들의 개념에 대한 인식에 충분히 영향을 끼칠 수 있다. 이 때, 학교수학의 내용은 각각 그 나름의 교육적 가치와 의미를 지니므로(이경화, 박경미, 임재훈, 2002), 학습목적의 진술에

는 수열 개념의 교육내용으로서의 가치가 반영되었을 것이고 수열 단원의 구성이나 교과서의 구성은 수열의 가치와 더불어 학습목적의 영향을 받았을 것이다. 따라서 수열의 역사를 되짚어보며 교육내용으로서의 수열의 가치를 탐색하는 것은 진술된 학습목적과 단원 구성의 배경을 파악하는데 의의가 있고, 만약 학습목적이나 단원 구성을 수정해야 한다면 그 근거를 제공해주는 역할 또한 할 수 있을 것이다.

이 과정에서 교육내용으로서의 수열의 가치가 국내 교육과정과 학습목적에 어떻게 반영되어 있는지를 밝히는 것이 필요하다. 또한 국내의 교육과정 개정 과정에서 수열 단원의 변경이나 내용 감축에 대한 논의는 주로 해외 교육과정의 사례를 참고하여 이루어졌으므로(교육부, 2015; 나귀수 외, 2001), 가치 반영의 측면에서 우리나라의 교육과정이 해외 교육과정과 어떤 공통점 및 차이점이 있는지 살펴보는 것은 수열 단원의 변경이나 내용 감축의 배경 및 방향을 파악하는 데에도 도움이 될 것이다. 무엇보다도, 진술된 학습목적은 실제 수업 구성 및 진행에 영향을 끼치고 수업의 기초가 되는 것이 바로 교과서이므로 드러난 학습목적을 달성할 수 있도록 교과서가 구성되어 있는지를 분석하는 것은 실제적인 의미가 있다.

그동안 수열의 교수학습에 관한 국내 연구들은 많았다. 김기원, 왕수민(2003)은 고등학교 학생들이 극한 개념을 이해하는 데에 나타나는 사고의 특성과 이를 개선하기 위한 학습지도 방법에 대해 연구하고, 극한 개념 및 용어의 이해에 문제가 있음을 밝히고 좌표평면모델로 극한을 지도하는 방안을 제안하였다. 박교식(2002)은 수열의 교수학습에서 다각수가 소재로 적절하게 사용될 수 있음을 보였고, 권영인, 서보억(2005)은 개인차를 고려한 새로운 교과서의 모형을 개발하는 데에 수열 단원 및 다각수를 활용하기도 하였다. 손홍찬(2010)은 수학적 추론과 연결성의 교수학습을 위한 소재로서 도형수, 파스칼 삼각형, 피보나치 수열 등 수열개념과 관련한 것들을 제안하였다. 이민정, 이양(2012)은 정의의 정확성과 통일성에 주목하여 중등수학에서 다루어지고 있는 등비수열의 정의에 대해서 살펴보고 공비의 정의를 다양한 관점에서 학생들에게 있는 대로 설

명하고, 무한등비급수나 무한등비수열이라는 용어 대신 무한급수, 무한수열이라는 용어를 사용하는 것이 바람직하다고 제안하였다. 이승우(2016)는 등비급수가 수 개념 및 적분 개념의 발달에 중요한 역할을 했다는 점을 언급하면서, 고대 수학자인 아르키메데스의 아이디어의 은유적 모델이 극한과 무한 개념의 구조적이고 관계적인 측면을 조기에 도입 가능하게 하는 교육적 도구가 될 수 있다고 주장하였다. 양성현(2017)은 '수열의 극한'을 내용 영역으로 하는 문항을 중심으로 변화된 교육과정이 학교 현장의 지필평가에서 어떻게 반영되고 있는지를 분석하여 개정 교육과정의 취지와 변화에 맞지 않는 평가문항이 출제되고 있음을 짚었다. 장현석, 이세형, 이동원(2020)은 직관적으로 학습하는 수열의 극한 개념과 관련한 학습의 어려움 및 오개념을 기존에 형성되어 있는 수열 개념 및 수열에 대한 인식과 연결하여 수열과 수열의 극한에 대한 연결성을 살펴보고, 학생들에게 '수열은 등차, 등비와 같은 고정된 변화를 가지고 있다.'와 같이 수열에 대한 잘못된 인식이 있음을 밝혔다.

상술한 연구뿐만 아니라 학위논문을 포함한 각종 국내 연구에서 수열, 급수, 극한은 연구의 소재로 활발하게 다루어지고 있었다. 이들은 주로 수열의 극한지도나 보조수단을 활용한 효과적인 수열 교수학습 방법, 수열과 관련한 잘못된 인식과 이를 해결하기 위한 방법 등에 초점을 맞추고 있었다. 그러나 교육내용으로서의 수열의 가치에 초점을 맞추어 단원 구성의 적정성 등을 다룬 연구는 찾기 어려웠다.

우리나라에서 수열 개념은 교수요목기부터 학교수학의 교육내용으로 존재해왔다. 21세기에 들어서는 학습량 감축이라는 기조 아래 교육과정 개정을 거치면서 수열 단원에서도 여러 내용들이 삭제되고 변경되었다. 이경화, 박경미, 임재훈(2002)에 따르면, 수학교육의 목표 및 방법의 변화와 더불어 각각의 내용도 계속해서 변화되고, 그 과정에서 수학 개념이 본래 지니고 있던 교육적 맥락과 의의를 상실하는 경우가 종종 발생한다. 또한 교육과정의 개정 과정에서, 처음 교과 교육이 시작될 때 왜, 어떻게 그러한 내용이 선정되었는지에 대한 근본적인 반성 없이 이전의 내용을 조금씩 수정하고 보완하는 작업이 이루어지기도 한다(윤현진 외,

2009). 따라서 교육과정에 드러난 수열의 학습목적이나 단원의 구성을 무비판적으로 수용하거나 불가침의 영역으로 보기 보다는 교육내용으로서의 수열의 가치에 대한 심도 있는 고민과 함께 이를 반영한 학습목적, 단원 구성에 대한 논의를 활발히 하는 것이 향후 교육과정 개정방향을 설정하거나 수열의 교수·학습 실제에서 강조점을 찾는 데에 기여할 수 있는 방안일 것이다. 더 나아가, 만약 현재 교과서의 내용 구성이 학습목적을 달성하는 데에 부족함이 있다면 본 연구에서는 교과서 구성의 변경을 제안함과 동시에 수열의 학습목적에 대한 재진술의 필요성 또한 제안할 것이다. 결과적으로, 학교수학에서 수열의 위치를 재정립하는 논의의 장을 여는 것이 본 연구의 궁극적인 목적이다.

상술한 맥락으로부터 본 연구는 다음과 같은 연구 질문을 설정하였다.

1. 교육내용으로서의 수열의 역사는 어떠하며 이를 통해 교육내용으로서의 수열의 가치로 어떤 것들을 제안할 수 있는가?
2. 교육내용으로서의 수열의 가치는 국내 교육과정에 어떻게 반영되어 있고, 해외 교육과정과는 어떤 차이가 있는가?
3. 교과서의 수열 단원에서, 교육과정에 드러난 학습목적에 따른 자연 및 사회현상의 다양한 규칙성은 어떻게 나타나는가?

2. 연구 방법

본 연구에서는 첫 번째 연구 질문에 답하기 위하여 수학사 및 수학교육사 위주의 문헌을 검토하고, 과거의 교과서 및 관련 연구를 검토할 것이다. 특히 고대부터 전해온 수열의 산술적인 측면과 근대 해석학의 발전으로부터 대두된 미적분학 교육과 수열과의 연관성 측면을 나누어 진술할 것이다. 그 과정에서 수열 개념이 어떻게 교과서에 수록되어 있는지, 교과서를 집필하거나 교육과정을 구성할 때에 어떤 논의가 있었는지를 살필 것이다.

이를 바탕으로 고대부터 수열과 관련된 내용이 교과서에 수록된 역사와 패턴교육의 중요성을 논한 뒤 "대수를 포함한 수학의 여러 분야에서 강조되는 주제 가운데 하나인 패턴과 수학의 여러 영역에서 핵심으로 다루어지는 일반화(김성준, 2003)"와 수열을 연결시켜 교육내용으로서의 수열의 첫 번째 가치를 제안할 것이다. 그 다음 미적분학이 정립된 이후 수열과 관련한 극한개념이 교과서에 어떻게 수록되었는지 밝히고 현대수학 및 학교수학에서의 미적분학의 중요성을 논한 뒤 미적분학을 이해하기 위한 도구와 수열을 연결시켜 교육내용으로서의 수열의 두 번째 가치를 제안할 것이다.

두 번째 연구 질문에 답하기 위하여, 일본, 핀란드, 영국의 교육과정과 우리나라의 교육과정을 수열 단원의 구성에 초점을 맞추어 비교한다. 이후 수열 단원과 극한 단원의 위치, 수열의 비형식적인 도입, 계차수열을 포함한 여러 가지 수열 등의 교육과정 내 존재성 등을 바탕으로 각 교육과정에서 추구하는 수열의 가치에 대해 논의할 것이다. 특히, '수열의 극한'을 2015 개정교육과정 <수학Ⅱ>에서 삭제함으로써 정적분의 정의를 구분구적법을 이용하지 않고 도입하게 된 배경에는 일본, 핀란드, 영국의 교육과정이 있기 때문에(박경미 외, 2015) 이들의 교육과정과 우리나라의 교육과정을 비교하는 데에는 의의가 있다.

세 번째 연구 질문에 답하기 위하여, 우리나라 <수학Ⅰ> 교과서 중 5종을 선택하여 수열 단원의 본문 및 과제를 분석한다. 학생들이 교과서

를 통하여 자연 및 사회현상의 다양한 규칙성에 대한 경험을 하고 있는지는 수학적 현상을 포함한 다양한 자연 및 사회현상과 관련한 내용 및 다양한 규칙성을 포함한 내용이 얼마나 포함되어 있는지에 대한 교과서 분석으로 판단할 수 있을 것이다. 첫째로, 인위적으로 만들어진 상황의 규칙성과 자연 및 사회현상의 규칙성이 드러난 빈도수를 비교하여 학습 목적대로 자연 및 사회현상의 규칙성이 잘 드러나는지 논의할 것이다. 둘째로, 나타난 규칙성의 종류별 빈도수를 비교하여 다양한 규칙성이 드러나는지 논의할 것이다. 이 과정에서 도입부를 포함한 보조자료와 문제에서 나타나는 규칙성의 양상을 비교하고 각 단원별로 나타나는 규칙성의 양상을 비교하여 어떠한 특징이 있는지 논의할 것이다.

Ⅱ. 수학교육과 수열

1. 수열의 정의

수열(Sequence, Progression)은 수학사와 함께 존재해온 핵심적 수학 개념(Weigand, 2004)으로서, 저자와 서적마다 달리 정의되기도 한다. 수열은 '명확한 순서로 쓰여진 수들의 나열(Stewart, 2012)'로 단순하게 정의되기도 하고, '자연수 전체집합에서 정의된 함수(Bartle, 2011)'이면서 특별히 공역에 제한을 두지 않아 집합열, 함수열 등을 포괄하는 것으로 정의되기도 한다(김홍종, 2009).

한편, '함수'라는 단어는 Leibniz에 의하여 17세기 처음 사용되었고 이후 Euler, Cauchy등의 수학자들에 의하여 함수가 구체적으로 정의되었다(Burton, 2007). 허나 그보다 이전인 13세기경 Fibonacci에 의하여 수열 개념이 구체적인 예시와 함께 다루어지기도 하였고(Burton, 2007), 기원전 17세기경 Ahmes가 기록한 파피루스에서도 수열의 개념을 확인할 수 있다(Pickover, 2009). 즉, 순서를 가진 나열로서의 수열 개념은 함수의 구체적인 정의가 탄생하기 이전에 이미 인류에게 존재하였고 사용되었으며, 오늘날 수열의 정의는 함수 개념의 정립 이후 수열 개념을 함수로서 해석(解釋)한 것이라고 할 수 있다.

현재 학교수학에서는 교육과정 문서에서 수열을 '함수'로 명확히 지칭하고 있으나(교육부, 2015), 교과서에서는 먼저 '차례대로 나열된 수의 열'을 수열로 정의한 이후 수열을 함수로도 정의할 수 있다는 사실에 대하여 보조 자료나 보충 설명 등을 통하여 다루고 있다(황선욱 외, 2018; 고성은 외, 2018a).

2의 배수를 2부터 차례대로 나열하면 다음과 같다.

$$2,\ 4,\ 6,\ 8,\ \cdots$$

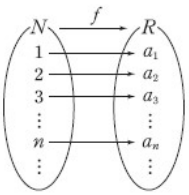
이와 같이 차례대로 나열된 수의 열을 **수열**이라 하고, 수열을 이루고 있는 각 수를 그 수열의 **항**이라고 한다.

[그림 Ⅱ-1] 교과서에 제시된 수열의 정의(고성은 외, 2018a)

수열 $\{a_n\}$은 자연수 1, 2, 3, $\cdots$, n, $\cdots$에 수열의 각 항 a_1, a_2, a_3, $\cdots$, a_n, $\cdots$을 차례대로 대응시킨 것이므로 수열은 자연수 전체의 집합 N에서 실수 전체의 집합 R로의 함수

$$f : N \longrightarrow R,\ f(n) = a_n$$

으로 생각할 수 있다.



이때 일반항 a_n이 n에 대한 식으로 주어지면 n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례대로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 모든 항을 구할 수 있다.

[그림 Ⅱ-2] 교과서에 제시된 수열의 함수적 정의(고성은 외, 2018a)

학교수학에서 특정한 정의 방법을 선택할 때 그 방법에 기대하는 정의 기능이 있을 것이며, 그 중에서 수학적 맥락이나 상황에서 특정한 기능을 수행하길 기대하는 기능을 다소간 고려하지 않을 수 없다(우정호, 조영미, 2001). 단순히 '수의 나열'이었던 수열을, 분석을 통해 '자연수 전체 집합에서 정의된 함수'로 보게 되는 것은 중요한 변화일 것이다. 고등학교 수학에서 함수로서의 수열의 정의를 도입한 것은 학생이 익숙한 함수 관점으로 수열을 바라보게 함으로서 다이어그램, 그래프 등의 시각적 자료로 수열에 대한 이해를 돕는 데에 일차적인 의의가 있을 것이다. 또한 수열을 함수로 보는 학생들이 수열을 단순히 순서가 있는 수의 나열로서 보는 학생들보다 수열 인식에 대한 오류가 적게 나타난다는 연구(Przenioslo, 2006)도 있다. 교사용 지도서에 따르면, 함수로서의 수열의 정의는 각 항을 함숫값으로, 일반항을 함수식으로 보고 n에 대한 식으로 주어진 일반항 a_n의 n에 1, 2, 3, $\cdots$을 차례로 대입하여 수열 $\{a_n\}$의 모든 항을 구할 수 있음을 학생들이 이해하게 하는 데에 의의가 있다(고성은 외, 2018b).

2. 수열의 역사

가. 산술과 수열

행렬이나 이진법과 같이 우리나라의 교육과정에 존재하였다가 현재에는 가르치지 않는 내용들이 있다. 이에 비해 수열은 우리나라의 교육과정이 처음 정립될 때부터 지금까지 교육 내용으로 비중 있게 존재해왔다. 특히 등차수열과 등비수열 및 수열의 합과 관련한 수학 개념은 후술할 내용과 같이 아주 오래전부터 교육내용으로 일관되게 존재해왔는데, 고대에 수열을 가르친 이유가 무엇이었는지, 교육내용으로 수열을 선정한 배경이 무엇이었는지 고찰하는 것은 수열 개념 지도의 필요성이 역사를 거치며 지속적으로 인정받았다는 사실을 기반으로 할 때 현재 교육내용으로서의 수열의 존재 이유를 탐색하는 데에 의의가 있다.

기록 보존의 한계로 인해 인간이 수를 다루기 시작한 것이 언제부터인지는 알 수 없을 것이며 수와 순서를 결합하여 나열하는 수열 개념이 언제 발생하였는지도 역시 알 수 없을 것이다. 다만 기원전 27세기경 제작된 세계 최고(最古)의 문명인 수메르 문명의 점토판에서도 등비수열의 개념을 확인할 수 있다는 사실(Friberg, 2007)을 토대로 할 때 수열의 역사는 수학의 역사와 함께 하였다고 말할 수 있을 것이다. 또한 점토판이 발견되기 전까지 수열에 관한 가장 오래된 기록물이라고 알려져 있었던 기원전 16~17세기경의 파피루스[2)]에서도 수열 개념을 찾을 수 있으며, 실생활과 연관시켜 등차 및 등비수열의 개념을 다루었다는 사실을 확인할 수 있다. 이 파피루스가 당시의 학자들을 위한 일종의 문제집이고, 저자인 Ahmes가 기원전 19세기경부터 존재하던 어떤 수학 서적을 필사한 것임을 감안한다면(Cooke, 2013), 기록이 닿는 범위 하에서 수학을 가르치기 시작할 때부터 수열은 가르칠 지식으로서 존재해왔음을 유추할 수 있다.

---

2) 스코틀랜드의 Alexander Henry Rhind가 1858년 이집트에서 구매해 영국 박물관이 소장하게 되었기에 Rhind Papyrus라고도 부른다(Cooke, 2013).

고대 바빌로니아와 이집트의 수학은 그 실용성과 유용성이 바탕이 되었고(서보억, 2015), 특히 이집트인들의 수학 문서들에는 건설과 상업에 사용되었던 수학의 실용적인 모습이 드러나 있기 때문에(Cooke, 2013), 파피루스에 나타난 등차, 등비수열의 개념 역시 가르칠 지식으로서 존재했던 실용적인 이유가 있을 것이라 유추할 수 있다. 이는 해당 개념이 나타난 아래 문제들에 직접적으로 드러나는데, 등비수열의 합을 통해 규칙성이 있는 수들의 합을 구하거나 등차수열의 합을 통해 정해진 양의 물건을 분배하는 등 실생활에서 마주하는 패턴을 수학화하고 해석하는 데에 수열이 유용하게 사용되고 있었다(NCTM, 1979).

100 loaves of bread are to be divided among five men. The men's five shares of bread are to be in arithmetic progression, so that consecutive shares always differ by a fixed difference, or $\triangle$. Furthermore, the sum of the three largest shares is to be equal to seven times the sum of the two smallest shares. Find $\triangle$ and write it as an Egyptian fraction. (Problem 40)

Recall that the heqat is a unit of volume. Ten heqat of barley are to be distributed among ten men in an arithmetic progression, so that consecutive men's shares have a difference of 1/8 heqats. Find the ten shares and list them in descending order, in Egyptian fractional terms of heqat. (Problem 64)

An estate's inventory consists of 7 houses, 49 cats, 343 mice, 2401 spelt plants (a type of wheat), and 16807 units of heqat (of whatever substance－a type of grain, suppose). List the items in the estates' inventory as a table, and include their total. (Problem 79)

고대 그리스시대의 피타고라스와 유클리드 역시 수열과 관련한 족적을 남겼다. 피타고라스는 일렬로 된 나열을 삼각형, 사각형 모양 등으로 재배치하여 몇 가지 등차수열의 합 공식을 유도하였다. 유클리드는 등비수열이라는 용어를 명시적으로 사용하지는 않았으나, <원론> 제8권에서 연속으로 비율이 같은 수들의 모임이라는 등비수열의 정의와 성질이 여러 번 등장한다. 피타고라스학파는 자연의 모든 것들의 원인이 수[3]라는 믿음과 '모든 것은 수이다' 라는 주장 아래 정수를 중점적으로 연구하고 가르쳤다(Burton, 2007). 따라서 피타고라스학파에서 수열과 관련한 개념을 연구한 것은 정수를 연구하는 과정에서 자연스럽게 나타난 부분이다. 다만 수열을 건축, 상업 등의 실생활에 직접적으로 사용하기 보다는 삼각수, 사각수 등으로 수열의 합 공식을 유도한 것과 같이(Boyer & Merzbach, 2011) 수학 내적인 패턴을 탐구하는 데에 사용하였다고 볼 수 있으며 유클리드는 <원론>에서 실세계에 대한 언급이나 정리들의 실용적인 측면을 전혀 언급하지 않기도 하였다(Cooke, 2013). 한편 유클리드의 <원론> 중 산술을 중점적으로 다루었던 7,8,9권의 내용은 대부분 피타고라스학파의 연구를 기반으로 하는데(Cooke, 2013; Burton, 2007), 유클리드가 <원론>을 집필할 때 가르칠 내용으로 수열을 직접 선정한 것이 아니라 이미 존재하는 지식을 논리적으로 조직했다고 보는 것이 타당할 것이다. 이러한 배경 하에서, 고대 그리스 시대의 가르칠 내용으로서의 수열은 실생활에서 마주하는 패턴을 수학화하고 해석하는 것뿐만 아니라 수학을 탐구할 때에 마주하는 패턴을 해석하는 등의 필요에 의해 존재했다고 할 수 있다.

이후 수열 개념은 지속적으로 전승되어 1세기 신피타고라스학파의 수학자였던 Nicomachus의 <산술입문(Introduction to Arithmetic)>, 3세기 Diophantus의 <산학(Arithmetica)>에서도 수열 개념이 등장한다. <산학>에서는 다음과 같은 수열문제가 등장하기도 한다(Sesiano, 2012).

16. We wish to find three square numbers which are also in proportion

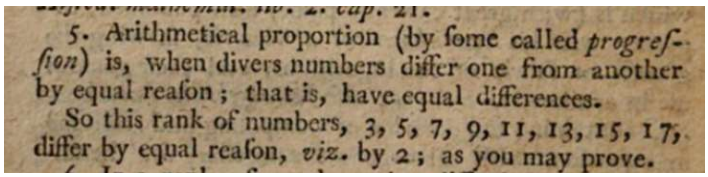
3) 여기서 '수'는 양의 정수를 뜻한다(Burton, 2007).

such that the subtraction of the first from the second gives a square and the subtraction of the second from the third gives a square. (Book Ⅶ)

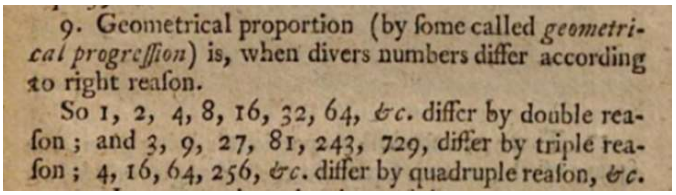
한편, 5-6세기경 인도에서는 수학자 Aryabhata가 천문학과 수학에 관한 그의 저서 <아리아바티야(Aryabhatiya)>를 저술하였다. 이 시기 이전의 힌두 수학자들이 여럿 알려져 있긴 했지만, 그들의 업적은 아주 일부를 제외하고는 전해지지 않았다(Boyer & Merzbach, 2011). Boyer & Merzbach(2011)는 한 명의 저자에 의해 그전까지의 연구를 요약하고 집대성했다는 점에서 <아리아바티야>가 유클리드의 <원론>과 유사하다고 하였으며, 이러한 관점에서 <아리아바티야>는 인도 수학사에서 어떤 수학 내용들이 다루어졌었는지 살피는 중요한 사료(史料)가 될 수 있을 것이다. 수열 개념은 <아리아바티야>에서도 나타나는데, 등차수열에서 항들의 합을 구하는 일반적인 방법과 첫째항, 공차, 항들의 합이 주어진 등차수열의 일반항을 구하는 방법이 다루어졌다(Boyer & Merzbach, 2011). <아리아바티야>가 천문학 및 측량(mensurational)수학에서 사용되는 계산 규칙을 보완하기 위한 것(Boyer & Merzbach, 2011)임을 감안할 때 수열 개념 역시 천문학 및 측량수학에서 마주하는 패턴과 관련한 것이었음을 알 수 있다. 인도에서도 수열 개념은 사라지지 않고 전승되어 12세기경 인도의 수학자 Bhaskara가 저술한 <릴라바티(Lilavati)>역시 등차수열과 등비수열 개념을 포함하고 있었다(Boyer & Merzbach, 2011). 14세기 후반 Madhava가 이끄는, 인도의 Kerala 지방의 이름을 딴 “케랄리즈 학파(Keralese School)”가 등장하였다. 이들은 급수를 비롯하여 등차, 등비수열과 관련한 대단한 업적을 남기기도 하였다(Boyer & Merzbach, 2011).

다시 Nicomachus의 <산술입문>으로 돌아오면, <산술입문>은 6세기경 로마의 Boethius가 라틴어로 번역하여 중세시대에도 수열 개념은 산술서에 등장하게 된다. 그리고 번역된 Boethius의 산술은 12세기 후반까지 라틴 학교들과 대학에서 가르쳤던 모든 산술의 기초자료가 되었다(Swetz, 1987). 13세기, Fibonacci로 잘 알려진 Leonardo는 상업에 종사

하던 아버지의 영향을 받아 아랍의 교사들로부터 인도-아라비아 수체계(Hindu-Arabic numerals)와 계산법을 익히고 이집트, 시리아, 그리스 등의 여러 국가를 여행하면서 상업에 사용되었던 산술체계를 접하였다(Burton, 2007; Cooke, 2013; Karp et al., 2014). 그는 이러한 체계들의 우수성을 인식하고 1202년 고향인 Pisa로 돌아와 수체계와 계산법의 실용적 중요성을 보여준, 라틴어로 된 <산반서(Liber Abaci, The book of calculus)>를 저술하였다(Burton, 2007; Karp et al., 2014). <산반서>에는 기본적인 수열 개념과 '피보나치수열'이 수록되었고(Sigler, 2003), 이후 르네상스 시대에 출간된 상인들을 위한 교과서들(Libri d'abbaco) 다수에는 수열 개념이 포함되게 되었다(Karp et al., 2014). 이후에도 사칙연산, 분수계산(Rule of Three), 소수 등의 개념과 더불어 등차 및 등비수열 개념은 주로 상업적인 필요의 맥락에서, 꾸준히 산술 교과서에 수록되어 왔다(Karp et al., 2014). 실제로 영국에서 19세기까지 교과서로 이용되었고 미국의 산술교육에도 19세기까지 지대한 영향을 미쳤던(Karp et al., 2014), 1677년 초판이 출간된 Cocker의 산술 교과서(Cocker's Arithmetic)에도 등차수열, 등비수열 개념이 소개되고 있었다.


5. Arithmetical proportion (by ſome called *progreſſion*) is, when divers numbers differ one from another by equal reaſon; that is, have equal differences.
So this rank of numbers, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, differ by equal reaſon, *viz.* by 2; as you may prove.

[그림 Ⅱ-3] Cocker의 교과서에 나타난 등차수열 개념(Cocker, 1738)


9. Geometrical proportion (by ſome called *geometrical progreſſion*) is, when divers numbers differ according to right reaſon.
So 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, *&c.* differ by double reaſon; and 3, 9, 27, 81, 243, 729, differ by triple reaſon; 4, 16, 64, 256, *&c.* differ by quadruple reaſon, *&c.*

[그림 Ⅱ-4] Cocker의 교과서에 나타난 등비수열 개념(Cocker, 1738)

Dilworth(1762), Emerson(1851), Milne(1895)등이 저술한 Cocker 이후의 산술교과서에서도 수열을 다루고 있으며, 등차, 등비수열 및 그의 합을 다루고 돈과 관련한 문제가 주를 이루었다. 이러한 배경 하에, 현대 수학교육 과정의 기초라고 할 수 있는(강현영, 2011) 메란 교육과정(Meraner Lehrplan für Mathematik)에서는 등차수열과 등비수열을 중등학교 7학년(Obersekunda) 산술(Arithemetik)과목에 내용요소로 포함시켰고, 특히 등비수열의 경우 간단하고 실제적인 과제를 통해 복리계산과 이자 계산에 응용되도록 하였다(강현영, 2011). 미국의 초기 국가수준 고등학교 교육과정에도 역시 수열 개념이 포함되었으며(International Commission on the Teaching of Mathematics, 1911), 이후 여러 번의 교육과정 변화 속에서도 수열 개념은 중등학교의 교육내용으로 유지되어 현재에 이르게 되었다. 따라서 수열은 고대로부터 실생활, 수학 탐구과정 등을 포함한 여러 현상에서 마주하는 패턴을 수치화하거나 해석하는 데에 이용되었다고 종합할 수 있다.

나. 해석학과 수열

현대 해석학에서 수열과 관련이 깊은 부분은 극한 개념과 그의 응용인 무한급수이다(Lee, 2010). 특히 미적분학은 학교수학에서 극한개념을 지도하는 데에 지대한 영향을 미쳤다. 본 연구에서는 미적분학 교육의 역사를 중심으로 미적분학의 정립 이후 수열의 극한이나 무한급수 등의 개념이 중등학교 교과서에 어떻게 수록되었는지 살펴볼 것이다.

17세기 Newton과 Leibniz를 시작으로 미적분학의 개념이 태동되었다. Leibniz는 적분을 무한소의 무한합으로 정의하였으나 무한과 무한소가 문제가 많은 개념이었기에 대부분의 수학자들은 Leibniz의 정의를 거부하고, 역도함수로 적분을 정의하였다(김경화, 2008). 따라서 19세기 Cauchy가 합의 극한으로 적분을 새롭게 정의하기 전까지는 수열을 미적분을 이해하고 정의하는 데에 필수적인 개념이라고 여기기는 어려웠다. 단적인 예로, 로피탈(Marquis de l'Hopital)이 집필한 최초의 미적분학 교과서는 1696년에 극한 개념이 제외된 상태로 출판되었다(Boyer, 1959).

l'Hopital의 교과서 이후 극한에 대한 엄밀한 개념 정립을 하지 못한 채 여러 교과서가 출판되었으며, 이 기간에 일부 국가에서는 미적분학이 중등학교에서 다루어지기도 하였다(Karp et al., 2014). 특히 프랑스에서는, 18세기 후반 프랑스 혁명 중에 공립학교 체계가 구축되면서 미적분학을 중등학교에서 가르치기도 하였다(Karp et al., 2014). 1802년 Lacroix가 저술한 미적분학 교과서에서 함수의 미분은 직관적인 극한 개념과 함께 다루어지기도 하였다(Karp et al., 2014). 한편 이 시기 독일에서는 많은 지역에서 독자적인 교육 체계를 가지고 있었는데, 프로이센의 경우 중등학교의 교육내용에 미적분학을 포함시키기도 하였다(Karp et al., 2014).[4] 그러나 19세기 후반에 몇몇 국가에서 중등학교에서 미적분학을 가르치는 것이 다양한 이유로 백지화되었는데, 일례로 프로이센에서는 미적분학이 '엄격함이나 비판적 정신이 없이 다루어졌고 형이상학

4) 1830년까지는 실제로 지도되지 않다가 19세기 중반부터 함부르크 지방에서 미분이 의무적으로 지도되었다는 기록이 있다(Karp et al., 2014)

적인 맥락에서 개념을 제시한 텍스트에 기초'했다는 이유로 정부에서 미적분학 지도를 백지화하기도 하였다(Karp et al., 2014).

19세기가 거의 끝날 즈음이 되어서야 다양한 사회 및 경제적 이유로 촉발된 과학교육 개혁의 흐름 속에서 수학교육 재정립에 대한 요구가 여러 국가에서 강하게 일어나게 되었다. 이때의 주요 화두 중 하나는 미적분학 교육의 중등학교로의 편입이었다(Karp et al., 2014).

영국에서는 공학계로부터의 개혁요구가 발생하였는데, Royal College of London의 기계공학 교수였던 John Perry를 중심으로 한 수학교육 개혁운동이 전개되었다(Karp et al., 2014). Perry는 Glasgow에서 개최된 British Association 회의에서 미적분학의 기초를 중등학교에서 도입하는 내용의 수학교육 개혁안을 제안하는데, 미적분에 대한 엄밀한 접근보다는 공학의 기초지식으로서 미적분학의 응용성에 초점을 두었다(Karp et al., 2014). 이때 Perry는 미분계수를 도입하기 위하여 극한의 존재성에 대한 논의 없이 직관적으로 극한 개념을 사용하기도 하였다(karp et al., 2014).

독일에서는 Göttingen 대학 교수를 역임하였던 Felix Klein이 수학과 과학 교육과정 개혁을 위하여 교사, 과학자, 기술자들의 이해와 협조를 구하고자 다양한 노력을 기울였으며, 폭넓고 강력한 동맹을 만들고자 하였다(강현영, 2011). 1904년 Breslau에서 열린 회의에서 Klein을 비롯한 교육위원들은 수학과 과학에서 학교 개혁을 평가하고 변화를 제안하였고, 이 때 Klein은 "미적분의 이해는 우리 주변을 둘러싸고 있는 자연의 가장 단순한 합법성을 이해하기 위해서 반드시 알고 있어야 하기 때문에" 학교수학에 미적분학이 도입되어야 하며, "그래프로 표현된 함수 개념이 수학 교수의 중심적인 관념으로 형성되어야 하고, 자연스러운 결과로서 미적분의 요소들은 9학년(당시 중등학교의 최고학년) 교육과정에 포함되어야 한다."고 주장하였다(강현영, 2011). 이후 1905년 Meran에서 Klein을 위원장으로 하는 위원회가 열렸고 독일 수학교육의 헌장이자 현대 수학교육 과정의 기초라고 할 수 있는 메란 교육과정(Meraner Lehrplan für Mathematik)이 작성되었으며, 1908년 Klein은 IMUK[5]의

회장으로 선출되어 독일에서의 개혁 운동을 확장, 강화하고자 하였다(강현영, 2011). Klein을 대표로 하는 IMUK는 수학교육을 재건하기 위한 국제적 움직임을 처음으로 시작한 단체이기도 하였으며, 이러한 움직임을 시작으로 각 나라에서 극한 개념을 비롯한 미적분학의 기초가 중등학교에서 본격적으로 다루어지기 시작하였다(Karp et al., 2014).

종합하자면, 학교수학에서 극한개념을 지도하게 된 것은 20세기 초 Perry와 Klein 등이 주도한 수학교육 개혁운동의 영향에 의한 것이다(박선화, 2000). 그들은 응용성이 강하고 교육적 가치가 풍부한 미적분법을 고등학교에서 지도할 것을 주장하였고, 이에 따라 우리나라에서는 미적분법과 그의 논리적 기초개념인 극한 개념을 고등학교 때부터 지도하게 되었다(김응태, 김연식, 1985; 박선화, 2000에서 재인용). 엄밀한 수준의 극한 개념은 매우 어렵기 때문에 우리나라 고등학교에서는 직관적인 비형식적 극한 개념을 중심으로 지도하고, 극한 개념의 응용으로서 무한급수의 합 등의 개념을 지도해왔다(박선화, 2000). 고대로부터 가르칠 내용으로 존재해왔던 수열에 비해, 극한 및 무한급수를 가르친 역사는 상당히 짧았다.

5) Internationale Mathematische Unterrichts Kommission (IMUK)

3. 교육내용으로서의 수열의 가치

‘가치’라는 용어는 일상에서도 빈번히 쓰이는 용어이며 교육과 관련한 연구에서도 사용되고 있다. 그 중 연구에서 사용되는 ‘가치’라는 용어는 한마디로 정의하기에 어려운 측면이 있기에(방정숙, 김승민, 2019) 연구마다 용어의 쓰임이 명확히 제시될 필요가 있을 것이다. 본 연구에서는 ‘가치’라는 용어를 사전적 의미에 따라 ‘사물이 지니고 있는 쓸모(국립국어원, 1999)’로 통일하여 사용한다. 여기서 ‘사물’은 ‘수열’, ‘함수’와 같은 수학적 대상을 포함하고, ‘쓸모’는 사전적 의미에 따라 ‘쓰이게 될 분야나 부분(국립국어원, 1999)’이며, 접사 ‘-적’은 사전적 용법인 ‘그에 관계된(국립국어원, 1999)’의 의미이다. 따라서 본 연구에서 ‘수열의 교육적 가치’라 함은 교육과 관련하여 수열이 쓰이게 될 분야나 부분을 일컫는다. 어떤 사물이 쓰이게 될 분야는 유일하거나 고정적이라고 할 수 없으므로, 관점에 따라 여러 가지 가치가 제시될 수 있을 것이다. 본 연구에서는 수열의 교육적 가치에서 ‘교육’을 세분화 하여 대수교육에서 수열의 쓰임인 ‘수열의 대수적 가치’와 해석교육에서 수열의 쓰임인 ‘수열의 해석적 가치’를 각각 제안하고 논의하고자 한다.

학교수학의 내용은 각각 그 나름의 교육적 가치와 의미를 지닌다(이경화, 박경미, 임재훈, 2002). 수학 내용은 다른 수학적 아이디어를 개발하거나 수학의 여러 영역들을 연결하는 데에 유용성이 있거나, 학생들이 수학을 학문으로서 그리고 인간의 창조물로서 깊이 인식하는 데 있어서와 같은 다양한 이유로 중요하게 여겨질 수 있다(NCTM, 2000). 하지만 특별한 근거 없이 어떠한 내용이 가지는 가치를 논하는 것은 수학 개념의 존재 의의를 자의적으로 규정한다는 점에서 비약이 있으며, 가치를 유일하게 규정하는 것은 수학 개념의 존재 의의를 한정하는 것일 수 있다. 연구자마다 같은 개념을 바라보는 관점이 다를 수 있고, 해당 교육개념이 가지는 가치가 유일하지 않을 수 있을 뿐만 아니라 시대가 변함에 따라 교육 내용이 가지는 가치도 달라질 수 있다. 따라서 본 연구에서는 수열과 관련한 역사적 배경을 근거로 현 시점에서 공감대를 형성할 수

있는 큰 범주의 두 가지 가치를 제안하고자 한다. 본 연구에서 제안하는 가치들은 그 자체로 배타적이거나 서로를 포함하는 관계가 아니며, 이 밖에도 교육내용으로서의 수열의 가치로 다른 것들이 제안 될 수 있을 것이다.

가. 패턴과 일반화의 경험

개인이 살아가는 하루의 일과에도 패턴이 존재하듯이 인간이 끊임없이 경험하고 마주하는 것이 패턴이다. 꽃잎의 개수나, 지하철의 도착시간 등 다양한 곳에서 우리는 패턴을 경험할 수 있다. 자연과 사회현상에서뿐만 아니라 수학을 탐구할 때에도 패턴을 경험한다. 함수에서 정의역의 원소와 대응되는 공역의 원소를 관찰하는 것도 패턴의 경험이며 삼각수, 사각수 등의 다각수를 탐구하는 것도 패턴의 경험이다.

수학의 발전 과정은 패턴을 발견하고, 설명하고, 창조하며 만들어 낸 패턴 속에 숨어 있는 질서와 규칙을 밝혀내려는 노력의 결과(Sin & Kim, 1997)라는 견해와 더불어, 수학은 '패턴의 과학'이라는 말이 있다(Steen, 1988; National Research Council, 1990; Sin & Kim, 1997에서 재인용). 이러한 관점에서 패턴과 일반화의 경험은 수학적 사고를 풍부하게 할 뿐만 아니라, 수학의 아름다움을 느끼게 하고 자신감을 갖게 하며, 수학에 대한 인식을 새롭게 해줄 수 있기에(Sin & Kim, 1997) 수학교육에서 중요한 역할을 할 것이다. 실제로 패턴은 대수[6]를 포함한 수학의 여러 분야에서 강조되는 주제 가운데 하나이며, 패턴을 탐구하고 인식하고, 이것을 언어 또는 기호로 일반화하는 능력을 대수적 사고로 보기도 한다(김성준, 2003). NCTM(2000)은 모든 학년에 걸쳐 대수교육의 기준 중 하나로 패턴 이해를 설정하기도 하고, 6학년부터 12학년까지의 학생들에게는 패턴의 일반화를 성취기준으로 설정하는 등 패턴과 일반화를 강조하고 있다. 미국의 연방 정부 차원의 교육과정인 CCSSM에서도 반복되는 추론에서 규칙적인 패턴을 찾고 표현하는 것을 강조하고 있다

6) 수열은 우리나라 교육과정에서 '대수'의 내용요소로 분류되어 있다.

(CCSSI, 2010).

앞서 살펴본 바와 같이 고대 이집트시대부터 수열은 역사적으로 상업 등 실제 생활에 사용되었을 뿐만 아니라 도형의 닮음 등 수학을 탐구하는 과정에서 마주하는 패턴을 해석하거나 수치화하는 데에 사용되었고, 오늘날까지 이와 관련한 문제가 다루어지고 있다. 수열은 그 존재 자체가 수치적 패턴이며, 여러 가지 수열의 합이나 일반항을 구하는 것은 일반화의 과정이다.

김성준(2003)에 따르면, 패턴의 일반화는 패턴을 통해 과정을 표현하는 것이며, 여기서 대상과 구조를 파악하려는 것이다. 패턴의 일반화 단계는 <표 Ⅱ-1>과 같다.

<표 Ⅱ-1> 패턴의 일반화 단계(김성준, 2003)

1단계	시작하는 단계	특별한 예가 학생들에게 주어지거나 또는 그들 스스로 이러한 예들을 만든다.
2단계	일반화를 형성하는 단계	주어진 것 외에 또 다른 예를 생각하고 해결한다, 그리고 이를 통해 일반화를 생각하게 된다
3단계	일반화를 명확하게 하는 단계	관찰된 패턴을 언어 또는 기호로 기술한다.
4단계	정당화의 단계	일반화된 식에 구체적인 패턴을 적용하고 확인한다.

예를 들어, 김성준(2003)이 제시한 아래와 같은 문제는 패턴 학습에서의 수열 개념의 유용성을 단적으로 보여준다.

$2\times3,\ 3\times4,\ 4\times5,\ \cdots$ 에서 n번째는 무엇인가?

이 때, 1단계는 문제를 인식하는 것이다. 학생들은 나열된 수들은 그

차이가 일정하게 증가하는 패턴임을 인식할 수 있다. 2단계는 $n=50$등을 생각해보며 해결하고, 이를 통해 일반화를 생각하는 것이다. 3단계는 관찰된 패턴을 일반화된 식 $a_n=(n+1)(n+2)$으로 기술하여 명확히 하는 것이다. 마지막으로 4단계는 일반화된 식 $a_n=(n+1)(n+2)$에 구체적인 값을 대입해보며 확인하는 것이다.

이렇듯 학생들은 수열 개념을 학습함으로써 나열된 수 사이의 패턴을 인식하고 일반화하여 제n항을 찾거나 항들의 합을 찾을 수 있으므로, 수열은 패턴과 일반화 학습의 강력한 도구가 될 수 있다. 처음부터 숫자로 나타난 패턴뿐만 아니라 다각수와 같이 도형으로 나타난 패턴도 수치화가 가능한 경우 적절하게 해석하여 일반화할 수 있다. 고대 이집트나 그리스에서 찾을 수 있는 수열과 관련한 문제들 역시 패턴을 수치화하거나 해석하는 것이었다.

결론적으로, 수학적 패턴을 포함하여 자연 및 사회의 패턴을 수치화하고 해석하며 일반화하는 과정을 경험하도록 하는 것이 수열의 교육적 가치 중 하나이며, 전통적인 것이라고 이야기 할 수 있다. 이를 본 연구에서는 '수열의 대수적 가치'라 한다. 실생활이나 수학 탐구과정에서 마주하는 패턴은 그 규칙이 등차, 등비처럼 단순하지 않은 경우를 포함하여 다양하게 존재한다. 학교에서 수학은 "주변의 여러 가지 현상을 수학적으로 관찰하고 해석하며 논리적으로 사고하고 합리적으로 문제를 해결하는 능력과 태도를 기르는 교과(교육부, 2015)"이므로, 수열의 대수적 가치를 중시한다면 학생들로 하여금 다양한 패턴 및 일반화 과정을 경험하도록 하는 것이 필요할 것이다.

나. 극한과 무한급수의 기초 개념

“미적분학은 학문하는 이에게 이념과 방법 및 기교를 제공해 주는 가장 기본적이면서도 필수적인 교양과목(김홍종, 2009)”이라는 표현이 있듯이, 현대수학에서 미적분학은 대체 불가능한 위치에 있으며, 수학 뿐만 아니라 자연과학, 공학, 경제학, 사회학 등 다양한 분야에 광범위하게 활용되는 매우 유용한 개념이다. 현재 중등학교 수학에서도 미적분은 학생들에게 “수학의 유용성과 가치를 경험하게 하고, 수학적 문제 해결 능력과 창의·융합적 사고를 기르게 할 수 있다(교육부, 2015)”는 점에서 핵심적인 내용으로 여겨진다(박진희, 박미선, 권오남, 2018). 2015 개정교육과정 <수학Ⅱ>에서 다항함수의 미적분을 다룸에도 불구하고 초월함수의 미적분을 다루기 위해 별도의 상위과목인 <미적분>이 존재하며 대학수학능력시험의 공통과목 출제범위가 <수학Ⅱ>를 포함하므로 대학수학능력시험을 보는 모든 학생들은 미적분학을 공부해야 한다. 2007 개정교육과정에서는 인문계열 학생들이 미적분을 학습하지 않고 대학에 진학한다는 이유로 <미적분과 통계 기본>이라는 과목을 신설하여 교육과정을 개편하기도 하였다. 2015 개정교육과정 개발 연구진 회의에서 미적분학 관련 내용 삭제 및 축소에 대한 요구가 지속적으로 있었음에도 불구하고 “미적분 이해는 고등학교와 대학교에서 여러 단계에 걸쳐 반복적인 학습이 필요하므로 고등학교에서 미적분 삭제 논의 불가”라는 입장을 밝히기도 하였다(박경미 외, 2015).

20세기 초 Perry와 Klein 등은 수학교육 개혁운동을 주도하면서 응용성이 강하고 교육적 가치가 풍부한 미적분법을 고등학교에서 지도할 것을 주장하였고, 이에 따라 우리나라에서는 미적분법과 그의 논리적 기초 개념인 극한 개념을 고등학교 때부터 지도하게 되었다(김응태, 김연식, 1985; 박선화, 2000에서 재인용). 이 때, 극한과 무한급수의 학습을 위해 수열 및 간단한 수열의 합을 학습하는 것이 필요할 것이다. 즉 극한과 무한급수의 기초 개념이라는 쓸모를 수열의 교육적 가치 중 하나라고 이야기 할 수 있으며, 이를 본 연구에서는 ‘수열의 해석적 가치’라 한다. 수

열의 해석적 가치를 중시한다면 극한 및 무한급수가 미적분학 등의 고급 수학에 어떻게 사용되는지 학생들로 하여금 경험하게 하면서 관련 개념을 지도하는 것이 필요할 것이다.

한편, 현재 우리나라 교육과정은 <수학Ⅱ>에서 수열의 극한을 학습하지 않고 함수의 극한을 먼저 학습한다. 이후 함수의 극한으로 미분을 도입하고 구분구적법 없이 미분의 역연산으로 적분을 도입한다. 결과적으로, 미적분의 도입 과정에서 수열의 극한과 무한급수가 사용되지 않는다. 하지만 여전히 "미분과 적분의 기초 개념(교육부, 2015)"으로서 수열의 극한을 다루고 있으며, 구분구적법 역시 <미적분>에서 다루고 있다.

극한 및 그 응용인 무한급수를 교육과정에서 도입하기 위하여 수열을 지도하는 것은 미적분학을 배제하는 일이 있더라도 그 의의가 있을 것이다. 극한 개념은 무한 근사 과정의 최종 산물로 정의되는 대상을 수학화한 개념으로, 무한 개념 및 무한 개념을 토대로 하는 개념들을 이해하는 데에 기초가 되는 개념이며(박선화, 2000). 이는 함수 개념에 대한 이해를 증진시키고, 방정식의 해를 구하는 문제나 수 개념의 이해 등에서도 매우 중요한 역할을 한다(박선화, 2000). 무엇보다도, 수직선에서 유리수의 빈틈을 메우는 무리수를 정의하려면 수열, 급수, 극한 등의 개념이 필요하며(정영우, 2010; 이정아, 유재근, 박문환, 2020에서 재인용), 유리수로부터 실수로의 수 체계 확장에서 핵심적인 측면이라 할 수 있는 것은 무리수를 수열이나 급수에 의한 극한으로 이해하는 것(이정아, 유재근, 박문환, 2020)이다. 따라서 학교수학 및 실해석학을 관통하는 실수개념을 이해하는 데에도 수열 개념은 그 기본이 되는, 필수적인 것이라 할 수 있다.

4. 우리나라의 교육과정과 수열

가. 가치 반영과 수열과 관련한 혼란

본 연구에서는 수열과 관련한 혼란을 밝힘과 더불어 우리나라의 교육과정에 수열의 교육적 가치가 어떻게 반영되어 있는지 살펴보고자 한다. 2015 개정교육과정에서는 수열과 관련하여 두 가지의 혼란이 드러난다.

첫째, 2015 개정교육과정에서 수열의 대수적 가치를 반영한 학습목적(도입글)을 별도로 제시하였으나 2009 개정교육과정과 동일하게 대수적 가치와 관련된 내용이 대폭 축소된 채로 수열 단원의 내용이 변화 없이 유지되었고, 성취기준 역시 동일하다는 점이다.

2009 개정교육과정 문서에서는 학습목적으로 해석할 수 있는 별도의 문구를 진술하지 않았으나(교육과학기술부, 2011), 2014년 교육부가 개발한 '핵심 성취기준'의 '선정 근거'는 수열 학습과 관련하여 국가 차원에서 지향하고 있는 바를 시사한다. 2009 개정교육과정 시행 이후 교육부는 기 개발된 성취기준을 바탕으로 학습을 통해서 성취해야 할 지식, 기능, 태도의 능력과 특성을 보다 명확하게 구조화한 핵심 성취기준을 개발하고 학교 현장에 보급하였다. 핵심 성취기준은 2012년에 개발·보급된 교과별 성취기준 가운데서 보다 중요하고 핵심적인 것으로 추출된 성취기준을 의미하며(변희현 외, 2014), 핵심 성취기준 개발(선정)을 위해 교육목표에의 부합성, 교육 내용의 중요성, 교육 내용의 연계성, 교수·학습 활동의 실행 가능성 등 네 개의 개발(선정) 원리를 강조(변희현 외, 2014)하면서 문헌 분석, 전문가 협의회, 현장적합성 검토 등의 절차를 진행하였고 단계별로 다양한 수학교육 전문가의 의견을 수렴하여 반영하고 검증하였다(변희현 외, 2014). 따라서 '핵심 성취기준'은 2009 개정교육과정의 연장선으로 볼 수 있을 것이다. 변희현 외(2014)가 실시한 2009 개정교육과정의 핵심 성취기준 개발 연구에서, 수열 단원의 핵심 성취기준 선정 근거가 제시되어 있다. 한편, 2009 개정교육과정에서 수열 단원과 관련한 성취기준 중 수열의 뜻, 수학적 귀납법과 관련한 성취기준을 제

외하고 모두 핵심 성취기준으로 선정되었고, 변희현 외(2014)의 연구에서는 선정 및 미선정의 근거와 관련하여 다음과 같이 진술되어 있다.

교육과정 내용	성취기준	핵심 성취 기준	핵심 성취기준 선정 근거
① 수열의 뜻을 안다.	수학2311. 수열의 뜻을 설명할 수 있다.		수열의 뜻은 「미적분 I」에서 수열의 극한, 구분구적법뿐만 아니라 고등학교 수학과 교육과정에서 다루는 함수와 관련된 여러 가지 문제 상황을 해결하는 데 기본이 되는 개념이다. 그런데 실제로 수열의 뜻은 수열, 그 가운데서도 등차수열이나 등비수열과 같은 것을 예로 들면서 설명하게 되므로 성취기준 수학2311은 등차수열에 관한 내용(수학2312-1)와 함께 지도할 수 있고 등비수열에 관한 내용(수학2312-2)을 지도하면서 보강할 수 있으므로, 성취기준 수학2312-1, 성취기준 수학2312-2와 연계시켜 지도할 수 있다.

[그림 Ⅱ-5] 수열의 뜻과 관련한 핵심 성취기준 선정 근거
(변희현 외, 2014)

"수열의 뜻은 <미적분 I >에서 수열의 극한, 구분구적법뿐만 아니라 고등학교 수학과 교육과정에서 다루는 함수와 관련된 여러 가지 문제 상황을 해결하는 데 기본이 되는 개념이다. 그런데 실제로 수열의 뜻은 수열, 그 가운데서도 등차수열이나 등비수열과 같은 것을 예로 들면서 설명하게 되므로 (...)"

③ 등비수열의 뜻을 알고, 일반항, 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.	수학2313-1. 등비수열의 뜻을 알고, 일반항을 구할 수 있다.	✓	등차수열과 마찬가지로 등비수열의 뜻과 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구하는 내용은 성취기준 수학2311의 내용을 이해하는 바탕을 제공하고, 점화식에 대한 기초 개념을 제공하며 수열의 극한, 함수의 극한을 필두로 미적분 등의 고등학교 수학과 교육과정의 여러 내용과 관련된 문제를 해결하는 데에 기본이 되는 내용이다. 더욱이 성취기준 수학2313-2의 등비수열의 합을 구하는 수학적 사고 방법은 성취기준 수학2312-2의 등차수열의 합을 구하는 방법과 다른 형식의 수학적 아이디어를 포함하고 있는데, 이는 학생들의 수학적 사고를 확장시켜 줄 수 있는 내용을 포함하고 있다. 이에 두 성취기준을 모두 핵심 성취기준으로 선정한다.
	수학2313-2. 등비수열의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 구할 수 있다.	✓	

[그림 Ⅱ-6] 등비수열과 관련한 핵심 성취기준 선정 근거
(변희현 외, 2014)

“등비수열의 뜻과 첫째항부터 제n항까지의 합을 구하는 내용은 (...) 수열의 극한, 함수의 극한을 필두로 미적분 등의 고등학교 수학과 교육과정의 여러 내용과 관련된 문제를 해결하는 데에 기본이 되는 내용이다.”

이상의 성취기준 선정 근거를 통하여 변희현 외(2014)는 다양한 규칙성 경험에 의의를 두기보다는 수열을 극한, 급수 및 미적분의 기초개념으로 설정하였음이 드러난다. 한편, ‘수열의 합’단원에서도 마찬가지로 이와 비슷한 맥락의 진술이 드러난다.

교육과정 내용	성취기준	핵심 성취 기준	성취수준		핵심 성취기준 선정 근거
① Σ 의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	수학2321. Σ의 뜻을 알고, 그 성질을 이해하고, 이를 활용할 수 있다.	✓	상	$\sum$의 성질을 이용하여 수열의 합을 구할 수 있다.	Σ의 뜻과 성질, 활용에 관한 내용을 고등학교 수학과 교육과정에서 처음 도입되는 것으로 수열의 합을 효과적으로 표현하고, 계산의 효율성을 높여주는 것으로서, 이후 다루어지는 여러 문제 상황에서 많이 사용되는 기호이다. 그리고 Σ는 구분구적법과 정적분에서 (적분)구간 개념을 이해하는 바탕을 제공하면서 정적분을 자연스럽게 지도할 수 있도록 해준다. 특히 Σ의 성질의 하나인 선형성은 수열의 극한을 포함하여 함수의 극한, 미분법, 적분법과 관련된 개념을 학습하는 데에 바탕을 제공할 뿐 아니라, 「미적분 I」, 「미적분 II」, 「확률과 통계」, 「기하와 벡터」에서 다루어지는 내용들과 연계성이 높으므로 핵심 성취기준으로 선정한다.
			중	등차수열과 등비수열의 합을 기호 $\sum$를 이용하여 나타낼 수 있다.	
			하	합의 기호 $\sum$의 뜻을 말할 수 있다.	

[그림 Ⅱ-7] 기호 $\sum$와 관련한 핵심 성취기준 선정 근거
(변희현 외, 2014)

“$\sum$는 구분구적법과 정적분에서 (적분)구간 개념을 이해하는 바탕을 제공하면서 정적분을 자연스럽게 지도할 수 있도록 해준다. 특히 $\sum$의 성질의 하나인 선형성은 수열의 극한을 포함하여 함수의 극한, 미분법, 적분법과 관련된 개념을 학습하는 데에 바탕을 제공할 뿐 아니라, (...)”

교육과정 내용	성취기준	핵심 성취 기준	성취수준		핵심 성취기준 선정 근거
② 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.	수학2322. 여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합을 구할 수 있다.	✓	상	여러 가지 수열의 첫째항부터 제n항까지의 합[33]을 구할 수 있다.	여러 가지 수열의 합을 다루는 이 성취기준은 등차수열과 그 합을 구하는 내용(수학 2312-1, 2312-2)과 등비수열과 그 합을 구하는 내용(수학 2313-1, 2313-2)을 포함하여 좀 더 일반적인 수열의 첫째 항부터 제n항까지의 합을 구하는 방법에 대해서 다루고 있다. 이는 수열의 합의 개념을 확장시켜 이후에 수열의 극한을 비롯한 극한 개념을 이해하는 데에 기본이 되는 내용이므로 핵심 성취기준으로 선정한다.
			중	자연수의 거듭제곱의 합[34]을 구할 수 있다.	
			하	자연수 1부터 n까지의 합을 구할 수 있다.	

[그림 Ⅱ-8] 여러 가지 수열의 합과 관련한 핵심 성취기준 선정 근거 (변희현 외, 2014)

"여러 가지 수열의 합을 다루는 이 성취기준은 (...) 수열의 합의 개념을 확장시켜 이후에 수열의 극한을 비롯한 극한 개념을 이해하는 데에 기본이 되는 내용이므로 핵심 성취기준으로 선정한다."

교육과정 내용	성취기준	핵심 성취 기준	성취수준		핵심 성취기준 선정 근거
① 수열의 귀납적 정의를 이해한다.	수학2331. 수열의 귀납적 정의를 이해한다.	✓	상	수열과 관련된 실생활 문제에서 인접한 항 사이의 관계를 파악하고, 이를 귀납적 정의를 이용하여 표현할 수 있다.	수열의 귀납적 정의는 성취기준 수학2312-1, 성취기준 수학2313-1에서 수열을 일반항으로 정의하는 것과 달리, 처음 몇 개의 항과 이웃하는 여러 항 사이의 관계식으로 수열을 정의하는 것으로서 실제 상황을 표현하는 데에 도움이 되는 중요 개념이다. 또한 귀납적으로 표현된 식에서 일반항을 구하는 방법을 학습함으로써 수열에 대한 수학적 사고의 범위를 확장시켜 이후에 「미적분 Ⅰ」의 수열의 극한과 관련된 여러 내용을 학습하는 데에 사고의 토대를 제공해주는 기본이 되는 개념이므로 핵심 성취기준으로 선정한다.
			중	관계가 간단한 수열[35]을 귀납적으로 표현할 수 있다.	
			하	귀납적으로 정의된 수열에서 특정한 항을 구할 수 있다.	

[그림 Ⅱ-9] 수열의 귀납적 정의와 관련한 핵심 성취기준 선정 근거 (변희현 외, 2014)

"귀납적으로 표현된 식에서 일반항을 구하는 방법을 학습함으로써 수열에 대한 수학적 사고의 범위를 확장시켜 이후에 <미적분Ⅰ>의 수열의 극한과 관련된 여러 내용을 학습하는 데에 사고의 토대를 제공해주는 기본이 되는 개념이므로 핵심 성취기준으로 선정한다."

살펴본 바와 같이 수열과 관련한 거의 모든 단원에서 핵심 성취기준 선정 근거로 다양한 규칙성이 언급되기 보다는 극한, 미적분에 관한 언급이 있는 것으로 미루어보아 2009 개정교육과정은 수열의 대수적 가치보다는 수열의 해석적 가치를 지향하고 있음을 알 수 있다. 2009 개정교육과정에서는 개정 과정에서 수열 관련 내용 감축 및 변경이 이루어졌는데, 복잡한 점화식 및 점화식의 일반항이나 계차수열과 같은 여러 가지 수열 관련 내용이 삭제된 것은 해석적 가치를 지향하는 교육과정 기조에 부합하였다고 할 수 있다.

한편 2015 개정교육과정 문서에서는 '도입글'을 별도로 제시하여 수열을 통해 자연 현상이나 사회 현상에 내재되어 있는 다양한 규칙성을 찾아 일반화된 식으로 표현하고 수학적으로 정당화함으로써 수학의 유용성과 가치를 경험하고 귀납적 추론 능력과 연역적 추론 능력을 기를 수 있음을 명시하고 있다.

(3) 수열

수열은 규칙적으로 나열된 수로 나타낼 수 있는 현상을 탐구하는 데 유용한 함수이다. 수열을 통해 자연 현상이나 사회 현상에 내재되어 있는 다양한 규칙성을 찾아 일반화된 식으로 표현하고 수학적으로 정당화함으로써 수학의 유용성과 가치를 경험하고 귀납적 추론 능력과 연역적 추론 능력을 기를 수 있다.

[그림 Ⅱ-10] 수열 단원의 도입글(교육부, 2015)

상술된 도입글은 실세계 현상에 내재되어 있는 다양한 규칙성 및 일반화를 강조하고 있으므로 학습목적에 수열의 대수적 가치가 중점적으로 반영되어 있음을 알 수 있으며 해석적 가치를 지향한 2009 개정교육과정과는 차이가 있는 부분이다. 그런데 여러 가지 수열을 포함한, 2009 개정교육과정에서 삭제된 대다수의 내용들은 수열 단원에서 등차, 등비가 아닌 다양한 규칙성을 경험할 수 있는 내용으로서 2015 개정교육과정의 학습목적과 연결되는 것이며, 이러한 내용들이 삭제된 채로 2015 개정교육과정의 수열 단원의 학습내용 구성이 변경 없이 직전 교육과정과 동일하

게 유지되었다는 사실은 교육과정에서 나타난 수열과 관련한 혼란이라고 할 수 있다. 또한 2015 개정교육과정에서 미적분의 도입방식이 수열과 관련이 없도록 변화하였고 신설된 도입글에서 실세계 현상 및 수열의 대수적 가치가 강조되는 등 교육과정 개정 과정에서 수열과 관련한 변화가 크게 일어났음에도 불구하고, 수열과 관련한 성취기준은 별다른 변화 없이 2009 개정교육과정의 수열 관련 성취기준 8개를 그대로 유지(교육부, 2015)하고 있다는 점 역시 교육과정에서 나타난 수열과 관련한 혼란이라고 할 수 있다.

둘째, 미적분의 도입방식이 수열과 관련이 없도록 변화했음에도 <미적분>의 '핵심 개념'인 '수열의 극한'의 '일반화된 지식'으로 "미분과 적분의 기초 개념(교육부, 2015)"이라는 진술을 유지하고 있다는 점이다.

2015 개정교육과정에서 미적분 개념이 처음 소개되는 <수학Ⅱ>는 수열의 개념이 소개되는 <수학Ⅰ>과 독립적인 선택 과목(박경미 외, 2015)이며, <수학Ⅱ>의 상위과목인 <미적분>에서 수열의 극한 및 급수를 다루기 때문에 2015 개정교육과정에서는 미적분의 도입방식이 수열과 관련이 없도록 변화하였다.

'핵심 개념'은 여러 개념을 아우르는, 교과가 기반하는 학문의 가장 기초적인 개념이나 원리를 말하는 것으로, 학생들이 학습한 내용의 세부사항을 잊어버린 후에도 지속되어야 할 큰 개념(big idea)을 말한다(박경미 외, 2015). '일반화된 지식'은 학년 및 학교급을 통해 학생들이 알아야 할 내용을 명제적 지식의 형태로 진술한 것이다(박경미 외, 2015). 이는 핵심 개념과 학년군의 내용 요소를 연결시켜 주는 가교 역할을 하는 것으로, 학년과 학교급을 관통하는 중심축이 된다(교육부, 2015; 박경미 외, 2015에서 재인용). <미적분>의 핵심 개념 '수열의 극한'에 대한 일반화된 지식은 다음과 같다.

> "수열의 극한은 한없이 가까워지거나 한없이 작아지고 커지는 현상과 같이 무한을 수학적으로 다루는 도구로서 미분과 적분의 기초 개념이다(교육부, 2015)"

일반화된 지식이 핵심 개념과 학년군의 내용 요소를 연결시켜 주는 가교 역할을 한다는 설명을 고려하면, 결국 교육과정 문서의 해석에서 “미분과 적분의 기초 개념”이라는 진술은 수열의 극한이 미분과 적분에 앞서서 지도되어야 함을 의미한다. 그러나 학생들은 수열의 극한에 앞서 미분과 적분을 <수학Ⅱ>에서 학습하며, 미적분의 실제 지도순서와 교육과정의 진술이 반대이므로 이는 교육과정에서 나타난 수열과 관련한 혼란이라고 할 수 있다.

한편 <미적분>에서 ‘수열의 극한(과 급수)’이 다루어지는 의의는 다음과 같다.

> <수학Ⅱ>에서는 ‘수열의 극한(과 급수)’을 다루지 않기 때문에 곡선으로 둘러싸인 영역의 넓이나 부피를 직사각형이나 직육면체 조각들의 넓이나 부피의 합의 극한으로 설명하는 정적분의 기본 아이디어를 다룰 수 없고 따라서 정적분을 급수의 합으로 나타내는 내용 또한 다룰 수 없지만, <미적분>에서는 고대 그리스 이래 넓이나 부피 측정과 관련하여 발달해 온 정적분의 기본 아이디어와 부정적분 사이의 관계를 다루는 것이 가능하다(박경미 외, 2015).

즉 2015 개정교육과정에서는 영역의 넓이나 부피를 직사각형이나 직육면체 조각들의 넓이나 부피의 합의 극한으로 설명하는 것인 리만합의 아이디어를 정적분의 기본 아이디어로 여기고 있다. 그런데, 신수진, 조완영(2018)은 전문가의 의견을 수렴하여 수열의 극한을 함수의 극한의 응용으로 볼 수 있고, 리만합의 극한으로 정적분을 도입할 때 급수의 이해가 필수적이 아니라는 견해를 토대로 수열의 극한 및 급수를 학습하지 않고도 리만합의 아이디어를 지도할 수 있다고 하였다. 이는 수열의 극한이 미분과 적분의 기초 개념이라는 ‘일반화된 지식’의 수정에 대한 근거를 제공할 수 있을 것이다.

나. 교육현실과 수열

본 연구에서 제시한 가치들은 배타적으로 존재하는 것이 아니므로 교육내용을 선정할 때 수열의 대수적 가치를 반영하여 다양한 규칙성을 가진 수열과 일반항, 여러 가지 수열의 합을 비중 있게 다루면서도 동시에 수열의 해석적 가치를 반영하여 극한과 무한급수의 성질 및 수렴, 미적분학으로 이어지는 수열의 응용 모습을 동시에 경험하도록 할 수 있을 것이다.

하지만, 현실적으로 가르칠 내용을 무한정으로 선정할 수는 없으며 특히 우리나라가 마주한 학습량 감축이라는 교육과정 개정의 기조 아래에서는 수열 관련 내용의 축소가 불가피하다. 과거부터 수학과 교육과정과 관련해서는 학습량이 많고 학습하기가 어렵다는 견해가 항상 제기되어 왔고, 이로 인해 제4차 교육과정 개정 이후로 교육과정 개정에 맞추어 교육 내용의 적정성 문제가 계속해서 제기되어 왔다(신성균 외, 2005). 이러한 논의 중에서 교육과정 각론 수준에서의 적정성은 수학과의 경우 학습량 감축 및 난이도 조정이 주를 이루어 왔다(신성균 외, 2005). 최근에 들어서도 난해한 수학이 사교육의 진원지라고 보는 일반 여론은 수학 내용 경감을 강하게 요구해 왔으며, 적은 내용을 충실히 배우는 것이 더 많이 배우는 것이라는 역설적인 구호가 수학교육에서도 설득력을 얻고 있다(박경미 외, 2015). 이러한 기조 아래에서 다양한 규칙성을 가진 수열과 일반항, 여러 가지 수열의 합, 극한, 무한급수의 성질을 수열 단원에서 모두 다루기에는 분량이 많다는 판단과 함께 수열 단원의 내용 역시 여러 번의 개정을 겪으며 다음과 같이 축소, 변경되었다.

<표 Ⅱ-2> 교육과정 개정에 따른 수열 내용의 변화

내용	2007 개정교육과정	2009, 2015 개정교육과정	비고
등차수열과 등비수열	○	○	
여러 가지 수열	○	×	
여러 가지 수열의 합	○	△	자연수의 거듭제곱의 합과 수열의 합이 간단한 것만 다룸
수열의 귀납적 정의	○	○	
귀납적으로 정의된 수열의 일반항	○	×	
수학적 귀납법	○	○	
알고리즘과 순서도	○	×	
무한수열의 극한	○	△	‘수열’이 다루어지는 과목의 상위과목[7]에 편성
무한급수	○	△	

(○ : 교육과정에 편성, △ : 내용이 축소 또는 변경, × : 삭제)

한편, 수열 내용의 축소 및 변경 과정에서 수열의 대수적 가치가 중시되었다면 극한 및 무한급수와 관련한 내용을 축소하고 다양한 규칙성을 가지는 수열을 다룰 수 있고, 수열의 해석적 가치가 중시되었다면 다양한 규칙성과 관련한 내용을 축소하고 극한, 급수를 통한 미적분학의 도

7) 2009 개정교육과정은 수열을 <수학Ⅱ>에서 다루고 극한 및 급수를 <미적분Ⅰ>에서 다룬다. 2015 개정교육과정은 수열을 <수학Ⅰ>에서 다루고 극한 및 급수를 <미적분>에서 다룬다.

입이나 급수의 다양한 응용과 관련한 내용을 중점적으로 다룰 수 있을 것이다. 하지만 <표 Ⅱ-2>를 보면 다양한 규칙성과 관련한 내용이 축소됨과 동시에 수열 개념과 미적분학 개념이 분리되었고 급수와 관련한 내용 역시 별다른 변화가 없었다.

비록 기초적인 등차, 등비의 패턴을 일반화하는 과정을 학습하고, <미적분>에서 수열의 극한과 급수를 통하여 구분구적법을 학습하기는 하나, 다양한 패턴을 경험하기는 어려워지고 수열과 미적분학의 관계에 대한 혼란이 생기는 결과를 낳았다. 이경화, 박경미, 임재훈(2002)에 따르면, 수학교육의 목표 및 방법의 변화와 더불어 각각의 내용도 계속해서 변화되고, 그 과정에서 수학 개념이 본래 지니고 있던 교육적 맥락과 의의를 상실하는 경우가 종종 발생한다. 또한 교육과정의 개정 과정에서, 처음 교과 교육이 시작될 때 왜, 어떻게 그러한 내용이 선정되었는지에 대한 근본적인 반성 없이 이전의 내용을 조금씩 수정하고 보완하는 작업이 이루어지기도 한다(윤현진 외, 2009). 2015 개정교육과정 시안 개발연구의 부록에 수록된 교육과정 연구진 회의 및 워크숍 주요결과를 검토하였을 때(박경미 외, 2015), 2009 개정교육과정에서 삭제한 내용은 복원을 금지하라는 교육부의 입장에 대한 논의 등을 찾을 수 있었다. 학습량 감축을 강조하는 우리나라의 교육현실에 부딪히고, 여러 이해관계가 맞물린 교육과정의 개정 과정, 그리고 그 과정에서 수열이라는 개념이 가진 교육적 의의보다는 미적분의 변화에 초점이 맞춰지면서 학교수학의 수열 개념은 본래의 가치를 잃어가고 있다는 우려를 제기할 수 있다.

Ⅲ. 국내외 교육과정 비교분석

1. 분석대상 및 방법

2015 개정교육과정에서 일어난, 수열의 극한을 <미적분>으로 이동하여 함수의 극한을 먼저 지도하고 구분구적법을 삭제하여 적분 도입방식을 바꾸는 등 수열 관련 단원의 변화 및 이로 인한 미적분 도입방법의 변화는 일본, 영국, 핀란드의 교육과정을 참고하여 진행되었다(박경미 외, 2015). 이들 교육과정은 모두 수열 개념을 학교수학의 내용요소로 포함하고 있으며, 급수의 합을 이용하지 않고 적분을 먼저 도입한다는 데에 주요한 공통점이 있다.

2장에서 살펴본 바와 같이 우리나라의 2015 개정교육과정에서는 내용 변경의 과정이나 학습목적의 진술에서 수열의 대수적 가치를 반영함을 알 수 있었으나 2009 개정교육과정과 동일하게 대수적 가치와 관련된 내용이 축소된 채로 수열 단원의 내용이 변화 없이 유지되었다. 또한 미적분의 도입방식이 수열과 관련이 없도록 변화했음에도 미적분과의 연계를 강조한 2009 개정교육과정의 수열 관련 성취기준을 동일하게 유지하였고 별도의 성취기준 변화나 이와 관련한 언급이 없다는 점, 그럼에도 불구하고 수열의 극한의 일반화된 지식으로 “미분과 적분의 기초 개념(교육부, 2015)”이라는 진술을 유지하고 있다는 점 등 수열과 관련한 혼란이 나타난다.

이러한 맥락에서 교육과정 개정 과정에서 참고하였던, 급수의 합을 이용하지 않고 적분을 도입하는 일본, 영국, 핀란드의 교육과정은 수열의 가치를 어떻게 반영하고 있으며, 수열과 관련한 교육내용은 어떻게 다루고 있는지 살피는 것은 의미가 있을 것이다. 본 연구에서는 2015 개정교육과정의 개발과 관련하여 해외 교육과정과의 비교를 통한 연구가 이루어지고 있었던 시기(신준식, 2011; 김선희, 2014; 장경윤 외, 2016)에 실행되고 있었던 각 나라 교육과정의 수열 관련 단원을 분석하며, 분석 대

상 교육과정은 다음과 같다.

<표 Ⅲ-1> 분석 대상 교육과정

국가	학교급	개정 연도	교육과정 명
일본	중등	2008	中學校學習指導要領解說: 數學編
	고등	2009	高等學校學習指導要領: 數學編
영국	중등	2013	Mathematics programmes of study: key stage 3, National curriculum in England
	고등	2014	Mathematics programmes of study: key stage 4, National curriculum in England
핀란드	중등	2004	National core curriculum for basic education
	고등	2003	National core curriculum for upper secondary schools

본 연구에서는 각 교육과정의 대략적인 특징을 다루고 수열 단원의 배치와 내용요소는 어떠한지, 극한 및 무한급수는 어떻게 다루어지고 있는지 살펴보며 가치의 반영에 대하여 분석하고자 한다. 이 때, 각 국가의 대입시험을 중심으로 이에 반영되는 과목에 포함된 수열 관련 내용을 비교한다. 예를 들어, 우리나라의 경우 <수학Ⅰ>, <미적분> 과목에 포함된 수열 관련 내용이 그 대상이 될 것이며, 대학수학능력시험 시험범위가 아닌 <고급 수학Ⅱ> 등은 분석 대상에서 제외한다.

2. 분석결과 및 논의

가. 일본

일본의 학제는 우리나라와 같은 소학교 6년, 중학교 3년, 고등학교 3년이며, 2015 개정교육과정에 대한 연구가 진행되던 시기 일본 중등학교에 적용되었던 교육과정은 중학교 2008년, 고등학교 2009년에 개정 및 고시된 교육과정이다(장경윤 외, 2016). 일본의 교육과정은 중학교는 3년에 걸쳐 수와 식, 도형, 함수, 데이터 활용의 4가지 핵심 내용을 중심으로 세부 내용이 구성되었으며, 고등학교는 각 과목별로 다른 핵심내용 및 세부내용을 다룬다. 이 때, 학습목표는 교육과정 문서에서 다루고 있었으나 우리나라의 '도입글'과 같은 학습목적은 교육과정 문서에서 다루고 있지 않았다. 일본의 수학 과목 및 필수 여부는 <표 Ⅲ-2>와 같다.

<표 Ⅲ-2> 일본의 수학 과목

필수 여부	과목명
필수	중학 수학
	수학Ⅰ
선택	수학Ⅱ
	수학Ⅲ
	수학활용
일부영역만 선택하여 이수 가능	수학A
	수학B

한편, 수열 및 극한, 무한급수와 관련된 과목, 단원 및 세부 내용은 <표 Ⅲ-3>과 같다(文部科學省, 2009a).

<표 Ⅲ-3> 일본의 수열 관련 단원 편제 및 내용

과목	단원	세부 내용
수학Ⅲ	수열의 극한	무한수열
		무한등비수열
	무한등비급수의 합	무한급수
		무한등비급수
		여러 가지 무한급수
수학B	등차수열과 등비수열	수열
		등차수열
		등비수열
	여러 가지 수열	합의 기호 $\sum$
		n제곱수의 합
		계차수열
		수열의 합과 일반항
		여러 가지 수열의 합
	점화식과 수열	점화식
	수학적 귀납법	수학적 귀납법

일본의 경우 국가대학입시센터에서 주관하는 대학입시 센터시험[8]과 대학별 고사가 있으며, 동경대, 교토대 등에서는 문과, 이과 모두 수열 단원이 포함된 <수학B>를 필수 과목으로 요구한다(정영옥 외, 2016). 예를 들어, 동경공대의 경우 [그림 Ⅲ-1]과 같이 복잡한 점화식의 일반항을 요구하는 문제를 출제하였다(남진영, 탁병주, 2016).

8) 2021년 기준, 폐지되고 '대학입학공통시험'이 실시되었다.

문제 1 (60점)

수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 5,\ a_{n+1} = \dfrac{4a_n - 9}{a_n - 2}(n = 1,2,3,\cdots)$로 정의되고,

수열 $\{b_n\}$은 $b_n = \dfrac{a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n}{1 + 2 + \cdots + n}(n = 1,2,3,\cdots)$으로 정의된다.

(1) 수열 $\{a_n\}$의 일반항을 구하시오.

(2) 모든 n에 대하여 부등식 $b_n \le 3 + \dfrac{4}{n+1}$이 성립함을 보이시오.

(3) 극한값 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 을 구하시오.

[그림 Ⅲ-1] 동경공대의 2015년 본고사 문제

본고사 수학 시험의 범위가 교육과정에 기초한다는 사실을 토대로 할 때 학교 교육과정에서 요구하는 수열 학습 범위는 복잡한 점화식과 그 일반항의 유도 등의 내용을 포함한다는 사실을 알 수 있다. 반면 우리나라는 2009 개정교육과정부터 점화식의 일반항을 구하는 과정을 삭제하였고, 2015 개정교육과정에서도 점화식의 일반항은 다루지 않는다.

교과서 및 일본의 참고서에서는 계차수열, 다양한 점화식 및 일반항, 군수열 등을 수열단원에서 다루고 있으며, 이를 통하여 학생들은 수열 단원에서 다양한 규칙성을 경험할 수 있었다. 결과적으로, 일본의 교육과정에서는 다양한 규칙성과 관련한 내용을 통하여 수열의 대수적 가치를 반영하고 있음을 알 수 있었으며, 수열 단원의 내용 중 패턴 교육과 관련한 내용을 축소한 우리나라의 교육과정과는 차이가 있었다.

한편, 우리나라의 <수학Ⅱ>에서는 함수의 극한을 자세하게 도입한 후 미분을 평균변화율의 극한으로 정의하며 이 과정에서 $f'(a)$를 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$나 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$와 같이 다양한 극한으로 표현하는 과정이 포함되어 있으나, 일본에서는 <수학Ⅱ>에서 기호 $\lim\limits_{h\to 0}$에 대한 간단하고 직관적인 소개를 한 뒤 $f'(a)$를 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$로 정의한다.

이외에도 일본에서는 수열의 극한을 함수의 극한보다 먼저 학습하게 하는 내용상의 차이가 있었다. 그러나 세부적인 극한의 학습내용이나 일본 <수학Ⅲ>에서의 미적분의 도입방식은 우리나라의 <수학Ⅱ>의 함수의 극한 내용과 <미적분> 과목의 내용과 큰 차이가 없었다. 또한 수열의 극한이 함수의 극한의 선수과목이라는 언급이 일본의 교육과정 문서에 따로 드러나지 않았기에, 극한 및 무한급수의 도입에서는 우리나라의 교육과정과 큰 차이를 찾을 수 없었다.

일본의 교육과정 해설서에서는 수열의 극한에 대해 "미분법, 적분법의 기초를 배양한다는 관점에서 극한의 직관적인 이해에 중점을 두면서 수열의 극한을 학습한다"고 명시하였는데(文部科學省, 2009b), 수열의 극한이 미적분학의 기초가 된다는 관점과 함께 수열의 해석적 가치를 반영하고 있음을 알 수 있다. 우리나라는 <미적분>의 하위과목 <수학Ⅱ>의 핵심개념에서 "미분", "적분"이라는 용어를 단독으로 사용하였으나(교육부, 2015), 일본에서는 <수학Ⅲ>의 하위과목 <수학Ⅱ>에서 "미분, 적분의 '생각'[9]"이라는 표현을 단원명에 사용하였다(文部科學省, 2009a). 일본의 <수학Ⅱ>에서는 미분, 적분에 대한 엄밀한 학습보다는 미분, 적분의 개념을 간략히 소개하고 수학 내·외적으로 얼마나 유용하고, 어떻게 활용되는지에 초점을 맞추었다. 일본의 학생들은 <수학Ⅲ>에서 "미분법, 적분법의 기초(文部科學省, 2009b)"인 극한을 처음 접하고 엄밀한 미분법, 적분법을 처음 학습하는 것이며, 따라서 해석하는 관점에 따라 수열의 극한이 미분법, 적분법의 기초가 된다는 일본 교육과정 문서의 언급은 혼란이라고 할 수 없다. 반면 우리나라는 <수학Ⅱ>에서 미분, 적분을 학습한 이후에 <미적분>에서 "미분과 적분의 기초 개념(교육부, 2015)"인 수열의 극한을 처음 접하게 된다. 일본과는 사소한 용어 차이이지만, 우리나라의 경우 문서를 해석할 때 미적분 및 수열의 극한 학습의 선후관계가 실제 위계와는 반대가 되므로 일본과는 다른 교육과정 문서상의 혼란이라고 할 수 있다.

9) 장경윤 외(2016)는 이를 '개념'으로 번역하기도 하였다.

나. 영국

영국의 학제는 학령전 교육 2년, 초등교육 6년, 중등교육 6년으로 우리나라와 유사하나 영국의 교육과정은 학년별로 구성되어 있지 않고, key stage라는 개념을 사용하여 몇 개의 학년이나 연령이 묶인 단계별로 제시된다(장경윤 외, 2016), 이 때, 영국의 학년별 key stage는 <표 Ⅲ-4>와 같다.

<표 Ⅲ-4> 영국의 학년별 key stage

교육과정	학년군	우리나라 학제와의 대응
key stage1	1-2학년	초등
key stage2	3-6학년	
key stage3	7-9학년	중등
key stage4	10-11학년	고등

2015 개정교육과정에 대한 연구가 진행되던 시기 영국 중등교육에 적용되었던 교육과정은 key stage 3가 2013년, key stage 4가 2014년에 개정된 교육과정이다(장경윤 외, 2016). key stage 3, 4에서는 수학적 역량(Working mathematically) 세 가지[10]를 다루고 학습 내용으로서 대영역인 수(Number), 대수(Algebra), 비, 비율과 변화율(Ratio, proportion and rates of change), 기하와 측정(Geometry and measure), 확률(Probability), 통계(Statistics)를 중심으로 세부내용이 다루어진다. 각 대영역별로 학생들에게 지도되어야 하는 주제 내용(Subject content)을 개조식으로 나열하였으며, key stage 1&2의 수학 교육과정 문서가 47페이지, key stage 3의 수학 교육과정 문서가 9페이지, key stage 4의 수학 교육과정 문서가 11페이지 분량으로 158페이지에 달하는 우리나라의 교육과정 문서에 비해 그 분량이 매우 적다. 이 때, 수학학습의 목적과 교

10) Develop fluency, Reason mathematically, Solve problems

육과정의 목표는 각 교육과정 문서에서 다루고 있었으나 우리나라의 '도입글'과 같은 학습목적으로 해석될 수 있는 단원별 진술은 문서에서 다루고 있지 않았다. 수열과 관련된 세부 내용 및 주요 학습내용은 각 key stage별로 다음과 같다(Department of Education, 2013; 2014).

<표 Ⅲ-5> 영국의 수열 관련 학습 내용

교육과정	학습내용
key stage 3	등차수열의 인식과 제n항 찾기
	등비수열의 인식과 여러 가지 수열 파악하기
key stage 4	삼각수, 사각수 및 세제곱수열의 인식과 활용
	간단한 등차수열의 활용
	피보나치 수열의 활용
	계차수열(quadratic sequence)의 활용
	간단한 등비수열의 활용 (양의 유리수 r, 자연수 n에 대한 r^n의 꼴)
	여러 가지 수열
	등차수열, 계차수열의 점화식과 일반항

영국 역시 일본과 마찬가지로 계차수열을 포함한 다양한 수열을 국가수준의 기본교육과정에서 다루고 있었으며, 특히 우리나라의 중학교에 해당하는 key stage 3에서 등차, 등비수열의 정의를 도입함으로써 형식적인 패턴 및 일반화의 지도를 상대적으로 조기에 시작하고 있었다. 반면 우리나라는 2015 개정교육과정에서 등차, 등비수열을 제외한 계차수열 등의 여러 가지 수열 및 점화식의 일반항을 다루지 않고, 단순히 점화식을 찾는 수준에서 그친다. 결과적으로, 영국의 교육과정에서는 다양한 패턴의 규칙을 탐색하고 일반화하는 과정이 학년이 올라가면서 정교화되고, 다양한 규칙성을 가진 수열로 연결되고 있다(장경윤 외, 2016). 따라서 영국은 기본교육과정에서 수열의 대수적 가치를 반영하고 있음을

알 수 있었으며, 수열 단원의 내용 중 패턴 교육과 관련한 내용을 축소한 우리나라의 교육과정과는 차이가 있었다.

한편, 영국은 국가수준의 기본 교육과정의 비중이 상대적으로 작은 대신에 학생들의 수학과목 선택법이 매우 다양하고 학습하는 수학 내용의 수준도 학생별로 천차만별이다. 영국의 대부분의 대학에서는 연 1회 실시되는 GCE A-level 시험 성적을 요구하고 있다(남진영, 탁병주, 2016). 이는 정부 산하 기관인 Ofqual(The Office of Qualifications and Examinations Regulation)에서 주관하지만 시험의 목표, 필수 내용 영역, 평가 기준만을 제시하고 실제 시험의 시행, 채점, 결과 통보를 담당하는 곳은 정부 승인을 받은 5개이며, 이 중 Pearson Edexcel에서 시행하는 시험을 가장 많이 선택하는 것으로 알려져 있다(남진영, 탁병주, 2016). 이 때, Ofqual에서는 수준에 따라 AS-level과 A2-level로 나누어 내용을 제시하며, 이는 의무교육에서 반드시 이수하여야 할 교육과정은 아니지만 대입 등의 필요에 의하여 개인별로 선택하여 학습하는 추가내용이다. 이중 심화과정인 A2-level 시험에 응시한 학생은 대학 수준의 수학을 이미 학습하고 대학에 진학하기도 한다(남진영, 탁병주, 2016). 예를 들어 Pearson Edexcel의 경우 과목수준에 따라 간단한 등차수열과 등비수열부터 Maclaurin 급수, Taylor 급수, $u_{n+2}+f(n)u_{n+1}+g(n)u_n=h(n)$꼴의 점화식의 풀이에 이르기까지 대학 수준의 수열 및 급수개념을 내용 요소로 제시한다(Attwood, Pledger, & Wilkins, 2008; Ofqual 2012). Pearson Edexcel의 내용 영역이 소개된 문서(Specification - GCE Mathematics)와 Ofqual(2012)에서 제시한 필수 내용 영역이 소개된 문서에서는 GCE A-level을 위한 수학교육의 목표와 목적을 명시하고 있으며, GCE A-level을 위한 과목들은 내용과 학습시기를 고려하였을 때 우리나라의 진로선택과목들과 유사한 위치라고 할 수 있다. 이 때, 미적분 및 극한, 급수의 학습과정은 우리나라와는 다소간 차이가 있었다. 영국은 급수 및 미분과 적분을 의무 기본교육과정인 key stage에서 다루지 않고, GCE A-level 과목에서 다룬다. Attwood, Pledger, & Wilkins(2008)가 저술한 Edexcel 교과서를 예로 들면, 미분의 경우 일본과 유사하게 극한 $\lim_{h\to 0}$의

직관적인 설명과 함께 Core Mathematics 1에서 다루며 과목이 심화되면서 다양한 함수의 미분법, 미분방정식 등을 다룬다. 적분의 경우, Core Mathematics 1에서 미분의 역연산으로 부정적분을 도입한 뒤 Core Mathematics 2에서 정적분을 부정적분의 차로 도입함과 동시에 곡선 밑의 넓이 $A(x)$에 대하여 $\delta A = A(x+\delta x) - A(x)$과 미분의 정의를 통해 $\lim_{\delta x \to 0}\left(\frac{\delta A}{\delta x}\right)$가 y이며 곡선 밑의 넓이가 $A = \int y dx$임을 지도한다. 기호 $\sum$의 성질에 대해서 Further Pure Mathematics 1에서 다루며, Further Pure Mathematics 2에서 Maclaurin 급수, Taylor 급수를 다룬다. Edexcel의 주요과목 구성과 수열 관련 내용은 <표 Ⅲ-6>과 같다.

<표 Ⅲ-6> Edexcel의 수열 관련 내용

과목명	수열 관련 내용
Core Mathematics 1	수열과 일반항, 점화식, 등차수열과 합, 기호 $\sum$
Core Mathematics 2	등비수열과 합, 등비수열의 활용, 무한등비급수
Further Pure Mathematics 1	기호 $\sum$, 제곱수, 세제곱수의 합, 여러가지 수열의 합, 수학적 귀납법
Further Pure Mathematics 2	차(differences)의 방법을 이용한 여러 유한 급수의 합, Maclaurin 급수와 Taylor 급수

살펴본바와 같이 영국은 과목의 수준이 상승함에 따라서 같은 영역의 내용을 심화하며 학습하는 특징이 있었으며, 우리나라와는 달리 수열의 극한을 별도의 성취기준으로 제시하지 않고, 구분구적법의 도입을 위해서가 아니라 미분과 관련한 Maclaurin 급수, Taylor 급수 등의 심화학습을 위해서 무한급수가 도입이 되었음을 확인할 수 있었다. 따라서 영국의 심화 선택과목에서는 수열의 대수적 가치를 비중 있게 반영하고 있음과 동시에 무한급수의 기초 개념으로서의 수열의 가치, 즉 수열의 해석적 가치를 반영하고 있음을 알 수 있다.

다. 핀란드

2015 개정교육과정에 대한 연구가 진행되던 시기 핀란드의 초등 6~9학년과 고등학교 교육에 적용되었던 교육과정은 2003년(고등), 2004년(초등) 개정된 교육과정이다(김선희, 2014). National core curriculum for upper secondary schools(2003), National core curriculum for basic education(2004)를 기준으로, 핀란드의 학제는 학령전 교육 1년, 초등교육(basic education) 9년, 고등학교(general upper secondary school) 또는 직업학교(vocational institution) 교육 3년으로 우리나라와 연한은 유사하나 학제는 다소 차이가 있다. 핀란드의 수학과 교육과정은 크게 초등교육(basic education)에 대한 National core curriculum for basic education, 고등학교(upper secondary school)를 위한 National core curriculum for upper secondary schools로 나누어 학년군별로 제시되며 핀란드의 초등교육 7~9학년은 우리나라의 중학교에 해당한다.

<표 Ⅲ-7> 핀란드의 교육과정과 학년

교육과정	학년	우리나라 학제와의 대응
basic education	1 - 6	초등
	7 - 9	중등
general upper secondary school	1 - 3	고등

핀란드의 수학과 교육과정은 수학교육의 필요성과 역할, 유용성이 포함된 개관을 시작으로 교육과정의 목표, 과목별 목표 및 주요 내용(Core contents)을 개조식으로 나열하였다. 핀란드의 수학과 교육과정은 기본강좌(basic syllabus)와 심화강좌(advanced syllabus)로 나누어지며, 그중에서 다시 필수과정(compulsory courses)과 특화과정(specialisation courses)으로 나누어진다. 학생들은 하나의 강좌를 선택하여 각 강좌의

필수과정을 모두 이수해야 한다. 각 강좌별 과목은 <표 Ⅲ-8>과 같다.

<표 Ⅲ-8> 핀란드의 강좌별 과목

강좌	과정	과목
기본	필수	식과 방정식, 기하, 수학적 모델Ⅰ, 수학적 분석, 통계와 확률, 수학적 모델Ⅱ
	특화	상업수학, 수학적 모델Ⅲ
심화	필수	함수와 방정식, 다항함수, 기하, 해석기하, 벡터, 확률과 통계, 미분, 무리함수와 로그함수, 삼각함수와 수열, 적분
	특화	정수론과 논리, 수치적-대수적 방법, 고급 미적분학

핀란드의 수학교육과정 문서의 분량 역시 영국과 유사한 고등학교 기준 11페이지 분량으로 우리나라의 교육과정 문서에 비해 적다. 또한 우리나라의 '도입글'과 같은 학습목적으로 해석될 수 있는 단원별 진술도 영국과 마찬가지로 교육과정 문서에서 다루고 있지 않았다. 수열 및 극한, 무한급수와 관련된 세부 내용 및 주요 학습내용은 각 과목별로 다음과 같다(Finnish national board of education, 2003; 2004).

<표 Ⅲ-9> 핀란드의 수열 관련 학습 내용

과정	교육과정 또는 과목	내용
초등교육	초등교육 6-9학년군	수열의 조사(examine)
		수열의 형성(forming)
심화 필수	삼각함수와 수열(MAA9)	수열
		점화식과 수열
		등차수열과 합
		등비수열과 합
심화 특화	고급 미적분학(MAA13)	수열의 극한
		무한급수
기본 필수	수학적 모델Ⅱ(MAB6)	수열
		등차수열과 합
		등비수열과 합

핀란드에서는 계차수열에 대한 내용을 교육과정에는 명시하지 않았지만, 교과서에서는 계차수열의 형태를 가지는 수열에 대한 문제를 연습문제에 소개하고 학습자가 풀이하는 과정에서 학습이 이루어지도록 하였다(정수민, 2013). 점화식 단원에서는 $a_n = na_{n-1}$과 같은 규칙성을 찾기 쉬운 형태의 수열의 일반항을 구하도록 한다(정수민, 2013). 핀란드는 영국, 일본에 비하여 분량은 적지만 여러 가지 규칙성을 가지는 수열을 도입하고 있다. 특히 수열의 합 단원 등에서 정기 적금의 원리합계, 모기지론과 같은 실생활 문제를 제시하는 것이 특징이다(정수민, 2013).

영국과 마찬가지로 핀란드는 우리나라의 중학교에 해당하는 초등교육 7학년에서 수열의 정의와 도형수열 등을 도입함으로써 형식적인 패턴 및 일반화의 지도를 상대적으로 조기에 시작하고 있었다. 결과적으로, 핀란드는 교육과정에서 수열의 대수적 가치를 반영하고 있음을 알 수 있었으

며, 일본, 영국에 비해서 상대적으로 수열 관련 단원이 적어 세 국가 중에서는 우리나라와 가장 유사한 내용 구성을 가지지만, 점화식의 일반항을 지도하지 않고 계차수열 등의 여러 가지 수열을 다루지 않는 우리나라의 교육과정과는 다소간 차이가 있었다.

한편, 핀란드의 미분과 적분의 도입 방식은 우리나라와 동일하다. 극한 $\lim_{h\to 0}$ 등을 직관적이고 간략하게 다루고 넘어간 일본, 영국과는 달리 한 단원으로서 함수의 극한에 대하여 다루고 미분을 도입한다. 다만 $\lim_{x\to\infty}$와 같이 변수가 한없이 커지는 상황은 필수과목에서 다루지 않으며, <고급 미적분(MAA13)>에서 수열의 극한과 함께 학습한다. 이는 수열의 극한에 앞서 함수의 극한을 도입할 때 변수가 한없이 커지는 상황을 바로 제시하는 우리나라의 교육과정과는 다른 부분이다. 급수로 표현된 리만합을 따로 다루지 않기에 <미적분>에서 구분구적법을 다루는 우리나라와는 차이가 있으며, 심화 과목 <고급 미적분(MAA13)>에서 이상적분(improper integral)을 추가로 다루는 차이가 있다. <고급 미적분(MAA13)>과목에 수열의 극한과 무한급수를 배치한 점은 추후 대학에서 학습할 미적분학의 기초개념으로서 극한 및 무한급수의 역할을 반영한 것으로 볼 수 있으며, 수열의 해석적 가치가 반영되었음을 알 수 있다.

라. 요약 및 논의

한국, 일본, 영국, 핀란드의 수열 관련 내용요소 및 주요 특징을 정리하면 <표 Ⅲ-10>, <표 Ⅲ-11>과 같다.

<표 Ⅲ-10> 각 국가의 수열 관련 학습 내용

	한국	일본	영국	핀란드
중학 과정	-	-	등차수열 및 등비수열의 인식, 등차수열의 일반항과 여러가지 수열	수열의 조사, 수열의 형성
고교 과정	등차수열과 합, 등비수열과 합, 기호 $\sum$와 수열의 합, 점화식, 수학적 귀납법, 수열의 극한, 무한급수, 구분구적법	등차수열과 합, 등비수열과 합, 기호 $\sum$와 수열의 합, 점화식, 수학적 귀납법, 수열의 극한, 무한급수, 구분구적법, 점화식과 일반항, 계차수열, 여러 가지 수열	등차수열과 합, 등비수열과 합, 기호 $\sum$와 수열의 합, 점화식, 수학적 귀납법, 무한급수, 점화식과 일반항, 계차수열, 도형수열, 피보나치 수열, 여러 가지 수열, Taylor 급수, Maclaurin 급수	등차수열과 합, 등비수열과 합, 기호 $\sum$와 수열의 합, 계차수열, 점화식, 수열의 극한, 무한급수, 점화식과 일반항

<표 Ⅲ-11> 각 국가의 수열 관련 내용 비교

	한국	일본	영국	핀란드
수열의 도입시기	고등	고등	중등	중등
여러가지 수열의 학습	△ (일반항은 다루지 않음)	○	○	○
점화식과 일반항의 학습	×	○	○	○
구분구적법의 학습	○	○	×	×
우리나라에는 없으나 학습하는 내용	-	점화식과 일반항, 계차수열, 여러 가지 수열	점화식과 일반항, 계차수열, 도형수열, 피보나치 수열, 여러 가지 수열, Taylor 급수, Maclaurin 급수	계차수열, 점화식과 일반항
우리나라에는 있으나 학습하지 않는 내용	-	×	수열의 극한, 구분구적법	구분구적법

우리나라에서 구분구적법은 수열의 극한과 급수 개념과 밀접한 관련이 있는 것으로 해석되어 왔으며, 수열의 극한과 급수는 정적분 개념을 학습하기 위한 필수적인 선수학습 요소로 인식되어 왔다(신수진, 조완영, 2018). 그러나 학생들의 학습 부담 적정화를 위하여(교육부, 2015) 수열의 극한이 <수학Ⅱ>의 상위과목인 <미적분>으로 이동함에 따라 정적분의 정의에서 수열의 극한과 급수를 이용할 수 없는 문제점이 발생하였다(신수진, 조완영, 2018). 그 결과 교수·학습 유의사항에서는 "급수의 합을 이용한 정적분 정의는 다루지 않는다(교육부, 2015)."라는 항목을 추가함으로써 급수의 합을 이용하지 않고 정적분을 정의하도록 하였고(교육부, 2015; 신수진, 조완영, 2018), 이러한 개정 과정에서 일본, 영국, 핀란드의 교육과정 사례를 참고하였다(박경미 외, 2015).

이에 우리나라와 마찬가지로 적분의 도입에서 급수의 합(리만합)을 사용하지 않는 일본, 영국, 핀란드 세 국가의 교육과정을 분석한 결과와 논의는 다음과 같다. 각 국가에서는 미적분의 도입방식에서 수열의 극한이나 급수개념을 사용하지 않음에도 불구하고 수열의 해석적 가치를 반영하여 무한급수를 교육과정에 포함시켰으나, 필수 교육과정에서는 수열의 극한 및 무한급수를 다루지 않는다는 공통점이 있었다. 또한 한국, 일본, 핀란드는 수열의 극한과 급수를 미적분 관련 심화 과목인 <미적분>(한국), <수학Ⅲ>(일본), <고급 미적분학(MAA13)>(핀란드)에서 다룬다는 공통점이 있었다. 이중 한국, 일본은 구분구적법의 아이디어와 형식화된 리만합을 심화 과목 <미적분>, <수학Ⅲ>에서 제시한다는 공통점이 있었다. 영국, 핀란드는 필수 교육과정에서 미적분을 도입한 뒤 심화과목에서 재정의 하거나 리만합을 별도로 다루지는 않았고 이상적분, Taylor 급수 등의 심화 미적분 내용을 다루어 한국과는 차이가 있었으며, 특히 영국은 수열의 극한을 별도의 성취기준으로 제시하지 않았다. 이렇듯 극한 및 무한급수의 도입에는 국가마다 심화학습의 방향, 학습내용의 분량에 차이가 있었다.

일본, 영국, 핀란드의 교육과정에서는 수열의 대수적 가치를 비중 있게 반영하여 다양한 규칙성을 경험할 수 있는 여러 가지 수열, 점화식과 일

반항을 학습할 수 있는 단원 및 문제를 포함하고 있었다. 특히 영국, 핀란드는 중학교 때 수열의 개념을 도입하여 선행지식을 쌓고 고등학교에서 여러 가지 수열의 학습을 하는 데에 용이하도록 한 점을 찾을 수 있었다.

반면 우리나라의 교육과정에서는 계차수열 등의 여러 가지 수열을 다루지 않으며 귀납적으로 정의된 수열에 대하여 학습하나 그 일반항을 다루지 않는다(교육부, 2015). 네 국가 모두 미적분학 도입에서 수열의 역할을 약화한 대신 패턴과 일반화 경험으로서의 수열의 대수적 가치를 반영하였으나 그럼에도 불구하고 우리나라의 교육과정에서는 다른 국가들에 비하여 여러 가지 규칙성과 관련한 내용이 상대적으로 부족함을 알 수 있었다. 이는 지속적으로 학습량 감축이 요구되는 우리나라의 교육 현실과도 관련이 없지 않겠으나, 리만합의 극한으로 정적분을 정의하는 방법을 소개하더라도 수열의 극한이나 무한급수 없이 지도할 수 있다는 견해(신수진, 조완영, 2018)를 감안하면 새로운 논의가 가능할 것이다. 현재의 미적분 도입 패러다임을 유지한다면 해외의 사례를 참고하고 한정된 교육내용의 양을 고려하여 극한 및 무한급수의 내용을 감축하고, 다양한 규칙성을 경험할 수 있는 단원을 교육내용으로 포함하는 방안을 대안으로 제시할 수 있을 것이다.

Ⅱ장에서는 우리나라에서 다음과 같은 교육과정 내용의 구성 및 문서의 진술에서 수열과 관련한 혼란이 나타났음을 밝혔다. 첫째, 2015 개정 교육과정에서 수열의 대수적 가치를 반영한 학습목적(도입글)을 별도로 제시하였으나 2009 개정교육과정과 동일하게 대수적 가치와 관련된 내용이 대폭 축소된 채로 수열 단원의 내용이 변화 없이 유지되었고, 성취기준 역시 동일하다는 점. 둘째, 미적분의 도입방식이 수열과 관련이 없도록 변화했음에도 <미적분>의 '핵심 개념'인 '수열의 극한'의 일반화된 지식으로 "미분과 적분의 기초 개념(교육부, 2015)"이라는 진술을 유지하고 있다는 점이다. 그에 반해 일본, 영국, 핀란드에서는 교육과정 내에서 여러 가지 규칙성 및 일반화를 경험할 수 있는 수열 단원 구성이 되어 있으며, 이 중 영국, 핀란드는 수열 학습의 목적에 대한 목적이 명시적으로

제시되어 있지 않았기에 특별한 혼란을 찾을 수 없었다. 한편 일본에서는 교육과정 해설서에서 미분법, 적분법의 기초를 배양한다는 관점에서 극한의 직관적인 이해에 중점을 두면서 수열의 극한을 학습한다고 명시하였으나(文部科學省, 2009b), <수학Ⅲ>의 하위과목 <수학Ⅱ>에서 "미분, 적분의 '생각'"이라는 표현을 단원명에 사용함으로써 미분, 적분법에 대한 엄밀한 학습보다는 미분, 적분의 개념이 수학 내·외적으로 얼마나 유용하고, 어떻게 활용되는지에 초점을 맞추었고, <수학Ⅲ>에서 엄밀한 미분법, 적분법을 처음 학습하는 것으로 해석할 수 있다. 해석의 관점에 따라 다를 수 있으나, 일본 교육과정 문서에서 명백한 혼란이 나타난 것이라고 볼 수는 없었다.

교육과정 문서의 진술은 교사와 학생에 따라 참고 여부나 수업에 끼치는 영향이 달라지겠으나, 국가가 공인한 문서이므로 공신력을 가지며, 수업의 실제와 교수·학습 설계에 영향을 끼칠 수 있다. 예를 들어, <미적분>과목에서 수열의 극한을 도입하는 교사가 교육과정 문서를 참고하고 이에 나타난 일반화된 지식에 따라 "수열의 극한은 미분과 적분의 기초 개념이다."라고 수업시간에 언급한다면, 수열의 극한 없이 미분과 적분을 <수학Ⅱ>에서 이미 학습한 학생들은 충분히 혼란을 겪을 수 있는 상황이다. 따라서 다른 나라의 사례와 수열 단원의 배치를 참고하여 이러한 교육과정 문서의 수열과 관련한 혼란에 대한 추가적인 논의가 필요할 것이다.

Ⅳ. 국내 교과서 분석

1. 분석대상 및 방법

“수학을 왜 가르치고 배워야 하는가?” 라는 질문에 대한 답이 수학교육의 목적이라고 할 때(방정숙, 정유경, 김상화, 2011), “수열을 왜 가르치고 배워야 하는가?” 라는 질문에 대한 답은 학습목적일 것이다. 2015 개정교육과정에서 수열 단원의 학습목적으로 해석될 수 있는 ‘도입글’은 다음과 같다.

> “자연 현상이나 사회 현상에 내재되어 있는 다양한 규칙성을 찾아 일반화된 식으로 표현하고 수학적으로 정당화함으로써 수학의 유용성과 가치를 경험하고 귀납적 추론 능력과 연역적 추론 능력을 기를 수 있다(교육부, 2015).”

2015 개정교육과정 개발 연구에서는 우리나라가 주어진 상황을 수학적으로 표현하고 수학 내에서 해결하는 능력에 비해, 수학적으로 얻어진 결과를 실생활 상황에 비추어 해석하는 능력이 상대적으로 취약하다는 PISA 2012의 결과를 토대로 수학과 실생활을 연계하는 수학 외적 연결성을 수학과 교육과정에서 강화할 필요가 있다고 하였다(박경미 외, 2015). 이러한 배경에서 수열 학습의 목적에서 자연 및 사회현상이 강조된 것으로 보인다.

문서화된 교육과정은 교사의 선택과 계획에 의해 의도된 교육과정으로 전이되며 이는 실행된 교육과정으로 학생과 교사에 의해 실제 교실에서 실행되어 나타나고, 최종적으로 학생들의 학습에 관여한다(Stien, et al., 2007; 김민혁, 2013에서 재인용). 따라서 교육과정 문서에 명시적으로 진술되어 수열의 가치를 구체적이면서 분명히 드러낸 학습목적은 교육과정의 실행 및 교수·학습 전반에 있어서 중요하고 또 주목해야 할 부분이다.

한편 학교수학에서 막중한 역할을 가지는 교과서는 실제 수업에서 교수·학습의 도구로서 사용되며, 교육과정의 실질적인 집약적 결과물이고, 교사와 학생의 교수·학습에 대한 가이드라인이기도 하다(김구연, 전미현, 2017; 김민혁, 2013). 이에 수학 교과서가 형성하는 수학 내용과 과정의 구조와 특성이 무엇이며 그 구조와 특성이 학생에게 유발하고자 하는 경험은 어떠한지를 살펴보는 것이 필요하다(김구연, 전미현, 2017). 특히 학생들은 교과서를 통하여 교육과정에서 의도한 바, 즉 학습목적을 달성할 수 있어야 할 것이다. 따라서 현재 사용되고 있는 교과서를 분석하여 수열의 학습목적을 달성할 수 있는지 살펴보는 것은 실제적인 의미가 있다. 이 장에서는 학습목적을 세분화하여 "자연 현상이나 사회 현상에 내재된", "다양한 규칙성"은 교과서에 어떻게 나타나는지 확인하고자 한다.

Wijaya, Van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman(2015)은 인도네시아의 수학 교과서에 수록된 과제를 수학적 대상, 기호, 구조에만 관련된 맥락이 없는 과제(no context), 일상이나 상식으로부터의 경험이 주어지지만 그에 대한 이해 없이 주어진 수치만으로 문제를 해결할 수 있는 위장 맥락(Camouflage context)의 과제와 문제를 해결하기 위하여 상황을 이해하여야 하는 관련있는 필수적 맥락(Relevant and essential context)의 과제로 나누어 분석하기도 하였다.

최은(2020)은 삼각법 지도와 관련하여 교과서를 분석하면서, Wijaya, Van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman(2015)의 분석틀을 참고하고 추가적으로 실생활과 연관된 문제에서 사용되는 각이 특수각이 아니면 '실제적 맥락'으로, 특수각이면 '인위적 맥락'으로 분석하였다.

박경희(2014)는 프로이덴탈의 수학화 이론에 기초하여 수학 교과서 단원 도입의 유형을 분석하면서, 우리 주변의 상황에서 혹은 실생활 소재를 이용하여 학습하고자 하는 수학적 개념 혹은 지식으로 이어지는 형태의 탐구 활동인 '실생활 상황'과 실생활과의 연관성 없이 과거에 배운 수학적 개념이나 지식들을 사용하여 혹은 수학 학습을 위한 교구를 이용한 활동이나 실험을 통하여 학습하고자 하는 내용을 이끌어내는 활동 상황인 '수학적 상황'으로 구분하고, 실생활 상황을 다시 현실 맥락과 형식적

맥락으로 구분하였다.

김구연, 전미현(2017)은 중학교 수학교과서에서 학생에게 학습기회가 어떻게 주어지는지 분석하면서 Wijaya, Van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman(2015)의 연구를 참고하고 분석틀을 재구성하여 과제의 상황을 '실생활 기반 상황', 인위적인 문제를 포함한 '가장된 상황', 실제적이고 구체적인 상황 없이 기호나 수식을 활용하여 풀이하는 문제들인 '맥락이나 상황이 없음' 문제로 분류하였다.

본 연구에서는 "자연 현상이나 사회 현상"을 실세계, 즉 현실의 현상이라는 범주로 해석하고, Wijaya, Van den Heuvel-Panhuizen, & Doorman(2015), 최은(2020), 박경희(2014), 김구연, 전미현(2017)의 교과서 분석연구를 참고하여 교과서의 도입, 예제 및 문제, 보조자료를 분석하기 위하여 <표 Ⅳ-1>과 같은 분석틀을 고안하였다.

<표 Ⅳ-1> 교과서 분석틀

규칙의 다양성 / 현실과의 연관성	등차, 등비의 규칙	그 밖의 규칙
맥락 없음		
인위적 맥락		
현실 맥락		

이 때, 해당 상황이나 과제가 수학적 대상, 기호, 구조에만 관련되어 있으면 '맥락 없음'으로 분류한다. 상황이나 과제에 맥락이 있으나 실세계 현상(자연 및 사회현상)과는 관련이 없거나, 단순히 수학사나 문제해결과는 관련이 없는 인위적인 상황을 다루고 있거나, 실세계에서 일어나거나 경험할 수 있다고 보기 어려운 맥락을 다루고 있으면 '인위적 맥락'으로 분류한다. 마지막으로 상황이나 과제에 실세계 현상과 관련이 있는 맥락이 있으면 '현실 맥락[11]'으로 분류한다. 이와 더불어 상황이나 과제

11) 이경화(2016)는 현실적 수학교육에서는 학생들에게 현실적이기만 하다면, 동화 속 환상의 세계와 수학 내의 형식적인 세계도 적절한 맥락으로 여긴다는 Van den Heuvel-Panhuizen(2000)의 해명을 인용하면서 '현실 맥락'을 실세계 현상을

에 나타난 규칙성이 등차, 등비의 규칙인지, 아니면 그 밖의 규칙을 포함하고 있는지를 나누어 규칙의 다양성을 분석한다.

분석 대상 교과서로는 많은 학교가 채택하고 있는 것으로 추정되는 <수학Ⅰ>교과서 4종(A, B, C, D)을 선택하였고 이들 교과서의 대단원 '수열'에 포함된 도입, 문제, 보조자료를 분석하였다. 대다수 교과서에 포함된 '보기'와 같이 본문 설명의 이해를 돕기 위해 간단한 수학적 예시 또는 설명이 주어지는 것은 분석 대상에서 제외하였다. 각 문제에서 서로 관련이 없는 소문제가 있는 경우 각각을 한 개의 문제로 분석하였다. 수학적 귀납법 단원의 경우 수열과 관련이 없는 증명 문제 등은 분석 대상에서 제외하였다. 대단원 정리문제의 경우 여러 단원에 걸쳐 출제된 문제들이 있기에 별도로 분류하였다. 이 때, 각 교과서의 구성 소개를 참고하여 도입, 문제, 보조자료는 <표 Ⅳ-2>와 같이 분류하였다.

가리키는 것으로 오해하는 경향이 전 세계적으로 있었음을 밝혔다. 교육과정에 진술된 학습목적이 '자연 및 사회현상'을 명확하게 지칭하였고 본 연구에서는 이를 현실의 현상으로 해석하였기 때문에 '현실 맥락'이라는 용어를 사용하면서도 수학 내의 형식적인 세계에서의 맥락 등은 배제한다.

<표 Ⅳ-2> 도입, 문제, 보조자료의 분류

	A 교과서	B 교과서	C 교과서	D 교과서
도입	대단원 도입	대단원 도입	대단원 도입	대단원 도입
	중단원 도입	중단원 도입	중단원 도입	중단원 도입
	생각 톡	소단원 도입	준비하기	생각 열기
			다가서기	탐구하기
			생각 열기	
문제	예제	예제	예제	예제
	문제	문제	문제	문제
	수학 활동	창의 탐구 돋보기	함께하기	생각과 표현
	중단원 마무리	함께 생각하는 탐구	생각 넓히기	확인 학습 문제
	대단원 마무리	소단원 확인 문제	중단원 마무리하기	실력을 쌓는 마무리 문제
		중단원 연습 문제	대단원 평가하기	
		대단원 종합 문제		
보조 자료	이야기 수학	생생 수학 체험	탐구&융합	수학 들여다보기
	창의 융합 프로젝트	생생 진로 체험	공학적 도구	생각을 넓히는 수학
	세상 속 수학		수학 이야기	꿈을 키우는 수학
	수학 역량 플러스		뿌리가 되는 수학	
	공학 도구 활용			

2. 분석결과 및 논의

가. 분석예시 및 결과

피보나치는 1202년 자신의 저서 『산반서(Liber abaci)』에서 다음과 같은 토끼의 번식에 대한 문제를 제시하였다.

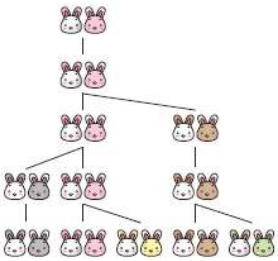
갓 태어난 토끼 암수 한 쌍이 있다. 이 토끼 한 쌍은 태어난 지 두 달이 되는 달부터 매달 암수 한 쌍의 토끼를 낳으며, 새로 태어난 토끼 한 쌍도 태어난 지 두 달이 되는 달부터 매달 암수 한 쌍의 토끼를 낳는다. 일 년 후 토끼는 모두 몇 쌍이 될까? (단, 토끼는 중간에 죽지 않는다.)

토끼 한 쌍이 태어난 달을 시작으로 매달 토끼가 모두 몇 쌍인지 구하여 나열하면

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \cdots$$

과 같은 수열을 얻는데, 이 수열을 '피보나치수열'이라고 한다.

피보나치수열은 해바라기 씨의 배열과 같은 자연 현상에서도 찾을 수 있다.



(출처: 알프레드S. 포사멘티어 외, 『피보나치 넘버스』)

[그림 Ⅳ-1] '현실 맥락'이면서 '그 밖의 규칙'인 보조자료

[그림 Ⅳ-1]과 같은 보조자료는 피보나치의 고서를 인용하였으나, 자손 번식의 상황을 제시하였고 해바라기 씨의 배열과 같은 실제의 자연현상에서 찾을 수 있는 규칙성임을 언급하고 있으므로 실세계 현상과 관련 있는 '현실 맥락'으로 분류하였다. 또한 이는 등차, 등비의 규칙이 아니므로 '그 밖의 규칙'으로 분류하였다. 한편, 피보나치수열이 실세계 현상과 관련이 있는 대표적인 수열임에도 불구하고 A 교과서를 제외한 B, C, D 교과서는 별도의 자료로 피보나치수열을 소개하지 않았다.

수학 들여다 보기

공학 도구 | 개념 탐구

하노이 탑

난이도 상

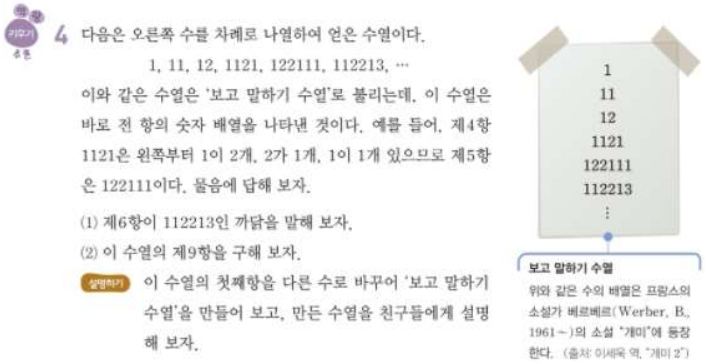
1883년 프랑스의 수학자 뤼카(Lucas, E., 1842~1891)가 처음으로 제기한 '하노이 탑' 문제는 다음과 같다. 이 문제를 수학적 귀납법을 이용하여 해결해 보자.

인도에 있는 한 사원에는 세상의 중심을 나타내는 큰 돔이 있고 그 안에는 세 개의 기둥이 있다. 신이 그 기둥 중 어느 하나에 가장 큰 원판을 바닥에 놓고 위로 올라갈수록 점점 작아지도록 64개의 순금으로 만든 원판을 끼워 놓았다고 한다.

다음 규칙에 따라 원판을 옮길 때, 64개의 원판을 모두 옮기는 데 필요한 최소 이동 횟수는 얼마일까?

규칙1 원판은 한 번에 하나씩만 한 기둥에서 다른 기둥으로 옮길 수 있다.

규칙2 큰 원판이 작은 원판 위에 놓여서는 안 된다.



4 다음은 오른쪽 수를 차례로 나열하여 얻은 수열이다.

1, 11, 12, 1121, 122111, 112213, …

이와 같은 수열은 '보고 말하기 수열'로 불리는데, 이 수열은 바로 전 항의 숫자 배열을 나타낸 것이다. 예를 들어, 제4항 1121은 왼쪽부터 1이 2개, 2가 1개, 1이 1개 있으므로 제5항은 122111이다. 물음에 답해 보자.

(1) 제6항이 112213인 까닭을 말해 보자.

(2) 이 수열의 제9항을 구해 보자.

설명하기 이 수열의 첫째항을 다른 수로 바꾸어 '보고 말하기 수열'을 만들어 보고, 만든 수열을 친구들에게 설명해 보자.

1
11
12
1121
122111
112213
⋮

보고 말하기 수열

위와 같은 수의 배열은 프랑스의 소설가 베르베르(Werber, B., 1961~)의 소설 "개미"에 등장한다. (출처: 이세욱 역, "개미 2")

[그림 Ⅳ-2] '인위적 맥락'이면서 '그 밖의 규칙'인 보조자료

오히려 A, B, C, D 네 교과서 모두 '하노이의 탑'을 보조자료에서 공통적으로 소개하였으며, D교과서를 제외한 A, B, C교과서는 '보고 말하기 수열'을 문제 및 자료로 소개하였다. 하지만 '하노이의 탑'과 '보고 말하기 수열'은 자연 및 사회현상의 규칙성이 아니므로 '인위적 맥락'으로 분류하였다.

8 평면 위에 n개의 원이 있다. 이때 임의의 두 원은 서로 다른 두 점에서 만나고, 어떤 세 개의 원도 한 점에서 만나지 않는다. 이 n개의 원으로 나누어진 영역의 개수를 a_n이라고 할 때, a_n과 a_{n+1} 사이의 관계식을 구하시오.

[그림 Ⅳ-3] ‘맥락 없음’이면서 ‘그 밖의 규칙’인 문제

[그림 Ⅳ-3]과 같은 문제는 B 교과서를 제외한 A, C, D 교과서에서 모두 다루고 있는 문제이다. 문제가 수학적 대상, 기호, 구조에만 관련이 있으므로 ‘맥락 없음’으로 분류하였다. 또한 이는 등차, 등비의 상황이 아니므로 ‘그 밖의 규칙’으로 분류하였다.

[그림 Ⅳ-4] ‘인위적 맥락’이면서 ‘등차, 등비의 규칙’인 문제(1)

[그림 Ⅳ-4]와 같은 도입 상황과 같이 두 종류의 컵케이크를 그림과 같이 배열하는 것은 자연 및 사회현상과 관련이 있다고 보기 어려우며, 수학적 공식을 유도하기 위한 인위적인 상황이므로 ‘인위적 맥락’으로 분류하였다. 또한 이는 등차수열의 합 공식을 유도하는 것이므로 ‘등차, 등비의 규칙’으로 분류하였다.

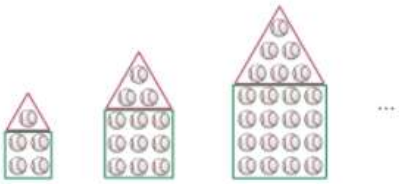
생활 **문제 3** 국제 조류보호 단체에서는 2020년 멸종이 예상되는 넓적부리도요와 같이 세계적 희귀종으로 분류되는 새들에 대해 인공 증식 사업을 벌이고 있다. 개체 수가 1000마리인 어떤 새의 인공 증식 사업이 성공하여 매년 10%씩 개체 수를 늘릴 수 있게 되었다. 인공 증식 사업을 시작한 지 n년 후 이 새의 개체 수를 a_n이라고 할 때, a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구하고, 이를 이용하여 a_3을 구하시오.

넓적부리도요

[그림 Ⅳ-5] ‘인위적 맥락’이면서 ‘등차, 등비의 규칙’인 문제(2)

[그림 Ⅳ-5]와 같은 문제는 실세계의 ‘넓적부리도요’의 예시를 들었지만 문제풀이와는 관련이 없고, 가상의 새가 개체 수가 1000마리이며 매년 정확히 10%씩 개체 수를 늘리는 상황은 실세계에서 경험하기 어려우므로 ‘인위적 맥락’으로 분류하였다. 또한 $a_{n+1}=1.1a_n$으로 정의되므로 공비가 1.1인 등비수열의 규칙이며, ‘등차, 등비의 규칙’으로 분류하였다.

문제 4 다음 그림과 같이 야구공을 △ □ 모양으로 배열할 때, 물음에 답하시오.



[1단계] [2단계] [3단계]

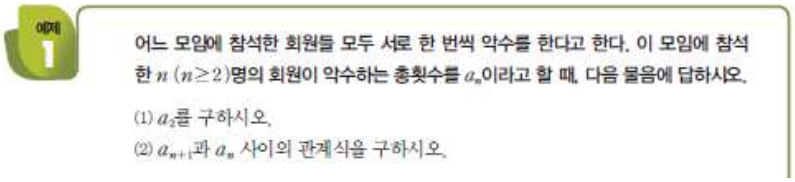
(1) 아래 표는 △ 모양, □ 모양 안에 있는 야구공의 개수를 각각 나타낸 것이다. 표를 완성하시오.

모양 \ 단계	1단계	2단계	3단계	…	n단계
△	1	3	6	…	
□	2^2	3^2	4^2	…	

(2) 위 (1)의 표를 이용하여 [1단계]부터 [n단계]까지 배열된 야구공의 총개수를 구하시오.

[그림 Ⅳ-6] ‘인위적 맥락’이면서 ‘그 밖의 규칙’인 문제

[그림 Ⅳ-6]과 같은 문제 상황과 같이 야구공을 그림과 같이 배열하는 것은 자연 및 사회현상과 관련이 있다고 보기 어려우며, 문제제시를 위한 인위적인 상황이므로 '인위적 맥락'으로 분류하였다. 또한 이는 등차, 등비수열과 관련이 없으므로 '그 밖의 규칙'으로 분류하였다.


예제 1

어느 모임에 참석한 회원들 모두 서로 한 번씩 악수를 한다고 한다. 이 모임에 참석한 n $(n \geq 2)$명의 회원이 악수하는 총횟수를 a_n이라고 할 때, 다음 물음에 답하시오.

(1) a_2를 구하시오.

(2) a_{n+1}과 a_n 사이의 관계식을 구하시오.

[그림 Ⅳ-7] '현실 맥락'이면서 '그 밖의 규칙'인 문제

[그림 Ⅳ-7]과 같은 문제와 같이 n명의 모임에서 서로 악수를 하는 상황은 실세계에서 경험할 수 있는 사회 현상과 관련이 있기에 '현실 맥락'으로 분류하였다. 또한 $a_{n+1} = a_n + n$으로 정의되는 계차수열의 규칙성을 다루므로 '그 밖의 규칙'으로 분류하였다. 한편, 이 문제는 A, B, C, D 네 교과서 모두의 '수학적 귀납법(3단원)' 단원에서 다루고 있었으며 이 문제가 해당 단원의 유일한 '현실 맥락'문제이자 네 교과서의 수열 단원 전체 644문제에서 유일한 '현실 맥락'과 '그 밖의 규칙'을 함께 다룬 문제였다.

교과서에 자연 및 사회현상이 어떻게 드러나고, 다양한 규칙성이 어떻게 드러나는지 분석한 전체 결과는 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> 교과서 분석 결과 - 전체

			A 교과서		B 교과서		C 교과서		D 교과서		합계	
			등차 등비	그 밖	등차 등비	그 밖	등차 등비	그 밖	등차 등비	그 밖	등차 등비	그밖
1단원	도입	맥락 없음		1	1		2	1			3	2
		인위적 맥락	2		1		1		4	1	8	1
		현실 맥락	3		2	1	1	1	3		9	2
	문제	맥락 없음	64	4	70	7	53	7	66	9	253	27
		인위적 맥락	2	1	5	1	4		3		14	2
		현실 맥락			2		1		3		6	
	보조 자료	맥락 없음										
		인위적 맥락	1		1		1	1	1		4	1
		현실 맥락	1		1		2		1		5	
2단원	도입	맥락 없음	2					1	1		3	1
		인위적 맥락	1		1			1	1		3	1
		현실 맥락				1		1				2
	문제	맥락 없음	16	29	20	44	6	26	10	32	52	131
		인위적 맥락		1		2		1				4
		현실 맥락										
	보조 자료	맥락 없음		2				1				3
		인위적 맥락				2				1		3
		현실 맥락										
3단원	도입	맥락 없음										
		인위적 맥락	1						1	1	2	1
		현실 맥락			1		1				2	
	문제	맥락 없음	5	9	13	13	5	10	6	11	29	43
		인위적 맥락		2		3	1	1		1	1	7
		현실 맥락		1		1		1		1		4
	보조 자료	맥락 없음										
		인위적 맥락		1		1		1		1		4
		현실 맥락										
단원 정리	도입	맥락 없음										
		인위적 맥락										
		현실 맥락										
	문제	맥락 없음	8	9	10	11	5	7	10	9	33	36
		인위적 맥락	1					1			1	1
		현실 맥락										
	보조 자료	맥락 없음										
		인위적 맥락		1		1				1		3
		현실 맥락		1				1	1		1	2
합계			107	62	128	88	83	63	111	68	429	281

<표 Ⅳ-4> 교과서 분석 결과 - 빈도수 요약(1)

	등차, 등비의 규칙	그 밖의 규칙	합계
맥락 없음	373(52.5%)	243(34.2%)	616(86.8%)
인위적 맥락	33(4.6%)	28(3.9%)	61(8.6%)
현실 맥락	23(3.2%)	10(1.4%)	33(4.6%)
합계	429(60.4%)	281(39.6%)	710(100%)

빈도수 분석의 결과는 다음과 같다. 첫째, 교과서에서 자연 및 사회현상의 규칙성을 경험할 기회가 부족했다. 교과서에서 현실 맥락, 즉 자연 및 사회현상을 다루고 있는 문제나 자료는 4.6%로 현격히 적었다. 맥락이 없거나 인위적인 맥락을 가지는 문제나 자료가 각각 86.8%, 8.6%로 현실 맥락에 비해 상대적으로 많음을 알 수 있었다.

<표 Ⅳ-5> 교과서 분석 결과 - 빈도수 요약(2)

	분석 대상	현실 맥락	그 밖의 규칙	현실맥락과 그 밖의 규칙
도입	40	15	10	4
문제	644	10	255	4
보조자료	23	8	16	2
합계	755	33	281	10

학생들이 교과서 문제에서 마주하는 규칙성은 대다수가 맥락이 없거나 자연 및 사회 현상이라고 하기는 어려운 인위적인 맥락을 기반으로 하고 있었다. 특히 등차, 등비가 아닌 규칙성과 관련한 현실 맥락 문제는 4개의 교과서에서 도합 4개에 불과했다.

둘째, 다양한 규칙성을 경험할 기회가 상대적으로 부족했다. 교과서에서 다루는 자료나 문제 전체의 60.4%가 등차, 등비의 규칙을 가진 수열

과 관련한 것이었다. 비록 등차, 등비수열이 수열의 3개 단원 중 한 개의 단원을 구성하고 있으나, '수열의 합', '수학적 귀납법'과 같은 단원에서도 등차, 등비의 규칙을 가진 수열이 상당수 다루어지고 있었다. 특히 자연 및 사회현상과 관련이 있으면서 등차, 등비가 아닌 규칙성을 다루는 문제나 자료는 전체의 1.4%로 매우 드물었다. 현실맥락과 등차, 등비가 아닌 규칙을 함께 다루는 문제 및 자료는 '도입'과 '보조자료'에 60%가 치중되어 있었는데, 실제 수업에서 33%의 교사들이 읽기자료를 활용하지 않는다는 과학교과의 선행연구(임미경, 유미현, 남석현, 2012)로 미루어보아 해당 내용이 본문이나 문제로 제시되었을 때에 비하여 학생들이 실제 수업에서 상대적으로 부족하게 경험할 가능성이 있다.

종합하면, "자연 및 사회현상의 다양한 규칙성을 찾아 정당화하고 일반화"하는 경험을 학생들이 원활히 하고 있다고 보기는 어려웠다. 즉, 학생들이 교과서를 통해 교육과정에 진술된 학습목적[12]을 달성하기 어려울 것으로 보인다.

12) "수열을 통해 자연 현상이나 사회 현상에 내재되어 있는 다양한 규칙성을 찾아 일반화된 식으로 표현하고 수학적으로 정당화함으로써 수학의 유용성과 가치를 경험하고 귀납적 추론 능력과 연역적 추론 능력을 기를 수 있다(교육부, 2015)."

나. 논의

분석 결과와 관련한 논의는 다음과 같다. 첫째, 교육과정에 진술된 학습목적을 달성하기 위하여 자연 및 사회현상과 수열의 관계를 교과서에 다수 수록하는 방안을 고려할 수 있다. 자연 및 사회현상과 다양한 규칙성을 가진 수열의 관계로는 실생활과 관련한 대표적인 수열인 피보나치 수열을 포함하여, 다음과 같은 예시들이 있다. Titius와 Bode는 지구로부터 태양계의 n번째 행성이 태양으로부터 떨어진 거리 d_n이 $0.4+0.3\times2^n$ 꼴의 점화식으로 유사하게 나타남을 공표하고 $n=3$일 때의 행성을 아직 찾지 못했음을 인식한 후 $n=3$일 때 점화식을 만족하는 소행성 세레스를 찾아내었고 이를 포함한 화성과 목성 사이의 소행성대를 발견하는 데에 기여하기도 하였다. 역수로 이루어진 수열이 등차수열이 되는 조화수열 역시 '블럭 쌓기 문제(Block-stacking problem)'[13]에도 활용되며, 현악기의 현의 길이가 조화수열의 형태일 때 화음이 가장 듣기 좋다고 하여 붙은 이름인 만큼 실생활과 연관이 있다. 교과서 네 종에서 모두 다루고 있는 '사람들끼리 악수하는 문제'는 계차수열을 $a_{n+1}=a_n+n$과 같이 귀납적으로 정의하는 문제이며, 부부 동반 모임으로서 '부부끼리는 악수하지 않는다.' 등의 조건을 포함하여 다양한 문제 상황으로 변형이 가능하다. 이와 같은 예시들을 포함하여 다양한 사례를 발굴하고 교과서에 수록하는 것이, 만약 학습목적의 진술을 유지한다면, 학습목적 달성을 위한 대안이 될 수 있을 것이다. 그러나, 단순히 실생활 문제를 많이 수록하는 것이 바람직한 방향인지에 대해서는 심도 있는 논의가 필요할 것이다.

둘째, 다양한 규칙성을 가지는 수열을 교과서에 보다 많이 수록하는 방안을 고려할 수 있다. 비록 교육과정에서 등차, 등비수열을 별도의 단원으로 설정하여 분석 과정에서 등차, 등비의 규칙성이 많이 나타날 수는 있으나, 다양한 규칙성을 다룰 수 있는 단원인 수열의 합이나 수열의 귀납적 정의 단원에서도 등차, 등비의 규칙이 다수 분포하였다.

---

13) 정역학(Statics)에서, 테이블 가장자리에 블록을 쌓는 것에 관한 퍼즐

장현석, 이세형, 이동원(2020)은 수열에 대한 인식 분석과 면담 결과, 학생들은 규칙이 없는 수열이 존재한다고 인식함과 동시에 등차수열 또는 등비수열이 아니면 수열의 규칙이 없다고 생각하고 있음을 밝혔다. '수열은 증가하거나 감소해야 한다'에 대해 82.8%의 조사 대상 고등학생들이 긍정적인 반응을 보였고 '수열은 항들 사이에 차이가 같아야 한다'에 대하여 72.4%의 조사 대상 고등학생들이 긍정적인 반응을 보였음을 밝히면서 많은 학생들이 수열의 항들이 변화(증가, 감소)하고 증가 감소 폭이 같아야 한다고 인식하고 있음을 확인했다. 장현석, 이세형, 이동원(2020)은 위와 같은 인식이 고등학교에서 수열을 주로 등차수열 또는 등비수열만 다루어 온 결과로 해석하였다. 이러한 선행연구결과를 바탕으로 할 때 학습목적의 달성뿐만 아니라 수열과 관련한 잘못된 인식을 변화시키기 위해서도 학생들이 교과서에서 등차, 등비가 아닌 다양한 규칙성을 경험하는 것이 필요할 것이다.

셋째, 주어진 학습목적의 수정을 고려할 수 있다. 분석에 앞서 살펴보았듯이, 수학과 실생활과의 연계를 강화한다는 배경(박경미 외, 2015)하에 교육과정에서 수열의 학습목적이 자연 및 사회현상을 강조하는 방향으로 설정된 것으로 보인다. 하지만 수열의 대수적 가치는 수학 내적인 탐구과정에서 나타나는 수치적 패턴을 일반화하는 경험도 포함하며, 수열의 해석적 가치는 실생활과 관련이 있기 보다는 수학적 개념의 기초와 관련이 있다. 따라서 교육과정에서 이들 가치를 반영한다면 수열의 학습목적 진술을 자연 및 사회현상으로 제한하는 것을 넘어 보다 포괄적인 방향의 진술도 대안이 될 수 있을 것이다.

Ⅴ. 결론

1. 요약

본 연구는 교육과정 개정을 거치며 학교수학의 수열 개념이 본래의 가치를 잃어가고 있다는 문제의식과, '수열을 왜 가르치고 배워야 하는가?'라는 질문에서 출발하여 학교수학의 수열 개념에 대해 고찰하고자 하였다. 보다 구체적으로, 역사적 분석을 통해 수열의 교육적 가치를 탐색하는 것에서 시작하여 이러한 가치가 국내외 교육과정에는 어떻게 반영되어 있는지 교육과정 비교분석을 통하여 살펴보았다. 또한 상술한 질문에 대한 명시적 답이 될 수 있다는 점에서 가치 반영의 결과물 중 하나인 '학습목적'에 주목하였고, 교육과정에 진술된 '학습목적' 하에 교과서가 어떻게 구성되어 있는지 교과서 분석을 통하여 살펴보았다.

선행연구 검토 결과 각종 국내 연구에서 수열, 급수, 극한은 교수학습 연구의 소재로 활발하게 다루어지고 있었다. 수열과 관련한 연구들은 주로 수열의 극한지도 방법, 보조수단을 활용한 효과적인 수열 교수학습 방법, 수열과 관련한 잘못된 인식과 이를 해결하기 위한 방법 등에 초점을 맞추고 있었다. 그러나 수열의 교육적 가치에 초점을 맞추어 단원 구성의 적정성 등을 다룬 연구는 찾기 어려웠다. 교육과정 개정 방향 설정에 기여할 수 있는 방안이 될 수 있다는 점에서 수열이 왜 교육내용으로서 선정되었는지를 포함한 수열의 교육적 가치에 대한 연구가 필요하였다. 이에 본 연구에서는 수열의 가치 탐색과 가치 반영의 실제를 살피기 위하여 역사, 교육과정, 교과서에 대한 분석적 접근을 시도하기로 하였고 다음과 같은 연구 질문을 설정하였다.

1. 교육내용으로서의 수열의 역사는 어떠하며 이를 통해 교육내용으로서의 수열의 가치로 어떤 것들을 제안할 수 있는가?
2. 교육내용으로서의 수열의 가치는 국내 교육과정에 어떻게 반영되어

있고, 해외 교육과정과는 어떤 차이가 있는가?

3. 교과서의 수열 단원에서, 교육과정에 드러난 학습목적에 따른 자연 및 사회현상의 다양한 규칙성은 어떻게 나타나는가?

첫 번째 연구 질문에 답하기 위하여 Ⅱ장에서 교육내용으로서의 수열의 역사를 분석하였고, 다음의 결과를 얻을 수 있었다.

수열은 고대 이집트시대 이전부터 교육내용으로서 존재하였고, 과거의 산술 교과서에 지속적으로 수록되어 20세기 초기 수학 교육과정에 포함되게 되었으며, 여러 번의 교육과정 변화 속에서도 수열 개념은 중등학교의 교육내용으로 유지되어 현재 사용되고 있는 교과서에도 수록되게 되었다. 고대 이집트나 인도 등에서는 주로 상업, 천문학 등의 실생활과 연관된 개념으로서 수열을 다루었고, 고대 그리스에서는 실생활 이외에도 수학을 탐구할 때에 마주하는 패턴을 수치화하고 해석하는 등의 필요에 의해 수열을 다루었다. 따라서 수열은 고대로부터 여러 현상에서 마주하는 패턴을 수치화하거나 해석하는 데에 이용되었다고 종합할 수 있다. 한편 중등학교에서 극한 및 무한급수를 가르친 역사는 상대적으로 짧았는데, 20세기 초 미적분법을 중등학교에서 지도할 것을 주장한 수학교육 개혁운동에 의하여 미적분의 논리적 기초개념인 극한 개념과 그 응용으로서 무한급수 개념을 중등학교에서 본격적으로 다루게 되었다. 이러한 역사적 배경을 바탕으로 본 연구에서는 수열의 교육적 가치 중 하나로 '패턴과 일반화의 경험'을 제안할 수 있었고 이를 '수열의 대수적 가치'라 하였다. 또한 극한과 급수를 논리적 기초로 하는 미적분학의 중요성과 극한 및 무한급수 개념자체의 중요성을 토대로 '극한과 무한급수의 기초개념'을 또 다른 수열의 교육적 가치로 제안할 수 있었고 이를 '수열의 해석적 가치'라 하였다.

두 번째 연구 질문에 답하기 위하여 Ⅱ장에서 국내 교육과정에 반영된 수열의 교육적 가치를 살피고 Ⅲ장에서 국내외 교육과정을 비교분석하였고, 다음의 결과를 얻을 수 있었다.

먼저, 수열과 관련한 거의 모든 단원에서 성취기준 선정 근거로 다양

한 규칙성이 언급되기 보다는 극한, 미적분에 관한 언급이 있는 것으로 미루어보아 2009 개정교육과정은 수열의 대수적 가치보다는 수열의 해석적 가치를 지향하고 있음을 알 수 있었다. 한편, 2015 개정교육과정 문서에서는 학습목적으로 해석되는 '도입글'을 별도로 제시하여 실세계 현상에 내재되어 있는 다양한 규칙성 및 일반화를 강조하고 있었다. 이로써 2015 개정교육과정의 학습목적에는 수열의 대수적 가치가 주로 반영되어 있음을 알 수 있었으며 해석적 가치를 주로 반영한 2009 개정교육과정과는 차이가 있었다.

이 때, 지향하는 가치, 학습목적 등에서 차이가 있었음에도 2009 개정교육과정과 학습 내용 구성, 성취기준을 그대로 유지하고 있다는 점은 교육과정에서 나타난 수열과 관련한 혼란이라고 할 수 있었으며, 미적분의 도입방식이 수열과 관련이 없도록 변화했음에도 '수열의 극한'과 관련하여 "미분과 적분의 기초 개념"이라는 진술을 유지하고 있다는 점 역시 수열과 관련한 혼란이라고 할 수 있었다. 이러한 혼란과 함께 학습량 감축을 강조하는 우리나라의 교육현실에 부딪히고, 여러 이해관계가 맞물린 교육과정의 개정 과정, 그리고 그 과정에서 수열이라는 개념이 가진 교육적 의의보다는 미적분의 변화에 초점이 맞춰지면서 학교수학의 수열 개념은 본래의 가치를 잃어가고 있다는 우려를 제기할 수 있었다.

본 연구에서는 일본, 영국, 핀란드의 교육과정에서 수열의 가치를 어떻게 반영하고 있으며, 수열과 관련한 내용은 어떻게 다루어지고 있는지 비교분석하였다. 분석의 결과, 각 국가에서는 미적분의 도입방식에서 수열의 극한이나 급수개념을 사용하지 않음에도 불구하고 수열의 해석적 가치를 반영하여 무한급수를 교육과정에 포함시켰으나, 필수 교육과정에서는 수열의 극한 및 무한급수를 다루지 않는다는 공통점이 있었다. 극한 및 무한급수의 도입에는 국가마다 심화학습의 방향, 학습내용의 분량에 차이가 있었다.

일본, 영국, 핀란드의 교육과정에서는 수열의 대수적 가치를 비중 있게 반영하여 다양한 규칙성을 경험할 수 있는 여러 가지 수열, 점화식과 일반항을 학습할 수 있는 단원 및 문제를 포함하고 있었다. 특히 영국, 핀

란드는 중학교 때 수열의 개념을 도입하여 선행지식을 쌓고 고등학교에서 여러 가지 수열의 학습을 하는 데에 용이하도록 한 점을 찾을 수 있었다. 반면 우리나라의 교육과정에서는 계차수열 등의 여러 가지 수열을 다루지 않으며 귀납적으로 정의된 수열에 대하여 학습하나 그 일반항을 다루지 않는다(교육부, 2015). 네 국가 모두 미적분학 도입에서 수열의 역할을 약화한 대신 패턴과 일반화 경험으로서의 수열의 대수적 가치를 반영하고 있었으나 우리나라의 교육과정에서는 여러 가지 규칙성과 관련한 내용이 상대적으로 부족함을 알 수 있었다. 또한 우리나라의 교육과정에서는 수열과 관련한 혼란이 나타난 반면 일본, 영국, 핀란드에서는 교육과정 내에서 여러 가지 규칙성 및 일반화를 경험할 수 있는 수열 단원 구성이 되어 있었으며, 혼란이 나타난 부분을 찾기 어려웠다.

세 번째 연구 질문에 답하기 위하여 Ⅳ장에서 국내 교과서를 분석하였고, 다음의 결과를 얻을 수 있었다.

첫째, 교과서에서 자연 및 사회현상의 규칙성을 경험할 기회가 부족했다. 교과서에서 현실 맥락, 즉 자연 및 사회현상을 다루고 있는 문제나 자료는 4.6%로 현격히 적었다. 학생들이 교과서 문제에서 마주하는 규칙성은 대다수가 맥락이 없거나 자연 및 사회 현상이라고 하기는 어려운 인위적인 맥락을 기반으로 하고 있었다.

둘째, 다양한 규칙성을 경험할 기회가 상대적으로 부족했다. 교과서에서 다루는 자료나 문제 전체의 60.4%가 등차, 등비의 규칙을 가진 수열과 관련한 것이었다. 자연 및 사회현상과 관련이 있으면서 등차, 등비가 아닌 규칙성을 다루는 문제나 자료는 전체의 1.4%로 매우 드물었다.

종합적으로, 자연 및 사회현상의 다양한 규칙성을 찾아 정당화하고 일반화하는 경험을 학생들이 원활히 하고 있다고 보기는 어려웠다.

2. 시사점 및 제언

2020년 수능체제의 개편 이후에도 수열의 귀납적 정의나 수열의 합 공식 등을 중심으로 복잡하고 난해한 문제가 지속적으로 출제되고 있다. 또한 등차수열 $\{a_n\}$의 합공식이 $\sum_{k=1}^{n} a_k = An^2 + Bn + C$ 꼴이라는 사실을 바탕으로 수열의 이산적인 성질은 편의에 의해 무시된 채 연속적인 이차함수 그래프의 성질로 복잡한 문제를 해결하는 방법, '미분법'처럼 등차수열의 합 공식으로부터 일반항 $a_n = 2An + B - A$임을 쉽게 암기하는 방법, 도형과 관련한 등비급수 문제에서 첫째항과 둘째항만으로 공비를 추측하여 이후의 규칙성은 무시한 채 쉽게 문제를 해결하는 방법 등이 학생들 사이에 공공연하게 공유되고 있다. 위와 같은 상황이 수열 교육에서 교육과정에서 의도된 바, 즉 다양한 규칙성을 경험하고 이를 정당화하며 추론능력을 기르는 방향이라고 생각하기는 어렵다. 비록 상술한 내용이 이론보다는 현실에 맞닿아있어 논의 주제로서 비정형적이자 가벼워 보이고, 그 실체가 명확하지 않다고 해서, 현실을 마주한 연구자로서 외면하는 것은 실제의 교육현장을 외면하는 것과 같을 것이다. 이러한 맥락에서 본 연구자는 '수열을 왜 가르치고 배우는가?' 라는 근본적인 물음과 함께 학교수학의 수열 개념에 대해 분석적으로 고찰하였다. 그 결과, 패턴과 일반화의 경험, 극한과 무한급수의 기초개념이라는 수열의 교육적 가치를 제안할 수 있었다. 2015 개정교육과정 문서에서 학습목적을 통하여 패턴과 일반화의 경험으로서의 수열의 가치를 강조하였음에도 불구하고 해외 교육과정과 비교하였을 때 다양한 규칙성을 경험할 수 있는 내용이 상대적으로 부족하였고, 다른 나라에서는 찾아볼 수 없었던 교육과정 내 수열과 관련한 혼란을 찾을 수 있었다. 이는 지속적으로 학습량 감축이 요구되는 우리나라의 교육 현실(신성균 외, 2005; 박경미 외, 2015)과도 관련이 있을 것이며, 미적분의 변화에 교육과정 개정의 초점이 맞추진 것에 비해 그 변화의 영향을 받은 수열 개념과 관련하여서는 상대적으로 해외 사례의 분석이나, 관련 연구가 부족한 상황에 기인할

것이다. 교육과정 문서의 진술은 교사와 학생에 따라 참고 여부나 수업에 끼치는 영향이 달라지겠으나, 국가가 공인한 문서이므로 공신력을 가지며, 수업의 실제와 교수·학습 설계에 영향을 끼칠 수 있다. 따라서 본 연구에서 발견한 교육과정 문서의 수열과 관련한 혼란이나 해외 교육과정과의 차이와 관련하여 추가적인 논의가 필요할 것이다.

한편 실제 수업에서 사용되고 있는 교과서는 교육과정에 진술된 수열의 학습목적을 달성할 수 있도록 하는 충분한 경험을 제공한다고 할 수 없었다. 이와 관련하여 본 연구에서는 교육과정에 진술된 학습목적을 달성하기 위하여 자연 및 사회현상과 수열의 관계를 교과서에 다수 수록하는 방안, 다양한 규칙성을 가지는 수열을 교과서에 보다 많이 수록하는 방안, 교과서보다는 교육과정에 진술된 학습목적의 수정을 고려하는 방안에 대하여 논의가 필요함을 밝혔다. 하지만 교육과정의 집약적 결과물(김민혁, 2013)인 교과서의 특성상 교과서의 내용 구성은 단원 편성, 지도상의 유의점 등을 포함하고 있는 교육과정 문서에 지대한 영향을 받는다. 그러므로 교육과정은 유지한 채 교과서에 큰 변화를 주는 것은 다소간 어려움이 있을 것이다. 이에 교육과정의 변화가 선행되고 이로부터 하향적인 변화가 유도되는 방안도 논의할 필요가 있을 것이다.

이상의 연구 결과를 종합하여 본 연구에서는 학교수학의 수열 개념에 대한 시사점을 다음과 같이 도출하였다.

첫째, 수열의 가치와 더불어 일본, 핀란드, 영국 등의 해외 사례를 참고하여 수열 단원의 재구성에 대한 논의가 이루어질 필요가 있다.

2015 개정교육과정에서 주목할 변화는 바로 정적분의 도입방식 변화이다. 이에 따라 학교수학에서 핵심적인 내용으로 여겨지는 미적분(박진희 외, 2018)에 개정 관련 연구의 초점이 자연스럽게 맞춰져 있었다(박경미 외, 2015; 이기돈, 2019; 박진희, 박미선, 권오남, 2018; 신수진, 조완영, 2018). 미적분의 변화에 크게 영향을 받는 것 중 하나는 학교수학의 수열 개념이며, 실제로 2015 개정교육과정에서의 정적분의 정의 변화는

<수학Ⅱ>에서 수열의 극한과 급수의 삭제에 대한 논의와 함께 이루어졌다(박경미 외, 2015). 하지만 미적분처럼 수열도 학교수학에서 하나의 중요한 개념이며, 단순히 내용 경감의 대상으로 그치지 않고 수열을 학습하는 이유와 내용 선정의 배경 등을 포함한 심도 있는 논의가 필요할 것이다. 2009 개정교육과정에서 강조되었던 극한과 급수의 기초개념으로서의 수열의 가치가 2015 개정교육과정에서는 약화됨에 따라, 수열의 또 다른 교육적 가치인 다양한 규칙성 경험에 대하여 실제적으로 변화를 줄 수 있는 방안에 대한 논의가 필요할 것이다. 미적분의 도입방식 변화 과정에서 해외 사례를 참고하였듯이(박경미 외, 2015), 본 연구의 결과로서 제시된 수열 개념과 관련한 일본, 영국, 핀란드의 사례를 참고하여 수열 관련 단원이 재구성 될 수 있을 것이다. 이 과정에서, 본 연구에서 제시된 2015 개정교육과정에 나타난 혼란은 앞으로의 개정 방향 설정에 대한 기여를 할 수 있을 것이다. 학습량 감축이라는 교육현장의 요구, 리만합의 극한으로 정적분을 정의하는 방법을 소개하더라도 수열의 극한이나 무한급수 없이 지도할 수 있다는 신수진, 조완영(2018)의 견해, 계차수열 등의 내용이 포함된 해외 교육과정의 수열 단원 구성을 바탕으로, 본 연구에서는 극한 및 무한급수의 내용을 감축하고 계차수열, 귀납적으로 정의된 수열의 일반항 등 기존에 삭제되었던 다양한 규칙성을 경험할 수 있는 단원을 교육내용으로 다시 포함하는 방안을 수열 단원 변화의 한 가지 대안으로 제안한다. 이는 현재의 미적분 도입 패러다임이 유지되는 상황에서 의미가 있을 것이다.

둘째, 수열의 가치와 수학교육의 목적을 고려하여 학습목적으로 해석될 수 있는 교육과정 문서의 내용을 재진술하는 방향에 대해 논의가 이루어질 필요가 있다.

2015 개정교육과정에서는 '도입글'을 두어 다루게 될 수학 내용이 어떤 수학 내·외적 유용성을 지니는지, 학생들이 그 내용을 배움으로써 어떤 능력을 함양하게 되는지 등을 기술하였다(박경미 외, 2015). 따라서 이는

학습목적으로 해석될 수 있는 교육과정 문서의 진술이다. 학습목적은 '왜 특정 개념을 가르치고 배우는가?'라는 질문에 대한 답으로, 교사와 학생의 가치인식, 흥미에 영향을 줄 수 있다는 점에서 수학교육에서 중요한 의미를 가진다. 하지만 진술된 학습목적은 특정 개념의 가치를 오히려 제한하고 학생들에게 혼란을 유발할 수 있다. 예를 들어, "수열을 통해 자연 현상이나 사회 현상에 내재되어 있는 다양한 규칙성을 찾아 일반화된 식으로 표현"하는 것으로 시작하는 수열의 학습목적 진술은, 해석에 따라 수열 개념을 학습하는 이유를 마치 실생활의 규칙성을 찾아 식으로 표현하는 데에 필요하기 때문인, 즉 실생활의 문제를 해결하기 위해 필요하기 때문인 것처럼 보이게 한다. 하지만 본 연구에서 살펴본 바와 같이 수열의 교육적 가치와 역사적인 활용은 실생활에 국한되지 않았으며, 교과서는 실생활의 다양한 규칙성 경험을 제공하지 못하였다. 또한 대학수학능력시험에서 지속적으로 출제되고 있는, 실생활과 관련이 없는 수열 단원의 고난도 문제는 이러한 목적 하에서 학습한 학생들을 충분히 당황케 할 수 있을 것이다.

본 연구의 결과로 도출된 교과서와 학습목적간의 괴리가 제공하는 시사점은 교과서에 실생활 문제를 다량으로 포함해야 한다는 것이 아니라, 오히려 학습목적의 재진술에 대한 필요성일 수 있다. 이에 본 연구에서는 '수학적 안목'이라는 표현을 사용하여, 학습목적의 재진술에 대해 한 가지 대안을 제시하고자 한다. 20세기 초 수학교육 근대화 운동을 선도하여 현대 수학교육의 기본 바탕을 제시한(우정호 외, 2007) Klein은 수학 교과를 통해 주변 현상계에 대한 수학적 관찰 능력, 즉 우리 주변을 '수학적 안목'으로 볼 수 있는 능력을 육성하고자 하였다(강현영, 2011). 그에 따르면 수학의 가치는 생활의 문제를 해결하거나 필요한 정보를 제공해 줄 수 있는가에 그치지 않고, 사물이나 현상을 파악할 줄 아는 안목을 가져다 줄 수 있는가에 의해 정당화된다(강현영, 2011). Klein 이후 20세기의 학교 교육과정은 Dewey와 Bruner의 이론에 근거한 교육과정이 주류를 이루었는데(김연식, 정영옥, 1997), '수학적 안목'은 Dewey 교육론의 수학교육적 해석이자 구체화로 간주되는(우정호, 2000)

Freudenthal의 수학교육론과 Bruner의 이론 모두에서 엿볼 수 있다. 그 중 Bruner는 '지식의 구조'를 가르침으로써 일반적 전이가 가능하게 되어 현상을 수학적 구조와 관련지어 볼 수 있는 '수학적 안목'을 갖는 것을 목표로 하였다고 볼 수 있으며, Freudenthal 또한 Bruner의 이러한 의도를 실현시키고자 '수학적 안목'을 개발하여 수학이 학습자의 인격으로 통합되도록 하는 것을 중요시하였다(김연식, 정영옥, 1997). 이 때 Bruner는 '현상'을 수학 내적인 현상으로 바라보았지만, Freudenthal은 수학 내적인 현상만이 아니라 보다 풍부한 수학 외적인 현상을 동원하도록 했다(김연식, 정영옥, 1997). 비록 Bruner와 Dewey의 교육과정은 서로 대조적인 교육 현상을 초래하였으나(김연식, 정영옥, 1997) 이들 모두의 수학교육 목적은 '수학적 안목'을 향하고 있음을 알 수 있다. 2015 개정교육과정의 수열의 학습목적을 다시 살펴보면, '현상'이 수학 외적인 현상인 '자연 현상 및 사회 현상'에 국한되어 있음을 확인할 수 있다. 이는 앞서 살펴본 Bruner나 Freudenthal의 이론에서의 '현상'과는 다른 의미를 지닌다. 또한 '추론 능력을 기르는 것'을 궁극적인 목적으로 설정하였으나 "규칙성을 찾다", "식으로 표현하다", "정당화하다"와 같은 문제해결의 행위에 일차적인 목적이 있는 것으로 해석된다. 즉, 수열을 통해 실생활의 문제를 해결함으로써 추론 능력을 기를 수 있는 것처럼 진술되어 있다. '문제를 해결하는 것'과 '문제를 해결할 수 있는 안목을 기르는 것'은 목적으로서 분명 다른 맥락이며, Klein, Bruner, Freudenthal의 수학교육론에서 수학교육의 목적은 모두 후자의 진술과 가까울 것이다. 따라서 "수학 내·외적인 현상에서 패턴과 일반화 가능성을 파악하는 수학적 안목을 기르는 것"을 수열의 학습목적으로서 재진술하는 것은 Klein, Bruner, Freudenthal이 말한 수학교육의 목적과 본 연구에서 제시된 수열의 교육적 가치를 두루 함의하고, 교과서와 학습목적간의 괴리와 같은 상황이 정당화 될 수 있다는 측면에서 학습목적 재진술의 한 가지 대안이 될 수 있을 것이다.

한편, 본 연구에서 살펴본 영국, 핀란드의 교육과정에서는 수학교육의 목적은 제시하였으나 각 개념에 대한 학습목적은 제시하지 않았다. 상술

하였듯이, 진술된 학습목적은 특정 개념의 가치를 오히려 제한하고 학생들에게 혼란을 유발할 수 있다. 따라서 학습목적으로 해석될 여지가 있는 진술을 삭제하는 것도 한 가지 대안이 될 수 있을 것이다. 본 연구에서는 진술된 학습목적이 실제적으로 어떤 영향을 미치는지 자세히 다루지 않았기 때문에, 추후 학습목적의 영향에 대한 심도 있는 논의가 필요할 것이다.

끝으로 본 연구는 학교수학의 개념들이 어떻게 교육내용으로 선정되었는지, 따라서 해당 개념의 교육적 가치로 어떤 것들이 제안될 수 있는지에 대한 후속연구를 제안한다.

수학교육에서의 어떤 수학 개념의 역사는 교육내용의 적정성이라는 측면에 의해 어떤 수학 개념이 발달한 역사와는 구분될 것이다. 예를 들어, 미적분학의 정립 이후 미분방정식이나 미분기하학 등의 분야는 비약적인 발전을 거두었음에도 불구하고 우리나라의 학교수학에서는 이를 다루지 않는다.

'어떤 수학 개념을 언제부터 학교에서 가르쳤는가?' 라는 흥미로운 질문은, 답을 찾아가는 과정에서 해당 개념이 가진 교육적 가치를 발견할 수 있다는 데에서 의의가 있다. 왜냐하면 어떤 개념이 학교수학에서 다루어지고, 교육이나 학계의 전문가들이 지속적으로 가르치도록 결정한 배경에는 분명 합당한 이유가 있었을 것이고, 그 이유가 바로 개념의 교육적 가치가 될 수 있기 때문이다. 따라서 학교수학의 개념들이 어떻게 교육내용으로 선정되었는지, 그에 따라 해당 개념의 교육적 가치로 어떤 것들이 제안될 수 있는지에 대한 연구가 활발하게 진행되기를 희망하며, 이러한 움직임이 만연한 선행학습, 수학을 포기한 학생들, 비중이 높아지는 사교육 등 산발한 현실의 문제 속에서 무엇이 정말 중요한지를 밝혀, 수학교육이 중심을 잡을 수 있도록 하는 시사점을 줄 것이라 믿는다.

참 고 문 헌

강현영(2011). F. Klein 의 수학교육에 대한 고찰. **한국수학사학회지, 24**(2), 71-89.

고성은, 이진호, 이승우, 차순규, 김윤희 외(2018a). **고등학교 수학 Ⅰ.** 서울: 좋은책신사고.

고성은, 이진호, 이승우, 차순규, 김윤희 외(2018b). **고등학교 수학 Ⅰ 교사용 지도서.** 서울: 좋은책신사고.

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시 제2011-361호[별책 8].

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제2015-74호[별책 8].

교육인적자원부(2007). **수학과 교육과정**. 교육인적자원부 고시 제2007-79호[별책 8].

국립국어원(1999). **표준국어대사전**.

권영인, 서보억(2005). 수열단원을 중심으로 개인차를 고려한 교과서에 관한 연구. **한국수학교육학회지 시리즈 E <수학교육 논문집>, 19**(1). 137-149.

김구연, 전미현(2017). 중학교 수학교과서가 학생에게 제공하는 함수 학습기회 탐색. **학교수학, 19**(2), 289-317.

김경화(2008). 적분개념의 발달: 리만적분에서 르베그적분으로의 이행을 중심으로. **한국수학사학회지, 21**(3), 67-96.

김기원, 왕수민(2003). 고등학교 수학에서 수열의 극한개념의 지도에 관한 연구. **A-수학교육, 42**(5), 707-723.

김민혁(2013). 수학교사의 교과서 및 교사용 지도서 활용도 조사. **학교수학, 15**(3), 503-531.

김선희(2014). 고등학교 수학과 교육과정 개선을 위한 외국 교육과정의 탐색: 일본, 대만, 홍콩, 핀란드, 중국을 중심으로. **수학교육학연구, 24**(4), 481-498.

김성준(2002). 대수 교육과정의 변화에 관한 고찰 - 패턴에 기초한 대

수 도입을 중심으로. **수학교육학연구, 12**(3), 353-369.
김성준(2003). 패턴과 일반화를 강조한 대수 접근법 고찰. **학교수학, 5**(3), 343-360.
김연식, 정영옥(1997). Freudenthal 의 수학화 학습-지도론 연구. **수학교육학연구, 7**(2), 1-23.
김홍종(2009). **미적분학 1.** 서울: 서울대학교 출판부.
나귀수, 황혜정, 한경혜, 김기영, 김소영(2001). **수학과 교육목표 및 내용체계 연구(Ⅱ)**(RRC 2001-9), 한국교육과정평가원.
나귀수, 박미미, 김동원, 김연, 이수진(2018). 미래 시대의 수학교육 방향에 대한 연구. **수학교육학연구, 28**(4), 437-478.
남진영(2008). 폴라니의 인식론에 기초한 수학교육의 목적. **수학교육학연구, 18**(1), 137-156.
남진영, 탁병주(2016). 대학입학 수학 시험 국제 비교 분석: 미국, 호주, 싱가포르, 일본. **수학교육학연구, 26**(2), 287-307.
노선숙(2008). 미국 수학교육과정 변천에 관한 연구: 수학교육개혁의 다양성과 복합성. **교육과정연구, 26**(3), 121-154.
박경미, 박선화, 권점례, 윤상혁, 강현영 외(2015). **2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구Ⅱ**(BD15120005). 교육부.
박경희(2014). **Freudenthal의 수학화 이론에 기초한 수학 교과서 단원 도입의 유형 분석.** 석사학위논문. 이화여자대학교.
박교식(2002). 수열의 교수・학습을 위한 교수단원 소재 연구: 다각수와 각뿔수. **학교수학, 4**(3), 361-373.
박교식, 이종희, 김진환, 남진영, 김남희 외(2018). **고등학교 수학 Ⅰ.** 서울: 동아출판
박선화(2000). 수열의 극한 개념에 대한 인지적 장애의 극복 방안 연구. **수학교육학연구, 10**(2), 247-262.
박진희, 박미선, 권오남(2018). 2015 개정 교육과정에 따른 <수학Ⅱ> 교과서의 정적분의 도입 및 활용 분석. **A-수학교육, 47**(2), 157-177.

방정숙, 정유경, 김상화(2011). 초등학교 교사들의 수학교육 목적 인식 실태 조사. **초등수학교육, 14**(3), 277-291.

방정숙, 김승민(2019). 가치 연구의 동향 분석: 수학적 가치와 수학 교육적 가치를 중심으로. **수학교육, 58**(4), 609-625.

변희현, 조윤동, 조성민, 김재홍, 최인선 외(2014). **2009 개정 교육과정에 따른 고등학교 수학과 핵심 성취기준 개발 연구**(CRC 2014-5-3). 한국교육과정평가원.

변희현, 조성민, 임해미, 최인선, 오택근 외(2017). **2015 개정 교육과정에 따른 고등학교 수학과 평가기준 개발 연구**(CRC 2017-5-6). 한국교육과정평가원.

서보억(2015). 수학 교수·학습을 위한 '학교수학답사'의 개념 탐색. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>, 54**(1). 31-47.

손홍찬(2010). 수학적 추론과 연결성의 교수・학습을 위한 소재 연구: 도형수, 파스칼 삼각형, 피보나치 수열을 중심으로. **학교수학, 12**(4), 619-638.

신성균, 고정화, 권점례, 박선화, 이대현 외(2005). **수학과 교육과정 개선 방안 연구**(RRC 2005-6). 한국교육과정평가원.

신수진, 조완영(2018). 2015 개정 교육과정에 따른< 수학 Ⅱ> 교과서의 정적분 정의에 대한 대안. **학교수학, 20**(4), 723-741.

신준식(2011). 핀란드 수학과 교육과정 비교 분석. **초등수학교육, 14**(3), 225-236.

양성현(2017). 고등학교 수학과 지필평가 문항의 교육과정 반영 실태 연구: 수열의 극한을 중심으로. **학교수학, 19**(1), 43-58.

양성현(2019). 수학과 교육과정 문서의 내용 체계에 대한 반성적 고찰: '핵심 개념', '일반화된 지식', '기능'을 중심으로. **학교수학, 21**(2), 347-367.

우정호(2000). **수학 학습-지도 원리와 방법.** 서울: 서울대학교 출판부.

우정호, 조영미(2001). 학교수학 교과서에서 사용하는 정의에 관한 연구. **수학교육학연구, 11**(2), 363-384.

우정호, 강현영(2007). 심성함양으로서의 수학교육: F. Klein 의 함수적 사고 교육을 중심으로. **수학교육학연구, 17**(4), 333-357.

윤현진, 박선용, 김서령, 이영하(2009). **수학과 교육 내용 개선 방안 연구: '이산수학', '확률과 통계' 영역을 중심으로**(RRC 2009-3-3). 한국교육과정평가원.

이경화, 박경미, 임재훈(2002). 교육 내용으로서의 집합 개념에 대한 비판적 고찰. **수학교육학연구, 12**(1), 125-143.

이경화(2016). 현실적 수학교육 이론의 재음미: 수학적 창의성 교육의 관점에서. **수학교육학연구, 26**(1), 47-62.

이기돈(2019). 2015 개정 <미적분> 교과서의 '정적분과 급수의 합 사이의 관계' 서술 내용 분석 및 제언: <수학Ⅱ> 와의 연계성 관점에서. **수학교육학연구, 29**(1), 93-112.

이민정, 이양(2012). 등비수열의 정의에 대한 연구. **수학교육, 51**(3), 211-221.

이승우(2015). 학교수학이란 무엇인가?. **수학교육학연구, 25**(3), 381-405.

이승우(2016). 무한 등비급수의 합에 대한 Archimedes 의 아이디어의 은유적 모델과 그 교육적 활용. **학교수학, 18**(1), 215-229.

이인석(2020). 2015 개정 교육과정에 따른 중학교 수학 교과서 검토. **E-수학교육 논문집, 34**(2), 69-117.

이정아, 유재근, 박문환(2020). 실수의 연속성 지도를 위한 연속체의 역사적 분석. **학교수학, 22**(2), 423-444.

이준열, 최부림, 김동재, 이정례, 전철 외(2018). **고등학교 수학 Ⅰ**. 서울: 천재교육.

임미경, 유미현, 남석현(2012). 화학 및 과학 교과서에 기술된 읽기자료 분석 및 활용도 조사. **과학교육연구지, 36**(1), 69-83.

장경윤, 강현영, 고호경, 권나영, 김구연 외(2016). **수학과 중등교육과정 국제 비교 연구: 미국, 싱가포르, 영국, 일본, 호주**(2016 정책연구보고서). 대한수학교육학회.

장현석, 이세형, 이동원(2020). 수열과 수열의 극한에 대한 고등학생의 인

식의 연결성 조사. **학교수학, 22**(1), 69-83.

정수민(2013). **한국과 핀란드의 고등학교 수학 교과서 비교 및 분석 : 대수영역을 중심으로**. 석사학위논문. 고려대학교.

정영옥, 장경윤, 김구연, 권나영, 김진호 외(2016). 수학 교육과정 국제 비교 분석 연구: 미국, 싱가포르, 영국, 일본, 호주의 중학교와 고등학교 교육과정을 중심으로. **수학교육학연구, 26**(3), 371-402.

최수일, 정진수, 강완, 고호경, 김도훈 외(2012). **2009 개정 교육과정에 따른 수학과 성취기준 및 성취수준 개발 연구**. 교육과학기술부, 전라남도교육청.

최은(2020). **한국, 호주, 핀란드의 수학 교과서 비교: 삼각법 영역을 중심으로.** 석사학위논문. 서울대학교.

한국교육과정평가원(2020). **「TMISS 2019」결과 발표 별첨 자료.**

황선욱, 강병개, 윤갑진, 이광연, 김수영 외(2018). **고등학교 수학 Ⅰ.** 서울: 미래엔.

文部科學省(2008). 中學校學習指導要領解說: 數學編. 文部科學省.

文部科學省(2009a). 高等學校學習指導要領: 數學編. 文部科學省.

文部科學省(2009b). 高等學校學習指導要領解說: 數學編. 文部科學省.

Attwood, G., Pledger, K., & Wilkins, D. (2008). *Edexcel AS and A Level Modular Mathematics (Vol. 2)*. Pearson Education Ltd.

Baker, D., Knipe, H., Collins, J., Leon, J., Cummings, E., Blair, C., & Gamson, D. (2010). One hundred years of elementary school mathematics in the United States: A content analysis and cognitive assessment of textbooks from 1900 to 2000. *Journal for Research in Mathematics Education, 41*(4), 383-423.

Bartle, R. G., & Sherbert, D. R. (2011). *Introduction to real analysis (Vol. 4)*. New York: Wiley.

Boyer, C. B. (1959). *The history of the calculus and its conceptual development: The concepts of the calculus*. Courier Corporation.

Boyer, C. B., & Merzbach, U. C. (2011). *A history of mathematics.* John Wiley & Sons.

Burton, D. M. (2007). *The history of mathematics: An introduction.* McGraw-Hill.

CCSSI(2010). *Common Core Standards for Mathematics.* Common Core State Standards Initiative.

Cocker, E. (1738). *Cocker's Arithmetick (49th ed.).* A. Bettesworth & C. Hitch.

Cooke, R. L. (2013). *The history of mathematics: A brief course.* John Wiley & Sons.

Department for Education(2013). *Mathematics Programmes of Study: Key Stage 3, National Curriculum in England.*

Department for Education(2014). *Mathematics Programmes of Study: Key Stage 4, National Curriculum in England.*

Dilworth, T. (1762). *The Schoolmaster's Assistant, Being a Compendium of Arithmetic, Both Practical and Theoretical.* Scott, Foresman.

Edexcel(2013). *Specification: GCE Mathematics(First examination 2014, Issue 3).* Pearson Education Ltd.

Emerson, F. (1851). *The North American Arithmetic, Part Third.* Kidder & Cheever.

Finnish National Board of Education(2003). *National core curriculum for upper secondary schools.*

Finnish National Board of Education(2004). *National core curriculum for basic education.*

Friberg, J. (2007). An Old Sumerian Metro-Mathematical Table Text (Early Dynastic IIIa). *In A Remarkable Collection of Babylonian Mathematical Texts (pp. 147-153).* Springer, New York, NY.

International Commission on the Teaching of Mathematics(1911). *Mathematics in the Public and Private Secondary Schools of the United States*. U.S. Government Printing Office.

John A. Nietz. (1967). Evolution of old secondary-school arithmetic textbooks. *The Mathematics Teacher, 60*(4), 387-393.

Karp, A., & Schubring, G. (Eds.). (2014). *Handbook on the history of mathematics education*. New York: Springer.

Lee, B. S. (2010). (예비)교사를 위한 완비성의 학습과 지도에 관한 소고. *East Asian mathematical journal, 26*(4), 581-597.

Milne, W. J. (1895). *Standard Arithmetic: Embracing a Complete Course for Schools and Academies*. American Book Company.

NCTM(1979). *The Rhind mathematical papyrus*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM(2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.

Ofqual(2011). *GCE AS and A Level Subject Criteria for Mathematics*. Office of Qualifications and Examinations Regulation.

Pickover, C. A. (2009). *The math book: from Pythagoras to the 57th dimension, 250 milestones in the history of mathematics*. Sterling Publishing Company, Inc..

Przenioslo, M. (2006). Conceptions of a sequence formed in secondary schools. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*(7), 805-823.

Sesiano, J. (2012). *Books IV to VII of Diophantus' Arithmetica: In the Arabic Translation Attributed to Qustā Ibn Lūqā (Vol. 3)*. Springer Science & Business Media.

Sin, I. S., & Kim, S. M. (1997). 수학적 패턴 지도를 위한 연구. *Communications of Mathematical Education, 5*, 215-229.

Sigler, L. (2003). *Fibonacci's Liber Abaci: a translation into modern English of Leonardo Pisano's book of calculation.* Springer Science & Business Media.

Stewart, J. (2012). *Essential calculus: Early transcendentals.* Cengage Learning.

Swetz, F. J. (1987). *Capitalism and arithmetic: the new math of the 15th century, including the full text of the Treviso arithmetic of 1478, translated by David Eugene Smith.* Open Court Publishing.

Weigand, H. G. (2004). Sequences: basic elements for discrete mathematics. *ZDM, 36*(3), 91-97.

Wijaya, A., Van den Heuvel-Panhuizen, M., & Doorman, M. (2015). Opportunity-to-learn context-based tasks provided by mathematics textbooks. *Educational studies in Mathematics, 89*(1), 41-65.

Abstract

An Analytic Study on the Concept of Sequence in School Mathematics

Park, Je-ho
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

The learning contents related to the sequence in school mathematics were recently reduced and changed with revising the curriculum under the flow of reducing the number of learning contents. In the 2015 revised curriculum, there were changes related to the introduction of calculus, and the deletion of mensuration by parts could have a practical impact on the learning contents related to the sequence, but the unit of the sequence in the curriculum was no different from the previous curriculum. In particular, although the curriculum document emphasized various pattern experiences in the sequence unit, there was a question of whether the contents of the sequence unit or textbooks that had undergone continuous content

reduction could support this. Meanwhile, while prior research of sequence in Korea was actively addressed as a subject of teaching and learning research, it was hard to find a study that focused on the educational value of sequence and adequacy of organizing units. Therefore, under the problem of losing the original value of sequence in school mathematics, research on the educational value of the sequence, including why the sequence was selected as educational content, was needed.

The purpose of this study is to explore the concept of sequence in school mathematics, starting with the question "Why do we teach and learn about sequence in school mathematics?" and to open the stage for discussions on redefining sequence positions in school mathematics. Through historical analysis, the educational value of the sequence was explored, and a comparative analysis of the curriculum was conducted to investigate how the value was reflected in the domestic and foreign curriculum. This study also paid attention to one of the results of value reflection, "purpose of learning", and conducted a textbook analysis on how textbooks were organized under the "purpose of learning" stated in the curriculum. The results are as follows:

Based on historical background, this study was able to propose "experience of pattern and generalization" and "basic concepts of limit concept and infinite series" as educational values of sequences, respectively, "the algebraic value of sequences" and "the analytical value of sequences." The 2009 revised curriculum showed that it aimed at the analytical value of the sequence rather than the algebraic value of the sequence, and the 2015 revised curriculum mainly reflected the algebraic value of the sequence through the "Introduction", which serves as a purpose of learning. Even though

the method of introducing calculus has changed so that it is not related to the sequence, the fact that it maintains a statement that it is the “basic concept of differential and integral″ about the “limit concept of sequence″ was confusion related to the sequence shown in the 2015 revised curriculum. Also, the fact that the 2015 revised curriculum maintained learning contents and achievement standards the same as the 2009 revised curriculum, was another confusion related to the sequence shown in the 2015 revised curriculum.

Like Korea, in Japan, Finland, and the United Kingdom, the role of sequence is weakened in the introduction of calculus. But instead, they focused on the algebraic value of sequence in learning contents, unlike Korea. The curriculum in Korea showed a relative lack of learning content related to various patterns. Also, it was difficult to find confusion in the Japanese, British, and Finnish curriculum, unlike in Korea. Textbooks lacked the opportunity to experience various patterns of natural and social phenomena emphasized for learning purposes, and most of the patterns students face in textbook problems were based on artificial contexts that were difficult to call natural and social phenomena.

Based on the analysis, this work draws implications for the concept of sequence in school mathematics. First, discussions on the reconstruction of the sequence unit need to be made by referring to overseas cases such as Japan, Finland, and the United Kingdom, along with the value of the sequence. Second, discussions need to be made on the direction of re-statement of curriculum documents that can be interpreted for purpose of learning, taking into account the value of sequence and the purpose of mathematics education.

In the future, follow-up research will be needed on how concepts of school mathematics were selected for educational content and

therefore what can be proposed for the educational value of the concept.

keywords : sequence, history of sequence, educational value, value of sequence, purpose of learning
Student Number : 2019-26232