creative commons
COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

교육학석사 학위논문

수학 정보과학 융합을 위한 창의적 문제해결 활동 개발 및 적용

2023년 2월

서울대학교 대학원

수학교육과

서 지 영

수학 정보과학 융합을 위한
창의적 문제해결 활동 개발 및 적용

지도교수 윤 상 균

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함
2023년 1월

서울대학교 대학원
수학교육과
서 지 영

서지영의 석사 학위논문을 인준함
2023년 1월

위 원 장 조 정 효 (인)

부위원장 이 훈 희 (인)

위 원 윤 상 균 (인)

국문초록

4차 산업혁명 시대에는 다양한 분야의 기술들이 융합되며 사회, 문화 등에서 변화들이 일어나고 있다. 이 변화의 속도와 깊이, 범위 등은 우리가 지금까지 겪어보지 못한 혁명적인 변화이다. 이 흐름에 교육계에서도 변화가 빠르게 일어나고 있다. 교육부는 2018년 과학·수학·정보 교육 진흥법을 시행하여 융합형 인재 양성을 목적으로 교과 간 융합을 통한 창의적인 인재 양성을 기본방향으로 삼았다. 실제 수학과 정보를 융합한 교육의 중요성과 실천 방안 등에 대한 연구들이 다양한 방면으로 이루어지고 있다.

본 연구에서는 중요한 수학 교과 역량인 수학 문제해결력, 의사소통 능력, 창의성 등의 함양을 기대하며 수학과 정보과학을 융합한 교육프로그램을 개발하고자 한다. 정보과학을 교육적 관점에서 논할 때 코딩이 중요한 요소임은 분명하나 항상 수반되어야 하는 것은 아니다. 이에 코딩 관련 지식이 크게 요구되지 않으며 일상 언어로 쉽게 접할 수 있는 수학과 정보과학 융합을 위한 창의적 문제해결 활동을 구성하였다. 2021년~2022년 2년 동안 개발연구를 진행하였으며 개발연구의 교수실험 단계에서 서울대학교 과학영재교육원 중학생들, 서울대학교 사범대학 부설 시흥영재교육원 중고등학생들을 대상으로 2년간 직접 프로그램을 적용해보며 프로그램을 수정, 보완하며 연구를 진행하였다. 본 개발연구의 교육적 의의는 다음과 같다.

첫째, 모자 게임의 규칙과 전략 및 승률 등을 친구들과 토의하는 과정을 통해 수학적 의사소통 능력을 함양할 수 있다.

둘째, 실세계 맥락에서의 수학의 가치를 경험하는 기회를 제공할 수 있다. 프로그램 내에 구성되어 있는 다양한 카드 게임 및 오류정정코드 실습 활동을 통해 학생들은 실세계에서 수학의 유용

성과 연결성을 경험하게 된다.

마지막으로 코딩을 수반하지 않는 수학과 정보의 융합 교육프로그램으로 코딩교육을 전문적으로 받지 않은 교사들에게도 융합 교육에 대한 접근성이 높다는 시사점이 있다.

주요어 : 모자 게임, 오류정정코드, 채널용량, 정보과학, 문제해결, 수학적 의사소통, 수학적 모델링, 창의성

학 번 : 2021-25138

목 차

제 1 장 서론 ····· 1

제 1 절 연구의 목적 및 필요성 ····· 1

제 2 절 연구 문제 ····· 4

제 2 장 이론적 배경 ····· 5

제 1 절 모자 게임과 정보이론 ····· 5

1. 모자 게임 ····· 5

2. 정보이론 ····· 8

2.1 이진대칭채널을 통한 오류정정코드 ····· 9

2.2 Shannon의 채널코딩정리 ····· 12

3. 선형코드 ····· 14

제 2 절 수학 문제해결과 수학적 창의성 ····· 16

1. 수학 문제해결력 ····· 16

2. 수학적 모델링과 수학적 창의성 ····· 17

제 3 장 연구 방법 ····· 20

제 1 절 개발연구 ····· 20

제 2 절 연구 절차 ····· 22

제 3 절 자료 수집 및 분석 ····· 24

제 4 장 연구 결과 ····· 26

제 1 절 과제 개발 및 교수·학습과정 ····· 26

제 2 절 프로그램 적용 및 논의 ····· 51

1. 프로그램 적용 ····· 51

2. 2022년도 참여 학생 소감문 및 인터뷰 결과 ····· 56

제 5 장 결론 및 제언 ····· 69
제 1 절 요약 및 결론 ····· 69
제 2 절 연구 제한점 및 제언 ····· 72

참고문헌 ····· 74
Abstract ····· 83

표 목 차

<표 Ⅱ-1> 3-모자 게임 예시 ····· 5
<표 Ⅱ-2> A의 상황 ····· 5
<표 Ⅱ-3> B의 상황 ····· 6
<표 Ⅱ-4> 3-모자 게임 예시 상황 속 참가자들의 추정 ····· 6
<표 Ⅱ-5> 3-모자 게임 다른 예시 ····· 7
<표 Ⅱ-6> k에 따른 최대승률 ····· 7
<표 Ⅱ-7> Alice가 메시지 00을 전송할 때 Bob이 받게 되는 메시지 ····· 10
<표 Ⅱ-8> Alice가 반복 코드를 사용하여 메시지 0을 전송할 때 Bob이 받게 되는 메시지 ····· 11
<표 Ⅲ-1> 차시별 학습 주제 ····· 22
<표 Ⅳ-1> 프로그램의 5단계 구성 ····· 27
<표 Ⅳ-2> 3-카드 게임의 모든 8가지 상황 ····· 30
<표 Ⅳ-3> 3-카드 게임 최적 전략의 수학적 모델링 ····· 33
<표 Ⅳ-4> 메시지 1000100를 보내는 경우 ····· 38
<표 Ⅳ-5> 메시지 1001100를 보내는 경우 ····· 39

그 림 목 차

[그림 Ⅱ-1] 이진대칭채널 ····· 10
[그림 Ⅱ-2] 커뮤니케이션 채널 ····· 12
[그림 Ⅱ-3] 상호 정보량과 엔트로피의 관계 ····· 13
[그림 Ⅱ-4] 반복 코드를 활용한 [6,2]코드의 인코딩 ····· 15
[그림 Ⅲ-1] 사고 실험과 교수실험간의 반성적 관계 ····· 21
[그림 Ⅲ-2] 연구설계 과정 ····· 22
[그림 Ⅲ-3] 수학적 모델링 과정 ····· 23
[그림 Ⅳ-1] 카드 게임에 사용된 카드 ····· 26
[그림 Ⅳ-2] 본인을 제외한 나머지 두 참가자의 카드 색이 서로 다른 경우 ····· 28
[그림 Ⅳ-3] 본인을 제외한 나머지 두 참가자의 카드 색이 같은 경우 ····· 29
[그림 Ⅳ-4] 승률에 대한 학생들의 추론 ····· 29
[그림 Ⅳ-5] 3-카드 게임의 기초 수학적 모델링 ····· 32
[그림 Ⅳ-6] $x11$가 주어진 경우 ····· 35
[그림 Ⅳ-7] $x01$가 주어진 경우 ····· 36
[그림 Ⅳ-8] $x000111$가 주어진 경우 ····· 36
[그림 Ⅳ-9] $00x1001$가 주어진 경우 ····· 37
[그림 Ⅳ-10] 길이 7 메시지 맞추기 게임의 승패 여부 ····· 40
[그림 Ⅳ-11] 오류정정코드의 구성 ····· 42
[그림 Ⅳ-12] 메시지 1010을 인코딩하는 과정 ····· 43
[그림 Ⅳ-13] 길이 2^n-n-1인 메시지 m의 오류정정코드 ····· 46
[그림 Ⅳ-14] 오류정정코드 실습 자료 ····· 47
[그림 Ⅳ-15] 길이 2인 메시지를 길이 3으로 인코딩했을 때

..... 48
[그림 Ⅳ-16] 길이 2인 메시지를 길이 4로 인코딩했을 때
..... 49
[그림 Ⅳ-17] 오류정정코드의 생성행렬 51
[그림 Ⅳ-18] 프로그램 참여 학생 소감문 58

제 1 장 서론

제 1 절 연구의 목적 및 필요성[1)]

4차 산업혁명 이후 인공지능, 데이터 과학, 로봇공학 등의 분야에서 기술혁신에 의한 사회, 문화, 제도, 인간의 삶의 형태 등에 다양한 변화가 나타나고 있다. 이러한 변화의 속도는 기존에 비해 빠르고 광범위하며 분야 간 융합이 이루어진다는 특징이 있다(Schwab, 2017). 우리 사회의 다양한 분야에서도 변화가 일어나고 있으며, 교육계 역시 빠르게 변화하고 있다. 변화의 흐름 속에서 교육부는 2018년 과학·수학·정보 교육 진흥법을 시행하였다(교육부, 2017). 융합형 인재 양성이 목적이며 두 교과 이상의 융합을 통한 창의적 인재 양성을 기본방향 중 하나로 삼고 있다. 문제해결 역량을 갖춘 창의·융합형 인재의 중요성과 이를 위한 수학 교과의 중요성은 이미 여러 차례 강조된 바 있다(교육부, 2020b; 교육부, 2020c; 나귀수 외, 2018). 하지만 과학·수학·정보 융합 교육을 위한 교육 방안이나 교육프로그램, 평가 등의 연구는 부족한 실정이다(김성원 외, 2020).

2022 개정 교육과정 총론에서는 지식·정보의 폭발적 증가에 따라 단편적 지식의 습득보다 학습한 내용을 삶의 맥락에 적용하고 복잡한 문제를 해결하는 역량을 강조한다(교육부, 2021). 또한 미래 사회에서 요구하는 인재상은 지식뿐만 아니라 창의성과 인성 등을 아우르는 융합적 역량과 다양한 변화에 적절히 대응할 수 있는 역량 등을 필요로 한다(류성림 외, 2018). 이를 위한 교육적 노력으로 STEAM 교육, 창의적 문제해결력 교육, 소프트웨어 교육 등이 있다(임철일, 2019). 창의적 문제해결이란 “문제해결의 상황에서 다양하고 독창적인 해결 방법을 활용해 새로운 해결 방안이나 산출물을 만들어내는 종합적인 과정을 통한 문제해결 방법”

1) 본 절의 내용은 서지영, 윤상균 (2022)의 내용을 토대로 보완한 것이다.

을 뜻한다(박만구, 2009). 미래 시대 학교의 학습 공동체로서의 역할과 체험 중심의 학습의 중요성 또한 김진숙 (2016)에서 강조된 바 있다.

미래 첨단기술의 주요 기저로서의 수학교육에 대한 사회적 수요 증가와 과학·수학·정보 교육 진흥법 시행을 배경으로 교육부 (2020a)는 수학교육 강화를 통한 국가경쟁력 제고와 국가·사회 발전을 위한 안을 마련하였다. 특히 활동과 탐구 중심의 수학교육, 협력 수업, 실생활과 관련되는 수학적 모델링 그리고 수학·정보 융합 교육 등이 강조되었다. 실제로 수학 정보간 융합 교육의 중요성과 실천 방안 등에 대해 다양한 연구들(신기철, 서보억, 2019; 이상구 외, 2020; 정진환, 조한혁, 2020; 강한별 외, 2021; 김성원, 이영준, 2021)이 이루어져 왔으며, 교육과정에 포함된 주제 또는 학생들이 관심을 가질만한 주제를 택하여 수학과 여러 학제간의 융합을 위한 수업 자료를 개발하는 것은 급변하는 4차 산업혁명 시대에 적합한 교육활동이다(신기철, 서보억, 2019).

통신이론, 정보이론 혹은 양자정보이론에서의 수학의 역할과 중요성 또한(Shannon, 1948; Shannon, Weaver, 1949; Wilde, 2013; Holevo, 2019) 강조된 바 있다. 정보과학은 정보의 수집, 저장, 분석, 조작 등에 관한 문제를 다루는 다양한 학제간 연구가 이루어지는 분야이다. 정보과학을 교육적 관점에서 논의할 때 코딩이 중요한 요소임이 분명하나 항상 수반되어야 하는 것은 아니다. 본 연구에서는 선행지식과 코딩 관련 지식이 크게 요구되지 않으며 일상적 언어와 쉽게 접할 수 있는 도구만을 사용하여 동기유발 가능한 수학 정보과학 융합을 위한 창의적 문제해결 활동을 개발하고자 한다. 모자 게임을 기반으로 하는 카드 게임으로 구성된 이 활동은 다자간 협력이 필수적이며 활동의 참가자 수가 증가함에 따라 수학의 유용성과 엄밀성이 강조되는 특징이 있다. 또한 정보과학 분야의 주요 주제 중 하나인 오류정정코드와의 관련성을 살필 수 있도록 설계되었다. 학생들에게 수학의 유용성과 가치를 살펴봄과 동시에 추론, 문제해결, 의사소통, 모델링, 창의융합 기회를 충분히 제공할 수 있도록 프로그램을 구성하였다. 이들은 각각 미래 사회·정서적 역량과 미래 수학적 역량으로 나귀수 외 (2018)[2]에서 강조된 바 있다.

본 연구에서는 캐나다 Queen's University의 수학 비전공자들을 위한 선형대수학(MATH 111) 강좌의 교육 내용 일부(Taylor, 2018)를 바탕으로 우리나라 중등학교의 교육환경에 적합한 형태로의 개발연구를 수행하였다. 서울대학교 과학영재교육원 중학생들, 서울대학교 사범대학 부설 시흥영재교육원 중고등학생들을 대상으로 2년간 직접 지도한 내용을 바탕으로 프로그램의 연구와 적용 및 보완을 2021년~2022년 동안 반복적으로 수행하여 5단계 '1. 기본활동 - 2. 수학적 정당화 - 3. 수학적 모델링과 일반화 - 4. 심화활동 - 5. 응용활동'으로 구성된 10차시 분량의 프로그램을 개발하였다. 3명 또는 4명이 참가하는 카드 게임으로 구성하여 집단 내 상호보완적 상호작용, 갈등 기반 상호작용, 메타인지적 상호작용이 발현될 수 있도록 1단계를 구성하였으며, 수학적 정당화를 통해 체험적 근거의 수학화를 경험할 수 있도록 2단계를 구성하였다. 또한 모델 유도 관점에서의 수학적 모델링(최경아, 2017)을 바탕으로 일반화된 상황인 7명, 15명 등의 카드 게임에서의 최적 전략을 이해 및 적용할 수 있고 메타인지적 상호작용이 촉진될 수 있도록 3단계와 4단계를 구성하였으며, 학습한 원리를 기초적 오류정정코드 개발에 응용할 수 있도록 5단계를 구성하였다. 5단계에서는 정보이론에서 오류정정코드를 수학적으로 심층 탐구할 수 있도록 채널용량, 선형코드 등의 학습을 구성하였다. 3단계와 4단계, 5단계는 각각 수학적 모델링 과정에서 공통적으로 나타나는 '실세계 탐구 → 수학적 모델 수립 → 수학적 결론 → 모델 적용'(정혜윤 외, 2018) 구조를 만족하도록 개발하였다. 실수 혹은 복소수 기반 행렬 이론이 아니기에 추상적이라 여길 수 있는 유한체 $\mathbb{Z}_2$위에서의 기초 행렬 이론이 실세계 현상의 수학적 모델링에 직접적으로 응용 가능함을 제시하여 수학의 유용성과 가치를 경험하고, 학문 수학과 학교 수학의 연계를 강화하는 역할을 할 수 있도록 설계하였다.

---

2) 나귀수 외(2018)에서는 미래 사회·정서적 역량의 하위 역량으로 공감, 책임감, 수학 가치를 설정하였다. 미래 수학적 역량으로는 추론, 문제해결, 의사소통, 모델링, 창의·융합을 설정하였다.

제 2 절 연구 문제

본 연구는 모자 게임 활동을 기반으로 창의적 문제해결 프로그램을 개발하고, 이를 실제 학생들에게 적용해보며 어떠한 교육적 효과가 있는지 분석해보고자 한다. 이에 본 연구에서 설정한 연구 문제는 다음과 같다.

연구 문제1. 모자 게임의 최적 전략과 최대승률을 토의하는 활동을 통해 학생들은 수학적 의사소통 능력을 향상할 수 있는가?

연구 문제2. 개발한 융합 교육프로그램을 통해 학생들은 수학의 가치와 유용성을 인식하고 수학교과역량을 함양할 수 있는가?

연구 문제3. 수학 정보 융합교육 관점에서 본 연구가 갖는 교육적 시사점은 무엇인가?

제 2 장 이론적 배경[3)]

제 1 절 모자 게임과 정보이론

1. 모자 게임 (Hat game)

본 연구에서 개발한 문제해결 활동은 Ebert의 박사학위논문(Ebert, 1998) 이후 많은 관심을 받은 모자 게임(hat game)을 바탕으로 한다. k-모자 게임이란 k명의 참가자에게 흰색 혹은 검은색의 모자가 각각 50% 확률로 주어지고, 본인을 제외한 $k-1$명의 모자 색은 확인할 수 있지만, 본인의 모자 색은 알 수 없는 상황을 가정한다. $k=1$인 경우는 한 명의 참가자가 본인의 모자 색을 맞추는 가장 단순한 경우이므로 특별한 전략이 존재하지 않고, 최대승률이 50%임을 어렵지 않게 알 수 있다. 한편 $k=3$인 경우를 살펴보면 세 참가자 A, B, C에게 아래 <표 Ⅱ-1>과 같은 상황이 주어질 수 있다.

<표 Ⅱ-1> 3-모자 게임 예시

A	B	C
흰색 모자	검은색 모자	흰색 모자

이때 A는 아래 <표 Ⅱ-2>에서와 같이 본인의 모자 색은 알 수 없지만, B가 검은색 모자이고 C가 흰색 모자임을 알 수 있다.

<표 Ⅱ-2> A의 상황

A	B	C
?	검은색 모자	흰색 모자

3) 본 장의 내용은 서지영, 윤상균 (2022)를 토대로 보완한 것이다.

비슷하게 B는 아래 <표 Ⅱ-3>에서와 같이 본인의 모자 색을 알 수 없지만, A가 흰색 모자이고 C가 흰색 모자임을 알 수 있다.

<표 Ⅱ-3> B의 상황

A	B	C
흰색 모자	?	흰색 모자

참가자들은 본인의 모자 색을 맞춰야 하는데 흰색 모자를 주장할 수도 있고, 검은색 모자를 주장할 수도 있다. 혹은 특정 모자 색을 선택하지 않고 통과를 선택할 수도 있는데 이때

· 모든 참가자가 통과를 선택하거나
· 오답이 하나라도 존재하는 경우

게임에서 지는 것으로 판정하고, 그 외의 경우에는 이기는 것으로 판정한다. 예를 들어 <표 Ⅱ-4>에서와 같이 A와 B가 흰색 모자를 주장하고 C가 통과를 선택한다면

<표 Ⅱ-4> 3-모자 게임 예시 상황 속 참가자들의 추정

	A	B	C
주어진 상황	흰색 모자	검은색 모자	흰색 모자
참가자들의 추정	흰색 모자 (정답)	흰색 모자 (오답)	통과

B가 오답을 주장하였으므로 게임에서 진 것으로 판정한다. 한편 아래의 <표 Ⅱ-5>에서와 같이 A와 C가 흰색 모자를 주장하고 B가 통과를 선택한다면 맞는 주장만 2개이므로 이기는 경우이다.

<표 Ⅱ-5> 3-모자 게임 다른 예시

	A	B	C
주어진 상황	흰색 모자	검은색 모자	흰색 모자
참가자들의 추정	흰색 모자 (정답)	통과	흰색 모자 (정답)

게임 진행 중에는 참가자들이 서로 의사소통을 하거나 정보를 주고받는 행위가 허용되지 않는다. 또한 추정이 동시에 이루어져야 하므로 참가자들은 사전에 공동전략을 합의한 채로 게임에 임하여야 한다. 이때 어떠한 공동전략을 적절히 택하여야 최대승률을 달성할 수 있는지가 핵심 문제이다. 이 게임은 The New York Times, Die Zeit 그리고 abcNews 등에도 2001년 소개된 바 있으며(Robinson, 2001; Blum, 2001; Poulos, 2001), 선수지식을 크게 요구하지 않고 일상적 언어만으로도 이해가능하며 쉽게 접할 수 있는 도구만으로 구성되었다는 점이 중요한 특징이다.

일반적인 k에 대한 문제는 코딩 이론, 컴퓨터과학, 정보이론, 조합론, 그래프 이론 등과 관련되며(Chandra et al., 1983; Birk & Kol, 2006; Bar-Yossef et al., 2006; Lubetzky & Stav, 2007; Alon et al., 2008; Gadouleau, 2018), 실제로 다양한 관점에서의 연구들이 이루어졌다(Butler, 2008; Feige, 2010; Krzywkowski, 2010; Krzywkowski, 2011; Ma et al., 2011; Tantipongpipat, 2014; Cox et al., 2015; Szczechla, 2017). 특히 k가 적당히 작은 경우들에 대하여 최대승률이 아래 <표 Ⅱ-6>과 같이 알려져 있다(Östergård & Blass, 2001; Krzywkowski, 2010).

<표 Ⅱ-6> k에 따른 최대승률

k	2	3	4	5	6	7	8	9
최대승률 (%)	50	75	75	78.13	81.25	87.5	87.5	87.89

한편 k-모자 게임에서 참가자들이 택할 수 있는 공동전략의 수는 $3^{k \cdot 2^{k-1}}$이므로 전수조사를 하여 최적 전략을 파악해보려는 접근 또한 가능하다. 이때 k가 증가함에 따라 공동전략의 수가 굉장히 빠른 속도로 증가함을 알 수 있다. $k=6$인 경우만 하더라도 이미 공동전략의 수가 $4.048 \cdot 10^{91}$이상이고, $k=7$인 경우에는 $5.627 \cdot 10^{213}$이상이어서 전수조사를 실시하기에는 어려움이 있다.

2. 정보이론

정보이론은 최대한 많은 데이터를 매체에 저장하거나 채널을 통해 통신하기 위해 데이터 정량화를 연구하는 분야이다. 정보이론의 아버지라 불리는 Claude Elwood Shannon은 확률론을 이용하여 정보를 전송하는 가장 효율적인 방법에 대해 연구하였다. 그는 본인의 논문 'A mathematical theory of communication'에서 '정보 엔트로피'라는 개념을 창안해 소개하며 정보이론의 기반을 세웠다. Shannon의 정보이론을 이해하기 위해서는 먼저 Shannon이 말하는 '통신 체계'를 살펴보아야 한다. 정보는 어떤 소스에서 생성되어 송신기를 거쳐 전송가능한 형태로 변환되며 이렇게 변환된 신호는 '채널'을 통해 다른 곳으로 전파되고 수신기를 거쳐 원래의 메시지로 복원된다(장화익, 2015). 예를 들어 우리가 휴대폰으로 문자를 보낸다면 내가 쓴 텍스트는 메시지이다. 이 메시지가 특정 주파수의 '신호'로 변환되며 이 신호가 이동통신사의 기지국과 네트워크를 통해 상대방 단말기로 전달된다. 그곳에서 메시지로 복원되는 것이다. 이러한 통신 체계를 구축한 후 Shannon은 "주어진 정보의 발생 가능성이 어느 정도인가?"에 초점을 맞춰 접근했다(McMahon, 2008). 어떤 메시지의 출현 확률이 아주 크다면 이 메시지를 통해서 그다지 새로운 정보를 얻지 못할 것이다. 반면 메시지의 출현 확률이 아주 작다면 이 메시지를 통해 얻을 수 있는 정보는 상당히 많다. 예를 들어, 매일 눈이 오는 지역에 "내일 눈이 온다."라는 메시지는 큰 정보를 전달해주지 못한다. 반면, 100년 동안 한 번도 눈이 내리지 않은 지역에 "내일 눈이

온다."는 메시지는 아주 많은 정보를 제공하는 것이다. Shannon은 메시지가 발생할 확률에 밑이 2인 로그를 취하는 방식으로 정량화했다. 메시지의 정보량을 I, 메시지의 발생 확률을 p로 놓고, $\mathrm{I} = -\log_2 p$로 표현하였다.[4] 또한 확률 분포 $\vec{p}$를 따르는 랜덤변수 X에 대해 각각 확률이 $p_1, p_2, \cdots, p_n \ (0 \le p_i \le 1, \sum_i p_i = 1)$인 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 값 중 하나를 갖는다고 가정할 때 다음과 같이 엔트로피를 정의한다.

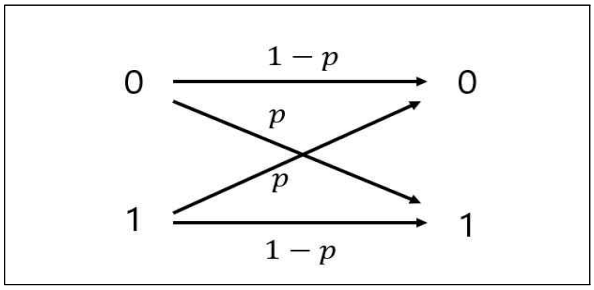
$$H(X) = -\sum_i p_i \log_2 p_i \tag{2.1}$$

이렇게 정의한 엔트로피[5]는 메시지의 내용이 확실하다면 0값을 갖고, 불확실할수록 엔트로피의 값이 점점 커짐을 확인할 수 있다.

2.1. 이진대칭채널을 통한 오류정정코드

정보이론에서는 0과 1로만 구성되어 있는 메시지를 많이 다루며, 보통 정보를 송신하는 사람을 Alice, 정보를 수신하는 사람을 Bob이라고 한다. 이 전송과정에서 오류가 발생할 수 있으며, 이는 채널(channel)로 기술된다. 가장 간단한 모델 중 하나는 이진대칭채널(binary symmetric channel)이다. 이는 [그림 Ⅱ-1]과 같이 문자 0이 문자 1로 뒤집혀 전송될 확률이 p, 문자 1이 문자 0으로 뒤집혀 전송될 확률이 p로 오류가 발생하는 오류 모델이다(Wilde, 2013).

4) 정보량 값을 양수로 만들기 위해 - 부호를 추가한다.
5) 식 (2.1)의 정의에서 $0\log_2 0 = 0$이다.



[그림 Ⅱ-1] 이진대칭채널

예를 들어 Alice가 메시지 00을 Bob에게 $p=0.1$인 이진대칭채널을 통해 전송한다고 해보자. Bob은 <표 Ⅱ-7>과 같은 확률로 메시지를 전송받게 된다.

<표 Ⅱ-7> Alice가 메시지 00을 전송할 때 Bob이 받게 되는 메시지

Bob이 받게 되는 메시지	00	01	10	11
확률	0.9×0.9 $=0.81$	0.9×0.1 $=0.09$	0.1×0.9 $=0.09$	0.1×0.1 $=0.01$

좀 더 구체적인 예로 한국에 있는 Alice가 미국에 있는 Bob에게 Covid-19 백신 접종 여부를 전화를 통해 알려주는 상황을 생각해보자. 통신상태가 불량해 전화로 전달되는 말에 오류가 발생할 수 있다. Alice는 본인의 Covid-19 백신접종 여부를 메시지로 저장해두는데, 접종을 한 경우를 문자 0으로, 접종을 하지 않은 경우를 문자 1로 나타내었다고 하자. 이때 정보를 전송하는 채널은 $p=0.1$인 이진대칭채널이라 하자. 즉 Alice가 접종을 했음에도 Bob에게 접종을 하지 않았다고 전달될 확률이 10%, 반대로 Alice가 접종을 하지 않았는데 Bob에게 접종을 했다고 전달될 확률이 10%인 것이다. 이러한 오류의 발생을 줄이는 것은 정보이론의 큰 관심사이다. 그 방법 중 하나는 반복 코드(Repetition code)를 사용하는 것이다. 반복 코드는 본인의 정보를 여러 번 반복해 기록하는 것이다. 쉽게 말해 Alice가 Bob에게 'Covid-19 백신을 접종했어'를 단순

히 문자 0으로 저장해두는 것이 아니라 이를 3번 정도 반복하여 문자 000으로 기록하는 것이다. Alice는 반복 코드를 사용해 0을 000, 1을 111로 변환하여 Bob에게 전송한다. 이러한 변환과정을 정보이론에서 인코딩(Encoding)이라고 한다. 이때 Bob이 받게 되는 메시지는 <표 Ⅱ-8>과 같다.

<표 Ⅱ-8> Alice가 반복 코드를 사용하여 메시지 0을 전송할 때 Bob이 받게 되는 메시지

Bob이 받게 되는 메시지	000	001	010	100	011	101	110	111
확률	0.729	0.081	0.081	0.081	0.009	0.009	0.009	0.001

이제 Bob의 입장에서 <표 Ⅱ-8>과 같은 메시지를 전달받았다면, 원래 Alice가 보내고자 한 메시지를 추측해야 한다. 이 과정을 디코딩(Decoding)이라고 한다. Bob이 추측할 때, 문자 0과 1이 뒤바뀔 확률보다 0이 0으로 1이 1로 그대로 전달될 확률이 더 크기 때문에 만약, 메시지 001을 받게 된다면 두 번 전송된 0이 제대로 전송이 된 것이고, 한 번 전송된 1에 오류가 발생했다고 추측할 수 있다. 즉, 더 많은 개수의 문자를 선택해 그 문자를 전송했을 것이라 추측하는 것이다. Bob은 Alice가 보낸 메시지가 0이라 생각해 Alice가 'Covid-19 백신을 접종했다.'라고 생각할 것이다. 이 경우의 오류확률을 생각해보자. 처음에 Alice가 메시지 0을 전송할 때, Bob에게 0이라고 전달되는 경우는 Bob이 메시지 '000, 001, 010, 100'을 받은 경우이므로 잘 전달될 확률은 네 가지 경우의 확률을 합한 97.2%이다. 오류확률이 기존 10%에서 2.8%로 크게 줄어듦을 확인할 수 있다. 이때 오류확률이 0%가 되면 가장 이상적이지만, 1비트 메시지를 전송하는데 100번, 1000번, 10000번,… 반복하여 전달하는 것은 굉장히 비효율적이다. 이와 관련해 어느 정도의 공간을 활용하면 적당히 작은 오류확률로 정보를 전송할 수 있는지에 대한 논의가 있으며 이것은 정보이론의 핵심이기도 하다. 정보이론에서는 이를 용량

(capacity)이라 한다.

2.2. Shannon의 채널코딩정리

임의의 채널에 대해 항상 $C = C_{shan}$이 성립한다.

1) 채널용량 (Channel capacity) C

[그림 Ⅱ-2] 커뮤니케이션 채널

[그림 Ⅱ-2]와 같이 보내고자 하는 메시지 $m \in \{1,2,\cdots,k\}$와 채널의 인코딩 E, 디코딩 D가 주어졌을 때, 오류확률(error probability)을 $p_e(n,k,E,D)$라 한다. 모든 인코딩과 모든 디코딩을 고려하여 최소화된 오류확률을 찾는 것이 중요한데, 이는 $p_e(n,k) = \min_{E,D} p_e(n,k,E,D)$라 정의한다. 이때 $\lim_{n\to\infty} p_e(n, \lfloor 2^{nR} \rfloor) = 0,\ 0 \le R \le 1$ 이 성립하는 경우 R을 달성 가능한 비율이라 하며, 이러한 달성 가능한 비율들의 상한이 채널용량 C이다.

2) Shannon capacity C_{shan}

각 확률 분포 p, q을 따르는 두 랜덤변수 X, Y에 대한 상대 엔트로피는 다음과 같이 정의한다.

$$H(X \| Y) = -\sum p \log_2 \frac{q}{p} = -H(X) - \sum p \log_2 q \qquad (2.2)$$

이는 동일한 인덱스 집합 x에 대해 두 확률 분포 $p(x)$와 $q(x)$가 얼마나 차이 나는지 보여주는 유용한 측도이다. 이때 변수 Y가 y_i값으로 고정됐을 때, X의 확률은 조건부확률 분포 $p(X|y_i)$로 구할 수 있다. 이를 통해 두 변수 X, Y사이의 조건부 엔트로피를 다음과 같이 정의한다.

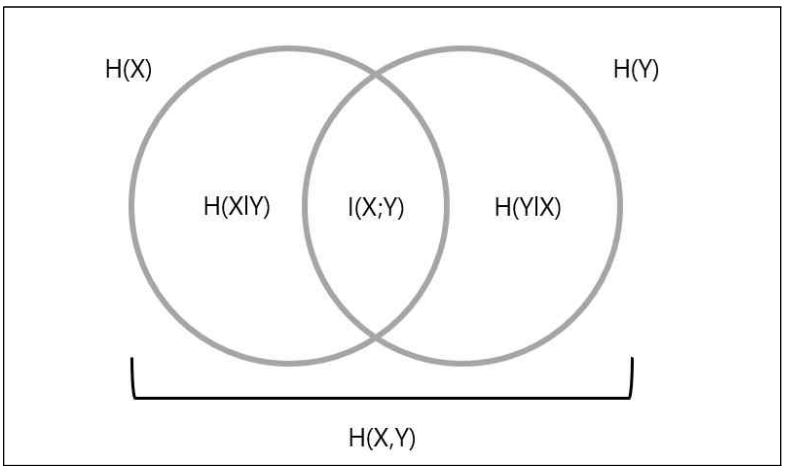
$$H(X|Y) = -\sum_j p(x_j|y_i)\log_2(p(x_j|y_i)) \tag{2.3}$$

이 조건부 엔트로피는 Y값을 알고 있을 때 X값이 평균적으로 얼마나 불확실한지에 대한 측도이다.

두 랜덤변수 사이의 상호 정보량은 중요한 개념으로 $I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X)$로 정의하며 X와 Y가 얼마나 많은 정보를 공통으로 갖고 있는지에 대한 측도이다. 또한 두 랜덤변수 X, Y에 대해 결합엔트로피를 식 (2.4)과 같이 정의한다.

$$H(X, Y) = -\sum_i \sum_j p(x_i, y_j)\log_2 p(x_i, y_j) \tag{2.4}$$

관계를 정리해보면 [그림 Ⅱ-3]과 같음을 알 수 있다.



[그림 Ⅱ-3] 상호 정보량과 엔트로피의 관계

이를 바탕으로 Shannon 용량을 정의할 수 있는데 Shannon 용량이란, 어떤 채널로 보낼 수 있는 정보의 최대량으로서 $C_{shan} = \max_{p(x)} I(X;Y)$로 정의한다. 특히 이진대칭채널에서는

$$\begin{aligned} I(X;Y) &= H(Y) - H(Y|X) \\ &= H(Y) - \sum p(x) H(Y|X=x) \\ &= H(Y) - \sum p(x) H(p) \\ &= H(Y) - H(p) \le 1 - H(p) \text{이므로 } C_{shan} = 1 - H(p) \end{aligned}$$

이 성립한다.

3. 선형코드(Linear code)

C을 k비트 메시지를 n비트로 인코딩하는 선형코드라 하자. 이때 생성행렬(generator matrix) G (G의 성분은 모두 $\mathbb{Z}_2$의 원소)가 존재하여 선형코드 C가 결정되는데, 행렬 G는 메시지를 해당 인코딩 메시지로 사상시킨다. 즉 k비트 메시지인 x는 Gx로 인코딩된다. 이를 $[n,k]$코드라고 한다. 구체적인 예로 1비트 메시지를 반복 코드(Repetition code)를 활용해 3비트 메시지로 인코딩하는, 즉 $0 \mapsto 000$, $1 \mapsto 111$인 반복 코드의 생성행렬은 $G = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$이다. 또한 각 자리를 반복 코드 [3,1]을 활용하여 2비트 메시지를 6비트로 인코딩하는 [그림 Ⅱ-4]와 같은 [6,2]코드의 생성행렬은 $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$이다.

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\1\\1\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\mapsto\begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{bmatrix}$$

[그림 Ⅱ-4] 반복 코드를 활용한 [6,2]코드의 인코딩

선형코드에서 모든 메시지가 유일하게 인코딩되기 위해서는 생성행렬 G의 각 열이 일차독립(linearly independent)이어야 한다. 일반적인 오류정정코드에 비해 선형코드의 장점은 간결한 지정이다. k비트를 n비트로 인코딩하는 일반 코드에서는 인코딩을 지정하려면 각각 길이 n인 메시지가 2^k개 필요하고, 코드를 지정하려면 총 $n2^k$비트가 필요하다. 반면 선형코드를 활용하면 생성행렬 kn개의 비트만 지정하면 되기 때문에 필요한 메모리 양을 지수적으로 줄일 수 있다.

선형코드의 오류정정을 실행하는 방법은 명확하지 않다. 다만 패리티 검사행렬[6]을 활용해 대안적인 공식을 도입하면 쉽게 가능하다. 이 정의에서 $[n,k]$코드란 $Hx=0$을 만족시키는 n개의 성분($\mathbb{Z}_2$의 원소로 구성)을 갖는 모든 벡터 x로 정의한다. 이때 패리티 검사행렬과 생성행렬을 연결할 수 있는데, 먼저 패리티 검사행렬 H가 주어진 상황에서 생성행렬 G을 찾아보자. 행렬 H의 핵(kernel)을 생성하는 k개의 일차독립 벡터 $y_1, \cdots, y_k$을 택해 행렬 G의 열벡터가 되도록 하면 된다. 반대로 생성행렬 G가 주어졌을 때, 패리티 검사행렬 H을 찾기 위해서는 행렬 G에 직교하는 $(n-k)$개의 일차독립 벡터 $y_1, \cdots, y_{n-k}$을 택해 행렬 H의 행이 $y_1^T, \cdots, y_{n-k}^T$로 되도록 한다.

좀 더 일반적으로는 거리 개념을 사용하면 선형코드의 오류정정을 실

6) 패리티 비트(parity bit)란 정보의 전달 과정에서 오류가 생겼는지 검사하기 위해 추가된 비트를 뜻하는 말로 오류 발생 여부를 판단할 수 있지만 오류를 수정할 수는 없다. 이와 유사한 개념으로 선형코드에서는 패리티 검사행렬(parity check matrix) H가 있어 오류 발생 여부를 감지한다.

행할 수 있는지 알 수 있다. x, y가 각각 n비트 메시지라고 하자. x와 y 사이의 거리 $d(x,y)$을 x와 y가 서로 다른 성분의 개수로 정의한다. 예를 들어 $d((1,1,0),(0,0,0))=2$이다. 또한 메시지 x의 가중치(weight)를 모든 성분인 0인 메시지와의 거리 $wt(x)=d(x,0)$로 정의한다. 즉 x가 0이 아닌 성분의 수인 것이다. 그러면 $d(x,y)=wt(x+y)$가 된다. 구체적으로 생성행렬 G을 활용해 메시지 x을 $y=Gx$로 인코딩되는 선형코드가 있다고 하자. 전송과정에서 오류 e가 발생하여 $y'=y+e$로 전송되었다고 하자. 이때 0과 1이 뒤집힐 확률이 50% 미만이라면 인코딩될 가능성이 가장 높은 메시지는 y에서 y'에 도달하는데 필요한 비트 반전(0과 1이 바뀌는) 수를 최소화하는 메시지 y이다. 즉, $wt(e)=d(y,y')$을 최소화한다. 원칙적으로 선형코드를 사용하면 오류정정은 그냥 y'을 그러한 y로 대체한다. 실제로 이것은 다소 비효율적이라 생각되는데 그 이유는 최소 거리 $d(y,y')$을 결정하기 위해서 가능한 모든 2^k개의 메시지 y를 모두 살펴봐야 하기 때문이다. 마지막으로 선형코드의 전체적인 특성을 거리 개념을 활용해 이해할 수 있는데, 선형코드 C의 거리를 메시지들 간의 최소 거리 $d(C)=\min_{x,y\in C, x\neq y} d(x,y)$로 정의한다. 이때 $d(x,y)=wt(x+y)$이고, x, y가 각각 메시지이므로 $x+y$도 메시지이다. 따라서 $d(C)=\min_{x\in C, x\neq 0} wt(x)$가 됨을 알 수 있다.

제 2 절 수학 문제해결과 수학적 창의성

1. 수학 문제해결력

2015 개정 수학과 교육과정에서는 수학 교과 역량으로 문제해결, 추론, 창의·융합, 의사소통, 정보처리, 태도 및 실천 6가지를 선정하였다. 이때 수학 문제해결을 “해결 방법을 알고 있지 않은 문제 상황에서 수학의 지식과 기능을 활용하여 해결 전략을 탐색하고 최적의 해결 방안을

선택하여 주어진 문제를 해결하는 능력"이라 정의한다. 하위 요소로는 '문제 이해 및 전략 탐색', '계획실행 및 반성', '협력적 문제해결', '수학적 모델링', '문제 만들기'를 제시한다(교육부, 2015). 이 중 협력적 문제해결은 문제해결자 간의 상호 협력을 통해 협력적으로 문제를 해결하는 활동을 뜻한다. 협력적 문제해결 활동을 위해 수학 교실에서 의사소통과 토론의 가치가 더욱 부각되었으며 학습자들이 서로 문제해결 방법을 공유하고 토론하는 과정이 중요하게 되었다(이대현, 2019). 김혜미와 한선영(2018)에 따르면 수학 문제해결은 수학 학습이나 실생활에서 직면한 문제를 해결할 수 있는 전략과 기능 등을 적용하는 것으로 수학 교과에서는 창의적 탐구 능력을 활용하고, 반성을 통해 문제해결 결과 도출된 지식의 점검까지 포함하는 개념이다.

수학 문제해결 역량은 이미 오래전부터 수학교육의 중요한 목적으로 강조되었다(김혜미, 한선영, 2018). PISA는 문제해결 능력을 평가영역의 하나로 지정하며 수학적 문제해결의 중요성을 강조했으며(OECD, 2009), 국내외 많은 선행연구(최윤석, 배종수, 2004; Surya & Putri, 2017; 박선영, 한선영, 2018; Hendriana et al., 2018; 한선영, 2019)에서 이미 수학 문제해결력은 중요한 목표로서 강조되어왔다.

2. 수학적 모델링과 수학적 창의성

수학적 모델링에 대한 다양한 정의와 관점들(Blum & Niss, 1991; Julie & Mudaly, 2007; Blum & Ferri, 2009)이 존재하나 실세계 현상을 수학적으로 이해하고 표현하며, 수학적 모델을 활용해 실세계 문제 상황을 설명한다는 공통점이 있다. 모델링 과정 또한 다양한 관점이 존재하며 여러 관점을 분석한 결과 국내외 선행연구자들은 '실세계 탐구 → 수학적 모델 수립 → 수학적 결론 → 모델 적용'으로 이루어지는 수학적 모델링 과정의 큰 틀을 따른다고 할 수 있다(정혜윤 외, 2018). 수학적 모델링 활동의 교수학습적 의미와 효과에 대해 여러 연구가 이루어져왔다(김선희, 2005; 고창수, 오영열, 2015; 박진형, 2017). 특히 박진형

(2017)에 따르면 적절한 온도와 농도를 만족하는 아이스 커피를 만들기 위한 얼음의 양을 구하는 과제를 해결하는 수학적 모델링 활동을 통해 유창성, 유연성, 정교성, 독창성과 같은 창의성 요인들의 발현 가능성을 확인할 수 있고, 고창수와 오영열 (2015)은 경찰서 위치 선정하기, 음식 재료 순서 정하기 등의 수학적 모델링 활동을 통해 추론 능력, 의사소통 능력 및 문제해결능력이 향상될 수 있음을 확인하였다. 이와 같이 현실에서 주어진 문제 상황을 수학적으로 탐구하여 수학적 모델을 개발하고, 그 모델을 기반으로 현실의 문제 상황을 해석하는 수학적 모델링 과정을 통해 창의성과 다양한 수학적 역량을 함양할 수 있음을 알 수 있다. 또한 수학적 모델링 과제는 학생들끼리의 상호토론 및 대화를 통해 능동적으로 학습을 구성해 나가는 교수학습 형태를 장려한다(Asempapa, 2015).

창의성은 주어진 주제나 상황에 대한 독창적인 아이디어를 다루거나 문제해결을 위한 창의적인 방식을 개발하는 능력을 뜻한다. 이는 우리나라의 2015 개정 교육과정 이외에도 중국, 핀란드, 호주, 미국 등의 국가에서 현행 교육과정으로 강조되고 있는 역량이다(나귀수 외, 2018). 수학적 창의성은 수학 학습에 있어서 반드시 필요한 요소이다(이경화, 2015). 최근에는 집단창의성 관련 연구(Zhou & Luo, 2012; 조무정, 진석언, 2016; 성지현, 이종희, 2017; 정혜윤, 이경화, 2019)가 주목받고 있으며, 집단창의성 발현을 위한 교육프로그램에 대한 연구의 필요성도 대두되고 있다. 정혜윤과 이경화 (2019)는 집단창의성이란 '집단 내 구성원들에 의해 제시된 사고가 상호작용[7]을 통해 공유되어 가는 과정 또는 그 과정에서 변환을 거쳐 창의적 시너지를 갖게 된 결과물'로 정의한다. Tan 외 (2018)은 집단창의성의 영역으로 메타인지, 인지, 사회-소통을 제시하였으며, 메타인지의 하위 요소로 반성을, 인지의 하위 요소로 발산적 생산과 수렴적 생산을, 사회-소통의 하위 요소로 친사회적 상호작용과 반사회적 상호작용을 제시한다. 또한 집단창의성의 발현을 위해서는 집단 내

7) 집단 내 상호작용은 서로 정보를 교환하며 발전시켜 나가는 과정, 사회적 맥락에서 검증과 구성원 내 합의 과정 모두를 포함하는 과정이다(Zhou & Luo, 2012).

상호작용이 중요한데, 이는 상호보완적 상호작용, 갈등 기반 상호작용, 메타인지적 상호작용으로 구분할 수 있다(Nemeth & Nemeth-Brown, 2003; Nijstad & Paulus, 2003). 상호보완적 상호작용이란 집단 구성원들이 다양한 사고를 공유하고 누적적으로 수집하는 과정이다. 갈등 기반 상호작용은 집단 내에서 사고가 불일치하거나 대치되는 견해로 인해 갈등이 유발되고 이를 해결하기 위한 과정이다. 마지막으로 메타인지적 상호작용은 앞선 두 상호작용에서 나타난 집단 내 사고를 검증 및 반성하는 등 비판적 사고를 하는 과정이다(정혜윤, 이경화, 2019).

제 3 장 연구 방법[8)]

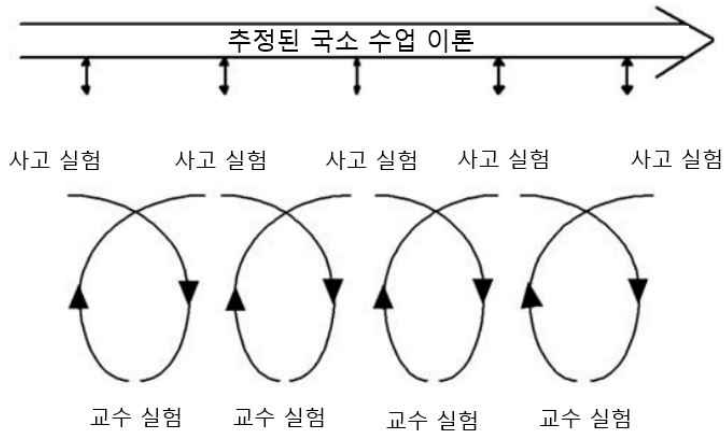
본 연구의 목표는 수학과 정보과학 융합 교육프로그램 개발연구를 진행하는 것이다. Freudenthal (1991)에 따르면, 개발연구란 개발과 연구의 단순 합성어가 아니라 개발과 연구의 순환을 강조하는 연구 방법이다. 본 연구에서는 모자 게임을 바탕으로 최적 전략과 최대승률을 협력하여 탐구해가는 창의적 문제해결 활동을 개발하고, 코딩 이론에 대한 기초 지식을 필요로 하지 않으면서도 오류정정코드와 같은 정보 이론적 실세계 현상과 기초 수학의 관련성을 강조할 수 있도록 프로그램을 연구하였다. 개발한 프로그램을 우리나라 중등학교 학생들을 대상으로 실제 적용하여 프로그램의 수정 및 보완을 반복 수행하였다.

제 1 절 개발연구

개발연구(developmental research)의 역사는 Freudenthal에서 시작한다(권오남, 주미경, 2005). Freudenthal (1973)은 수학 교과과정 개발에서 '연구-개발-보급'의 3단계로 이루어진 전통적인 모델은 현실적으로 비효율적임을 지적하며 연구와 개발이 지속적으로 피드백을 주고받는 유연한 교대 과정으로 구성된 개발연구 모델을 제안하였다. 정영옥 (2005)은 개발연구란, 일관적이고 효율적인 교과과정 개발을 위해 적절한 이론을 바탕으로 체계적으로 수업을 설계하고 평가하며 그 과정을 가능한 한 상세하고 솔직하게 기록하고 보고하는 연구라 정의한다. 또한 개발연구의 절차를 예비설계 단계, 교수실험 단계, 회고분석 단계의 순환과정으로 설명한다. 예비설계 단계는 현재의 상황을 분석, 탐색하는 단계로 교수학습과정이 수업에서 어떻게 구체화 될 것인지에 대해 사고 실험이 이루어지는 단계이다. 이 단계에서는 교육과정, 관련 문헌, 연구보고서 등에서 가능한 모든 자료에서 아이디어를 얻는다. 이 단계의 결과로 학습 목표, 수업

8) 본 장의 내용은 서지영, 윤상균 (2022)을 토대로 보완한 것이다.

활동 계획, 수업에서 학생들의 사고가 이해가 어떻게 전개될지 등에 대해 연구자가 예상하는 학습 경로로 구성된 국소 수업 이론에 대한 추측이 이루어진다. 교수실험 단계는 이전 단계에서 이루어진 사고 실험을 검증, 정련하는 단계이다. 이 단계에서 중요한 것은 연구가 진행되는 동안 연구자가 매일의 수업에 참여하는 것이다(Gravemeijer, 2001). 연구자는 학생의 개별 활동과 사회적 상호작용을 관찰·분석하여 학습 가능한 경로에 대한 추측을 수정하고 새로운 사고 실험을 예상할 수 있다. 학생이나 교사와의 면담, 다른 연구자와의 회의 등을 통해 여러 문제들을 살펴보고 예비 교과과정과 가설적 국소 수업 이론을 상시로 수정해나간다. Gravemeijer와 Cobb (2006)은 개발연구에서 사고 실험과 교수실험간의 반성적 관계를 [그림 Ⅲ-1]과 같이 나타내며, 사고 실험과 교수실험이 형성되는 하나의 미시적 순환과정이 반복되면서 국소 수업 이론이 형성된다고 한다.



[그림 Ⅲ-1] 사고 실험과 교수실험간의 반성적 관계(Gravemeijer, Cobb, 2006, p.28)

회고분석 단계는 교수실험을 통해 수집된 자료 전체를 회고적으로 분석하는 단계이다. 이 단계에서는 수집된 자료를 바탕으로 최종적으로 가설적 국소 수업 이론을 수정하는 것이며 수업에서 일어나는 일들을 좀 더 광범위한 맥락에 놓는다(Cobb, 2000; Gravemeijer, 2001).

제 2 절 연구 절차

[그림 Ⅲ-2] 연구설계 과정

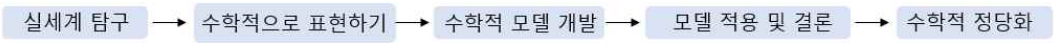
본 연구의 설계 과정에서는 선행연구와 2015 개정 교육과정 문헌 연구를 통해 수학과 정보 융합프로그램 개발을 위한 이론적 검토를 실시하였으며, 필수 학습 요소들을 파악하였다. 또한 이를 바탕으로 실제 우리나라 중등학교 학생들에게 적용가능한 10차시의 교육·학습과정안을 <표 Ⅲ-1>과 같이 개발하였다.

<표 Ⅲ-1> 차시별 학습 주제

	학습 주제	프로그램 단계
1차시	3-카드 게임과 4-카드 게임	1단계 (기본활동)
2차시	3-카드 게임과 4-카드 게임의 최적 전략	2단계 (수학적 정당화)
3차시	벡터, 행렬, rank-nullity 정리를 포함한 행렬 이론	3단계 (수학적 모델링과 일반화)
4차시	7-카드 게임과 선형대수학	
5차시	n-카드 게임과 선형대수학 ($n=2^k-1$)	
6차시	7-카드 게임의 최적 전략	4단계 (심화활동)
7차시	n-카드 게임의 최적 전략 ($n=2^k-1$)	
8차시	길이 4 또는 11 메시지의 오류정정코드	5단계 (응용활동)
9차시	오류정정코드의 일반화	
10차시	오류정정코드의 응용	

이때 4차시~7차시(3단계~4단계)와 8차시~9차시(5단계)는 각각 학생

들이 실세계 상황을 수학적으로 이해하고 주어진 문제, 즉 메시지 맞추기 게임과 오류정정문제를 해결하고 결론을 수학적으로 정당화할 수 있는 과정을 제공할 수 있도록 설계하였다. 이 과정은 선행 연구들에서 제시된 다양한 수학적 모델링 과정(Swetz & Hartzler, 1991; Blum & Ferri, 2009; 정혜윤 외, 2018; 고상숙 외, 2020)을 참고하여 [그림 Ⅲ-3]과 같은 구조를 갖도록 구성하였다.



[그림 Ⅲ-3] 수학적 모델링 과정

10차시 계획을 바탕으로 2021년 서울대학교 과학영재교육원 중학생들, 서울대학교 사범대학 부설 시흥영재교육원 중고등학생들을 대상으로 개발한 프로그램을 실제 적용 및 평가하여 수정 보완을 반복하였다. 또한 수정된 교육프로그램을 2022년 서울대학교 과학영재교육원 중학생들, 서울대학교 사범대학 부설 시흥영재교육원 중고등학생들을 대상으로 적용하였으며, 이를 평가 및 보완하는 과정을 반복함으로써 예비설계를 위한 기초연구를 진행하였다. 이때 2021년에 참여한 학생이 사전지식을 갖추어 2022년 재참여를 하는 경우는 없었다. 2021년부터 2022년까지 10차시(총 60시간)의 교육프로그램을 모두 이수한 학생들은 10명이며, 1~2차시 정도 요약된 형태의 일부 프로그램을 이수한 학생들은 약 60명 정도이다. 최종적으로 2년간 분석을 종합하여 프로그램의 수정 및 보완에 반영하고 시사점을 분석하였으며, 특히 2022년에 참여한 학생들에 대하여는 보다 적극적으로 회고분석 단계를 실행하였다. 이를 바탕으로 후속 연구의 필요성을 도출하였다.

제 3 절 자료 수집 및 분석[9)]

개발연구에서는 정성적 연구에서 사용되는 다양한 자료가 필요한데, 이러한 자료에는 교과과정, 수학교육학과 관련된 문헌, 연구보고서 등 기존의 문서 자료와 수업 녹화 및 녹음 자료, 학생들과의 개별 면담 기록, 학생들의 활동 내용 사본, 프로젝트 구성원의 논의 기록, 현장 기록 등이 포함된다(우정호 외, 2006, p.82).

2021년에는 문헌 검토를 바탕으로 개발한 프로그램을 서울대학교 과학영재교육원 중학생들과 서울대학교 사범대학 부설 시흥영재교육원 중고등학생들에게 적용하며, 학생들의 반응을 기록 및 분석하였다.

2022년에는 서울대학교 과학영재교육원 중학생 3명과 서울대학교 사범대학 부설 시흥영재교육원 고등학생 3명과 진행한 모든 차시의 수업을 녹화하였다.[10)] 한 대의 캠코더를 두어 녹화를 진행했으며, 수업을 진행하는 교사와 발표하는 학생을 추적하도록 하였다. 또한 학생들이 수업 중 작성한 학습지 등은 사진을 찍어 수집하였다. 모든 차시의 수업이 종료된 후 프로그램에 참여한 소감문을 작성하게 하였으며, 인터뷰를 진행하였다. 인터뷰는 교사와 학생 간에 일대일로 진행되었으며, 10분여간의 인터뷰 내용은 녹음 후 전사하였다. 인터뷰를 진행할 때는 개발연구의 자료 분석 과정에서 가장 중요한 것 중 하나인 초기의 가설 학습 경로와 실제 학습 경로가 어느 정도 일치되는지를 판단하기 위해, 연구의 주된 결과에 대해 학생이 잘 이해하고 있는지 물어보았다. 전사 기록지는 발화 단위로 행을 분리하여 한글파일로 작성하였으며 학생들의 개인정보는 담지 않고 학생 1, 학생 2 등으로 코드화하였다. 수집한 자료를 바탕으로

9) 자료 수집 과정은 서울대학교 생명윤리심의위원회에서 승인을 받고 진행하였다(IRB No. 2205/004-014).

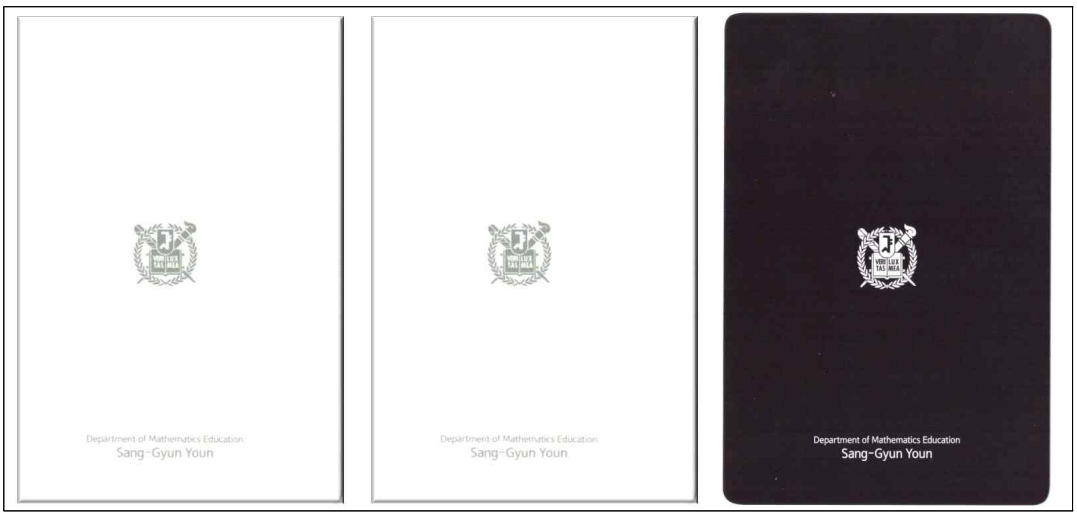
10) 2022년 서울대학교 과학영재교육원 중학생 3명은 서울시 소재의 중학교에 재학 중이며 중학교 2학년 남학생 2명(학생 1, 학생 2)과 중학교 3학년 남학생 1명(학생 3)이다. 2022년 서울대학교 사범대학 부설 시흥영재교육원 고등학생 3명은 경기도 시흥시 소재 고등학교에 재학 중이며, 모두 고등학교 2학년 남학생(학생 4, 학생 5, 학생 6)이다.

학생들의 학습과 사고를 분석하였다. 이때 분석 방법으로 귀납적 분석을 사용하였다. 이는 연구 사례에 대한 사전의 분명한 이론적 전제 없이 수집된 자료를 분석함으로써 연구 현상에 대해 체계적으로 기술하거나 의미 있는 결론을 유도하는 것이다(이지훈, 2000).

제 4 장 연구 결과[11]

제 1 절 과제 개발 및 교수·학습과정

본 연구는 학생들의 실습을 용이하게 하기 위해 흰색 모자와 검은색 모자 모델을 [그림 Ⅳ-1]과 같이 앞면이 흰색이고 뒷면이 검은색인 카드 게임 문제로 변형하였다. 지금부터는 k-모자 게임 대신 k-카드 게임이라 부르도록 하겠다.



[그림 Ⅳ-1] 카드 게임에 사용된 카드

활동에 임하는 학생들이 수학의 유용성을 살펴볼 수 있으면서도 창의적, 협동적, 논리적, 융합적 사고 기회를 충분히 얻을 수 있도록 프로그램을 구성하였다. 그 과정을 단계별로 살펴보자면 아래와 같다.

11) 본 장의 내용은 서지영, 윤상균 (2022)를 토대로 보완한 것이다.

<표 Ⅳ-1> 프로그램의 5단계 구성

단계	1. 기본활동	2. 수학적 정당화	3. 수학적 모델링과 일반화	4. 심화활동	5. 응용활동
필수 사고	창의적 및 협동적 사고	논리적 사고	논리적 사고	수학의 유용성 경험	융합적 사고

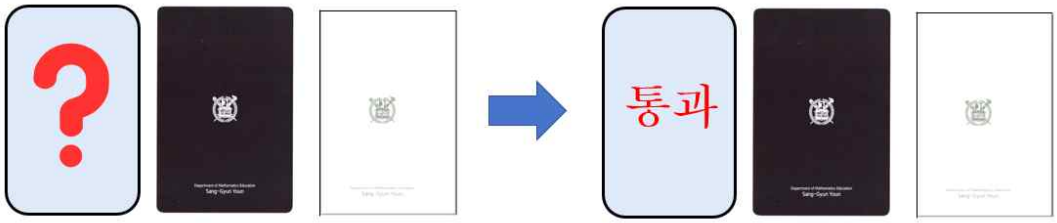
(1) 기본활동 단계

기본활동 단계에서는 모든 학생들이 게임의 원리를 이해하고 체득할 수 있도록 카드 게임을 실제로 실시한다. 먼저 교사가 1-카드 게임 시범을 보인다. 카드를 머리 위에서 무작위로 회전시키다가 멈추고 학생들에게 보이는 면의 색이 흰색일지 검은색일지 추정하는데, 이를 반복하여 추정이 맞는 경우와 틀리는 경우 모두 발생할 수 있음을 학생들이 자연스럽게 받아들일 수 있도록 지도한다. 이는 1-카드 게임의 경우 참가자가 승리할 확률이 50%임을 학생들이 자연스럽게 받아들일 수 있도록 돕는 중요한 과정이다.

다음으로 학생들이 직접 참여하는 3-카드 게임을 실시한다. 참가자 역할의 학생 3명이 시범을 보이기 위해 카드를 한 장씩 머리 위에서 회전시키다가 동시에 멈춘다. 이때 본인의 카드 색을 확인할 수는 없지만, 본인을 제외한 나머지 참가자들의 카드 색은 확인할 수 있다. 이때 나머지 참가자들의 카드 색과 본인의 카드 색의 관계를 확률적 관점에서 추론해내는 것이 3-카드 게임의 핵심이다. 이후 3명의 참가자가 각자 본인의 카드 색이 흰색일지, 혹은 검은색일지 아니면 통과를 선택할지를 동시에 결정하도록 하고, 승리 혹은 패배 여부를 학생들이 직접 판단할 수 있도록 하여 게임 규칙의 이해를 돕는다. 이를 여러 차례 반복하여 임의로 주어지는 상황에서 각 참가자의 역할은 무엇인지 인지할 수 있도록, 그리고 세 참가자의 흰색, 검은색 혹은 통과 선택을 종합하여 승리 패배 여부를 판단하는 원리를 이해할 수 있도록 돕는다.

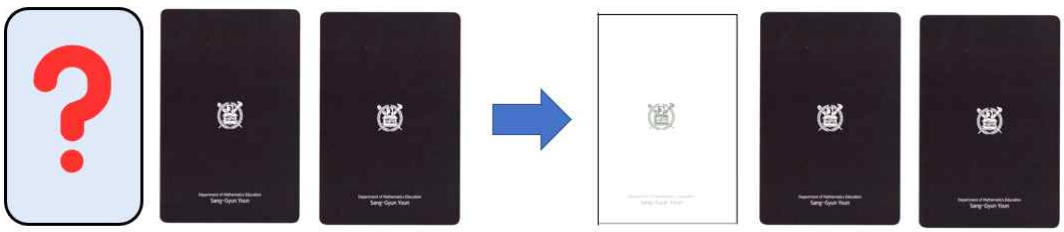
여러 차례 3-카드 게임을 반복한 후 '어떤 공동전략을 세워야 카드

게임의 승률을 높일 수 있을까?'라는 주제로 조별 토의 시간을 부여한다. 자유로운 분위기를 조성하기 위해 3~4명의 학생들이 한 조가 되도록 구성하였고, 학생들이 직접 협력하여 최적 전략을 탐구해보도록 지도한다. 학생들은 게임의 규칙을 재확인하기 위해 게임을 조별로 다시 해보기도 하고 서로 게임의 규칙을 알려주기도 하는 등의 동료 멘토링을 통해 3-카드 게임에 대한 전반적 이해도가 크게 높아지는 경향을 보였다. 이 과정에서 학생들은 게임을 실제로 해보며 가진 생각과 감정 등을 바탕으로 다양한 발산적 사고를 하게 되는데, 다양한 의견이 자유롭게 표현될 수 있도록 교사가 허용적인 분위기를 조성하는 것이 중요하다. 몇몇 학생들이 '게임에 참여하는 인원수에 상관없이 항상 50% 승률을 가질 것이다.' 라고 생각하는 경우가 종종 있었다. 이는 전확률과 조건부확률의 개념이 정립되지 않았기에 나타나는 현상인데, 이에 대하여는 학생들의 토의가 진행된 후 교사가 수학적 개념 확립에 도움을 주었다. 학생들은 토의하는 과정에서 발산적 사고와 수렴적 사고를 순환하며 창의적으로 문제를 해결할 수 있게 되는데, 이러한 문제해결 과정의 중요성은 이경화 (2015)에서 강조된 바 있다. 토의를 마친 후에는 대부분 학생들이 3-카드 게임에서 본인을 제외한 나머지 두 참가자의 카드 색이 같을 경우 그와 다른 카드 색을 선택하고, 나머지 두 참가자의 카드 색이 서로 다를 경우 통과를 선택하는 것이 최적 전략임을 알아낸다. 예를 들어 아래 [그림 Ⅳ-2]에서와 같이 본인을 제외한 나머지 두 참가자의 카드 색이 서로 다를 경우에는 통과를 선택하는 것이다.



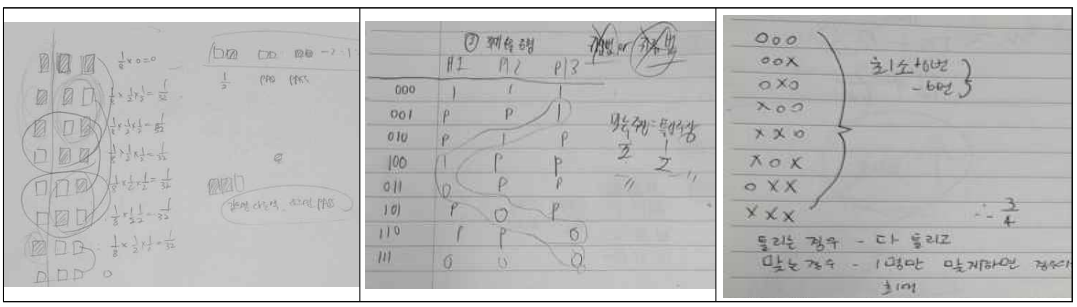
[그림 Ⅳ-2] 본인을 제외한 나머지 두 참가자의 카드 색이 서로 다른 경우

만약 [그림 Ⅳ-3]과 같이 본인을 제외한 나머지 두 참가자의 카드 색이 검은색으로 같은 경우에는 그와 다른 색인 흰색이라고 추정한다.



[그림 Ⅳ-3] 본인을 제외한 나머지 두 참가자의 카드 색이 같은 경우

전확률과 조건부확률의 개념적 차이를 자연스럽게 받아들이는 과정으로서 위의 전략을 바탕으로 승률을 구하는 활동을 학생들이 토의하여 진행한다. 대부분의 학생들이 가능한 8가지 경우를 모두 노트에 나열하여 승률을 아래의 [그림 Ⅳ-4]와 같이 구하였다.



[그림 Ⅳ-4] 승률에 대한 학생들의 추론

학생들의 표현방식은 흰 카드와 검은 카드 그리고 0과 1, O와 X 등으로 다양하였지만 본질적으로 동일한 결론에 이르렀으며, 이는 아래의 <표 Ⅳ-2>로 정리할 수 있다.

<표 Ⅳ-2> 3-카드 게임의 모든 8가지 상황

주어지는 상황			참가자 1	참가자 2	참가자 3	결과
흰색	흰색	흰색	검은색 (오답)	검은색 (오답)	검은색 (오답)	패
흰색	흰색	검은색	통과	통과	검은색 (정답)	승
흰색	검은색	흰색	통과	검은색 (정답)	통과	승
검은색	흰색	흰색	검은색 (정답)	통과	통과	승
검은색	검은색	흰색	통과	통과	흰색 (정답)	승
검은색	흰색	검은색	통과	흰색 (정답)	통과	승
흰색	검은색	검은색	흰색 (정답)	통과	통과	승
검은색	검은색	검은색	흰색 (오답)	흰색 (오답)	흰색 (오답)	패

대부분 학생들이 참가자 3명의 카드 색이 모두 동일한 경우에는 게임에서 지게 되고, 나머지 경우에는 승리하여 승률이 $\frac{6}{8}$, 즉 75%임을 확인하였다. 이때 승률을 더 높일 수 있는 방법이 있을지에 대해 보다 깊고 다양한 반응을 요구하는 확산적 발문(한정민, 박만구, 2010)을 하여 3-카드 게임의 메타인지적 활동으로서의 의미를 되새기고 학생들이 다양한 의견을 제시할 수 있도록 유도한다. 메타인지적 상호작용은 토의의 완성도를 높이고 문제해결의 가능성과 내용에 대한 이해력을 향상시키기 때문에 중요한 과정이다(정혜윤, 이경화, 2019). 또한 이는 추후 수학적 정당화 및 수학적 모델링과 일반화 단계의 활동들로 전환하기 위한 동기를 유발하는 필수적 과정 중 하나이며, 다양한 의견을 수렴한 후 75%가 최대승률이라는 사실을 제시하는데 이에 관한 엄밀한 논의는 수학적 정당화 단계로 미룬다. 정당화에 앞서 카드 게임의 참가자 수가 4명으로 증가하였을 경우, 즉 4-카드 게임에서 어떤 전략을 택해야 하며 또한 승률이 어

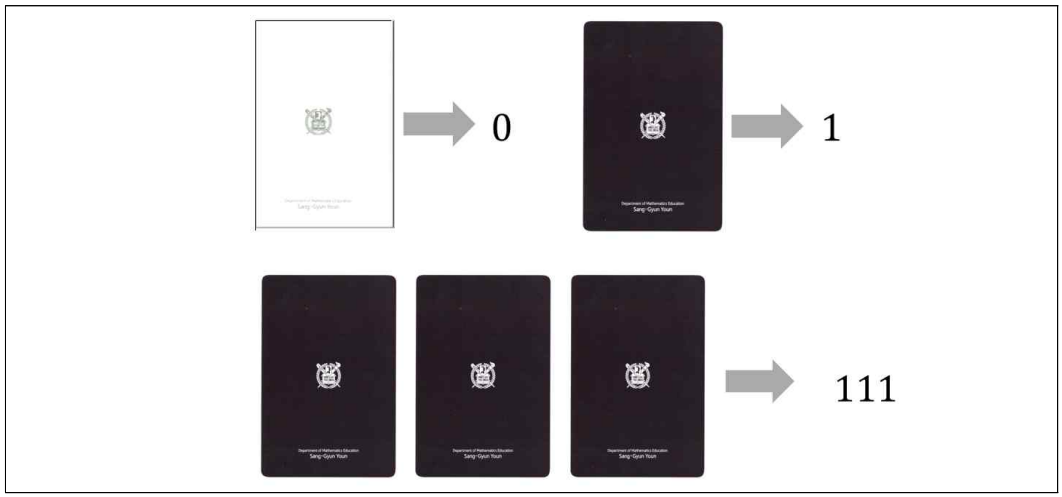
떻게 될지에 대해 학생들이 함께 토론할 수 있도록 한다.

4-카드 게임의 경우 3-카드 게임보다 학생들이 다소 어려워하는 경향을 보였다. 이는 3-카드 게임의 경우 모든 참가자가 동일한 전략을 사용하는 대칭적 구조를 갖는데 이에 반해 4-카드 게임의 경우에는 모든 참가자가 동일한 전략을 사용할 경우 승률 50% 이하를 달성하는 데에 그치기 때문이다. 이때 학생들 스스로 문제를 이해하고 해결의 실마리를 도출할 수 있는 내적 도움을 제공할 필요가 있는데(이경화, 2015, p.93), 1-카드 게임의 승률이 50%, 3-카드 게임의 승률이 75%이고 n-카드 게임이 협동 활동임을 강조할 수 있다. 학생들은 참가자의 수가 증가하였으므로 4-카드 게임의 승률이 3-카드 게임의 승률인 75% 이상일 수 있음을 어렵지 않게 짐작하였다. 또한 비대칭적 전략의 수립, 즉 전략 구성에 있어 참가자마다의 역할이 다를 수 있음을 강조하였을 때 상당수 학생들은 한 참가자는 항상 통과를 택하고 나머지 세 참가자가 3-카드 게임에서의 전략을 반복하였을 때 승률 75%를 달성할 수 있음을 스스로 결론지을 수 있었다. 이때 참가자 수가 증가하였음에도 여전히 최대승률이 75%일지에 대한 개방적 발문을 통해 학생들의 자유로운 의견 개진을 도울 수 있으며, 실제로 학생들은 다양한 가능성을 제시하는 경향이 있다. 교사는 학생들의 다양한 응답에 대해 '맞다, 틀리다'의 판단을 내리기보다는 응답의 근거를 설명할 수 있는 기회를 주어 학생이 프로그램에 더욱 흥미를 갖고 스스로 참여할 수 있도록 유도해야 한다(한정민, 박만구, 2010). 실제로 본 프로그램에서는 학생들이 칠판에 본인의 의견을 나타내어 다른 학생들에게 설명하는 과정이 이루어졌다. 이에 대한 수렴적 사고를 돕기 위해 아래의 수학적 정당화 단계를 구성하는 것이 적절하다.

(2) 수학적 정당화 단계

앞서 기본활동 단계에서 3-카드 게임과 4-카드 게임에서의 최대승률을 75%로 추론한 바를 수학적으로 정당화하고, 절대적 결론을 확립 가능케 하는 수학의 유용성을 경험할 수 있도록 돕는 단계이다. 간단한 형

태의 수학적 모델링 과정으로 흰색 카드를 숫자 0 그리고 검은색 카드를 숫자 1로 표현하도록 한다. 예를 들어 3-카드 게임에서 모든 참가자에게 검은색 카드가 주어진 경우 이를 '111'로 나타낸다.



[그림 Ⅳ-5] 3-카드 게임의 기초 수학적 모델링

이를 바탕으로 기본활동 단계에서 살펴본 3-카드 게임에서의 모든 경우의 수와 각 경우마다 참가자들의 전략이 무엇이었는지를 0과 1을 이용하여 어렵지 않게 모델링할 수 있고, 그 결과는 아래의 <표 Ⅳ-3>으로 주어지고, [그림 Ⅳ-4]의 두 번째 추론에서의 표현 방법과 일치한다. 예를 들어 101이라면 참가자 1과 참가자 3에게 검은색 카드, 참가자 2에게 흰색 카드가 주어진 상황을 의미하고, 이때 참가자 1과 참가자 3은 통과를 택하고 참가자 2는 나머지 두 참가자 모두 검은색 카드이므로 본인은 흰색 카드를 택하게 된다.

<표 Ⅳ-3> 3-카드 게임 최적 전략의 수학적 모델링

주어진 상황	참가자 1	참가자 2	참가자 3	결과
000	1 (오답)	1 (오답)	1 (오답)	패
001	통과	통과	1 (정답)	승
010	통과	1 (정답)	통과	승
100	1 (정답)	통과	통과	승
011	0 (정답)	통과	통과	승
101	통과	0 (정답)	통과	승
110	통과	통과	0 (정답)	승
111	0 (오답)	0 (오답)	0 (오답)	패

<표 Ⅳ-3>을 제시하여 8가지 경우를 살펴보았을 때, 최종적인 승률은 75%이지만, 각 열을 살펴보면 모든 참가자가 정답을 2번 그리고 오답을 2번 말하고 있음을 확인할 수 있다. 또한 오답들을 000과 111 두 가지 경우에 몰아서 배치하고, 정답들이 나머지 여섯 가지 경우들에 효율적으로 분산되어 있는 것이 높은 승률을 얻기 위한 핵심적인 역할을 하였음을 학생들이 확인할 수 있다. 이러한 사고 과정은 [그림 Ⅳ-4]의 두 번째 추론에서도 살펴볼 수 있다. 또한 어떠한 전략을 택하더라도 참가자 1은 참가자 2와 참가자 3의 정보를 바탕으로 판단하기 때문에, 만약 000에서 정답을 제출한다면, 100에서 오답을 제출할 것이고, 마찬가지로 111에서 정답을 제출한다면 011에서 오답을 제출할 것이다. 이러한 대칭성에 의해 각 참가자의 정답의 개수와 오답의 개수는 항상 동일해야 한다. 즉 j번째 참가자의 정답 개수를 a_j 그리고 오답 개수를 b_j라 하였을 때, $a_j = b_j$가 성립한다. 따라서 모든 참가자들의 정답 개수의 총합 A는 $a_1 + a_2 + a_3$로 주어지고, 모든 참가자들의 오답 개수의 총합 B는 $b_1 + b_2 + b_3$이므로 $A = B$임을 알 수 있다.

한편 게임에서 승리하는 경우의 수를 w 그리고 패배하는 경우의 수를 l이라고 하였을 때 $w + l = 8$이 성립하고, 각 승리하는 경우마다 적어

도 하나의 정답이 존재해야 하므로 $w \leq A$임을 알 수 있다. 또한 모든 오답들은 패배하는 경우에 속하며 동시에 3개의 오답이 배치가능하므로 $B \leq 3l$임을 알 수 있다. 이때 위에서 살펴봤듯이 $A = B$이므로 $8 - l = w \leq A = B \leq 3l$이 성립한다. 따라서 $l \geq 2$이고 $w \leq 6$이므로 임의의 전략에 대해 승률이 항상 75% 이하임을 정당화할 수 있다. 2015 개정 수학과 교육과정에서 중학교 2학년에서 연립부등식을 학습하게 되어 있어 이 부분의 수학적 정당화는 많은 학생들이 큰 무리 없이 할 수 있었다.

이 논의를 이해한 학생들은 4-카드 게임의 경우로 일반화 가능한지 여부를 알아보기 위해 같은 논리를 적용해보는 경향을 보이는데, 실제로 4-카드 게임의 경우에도 모든 정답의 개수 A와 모든 오답의 개수 B가 일치하고, 승리하는 경우의 수 w와 패배하는 경우의 수 l에 대해 $w + l = 16$, $w \leq A$ 그리고 $B \leq 4l$이 성립한다. 이를 연립하여 $16 - l = w \leq A = B \leq 4l$, 즉 $3.2 \leq l$이 성립함을 알 수 있다. 따라서 $l \geq 4$이고 $w \leq 12$이므로 임의의 전략에 대한 승률이 75% 이하임을 정당화할 수 있다. 이러한 과정을 통해 학생들은 기본활동 단계에서 추론한 전략이 실제로 최대승률임을 수학적으로 정당화하는 과정을 이해할 수 있고, 이를 바탕으로 수학의 유용함과 엄밀함을 경험할 수 있다. 이 단계 이후부터 학생들은 토의과정에서 자신의 주장을 친구에게 설득시킬 때, 수학적 정당화의 방법을 사용하기 시작했다.

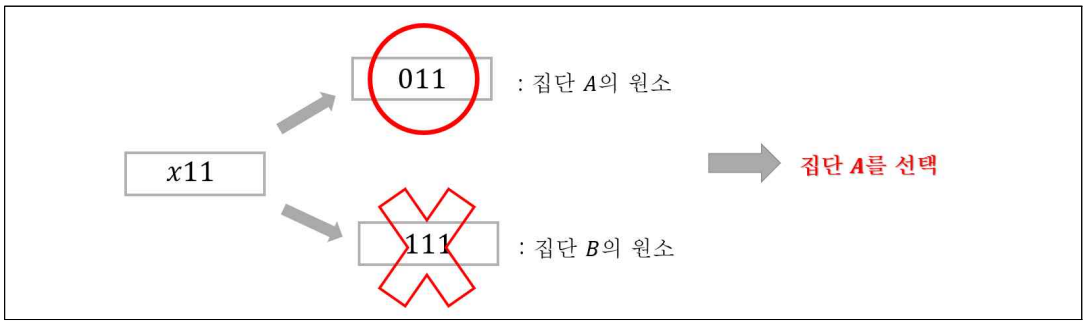
(3) 수학적 모델링과 일반화 단계

이 단계에서는 학생들이 이진법 연산, 보다 자세히는 $1+1=0$을 만족하는 $\mathbb{Z}_2$-모듈(module)에서의 벡터와 행렬 기본연산을 활용하여 게임의 참가자 수가 증가하는 n-카드 게임의 수학적 구조를 이해하는 것을 목표로 한다. 2015 개정 수학과 교육과정의 중등교육과정 내에서는 이진법, 벡터와 행렬을 다루지 않기 때문에 이와 관련한 기초 지식과 연산 등을 소개하는 과정이 필요하다. 또한 n-카드 게임의 최적 전략과 최대승률의 논의에 있어 추상 선형대수학 이론, 특히 유한체 $\mathbb{Z}_2$위에서의 차원 정리

(dimension theorem 혹은 rank-nullity theorem)가 중요한 역할을 한다.

3-카드 게임에서 주어진 상황이 001, 010, 011, 100, 101, 110 중 하나인 경우 그리고 000와 111 중 하나인 경우가 대립하였는데 각각 집단 A 그리고 집단 B라 하였을 때 이를 0과 1로만 구성된 $H_3 = \begin{bmatrix} 0\,1\,1 \\ 1\,0\,1 \end{bmatrix}$의 선형대수적 특성으로 구별할 수 있다. 실제로 집단 A는 $\{v \in \mathbb{Z}_2^3 : H_3 \cdot v \neq 0\}$와 일치하고 집단 B는 $\{v \in \mathbb{Z}_2^3 : H_3 \cdot v = 0\}$, 즉 주어진 행렬 H_3의 핵(kernel)과 일치함을 알 수 있다. 또한 3-카드 게임의 최적 전략을 집단 A와 집단 B의 구분을 바탕으로 수학적으로 모델링할 수 있으며 이는 7-카드 게임, 15-카드 게임으로의 일반화를 가능케 하여 학생들이 수학의 유용성을 경험할 수 있도록 하는 핵심적인 과정이다.

3-카드 게임에서 첫 번째 참가자의 최적 전략은 두 가지 방법으로 구성되어 있다. 나머지 두 참가자의 카드가 같은 색일 경우, 예를 들어 $x11$의 상태가 주어졌다면 011로 결정하는 것이 학생들이 학습한 최적 전략이다. 이는 가능한 두 경우 011과 111 중 하나인 011을 택하는 것으로, 즉 [그림 Ⅳ-6]과 같이 집단 A와 집단 B 중 집단 A를 선택하는 것으로 이해할 수 있다.



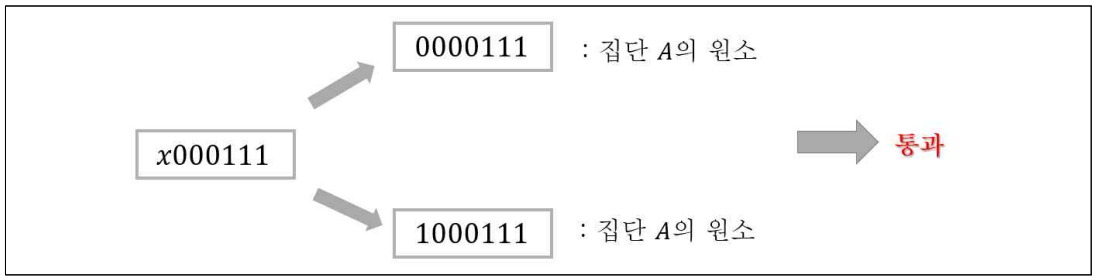
[그림 Ⅳ-6] $x11$가 주어진 경우

한편 나머지 두 참가자의 카드가 다른 색일 경우, 예를 들어 $x01$의 상태가 주어졌다면 통과를 하는 것이 최적 전략이었다. 이는 두 가능한 경우 001과 101 중 어느 것도 택하지 않는 것인데, [그림 Ⅳ-7]과 같이 집단

A와 집단 A 중에는 임의로 선택하지 않는 것으로 이해할 수 있다.

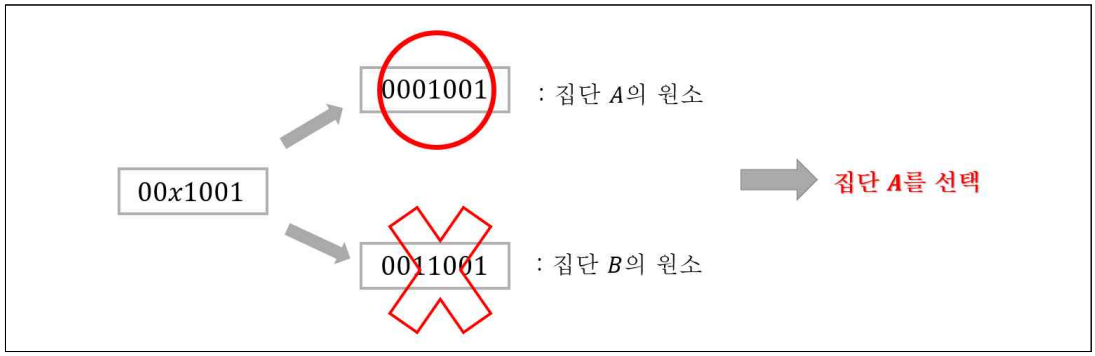
[그림 Ⅳ-7] $x01$가 주어진 경우

이때 행렬 $H_3=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&1\end{bmatrix}$의 각 열 01, 10, 11이 자연수 1, 2, 3을 이진수로 순서대로 표현하고 있음에 주목하고, 이를 일반화하여 자연수 1부터 7까지를 이진수로 나타낸 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111을 순서대로 열로 취한 $H_7=\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}$을 소개한다. 또한 행렬 H_7을 이용하여 집단 $A=\{v\in\mathbb{Z}_2^7 : H_7\cdot v\neq 0\}$와 집단 $B=\{v\in\mathbb{Z}_2^7 : H_7\cdot v=0\}$을 구별하여 3-카드 게임의 최적 전략을 일반화할 수 있음을 지도한다. 실제로 7-카드 게임의 경우 첫 번째 참가자에게 $x000111$의 상태가 주어졌을 때 가능한 경우가 오직 두 가지 0000111과 1000111임을 학생들이 자연스럽게 이해하였으며 이진법 연산을 통해 두 경우 모두 집단 A에 속함을 확인할 수 있었다. 이때에는 3-카드 게임에서와 마찬가지로 통과를 택한다.



[그림 Ⅳ-8] $x000111$가 주어진 경우

또한 세 번째 참가자에게 $00x1001$의 상태가 주어졌을 때 가능한 경우가 오직 두 가지 0001001과 0011001임을 학생들이 자연스럽게 이해하였으며 이진법 연산을 통해 각각 집단 A와 집단 B에 속함을 확인할 수 있었다. 이때에는 3-카드 게임에서와 마찬가지로 집단 A의 원소를 택하는 것을 전략으로 한다.



[그림 Ⅳ-9] $00x1001$가 주어진 경우

위의 전략에 따른 결과를 살펴보기 위해 학생들이 직접 7-카드 게임에 참여하도록 지도하는데, 이때 카드 색을 0과 1로 변환하는 과정을 생략하기 위해 한자리가 감추어진 길이 7의 메시지를 맞추는 '길이 7 메시지 맞추기 게임'으로 전환한다. 학생들은 교사로부터 $x000111$ 혹은 $00x1001$과 같은 메시지를 전달받는다. 3-카드 게임에서의 최적 전략에 따른 결과 양상과 비슷하게 7-카드 게임에서 승리할 경우 단 한 명이 정답을 말하고 나머지 6명은 통과를 하게 되고, 패배할 경우 7명 모두 오답을 말하게 되는 것을 학생들이 직접 경험할 수 있도록 자연스럽게 유도하는 것이 중요하다. 이를 위해 교사는 길이 7의 메시지들을 의도적으로 준비한다. 예를 들어 메시지 1000100을 준비하여 $x000100$을 첫 번째 참가자에게, $1x00100$을 두 번째 참가자에게, …, 일곱 번째 참가자에게 $100010x$를 전달하고, 각 참가자들은 $x=0$인 경우의 메시지와 $x=1$인 경우의 메시지가 집단 A에 속하는지 혹은 집단 B에 속하는지 여부를 확인하는 과정을 거친다. 이때 네 번째 참가자를 제외한 모든 참가자들은 두 메시지 모두 집단 A에 속하기 때문에 통과를 하게 된다. 네 번째 참가자의

경우에는 $x=0$일 경우의 메시지 1000100이 집단 A에 속하고 $x=1$일 경우의 메시지 1001100이 집단 B에 속하므로 집단 A의 메시지 1000100을 택하여 정답을 말하게 된다.

<표 Ⅳ-4> 메시지 1000100를 보내는 경우

보낸 메시지 1000100	받은 메시지	$x=0$	$x=1$	답변	결과
참가자 1	x000100	집단 A	집단 A	통과	·
참가자 2	1x00100	집단 A	집단 A	통과	·
참가자 3	10x0100	집단 A	집단 A	통과	·
참가자 4	100x100	집단 A	집단 B	1000100	정답
참가자 5	1000x00	집단 A	집단 A	통과	·
참가자 6	10001x0	집단 A	집단 A	통과	·
참가자 7	100010x	집단 A	집단 A	통과	·

한편 메시지 1001100을 교사가 의도적으로 준비하여 k번째 참가자에게 k번째 자리를 감춘 메시지를 전달하였을 때 두 번째 참가자는 1x01100을 받게 되는데, $x=0$일 경우의 메시지 1001100은 집단 B에 속하며 $x=1$일 경우의 1101100은 집단 A에 속하게 된다. 따라서 두 번째 참가자는 집단 A에 속하는 오답 1101100을 선택하게 되는데, 실제로는 모든 참가자들이 오답을 선택하게 됨을 살펴볼 수 있다. 더 나아가 7-메시지 맞추기 게임을 반복해가며 확인함으로써 전략에 따른 결과를 내면화할 수 있다.

<표 Ⅳ-5> 메시지 1001100를 보내는 경우

보낸 메시지 1001100	받은 메시지	$x=0$	$x=1$	답변	결과
참가자 1	x001100	집단 A	집단 B	0001100	오답
참가자 2	1x01100	집단 B	집단 A	1101100	오답
참가자 3	10x1100	집단 B	집단 A	1011100	오답
참가자 4	100x100	집단 A	집단 B	1000100	오답
참가자 5	1001x00	집단 A	집단 B	1001000	오답
참가자 6	10011x0	집단 B	집단 A	1001110	오답
참가자 7	100110x	집단 B	집단 A	1001101	오답

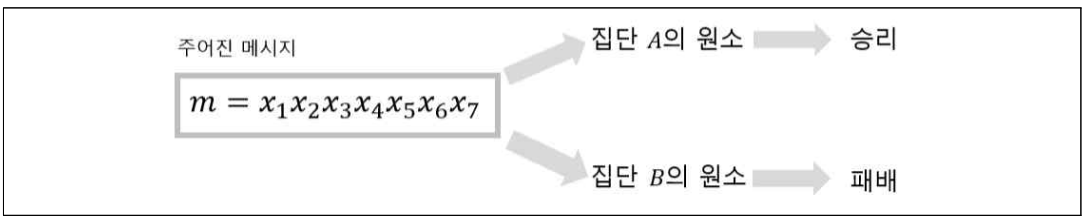
(4) 심화활동 단계

수학적 모델링과 일반화 그리고 길이 7의 메시지 맞추기 게임을 반복하여 학생들이 얻은 경험적 근거들을 바탕으로 일반적인 길이 2^n-1의 메시지 맞추기 게임의 최대승률을 논하고 수학적 정당화를 하는 단계이다. 교사가 집단 A에 속하는 메시지 $m=x_1x_2\cdots x_7$을 준비하였을 때 k번째 참가자는 k번째 자리에 대한 정보를 제공받지 못하기 때문에 가능한 두 메시지 m과 $m+e_k$가 어느 집단에 속하는지 여부를 각각 판단해야 한다. 이때 e_k는 k번째 성분만 1이고 나머지 성분들은 0인 벡터이다. 메시지 m은 항상 집단 A에 속하므로 $m+e_k$가 어느 집단에 속하는지 여부만 판단하면 충분하다. 이때 $0\neq H_7\cdot m\in\mathbb{Z}_2^3$이므로 $H_7\cdot m$이 H_7의 열벡터 중 하나여야만 한다. 각 열벡터를 v_1, v_2, …, v_7라 두고 $H_7\cdot m=v_j$라 가정하자. 만약 $k\neq j$라면 k번째 참가자의 한 메시지 $m+e_k$는 $H_7\cdot(m+e_k)=H_7\cdot m+H_7\cdot e_k=v_j+v_k\neq 0$이므로 집단 A에 속하고 오직 j번째 참가자의 한 메시지 $m+e_j$ 경우에만 $H_7\cdot(m+e_j)=H_7\cdot m+H_7\cdot e_j=v_j+v_j=0$이 성립하여 집단 B에 속하게 된다. 따라서 j번째 참가자만 유일하게 집단 A에 속하는 정답 메시지 m

을 택하고 나머지 참가자들은 통과를 하게 됨을 알 수 있다.

한편 교사가 집단 B에 속하는 메시지 $m=x_1x_2\cdots x_7$을 의도적으로 준비하였을 때 k번째 참가자는 k번째 자리에 대한 정보가 없기 때문에 가능한 두 메시지 m과 $m+e_k$가 어느 집단에 속하는지 여부를 각각 판단해야 한다. 한 메시지 m은 항상 집단 B에 속하고 다른 한 메시지 $m+e_k$는 $H_7\cdot(m+e_k)=H_7\cdot m+H_7\cdot e_k=0+v_k=v_k\neq 0$이므로 집단 A에 속하게 된다. 따라서 모든 참가자들이 집단 B의 메시지 하나 그리고 집단 A의 메시지 하나 중 집단 A의 메시지를 택하게 되어 첫 번째 참가자는 오답 $m+e_1$, 두 번째 참가자는 오답 $m+e_2$, …, 일곱 번째 참가자는 오답 $m+e_7$을 말하게 됨을 수학적으로 정당화할 수 있다. 따라서 모든 참가자들이 오답을 이야기하게 됨을 학생들이 큰 어려움 없이 이해할 수 있다.

학생들이 일반화된 전략에 따른 결과를 파악한 후에는 임의로 주어지는 메시지 $m=x_1x_2\cdots x_7$이 집단 A에 속하는지 혹은 집단 B에 속하는지 여부가 길이 7 메시지 맞추기 게임의 승패 여부를 결정하는 중요한 요인임을 강조할 수 있게 된다.



[그림 Ⅳ-10] 길이 7 메시지 맞추기 게임의 승패 여부

즉 집단 A의 원소의 수가 집단 B의 원소의 수에 비해 클수록 승률이 높아지는데 각 집단의 원소의 수를 세기 위해 유한체 $\mathbb{Z}_2$ 위에서의 추상 선형대수학 이론, 특히 차원 정리가 실수체 $\mathbb{R}$ 혹은 복소수체 $\mathbb{C}$ 뿐만 아니라 임의의 체에 대하여 성립한다는 사실이 중요한 역할을 한다. 실제

로 집단 B는 행렬 $H_7 = \begin{bmatrix} 0\,0\,0\,1\,1\,1\,1 \\ 0\,1\,1\,0\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,0\,1\,0\,1 \end{bmatrix}$의 핵이기 때문에 $B = \ker(H_7)$의 원소의 수는 $2^{\dim(\ker(H_7))}$이다. 더욱이 차원 정리에 의해 $\dim(\ker(H_7)) = 7 - \mathrm{rank}(H_7) = 7 - 3 = 4$가 성립함을 알 수 있다. 따라서 집단 B는 2^4, 즉 16개의 원소를 가지며 이는 메시지 $m = x_1 x_2 \cdots x_7$가 임의로 주어지는 경우 참가자들이 패배할 확률이 $\frac{2^4}{2^7} = \frac{1}{8}$임을 의미한다. 다르게 말하자면 임의로 주어지는 메시지 $m = x_1 x_2 \cdots x_7$가 집단 A에 속하여 참가자들이 승리할 확률은 $\frac{7}{8}$, 즉 87.5%임을 알 수 있다.

더 나아가 길이 3의 메시지 맞추기 게임 그리고 길이 7의 메시지 맞추기 게임에서의 최적 전략을 참가자 수가 더 많은 경우로 일반화 가능하다. 실제로 참가자 수가 15명, 31명 등 $2^n - 1$명 꼴일 때 이에 대응하는 행렬 H_{2^n-1}을 이용하여 집단 A와 집단 B를 구성할 수 있고 최적 전략의 자연스러운 일반화를 학생들이 이해할 수 있다. 즉 각 k번째 참가자가 정보가 주어지지 않은 k번째 숫자가 0일 경우의 메시지와 1일 경우의 메시지가 모두 집단 A에 속하면 통과를, 집단 A의 메시지 하나와 집단 B의 메시지 하나가 주어지는 경우에는 집단 A의 메시지를 택하는 최적 전략의 일반화 논의를 학생들이 자연스럽게 받아들일 수 있다. 이 때 전략의 결과에 따른 승률은 중요하게 다루어져야 한다. 유한체 $\mathbb{Z}_2$위에서의 차원 정리에 의해 $\dim(\ker(H_{2^n-1})) = (2^n - 1) - \mathrm{rank}(H_{2^n-1}) = 2^n - n - 1$이 성립하므로 집단 B의 원소의 개수가 2^{2^n-n-1}임을 알 수 있다. 따라서 메시지 $m = x_1 x_2 \cdots x_{2^n-1}$가 임의로 주어지는 경우 참가자들이 패배할 확률이 $\frac{2^{2^n-n-1}}{2^{2^n-1}} = \frac{1}{2^n}$임을 확인할 수 있다. 달리 말하자면 임의로 주어지는 메시지 $m = x_1 x_2 \cdots x_{2^n-1}$가 집단 A에 속하여 참가자들이 승리할 확률은

$1-\frac{1}{2^n}$이고 참가자 수 n이 충분히 크면 1에 가까워짐을 알 수 있다.

정리하자면 수학적 모델링을 통해 3-카드 게임 최적 전략의 수학적 구조를 학생들이 행렬과 벡터를 바탕으로 이해할 수 있으며, 그 수학적 구조를 길이 7과 길이 15 등의 메시지 맞추기 게임으로 일반화하고 유한체 위에서의 추상 선형대수학 이론을 바탕으로 최대승률을 계산할 수 있도록 설계되었다. 특히 7-카드 게임과 15-카드 게임의 최적 전략과 최대승률을 구하고 여러 차례의 활동을 통해 직접 경험할 수 있도록 설계하여 학생들이 수학의 실용성, 유용성 및 엄밀성을 경험할 수 있도록 구성하였다.

(5) 응용활동 단계

응용활동 단계에서는 n-카드 게임 최적 전략의 수학적 구조를 바탕으로 오류정정코드(error-correcting code)를 탐구하고, 이를 바탕으로 선형코드(linear code)를 탐구한다.

먼저 오류정정코드를 탐구하기 위해 정보의 송신자 Alice가 수신자 Bob에게 특정 메시지를 전달하려 하는 일반적인 통신상황을 가정한다. 정보이론에서의 핵심 주제 중 하나는 통신 과정에서 정보에 오류가 생기는 경우에 주목하여 해당 오류를 탐지하고 수정하는 코드, 즉 오류정정코드를 개발하는 것이다. 예를 들어 Alice가 메시지 0010을 Bob에게 전달하려 하는데 통신 과정에서 네 번째 자리에 오류가 발생하여 Bob이 메시지 0011을 수신하는 경우를 고려하는 것이다. 이러한 현실적 맥락이 반영되어있는 구체적 예를 기초로 하여 길이 4인 메시지의 오류정정코드를 다루는 과정을 [그림 Ⅳ-11]과 같이 '인코딩(encoding) → 오류감지(error detection) → 오류정정(error correction) → 디코딩(decoding)' 총 4단계로 구성하여 지도한다. 맥락의 활용은 현실적 수학교육에서 강조하는 주요 특징 중의 하나이다(정영옥 외, 2018).

[그림 Ⅳ-11] 오류정정코드의 구성

1단계: 인코딩

교사는 오류를 수정하기 위한 여유 공간이 필요하다는 맥락을 바탕으로 길이 4의 메시지를 길이 7의 메시지로 확장, 즉 인코딩할 필요가 있음을 시사한다. 이때 구체적인 메시지 $m=1010$이 주어졌을 때, 이를 길이 7의 메시지 $E(m)=x_1x_2 1 x_4 010$로 변환하는데 미지수 x_1, x_2, x_4는 $H_7 \cdot E(m)=0$이 되도록, 즉 길이 7의 메시지 맞추기 게임에서의 수학적 구조를 활용하여 벡터 $E(m)$이 집단 B의 원소가 되도록 결정한다. 이때 행렬 H_7의 첫 번째 열, 두 번째 열, 네 번째 열이 각각 001, 010, 100이고 선형 독립(linearly independent)이므로 x_1, x_2, x_4을 유일하게 결정할 수 있고, 실제로 $E(m)=1011010$임을 알 수 있다.

$$E(m)=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \\ x_4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 0&0&0&1&1&1&1 \\ 0&1&1&0&0&1&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 1 \\ x_4 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_4+1 \\ x_2 \\ x_1+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ x_2=0 \\ x_4=1 \end{cases} \Rightarrow E(m)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

[그림 Ⅳ-12] 메시지 1010을 인코딩하는 과정

2단계: 오류감지

Alice의 인코딩된 메시지 $E(m)$에 오류가 수반되어 Bob이 메시지 w를 수신하는 경우를 생각하자. 만약 첫 번째 자리에 오류가 생겼다면 Bob이 $w=0011010$을 수신하고 여섯 번째 자리에 오류가 생겼다면 Bob이 $w=1011000$을 수신하는데, 문제는 Bob이 기존의 인코딩된 메시지 $E(m)$이 무엇이었는지 모른다는 것이다. 따라서 Bob이 해야 할 첫 번째 역할은 수신한 메시지 w에 오류가 있는지 여부를 감지하는 것인데, 자연스러운 방법 중 하나는 인코딩된 메시지 $E(m)$이 집단 B에 속했으므로 수신한 메시지 w가 집단 B에 속하는지를 확인하는 것이다. 즉 수신한 메시지 w가 집단 B에 속한다면 오류가 없었던 것으로, 그리고 집단 A에

속한다면 오류가 발생하였던 것으로 결론짓는다. 위의 예를 살펴보자면 오류가 수반된 메시지 0011010와 1011000 모두 집단 A에 속함을 어렵지 않게 학생들이 행렬과 벡터의 연산을 통해 확인할 수 있다.

3단계: 오류정정

한편 오류감지 단계에서는 오류 발생 여부만 살피는 것이므로 이를 정정하기 위해서는 보다 자세한 분석이 필요하다. Bob이 오류를 정정하기 위해 택할 수 있는 한 가지 구체적인 방법은 인코딩된 메시지 $E(m)$의 j번째 자리에 오류가 발생한 상황을 가정하는 것이다. 다시 말하자면 Bob이 수신한 메시지 w가 $w = E(m) + e_j$ 꼴이라 가정하고, 오류정정을 위해 j가 무엇인지 역추적하는 상황으로 이해할 수 있다. 이때 j을 알기 위해 수신한 메시지 w을 행렬 H_7와 곱하면 $H_7 \cdot w = H_7 \cdot E(m) + H_7 \cdot e_j = 0 + H_7 \cdot e_j = H_7 \cdot e_j$가 성립할 것을 기대할 수 있는데 이는 $H_7 \cdot w$가 행렬 H_7의 j번째 열이어야 함을 의미한다. 예를 들어 Bob이 $w = 1011000$을 수신하였다고 가정하자. 이때 수신한 메시지에 오류가 있는지, 만약 있었다면 몇 번째 자리에서 오류가 발생하였는지를 알아내어 정정하기 위해 행렬 H_7과 w을 곱하는 과정을 거친다. 이때 $H_7 \cdot w = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$임을 알 수 있고, 110은 행렬 H_7의 여섯 번째 열이므로 w와 $E(m) + e_6$가 일치할 것으로 기대하고 양변에 e_6을 더해주어 $w' = w + e_6 = 1011010$이 인코딩된 메시지 $E(m)$과 일치하기를 바라는 것이다. 실제로 인코딩된 메시지 $E(m)$에 오류가 발생하지 않았거나 기껏해야 오류가 한자리에서 발생한 경우에는 Bob의 오류 정정기법이 적용되어 100% 확률로 오류를 감지하고 정정할 수 있다. 하지만 인코딩된 메시지 $E(m)$에서 오류가 두 자리 이상 발생하였다면 위의 방법으로는 극복할 수 없는 한계가 있음을 강조하여야 한다.

4단계: 디코딩

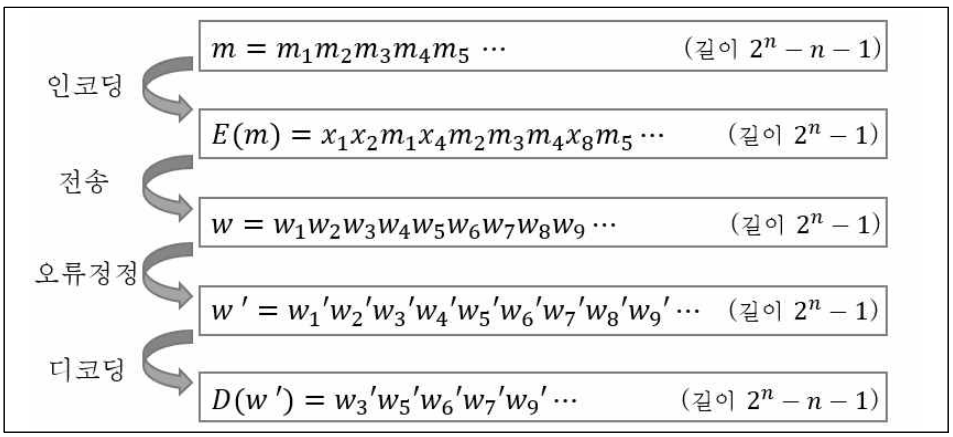
인코딩된 메시지 $E(m)$은 길이 7이지만 Alice의 메시지 m은 길이가 4였음을 상기하여 Bob은 오류감지와 오류정정을 거친 길이 7의 메시지 w'의 첫 번째, 두 번째, 네 번째 성분을 삭제하여 길이 4의 디코딩된 메시지 $D(w')$을 구한다. 예를 들어 오류정정 후의 메시지가 $w'=1011010$이었다면 $x_1=1, x_2=0, x_4=1$을 제거해 디코딩된 메시지는 $D(w')=1010$이다. 최종적으로 Bob은 디코딩된 메시지 $D(w')$가 Alice의 메시지 m과 일치하기를 기대하는데, 이는 Alice의 인코딩된 메시지 $E(m)$ 위에서 기껏해야 한 자리에서 오류가 발생한 경우에는 항상 사실임을 다양한 예를 다룸으로써 학생들이 이해할 수 있다.

심화활동으로서 길이 4인 메시지의 인코딩, 오류감지, 오류정정, 디코딩 방법을 일반화하여 길이 2^n-n-1의 메시지 m을 길이 2^n-1의 인코딩된 메시지 $E(m)$로 변환할 수 있다. 길이 4 메시지 경우와의 차이는 n개의 변수 x_1, x_2, x_4, …, $x_{2^{n-1}}$을 각각 1, 2, 4, …, 2^{n-1}번째 자리에 추가한다는 점이다. 이때 길이 2^n-1의 메시지 맞추기 게임에서 살펴본 수학적 구조를 응용하여 $E(m)$이 집단 B의 원소가 되도록, 즉 $H_{2^n-1}\cdot E(m)=0$을 만족하도록 미지수 x_1, x_2, x_4, …, $x_{2^{n-1}}$을 정한다. 예를 들어 $n=4$인 경우 길이 11인 메시지 $m=11100000110$을 길이 15인 메시지 $E(m)=x_1x_21x_4110x_80000110$로 변환하는데, 이때 $E(m)$이 집단 B에 속해야 하므로 $E(m)=111011000000110$로 결정하는 것이다.

한편 인코딩된 메시지 $E(m)$에 오류가 수반되어 Bob이 메시지 w을 수신한다고 하였을 때, 길이 4인 메시지 경우와 비슷하게 w가 집단 B에 속한다면 오류가 발생하지 않은 것으로, 그리고 집단 A에 속한다면 오류가 발생한 것으로 판단한다. 또한 집단 A에 속하는 경우에는 $H_{2^n-1}\cdot w$가 행렬 H_{2^n-1}의 몇 번째 열인지 확인하여 수정된 메시지 $w'=w+e_j$를 구하고[12] 마지막으로 1, 2, 4, …, 2^{n-1}번째 자리의 숫자들을 삭제한 디

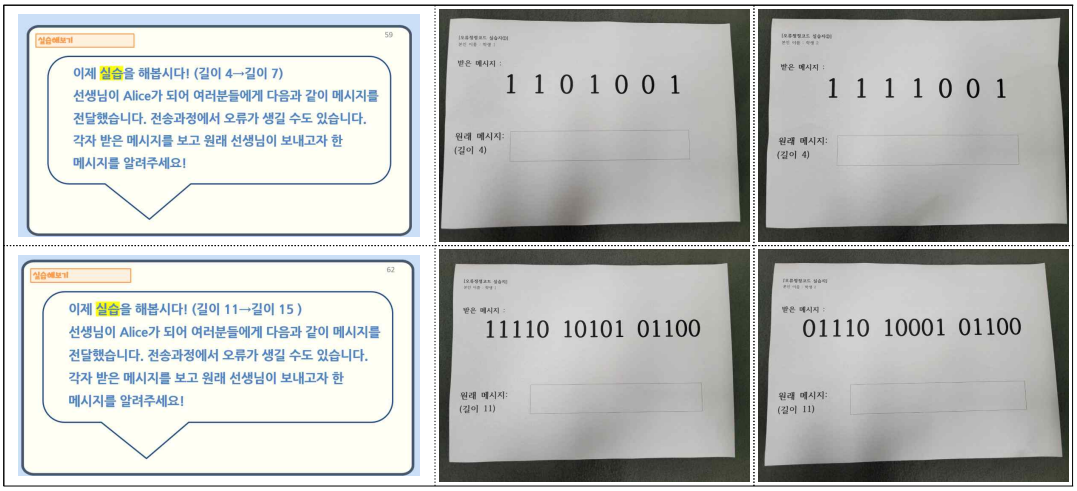
12) $H_{2^n-1}\cdot w$가 행렬 H_{2^n-1}의 j번째 열이라고 가정했을 때이다.

코딩된 메시지 $D(w')$를 구한다. 이때 Alice의 메시지 m과 Bob의 디코딩된 메시지 $D(w')$이 일치하기를 바라는데 실제로 인코딩된 메시지 $E(m)$ 위에서 오류가 기껏해야 한 자리에서 발생한 경우에는 항상 $m=D(w')$이 성립한다. 이러한 과정을 종합적으로 살펴봄으로써 학생들이 n-카드 게임($n=2^k-1$)을 통해 파악한 수학적 구조를 응용하여 정보이론적 실세계 맥락을 살펴볼 수 있고, 또한 오류정정코드의 작동원리를 이해함으로써 수학의 실용성과 유용성을 직접 경험할 수 있다.



[그림 Ⅳ-13] 길이 2^n-n-1인 메시지 m의 오류정정코드

실제 프로그램을 구성할 때 학생들의 이해를 돕기 위해 길이 4인 메시지에 오류정정을 위한 3칸을 추가하여 길이 7로 인코딩하여 전송하고, 길이 11인 메시지를 보내기 위해 4칸을 추가해 길이 15로 인코딩하는 실습을 [그림 Ⅳ-14]와 같이 진행하였다.



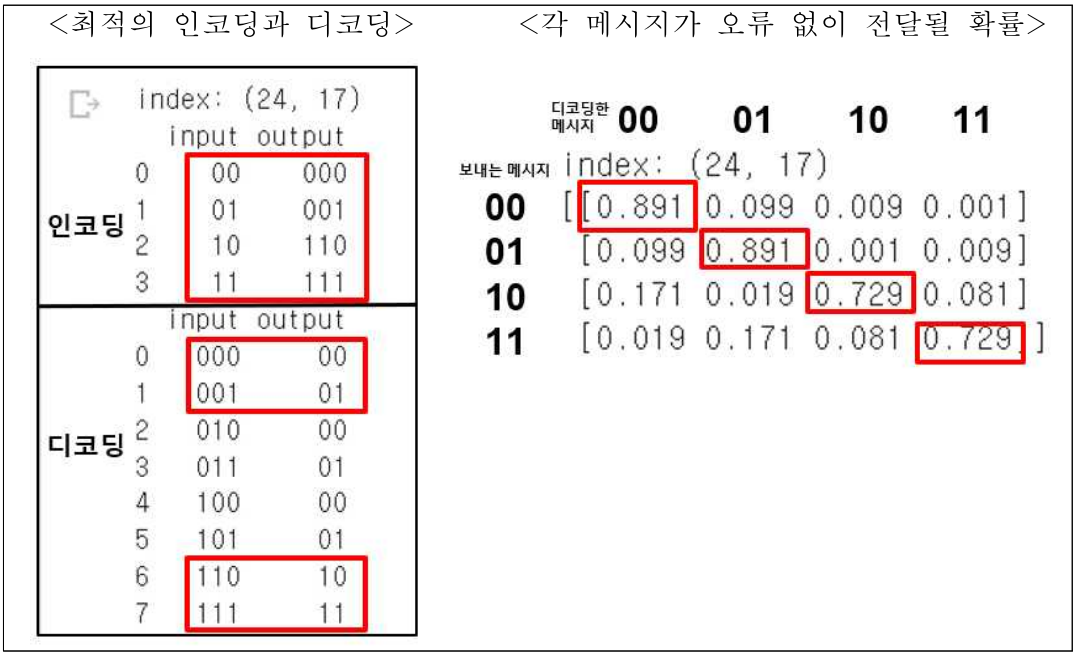
[그림 Ⅳ-14] 오류정정코드 실습 자료

다양한 메시지의 오류정정과정을 실습하는 활동을 통해 학생들은 오류정정코드의 구조에 대해 체화[13]할 수 있었다. 프로그램 내에서 개발한 오류정정코드는 오류가 메시지의 한 자리 이하에서만 발생한다면 100% 정정가능한 코드이다. 다만 실제 현실에서는 메시지의 길이가 길어질수록 오류가 한 자리 이하에서 발생할 확률은 거의 0에 가깝다. 이에 학생들은 오류가 많이 발생하는 상황에서는 어떻게 오류를 정정할 수 있을지를 자연스럽게 고민하게 된다. 이와 관련해 교사는 채널용량(capacity)에 대해 탐구할 수 있도록 지도한다.

중·고등학생들에게 채널용량(capacity)을 직관적으로 이해시키기 위해 교사는 사전에 파이썬(python) 프로그램을 활용해 코딩한 자료를 제시한다. 이때 학생들에게 코딩 능력이 요구되지는 않으며 교사 역시 코딩의 과정을 상세히 설명하기보다 코딩의 결과를 제시하는 수준으로 다루었다. 가장 먼저 간단하게 '길이 2인 메시지를 전송하고자 할 때, 1칸을 추

13) '체화된(embodied) 인지'의 관점은 단일 명칭으로는 설명되지 않는다. '체화된(embodied)', '연장된 혹은 확장된(extended)', '상황화된(situated)'라는 용어와 함께 사용되며 각 용어를 사용하는 학자들마다 약간의 차이는 있지만 모두 '인지', '몸', '환경'과 관련된다는 공통점이 있다(김민경, 이지영, 2020). 본 연구에서 '체화한다'라는 표현은 행위를 통한 앎(learning by doing)의 의미를 갖는다.

가하여 길이 3으로 늘려 정보를 전송하면 어떨까?'라는 발문으로 시작한다. 이 경우 코딩의 결과는 [그림Ⅳ-15]와 같다. 각 메시지가 잘 전달될 확률의 평균이 $\frac{0.891+0.891+0.729+0.729}{4}=0.81$이므로 오류확률은 19%가 나옴을 확인할 수 있다.



[그림Ⅳ-15] 길이 2인 메시지를 길이 3으로 인코딩했을 때

다음으로 길이 2인 메시지를 길이 4로 늘려 정보를 전송하는 경우 코딩한 결과를 [그림Ⅳ-16]과 같이 제시한다.

<최적의 인코딩(고정)과 디코딩>

인코딩 (고정)

	input	output
0	00	0000
1	01	0001
2	10	1110
3	11	1111

디코딩

	input	output
0	0000	00
1	0001	01
2	0010	00
3	0011	01
4	0100	00
5	0101	01
6	0110	10
7	0111	11
8	1000	00
9	1001	01
10	1010	10
11	1011	11
12	1100	10
13	1101	11
14	1110	10
15	1111	11

<각 메시지가 오류 없이 전달될 확률>

보내는 메시지 \ 디코딩한 메시지	00	01	10	11
00	[0.8748	0.0972	0.0252	0.0028]
01	[0.0972	0.8748	0.0028	0.0252]
10	[0.0252	0.0028	0.8748	0.0972]
11	[0.0028	0.0252	0.0972	0.8748]]

[그림 Ⅳ-16] 길이 2인 메시지를 길이 4로 인코딩했을 때

다만 이 경우에는 앞선 경우와 달리 모든 채널에 대해 전수조사를 실시하지 못하고 일부 인코딩을 고정하여 오류확률을 계산할 수 있었는데, 이때 [그림Ⅳ-16]에서 제시된 채널은 각 메시지가 잘 전달될 확률이 $\frac{0.8748+0.8748+0.8748+0.8748}{4}=0.8748$이므로 오류확률 12.52%를 갖는다. 즉 오류확률이 12.52%인 채널이 존재하므로 모든 채널을 고려하였을 때, 실제 오류확률은 12.52% 이하임을 알 수 있다. 교사가 제시한 코딩

결과를 함께 탐구하면서 학생들은 오류정정에 공간을 많이 활용하면 오류확률이 낮아짐을 짧은 길이의 메시지를 통해 직관적으로 확인할 수 있으며 또한 최적의 인코딩과 디코딩을 찾는 것은 매우 어려운 일임을 인식할 수 있게 된다. 학생들은 길이가 긴 메시지를 오류 없이 전송하고자 할 때, 많은 공간을 오류정정에 사용해야 함을 자연스럽게 인식하게 된다. 이후 어느 정도의 공간을 사용해야 할지를 고민하게 되는데 이에 대한 답변이 바로 채널용량이다. 이러한 공간을 계산하는 것은 수학적으로 어려움이 있는데, 이 계산을 용이하게 하는 것이 바로 Shannon의 채널코딩정리임을 알려주어 채널코딩정리의 의미를 전달한다. 다만 중·고등학생이 Shannon의 채널코딩정리의 수학적 구조를 상세히 이해하는 데에는 한계점이 있기 때문에 그 의미를 전달하는데 교육적 의의를 두었다.

마지막 응용활동으로 학생들은 지금까지 탐구한 오류정정코드를 바탕으로 선형코드를 학습하며 지금까지의 활동을 마무리 정리할 수 있도록 프로그램을 구성하였다. 앞서 학습한 Alice가 Bob에게 정보를 전송하기 위해 활용한 반복 코드를 떠올려 반복 코드를 선형코드의 관점에서 새롭게 탐구해본다. 반복 코드의 생성행렬을 직접 구해보고, 이를 활용해 패리티 검사행렬도 구해본다. 또한 길이 4인 메시지 $m=m_1m_2m_3m_4$을 3칸을 늘려 길이 7인 메시지 $E(m)=x_1x_2m_1x_4m_2m_3m_4$로 인코딩했던 오류정정코드도 선형코드의 관점으로 재탐구해볼 수 있다. 이때 인코딩 방법으로 $E(m)$이 집단 B에 속하도록 하여, 행렬 H와 $E(m)$을 곱하는 계산을 수행하였다. 응용활동 단계에서는 임의의 길이 4인 메시지에 대해 어떤 생성행렬 G를 거쳐 인코딩되는지 알 수 있다. 이 오류정정코드에서는 7-카드 게임에서 활용한 행렬 $H=\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}$가 패리티 검사행렬이 되고, 이로부터 [그림 Ⅳ-17]와 같이 생성행렬 $G=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$을 알아낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix}0&0&0&1&1&1&1\\0&1&1&0&0&1&1\\1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad\begin{bmatrix}x_4+x_5+x_6+x_7\\x_2+x_3+x_6+x_7\\x_1+x_3+x_5+x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\\x_6\\x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_3+x_5+x_7\\x_3+x_6+x_7\\x_3\\x_5+x_6+x_7\\x_5\\x_6\\x_7\end{bmatrix}=x_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix}+x_5\begin{bmatrix}1\\0\\0\\1\\1\\0\\0\end{bmatrix}+x_6\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}+x_7\begin{bmatrix}1\\1\\0\\1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow G=\begin{bmatrix}1&1&0&1\\1&0&1&1\\1&0&0&0\\0&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

[그림 Ⅳ-17] 오류정정코드의 생성행렬

제 2 절 프로그램 적용 및 논의

1. 프로그램 적용

본 연구에서 개발한 프로그램의 기본활동 단계(1단계)는 본인을 제외한 나머지 참가자들의 모자 색을 통해 자신의 모자 색을 추정하는 모자 게임을 변형한 n-카드 게임을 통해 학생들이 쉽게 접근가능한 현실적 맥락을 도입하였으며 학생들의 흥미와 수학적 탐구심을 유발하였다. 이경화 (2016)에 따르면 학생의 현실 맥락과 결합되어 있는 형태로 수학적

개념, 사고 방법을 창조할 수 있는 기회를 제공하는 것은 학생들의 수학적 창의성 함양에 도움이 된다. 또한 협력 활동으로서의 의미를 분명히 하고 학습 동기를 제공할 수 있었다. 조의 구성에 따라 협의가 잘 이루어지지 않는 경우도 있었는데, 교사가 개입하여 게임을 다시 진행해보기를 제안하거나 학생들의 다양한 사고를 촉진시키기 위한 적절한 발문을 하였다. 활발한 집단 내 의사소통을 바탕으로 학생들의 문제해결 과정과 발산적 사고 및 추론 등을 위한 도움을 직·간접적으로 제공할 수 있었다. 또한 교사가 학생들의 다양한 반응을 많이 만들어내게 하는 발문이나 여러 해결 방안을 만들어내게 하는 발문은 학생의 유창성을 신장시킨다(한정민, 박만구, 2010). 일부 학생들은 최대승률을 탐구하는 과정에서 전확률과 조건부확률의 차이를 처음으로 접하고 개념화하기도 하였다.

수학적 정당화 단계(2단계)에서는 각 전략에 따른 참가자 한 명이 대답하는 정답의 수와 오답의 수가 같음을 추론할 기회를 제공함으로써 논리력 함양을 가능하게 하였다. 또한 연립부등식을 활용하여 3-카드 게임의 임의의 전략에 대한 승률이 항상 75% 이하를 정당화하여 실세계 복합적 상황에 대한 절대적 결론이 도출되는 과정을 경험할 수 있는 기회를 제공함으로써 수학의 유용성을 강조할 수 있었다. 더욱이 같은 논리가 4-카드 게임으로 확장되어 임의의 전략에 따른 승률이 항상 75% 이하라는 결론을 얻을 수 있음을 확인하는 과정을 통해 수학의 유용성과 일반성을 강조할 수 있었다. 일부 학생들은 학습한 논증 구조를 일반화하여 n-카드 게임의 임의의 전략에 따른 승률이 항상 $\frac{n}{n+1}$이하임을 추측하여 직접 증명하기도 하였다.

수학적 모델링과 일반화 단계(3단계)에서 흰색과 검은색을 각각 숫자 0과 1로 기호화하고 3-카드 게임과 길이 3 메시지 맞추기 게임을 대응시키는 과정은 실세계 상황의 모델링을 통해 3-카드 게임의 수학적 구조를 밝히는 역할을 하며 활동 기반 수업이 유지될 수 있도록 하는 역할을 한다. 동시에 길이 7 혹은 15의 메시지 맞추기 게임으로의 일반화를 위한 자연스러운 맥락을 제공한다. 수학적 모델링의 교육적 효과는 이미 여러 선행연구에서 관찰되었으며(고창수, 오영열, 2015; 유홍규, 윤종국,

2017; 정혜윤, 이경화, 2019), 본 연구에서도 수학적 모델링 과정은 학생들의 n-카드 게임의 구조를 수학적으로 이해를 돕고, 창의적 문제해결력을 함양 가능케 하는 역할을 한다. 일반화 단계에서 다루는 이진법과 벡터, 행렬은 2015 개정 중등교육과정에 포함되어 있지 않아 학생들에게는 생소한 개념들이지만, n-카드 게임의 수학적 구조를 탐구하기 위한 수준으로 지도하기에는 큰 어려움이 없다. 벡터의 도입으로 학생들은 차원 개념을 이해하고, 참가자 수의 증가가 고차원적 문제로 환원됨을 이해하였다. 또한 학생들은 패턴의 일반화를 경험하게 된다. 길이 3 혹은 7의 메시지 맞추기 게임을 진행할 때, 교사는 학생들이 게임에서 승리하는 상황과 패배하는 상황 모두 경험할 수 있도록 의도적으로 활동을 구성한다. 이때 학생들은 승리하는 경우에는 단 한 명의 참가자만 정답을 말하고 나머지 참가자들은 모두 통과를 선택하는 것을 경험하고, 패배하는 경우에는 모든 참가자가 원래 메시지와는 다른 오답을 말하게 되는 것을 경험하게 된다. 학생들은 길이 3인 경우와 길이 7인 경우의 메시지 맞추기 게임에서 동일한 패턴이 발생함을 활동을 통해 경험한 후에는, 게임의 참가자 수가 늘어나도 동일한 패턴이 반복될 수 있다는 일반화된 추측을 하는 경향을 보였다. Lannin (2005)에 의하면 일반화를 위한 전형적인 패턴 활동은 학생들로 하여금 다양한 규칙을 찾아낼 수 있게 만든다. Lee (1996)은 패턴의 일반화 단계 과정에서 학생들이 경험할 수 있는 어려움을 인지 수준, 언어화 수준, 기호화 수준으로 구분하였는데 본 프로그램에서의 학생들은 승리하는 경우와 패배하는 경우 정답과 오답 양상의 일반화를 이해하고 설명하는 과정에서 인지 수준 혹은 언어화 수준의 어려움을 보이지 않았다.

심화활동 단계(4단계)에 이르러서는 문제를 스스로 해결하려는 경우가 종종 있던 프로그램의 초반부와는 달리 학생들의 협력 과정이 수월하였다. 학생들은 집단 내 소통을 통한 결론 도출에 초점을 두고, 문제를 협력하여 해결하려는 경향을 보였다. 또한 1단계에서 실세계 상황을 직접 논의할 때와는 달리 기호를 바탕으로 일반화된 상황을 수학적으로 이해하려는 경향을 보였다. 교사의 개입 없이도 많은 가설을 서로 제안하였

으며 타당성을 보다 수학적으로 표현하고 정당화하려는 경향을 보였다.

응용활동 단계(5단계)에서 학생들은 교사로부터 한 자리에 오류가 발생한 메시지 w을 전달받고, 행렬과 벡터의 곱셈을 통해 w가 집단 A에 속하는 것을 확인한 경우, 즉 $H_{2^n-1}\cdot w \neq 0$일 때 인코딩된 메시지 $E(m)$이 집단 B에 속하였음을 상기함으로써 오류 감지가 정상적으로 이루어졌음을 자연스럽게 이해하였다. 또한 학생들은 $H_{2^n-1}\cdot w$가 행렬 H_{2^n-1}의 몇 번째 열인지 구하고, 이를 j번째 열이라 하였을 때 정정한 메시지 $w' = w + e_j$를 구한다. 마지막으로 1, 2, 4, …, 2^{n-1}번째 자리의 숫자들을 삭제한 디코딩된 메시지 $D(w')$를 구하여 $D(w')$가 교사의 원래 메시지와 일치함을 확인함으로써 수학의 실용성을 경험할 수 있었다. 이때 많은 학생들이 두 자리 이상의 오류가 발생하는 경우의 오류정정 가능성에 대한 질문을 했다. 실세계에서 메시지의 길이가 길어질수록 오류가 한 자리에서만 날 확률은 0로 수렴한다. 이에 채널용량과 관련하여 메시지의 길이가 길어질수록 오류정정에 많은 공간을 활용해야 함을 알려주며 Shannon의 채널코딩정리까지 탐구할 수 있는 기회를 제공하였다. 실세계 상황에서 정보전송 시 여러 자리에서 오류가 발생하는 상황은 많이 발생하며 복잡한 오류 상황의 존재와 정보이론의 주요 연구주제로서의 오류정정코드를 강조하여 학습 동기를 강화하는 기회를 교사에게 제공하였다.

기본활동단계(1단계)와 수학적 정당화 단계(2단계)에서 2015 개정 수학과 중등교육과정에서의 연립부등식과 경우의 수, 확률 개념이 활용된다. 또한 수학적 모델링과 일반화 단계(3단계)에서 다루어지는 내용이 2015 개정 교육과정에서 진로 선택 과목으로 신설된 <인공지능 수학>과 긴밀히 관련된다. 실제로 행렬과 벡터를 관련 학습 요소로 구체적으로 소개하고 있으며, 텍스트나 이미지 자료를 숫자 0과 1 두 수로만 표현하여 자료를 해석하는 내용을 다루는 등(홍진곤 외, 2021; 황선욱 외, 2021) 교육과정 내에서 다루어짐을 살펴볼 수 있다.

프로그램 전반에서 학생들의 집단 내 상호작용은 대단히 중요한 역할을 하는데, 이를 집단창의성 발현을 위한 세 유형의 상호작용(상호보완

적, 갈등 기반, 메타인지적 상호작용)의 관점에서 살펴볼 수 있다. 프로그램의 1단계에서 카드 게임의 규칙을 익히고, 최적 전략을 찾기 위해 게임을 실제 진행해보는 과정에서 학생들 간의 상호작용이 특히 활발히 이루어졌다. 협력하여 최적 전략과 최대승률을 탐색하는 공통 과제를 바탕으로 공동전략을 세우기 위한 상호보완적 상호작용이 활발히 이루어졌다. 한편 갈등 상황이 발생하는 주요 요인은 승률이다. 논의의 타당성을 판단할 수 있는 절대적 기준이기 때문이다. 가장 두드러지는 갈등 상황은 3-카드 게임에서 탐구한 최적 전략을 자연스럽게 확장하여 4-카드 게임에 적용하였을 때, 3-카드 게임에서의 최대승률 75%보다 낮은 승률이 얻어지는 것을 인지하였을 때이다. 이러한 갈등 상황을 해결하기 위해 학생들은 기존 관점을 전환해보거나 기존 수학적 모델을 검증, 보완하는 등의 토의를 하며 갈등 기반 상호작용을 하였다. 마지막으로 학생들은 게임 참가자의 수가 3명, 4명, 7명, 15명과 같이 증가할 때마다 각 게임에서의 최대승률을 수학적으로 계산하고 정당화하는 과정을 수행하였는데, 이를 위해 앞서 이루어진 토의들을 종합적으로 비판, 검증하여 승률을 구해보며 메타인지적 상호작용을 활발히 진행하였다. 또한 $n=2^k-1$인 경우의 n-카드 게임에서 최적 전략과 최대승률을 일반화할 수 있는데, n-카드 게임을 종합적으로 이해하기 위한 메타인지적 상호작용이 활발히 이루어지고 집단적 사고의 폭이 확장됨을 살펴볼 수 있었다. 이때 학생들의 다양한 상호작용을 유도하기 위해서는 적절한 발문을 준비하고 허용적 수업 분위기를 조성하여 학생들의 다양한 확산적 사고를 촉진하는 등 교사의 역할이 중요했다. 더욱이 다인수 학급을 대상으로 할 때에는 토의과정에서 배제되는 학생들이 없는지 확인하고, 사전에 개별 피드백을 적절히 준비하는 등 교사의 세밀한 사전 준비가 필요하다.

2. 2022년도 참여 학생 소감문 및 인터뷰 결과

2022년 서울대학교 과학영재교육원(중학생 3명)과 서울대학교 사범대학 부설 시흥영재교육원(고등학생 3명)에 참여한 학생 6명이 프로그램 종료 후 소감문을 작성하였다. 소감문에는 연구를 통해 알게된 점, 참여한 소감, 더 연구하고 싶은 점 등을 작성하도록 안내하였으며, 형식에 있어 큰 제한은 두지 않고 자유롭게 기술할 수 있도록 하였다. 참여한 학생들이 작성한 소감문은 아래 [그림 Ⅳ-18]과 같다.[14)]

14) 학생 소감문의 가독성을 위해 [그림 Ⅳ-18] 아래에 해당 내용을 정리하였다.

소감문

※ 연구를 통해 알게된 점 /연구에 참여한 소감 / 더 연구하고 싶은 내용 등의 내용을 자유롭게 작성해주세요.

연구를 통해 hot game의 전략과 프로그램으로 구현하는 과정을 알게되었고 조금 부족해 보이면 오류가 있지만 그렇게 까지 고려를 해서 활용할 필요는 없다고 생각했다. 특히 면접 수업때 3-hot game의 전략을 찾는 과정과, hot game과 전문적은 용어를 보는 과정이 재미 있었다. 3-hot game에 시작하여 4-hot game, 5-hot game, 6-hot game, 오류없는 수학적 수업을 위해서 더 깊게 들어가는 수업을 하니 문제를 더 깊게 볼수 있는 눈이 생기고 재미 있는 방법이 많았다. 연구를 하기 전 문제를 푸는데는 오로지 답을 도출해내기만 하는 생각으로 문제를 풀었다면 연구를 한 후 문제를 다양한 방법으로 접근해보고 시도를 많이 해보며 문제를 깊게 파악할 수 있는 능력이 생겼다. 앞으로 대수학에 관심을 가지고 좋은 석사 논문 연구를 해보고 싶다. 공부를 해야겠다 생각했다.

소감문

※ 연구를 통해 알게된 점 /연구에 참여한 소감 / 더 연구하고 싶은 내용 등의 내용을 자유롭게 작성해주세요.

Hot game 라는 과정 전반, 정보에 대하여 알게 되었다. 등비 수열과 벡터, 그리고 여러가지 대한 오류점검을 하는 법을 배운다. 연구를 하며, 오류를 찾아 내기 위해 많은 시간을 탐구하는 것이 쉽지 않았기 때문에, 많이 힘들고 포기하고 싶은 생각도 들었다. 하지만 연구를 하면 할수록 점점 재미있어 지고, 점점 몰두하게 되면서 행복함을 느끼게 되었다. 서로 문제를 연구하는 과정에서 의견이 충돌하기도 하고, 서로 피드백하면서 나아지기도 했다. 힘든 도전이였지만, 도전을 하고 얻은 과정이 인생에서 연구를 더 해보고 싶다. 등비 선택 면접과 대수에 대해 더 깊게 연구를 하고 싶다. 다만, 여러가지 오류점검코드에 대하여 혼자로 연구를 하여 오류를 찾아보고 싶다.

마지막으로, 나의 꿈인 경제학과 관련된 선형대수에 관해서도 연구할 수 있는 기회가 있었으면 좋겠다.

소감문

※ 연구를 통해 알게된 점 /연구에 참여한 소감 / 더 연구하고 싶은 내용 등의 내용을 자유롭게 작성해주세요.

~~이번 연구를 통해 ... 좋은 경험이 되었다.~~

Hot game 이라는 개념에서 새로운 단어를 접하보는 경험이다

피보나치로 등비수열 3이 성립한다면, 임의의 자연수 n항을 등비 수열의 형태로 표현할 수 있다는 것을 이용하여 오류점검 코드를 작성하는 방법을 배웠다. 정답이 아닌 오류를 찾아내는 것이 처음에는 어려웠지만 점점 재미있어 지고 흥미로웠다. 또한 새로운 방법을 생각해보는 것이 재미있었다. 이번 프로그램을 더욱 재미있게 만들어주었다. 또 무엇보다, 지금까지 수학을 배우면서 실생활에 어떤 방식으로 응용되는지 궁금했는데 이번 활동을 하면서 배운 수학 지식이 오류점검이나, 실생활에 도움이 되는 방향으로 쓰인다는 구체적인 예시를 경험하면서 수학의 필요성을 더욱 현실적으로 느낄 수 있는 계기가 되었다.

이번 프로그램을 진행하면서 다른 방식의 오류점검코드는 어떤 수학적 방식을 사용하는지가 궁금했다. 그리고 두개 이상의 비트의 오류를 수정할 수 있는 방법도 배워보고 싶다.

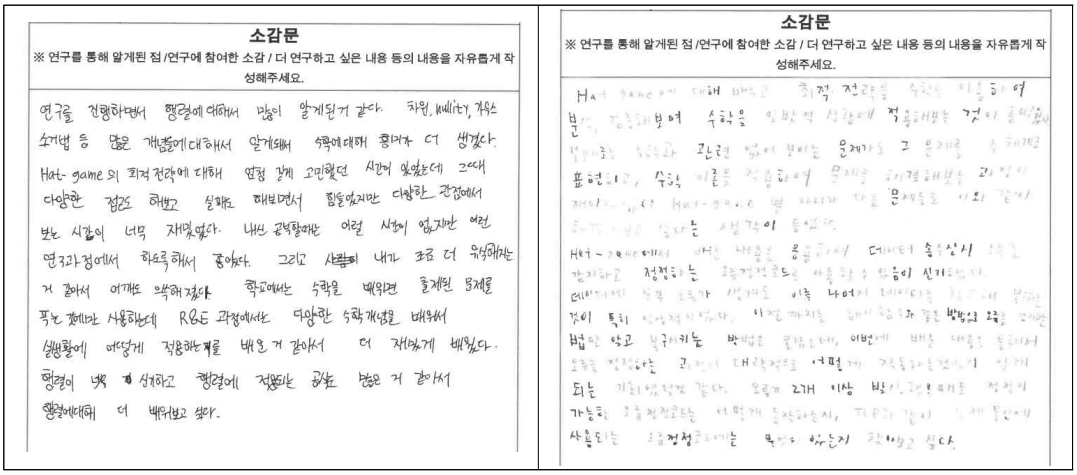
소감문

※ 연구를 통해 알게된 점 /연구에 참여한 소감 / 더 연구하고 싶은 내용 등의 내용을 자유롭게 작성해주세요.

이번 RSE 프로그램을 통해 hot-game이라는 게임을 수학적으로 분석하고, 분석한 내용을 응용하며 송수신 과정에서 발생하는 오류를 수정하는 방법을 배웠다.

RSE 프로그램에서 친구들과 토의하며 답을 찾아가는 과정에서, 학교나 학원에서 배우는 정해진 유형을 정해진 방법대로 푸는 수학과는 다르게 정답이 없는 수학적 사고를 하는 법을 알게 된 것 같다. 또한 새로운 방법을 생각해본다는 점이 재미있고 이번 프로그램을 더욱 재미있게 만들어주었다. 또 무엇보다, 지금까지 수학을 배우면서 실생활에 어떤 방식으로 응용되는지 궁금했는데 이번 활동을 하면서 배운 수학 지식이 오류점검이나, 실생활에 도움이 되는 방향으로 쓰인다는 구체적인 예시를 경험하면서 수학의 필요성을 더욱 현실적으로 느낄 수 있는 계기가 되었다.

이번 프로그램을 진행하면서 다른 방식의 오류점검코드는 어떤 수학적 방식을 사용하는지가 궁금했다. 그리고 두개 이상의 비트의 오류를 수정할 수 있는 방법도 배워보고 싶다.



소감문

※ 연구를 통해 알게된 점/연구에 참여한 소감 / 더 연구하고 싶은 내용 등의 내용을 자유롭게 작성해주세요.

연구를 진행하면서 행렬에 대해서 많이 알게되어 같다. 차원, 베타1, 가우스 소거법 등 많은 개념에 대해서 알게돼서 수학에 대해 흥미가 더 생겼다. Hat game의 최적 전략에 대해 연구할 때 고민했던 시간이 있었는데 그때 다양한 접근 해보고 실패도 해보면서 힘들었지만 다양한 관점에서 보는 시각이 너무 재밌었다. 내가 관심있는 어려 사람이 없지만 여러 연구과정에서 하고픈 해서 좋았다. 그리고 사실 내가 조금 더 욕심내서 거 같아서 여기까지 욕해 졌다. 학교에는 수학을 배워면 흥미로운 문제를 풀수 있겠지만 실생활에 어떻게 적용하는지를 배울 수 있어서 더 재밌게 배웠다. 행렬이 넓게 적용하고 행렬에 적용되는 공식 많은 거 같아서 행렬에대해 더 배워보고 싶다.

소감문

※ 연구를 통해 알게된 점/연구에 참여한 소감 / 더 연구하고 싶은 내용 등의 내용을 자유롭게 작성해주세요.

[그림 Ⅳ-18] 프로그램 참여 학생 소감문

학생 1의 소감문

연구를 통해 hat game의 전략과 오류정정코드를 알게 되었고, 코드를 반복해서 보내면 오류가 작아지지만 그렇게까지 공간을 많이 활용할 필요는 없다고 알게 되었다. 특히 맨 처음 수업 때 3-hat game의 전략을 찾는 과정과, hat game과 정보이론, 행렬을 잇는 과정이 매우 흥미로웠다. 3-hat game에서 시작하여 4-hat game, 7-hat game, n-hat game, 오류정정코드 순으로 수업을 점층적으로 더 깊게 들어가는 수업을 하니 문제를 더 깊게 볼 수 있는 능력이 생겼고 문제를 접근하는 방식이 달라졌다. 연구를 하기 전 문제를 풀 때는 오로지 답을 도출해야 되겠다는 생각으로 문제를 풀었지만 연구를 한 후 문제를 다양한 방면에서 접근해보고, 시도를 많이 해보아 문제를 깊게 파악해볼 수 있는 능력이 생겼다. 이번 연구를 통해 앞으로 대수학에 관심을 가지고 조금 더 공부를 해야겠다고 생각했다.

학생 2의 소감문

hat game과 관련 전략, 정보이론에 관해서 알게 되었다. 특히 행렬과 벡터, 그리고 여러 가지 변환, 오류정정을 하는 법을 배웠다. 연구를 하며 모르던 분야를 알게 되어 흥미로웠고, 수학을 오랜 기간 탐구한 것이 처음이었기 때문에 막막함도 들었다. 하지만 연구를 하면 할수록 점점 재미있어졌고, 점점 몰두하게 되면서 행복감을 느끼게 되었다. 새로운 주제를 연구하는데 있어 힘든 부분을 서로 의지하면서 나가니 좋았다. 힘든 도전이었지만 도전을 하는 것과 모든 과정이 인상 깊어서 연구를 더 해보고 싶다. 특히 선형변환과 대수에 대해 더 깊게 연구를 해보고 싶다. 또한 여러 가지 오류정정코드에

대해 추가로 연구를 하여 오류를 줄여보고 싶다.
마지막으로 나의 꿈인 경제학자와 관련된 선형대수에 관해서도 연구할 수 있는 기회가 있었으면 좋겠다.

학생 3의 소감문

Hat game이라는 게임에서 새로운 전략을 찾아볼 수 있었다. 직관적으로 승률이 50%일 것이라 생각했지만, 엄밀한 수학적 증명을 통해 75%의 예상 밖의 승률이 도출되어 놀라웠다.
또 정보이론 중 두 명의 대화자가 존재하며 이 둘의 대화를 할 때 적용되는 인코딩, 디코딩, 암호화, 복호화 등이 변환 알고리즘을 배울 수 있었는데 인코딩 과정에서 행렬, 벡터와 같은 선형대수학적 논리를 적용한 것이 인상깊었다. 이런 과정을 통해 현대수학에 대해 깊은 관심을 가지게 되는 계기가 되었고, 순수수학의 최전방에서 싸우는 수학자가 되고 싶다고 느끼는 계기도 되었다.
이 프로그램을 공부하면서 선형대수학에 대해서도 자세히 배울 수 있었다. 행렬과 벡터, 행 연산과 피봇 rank, 이를 응용한 rank-nullity 정리와 더 나아가 선형변환, 행렬변환을 배우면서 함수와 관련된 분야에 관심이 가게 되었고, 앞으로 미적분학과 $\epsilon-\delta$에 관련된 분야에 집중적으로 더 연구해보고 싶다.

학생 4의 소감문

이번 R&E 프로그램을 통해 hat-game이라는 게임을 수학적으로 분석하고, 분석한 내용을 응용하여 송수신 과정에서 발생하는 오류를 수정하는 방법을 배웠다.
R&E 프로그램에서 친구들과 토의하며 답을 찾아가는 과정에서, 학교나 학원에서 배우는 정해진 유형을 정해진 방법대로 푸는 수학에서는 경험할 수 없는 수학적 사고를 하는 법을 알게 된 것 같다. 또한 새로운 수학적 방법을 생각해본다는 점이 이번 프로그램을 더욱 흥미롭게 만들어주었다. 무엇보다 지금까지 수학을 배우면서 실생활에 어떤 방식으로 응용되는지 궁금했는데 이번 활동을 하면서 배운 수학 지식이 오류정정이라는 실생활에 도움이 되는 방향으로 쓰인다는 구체적인 예시를 경험해보면서 추상적이게 느껴졌던 수학의 필요성을 더욱 현실적으로 느낄 수 있는 계기가 되었다.
이번 프로그램을 진행하면서 다른 방식의 오류정정코드는 어떤 수학적 방식을 사용하는지가 궁금했다. 그리고 두 개 이상의 비트의 오류를 수정할 수 있는 방법도 배워보고 싶다.

학생 5의 소감문

연구를 진행하면서 행렬에 대해서 많이 알게된 거 같다. 차원, nullity, 가우스 소거법 등 많은 개념들에 대해서 알게 돼서 수학에 대해 흥미가 더 생겼다. Hat-game의 최적 전략에 대해 엄청 길게 고민했던 시간이 있었는데 그 때 다양한 접근도 해보고 실패도 해보면서 힘들었지만 다양한 관점에서 보는 시간이 너무 재밌었다. 내신 공부할 때는 이런 시간이 없지만 이런 연구 과정에서 하도록 해서 좋았다. 그리고 내가 조금 더 유식해지는 거 같아서 어깨도 으쓱해졌다. 학교에서는 수학을 배우면 출제된 문제를 푸는 것에만 사용하는데 R&E 과정에서는 다양한 수학 개념을 배워서 실생활에 어떻게 적용되는지를 배운 것 같아서 더 재밌게 배웠다. 행렬이 신기하고 행렬에 적용되는 공식도 많은 거 같아서 행렬에 대해 더 배워보고 싶다.

학생 6의 소감문

Hat game에 대해 배우고 최적 전략을 수학을 이용하여 분석, 검증해보며 수학을 일반적 상황에 적용해보는 것이 흥미로웠다. 겉보기로는 수학과 관련 없어 보이는 문제라도 그 문제를 수 체계로 표현하고, 수학 이론을 적용하여 문제를 해결해보는 과정이 재미있었다. Hat game뿐 아니라 다른 문제들도 이와 같이 해결해보고 싶다는 생각이 들었다.

Hat-game에서 배운 내용을 응용하여 데이터 송수신시 오류를 감지하고 정정하는 오류정정코드로 사용할 수 있음이 신기했다.

데이터에 일부 오류가 생겨도 이를 나머지 데이터를 활용해 복구하는 것이 특히 인상적이었다. 이전까지는 해시함수와 같은 방법으로 오류를 감지하는 법만 알고 복구시키는 방법은 몰랐는데, 이번에 배운 내용을 통해서 오류를 정정하는 과정이 대략적으로 어떻게 작동하는 것인지 알게되는 기회였던 것 같다. 오류가 2개 이상 발생했을 때도 정정이 가능한 오류정정코드는 어떻게 동작하는지, TCP와 같이 실제 통신에 사용되는 오류정정코드에는 무엇이 있는지 찾아보고 싶다.

소감문을 살펴보면 대부분의 학생들이 참여한 프로그램에 만족도가 높았으며, 수학에 대한 흥미와 관심도가 올라갔음을 알 수 있다. 학생들이 이전에 경험한 수학 학습 방법과 다르게 하나의 문제를 다양한 방법으로 문제를 해결했던 경험이 새롭고 이를 통해 수학에 대한 흥미가 올라갔으며, 친구와 함께 도전하는 과정에서 몰두하며 행복감을 느꼈다는

학생도 있었다. 처음 접해보는 정보이론의 오류정정코드를 수학을 통해 연구하면서 수학자가 되고 싶다는 학생도 있었다. 실제 수학자가 되겠다고 한 학생 3의 경우에는 수업에서도 선형대수학과 해석학 등 대학 수학의 학문에 대한 질문을 굉장히 많이 했다. 평소 학문 수학을 공부해보고 싶었는데, 이번 융합 교육프로그램을 통해 정보과학과 연계해 정보이론과도 연결되는 학문 수학을 배워 그 필요성에 대해 많이 깨달았다고 한다. 교육프로그램이 종료된 후 다수의 학생들이 프로그램에서 사용하였던 카드를 제공해 줄 것을 요청하였고, 이를 가져가 가족과 친구들에게 카드 게임을 소개하였다고 한다. 이러한 사실들을 바탕으로 개발된 프로그램이 학생들에게 수학적 흥미를 유발했고 수학의 가치에 대해 시사점을 주었다고 짐작해볼 수 있다.

프로그램 종료 후 학생들은 교사와 일대일 개별 면담을 진행하였는데 이 과정에서 의사소통능력, 창의성, 문제해결능력 등 여러 수학교과역량이 함양되었음을 확인할 수 있었다. 아래 <대화문 1>과 <대화문 2>에서는 학생들의 의사소통능력이 향상되었음을 확인할 수 있었다.

<대화문 1>

교사 : 그럼 이제 연구를 시작했던 3월의 모습과 지금 프로그램이 거의 끝난 지금의 모습을 비교해볼 때, 본인에게 어떤 점이 달라졌나요? 자유롭게 이야기해주세요.

학생 1 : 음 일단 저는 연구하는 자세가 좀 달라졌는데요. 솔직히 이번 사사과정을 하기 전에는 아까도 말했지만 제 생각을 온전히 전달하지 못하고 제 주장에 자신이 없었습니다. 근데 이번 연구를 통해 제 주장이 어느 정도는 맞은 것도 있고 그래서 제 주장에 확신이 생기면서 영재원뿐만 아니라 다른 곳에도 제 주장을 확실하게 말할 수 있는 계기가 되었던 것 같습니다.

<대화문 1>에서 학생 1의 경우에는 연구 초반에는 자신감이 부족해 자신의 의사를 잘 전달하지 못했는데 반복되는 연구 활동을 통해서 자신의 주장에 논리를 추가하여 확실하게 전달하게 되었다고 한다. 이를 통해

영재원뿐 아니라 다른 곳에서도 본인의 주장을 확실하게 말할 수 있는 계기가 되었다고 한다.

<대화문 2>

교사 : 그렇군요. 프로그램 대부분이 다른 친구들과 토의를 하는 과정이었는데요, 혹시 토의하는 과정에서 어려운 점은 없었나요?

학생 2 : 일단은 토의할 때 서로의 의견이 잘 안 맞을 때도 있었고 서로를 설득시키는 게 어려울 때도 있었는데요. 그래도 되게 좀 각자의 의견들을 잘 존중하면서 듣다 보니까 서로의 의견을 잘 존중하게 되고 또 정답에 같이 맞춰 나갈 수 있게 되었던 것 그리고 토의가 많아서 일단은 생각을 정리하는 게 좀 힘들었고 생각을 정리하고 나서도 이제 남의 의견도 들어보고 그 의견을 다른 친구들의 의견을 이해하는 것도 힘듦이 있었습니다. 그래도 되게 잘 쉽게 설명을 해줘서 토의는 되게 잘 대체적으로 잘 진행됐던 것 같습니다.

<대화문 2>에서 학생 2는 토의 초반 친구의 의견을 경청해 이해해야 하고 본인의 의견도 전달해야 함에 어려움이 있었지만, 후반부로 갈수록 생각이 잘 정리되어 토의가 대체적으로 잘 진행되었다고 한다.

학생들은 프로그램 참여 이전에 오랜 차시에 거쳐 토의를 하는 경험을 해보지 못했다고 한다. 그렇기에 토의 초반에는 친구의 의견을 경청하는 것도, 본인의 의견을 잘 전달하는 것에서도 어려움이 있었다. 하지만 반복되는 토의를 통해 본인의 주장에 논리적 근거를 가지고 이야기해야 함을 학습하였고, 나와 의견이 다른 친구의 의견도 경청하고 설득하려는 모습을 보였다. 이러한 사실들을 바탕으로 본 교육프로그램을 통해 수학적 의사소통능력[15]이 향상되었다고 할 수 있다.

15) 수학 의사소통 능력은 2015 개정 수학과 교육과정에서 수학 교과역량으로 '수학 지식이나 아이디어, 수학적 활동의 결과, 문제해결 과정, 신념과 태도 등을 말이나 그림, 글, 기호로 표현하고 다른 사람의 아이디어를 이해하며 함께 협력하는 능력'을 뜻한다(교육부, 2015).

다음으로 학생들의 수학적 창의성 함양에 대한 인터뷰 내용을 살펴보고자 한다. 많은 선행 연구들에 의하면 융합적인 사고가 가능한 인재가 되기 위해서는 필연적으로 이를 가능하게 하는 창의성이 수반되어야 하며, 이때 '융합'과 '창의'는 매우 밀접한 관계가 있다(김민경, 이지영, 2020). 교육프로그램 전반에 걸쳐 학생들은 상호토의하는 기회를 제공받는데 이러한 상호 간의 대화는 집단창의성을 증진시키는 중요한 요소로서 토의 내에서 발생한 갈등을 긍정적으로 조절하는 기능을 수행한다(조무정, 진석언, 2016). 학생들의 창의성 함양에 대한 내용은 아래 <대화문 4>~<대화문 9>을 통해 알 수 있다.

<대화문 4>

교사 : 그럼 마지막 질문인데요. 혹시 수학적 창의성이란 단어가 무엇이라 생각하나요?

학생 1 : 창의성이요? 어려운데요, 저는 노가다라고 창의력은 노가다에서부터 나온다고 생각합니다.

교사 : 그 이유도 궁금합니다.

학생 1 : 어 제가 학원에서 푸는 문제들도 창의성을 찾으려면 다 노가다로부터 창의력을 찾았어요. 문제가 주어지면 그 문제를 일단 받고 나서 무조건 숫자를 대입해봐서 어떤 성질이 있는지 확인해보고 거기서 이제 어떻게 풀어야 될지 고민을 해봅니다. 이러면서 문제가 해결된 경험이 많았습니다. 그래서 저는 수학적 창의성은 노가다에서 나온다고 생각을 합니다.

교사 : 이번 연구프로그램이 본인의 수학적 창의성 함양에 도움이 되었나요?

학생 1 : 네 도움이 되었죠. 일단 접근 방식이 제 기존 방법대로 어려운 문제들에 대해 계속 노가다로 도전을 해봤기 때문입니다. 이번 연구에서도 전략을 찾을 때 이 방법이 도움이 많이 되었습니다.

<대화문 5>

교사 : 수학적 창의성이라는 말을 들어봤는지 모르겠지만, 수학적 창의성이

뭐라고 생각하나요?

학생 2 : 아 제가 생각하는 수학적 창의성이란 한 수학 문제나 과학 문제 같은 것들을 여러 방면에서 모아서 여러 가지를 융합하여 하나의 답을 내는 거라고 생각합니다. 우리도 어떻게 한 가지 방면으로만 살아갈 수는 없듯이 문제도 여러 방면에서 잘 검토하면서 생각하면 더 창의적으로 문제를 풀 수 있을 것 같고요. 아니면 아예 지금의 사고방식에서 개념의 틀을 깨버리는 그런 문제 방식이라 생각합니다. 그리고 저는 그러기 위해 노력합니다.

교사 : 혹시 그러면 본인이 참여하신 연구프로그램을 통해 본인 스스로가 창의성이 향상되었다고 말을 할 수 있을까요?

학생 2 : 네 저는 향상되었다고 말할 수 있을 것 같습니다.

교사 : 그 이유도 듣고 싶은데요.

학생 2 : 일단은 이 프로그램을 통해서 여러 더 많은 수학을 배우게 되어서 여러 가지 방법으로 사고할 수 있게 되는 데 도움을 줬고요, 그리고 이 프로그램을 하면서 약간 모르는 문제들을 해결해야 했기 때문에 그 문제들을 자세하게 고민하게 되면서 여러 방면에서 접근하게 되다 보니까 수학적 창의성을 기르는 데 도움을 많이 줬던 것 같습니다.

<대화문 6>

교사 : 수학에서의 창의성 즉, 수학적 창의성이 무엇이라고 생각하나요?

학생 3 : 수학에서의 창의성은 통찰이라고 생각해요. 그 이유는 우선 관찰 대상이 이론을 만드는 것이 아니라 이론이 관찰 대상을 만듭니다. 그렇기 때문에 이론에 의해서 만들어진 이론에 의해서 형성된 관찰 대상들을 하나라도 놓치지 않고 제대로 통찰을 통해 찾아내어야지 그 이론을 비로소 알 수 있게 되는 거기 때문에 통찰을 잘해야 즉 여러 수학적 사실로 발견된 데이터들이 많고 그 데이터들을 직접 해석을 통해 통찰할 수 있어야지 그 관찰 결과로 인해 인하여 새로운 사실을 알아낼 수 있었기 때문에 통찰이 수학적 창의성에 90% 이상을 차지한다고 생각합니다.

교사 : 네 그러면 학생 3이 참여한 연구프로그램을 통해 수학적 창의성이 본인 스스로 향상되었다고 생각하나요?

학생 3 : 네

교사 : 이유가 궁금합니다.

학생 3 : 음 아까 말했듯이 통찰하면서 어떤 주제에 대해서 직접적으로 생각해보는 방법이 늘었기 때문입니다.

<대화문 7>

교사 : 수학에서의 창의성 즉, 수학적 창의성이 무엇이라고 생각하나요?

학생4 : 저 같은 경우는 창의성이 정의하기가 좀 되게 애매하다고 생각하는 게 제가 느꼈을 때 뭔가 새로운 게 떠오른다 했던 거는 그 대상을 잘 생각하다 보니까 갑자기 어느 순간에 좋은 방법이 떠오르는 그런 느낌이었었거든요. 그래서 뭔가 되게 직관적인 그런 걸로 여겨지고 뭐라 정의하기는 좀 힘들 것 같아요.

교사 : 네 그러면 본 연구를 통해서 본인 스스로가 생각할 때, 수학적 창의성이 향상되었다고 말을 할 수 있을까요?

학생4 : 네, 이전보다는 확실히 뭔가 좀 사물을 봤을 때 예가 떠오르는 게 많아졌었어요. 그래서 좀 더 효율적인 방법이 잘 떠오르게 됐던 것 같아요.

<대화문 8>

교사 : 수학에서의 창의성 즉, 수학적 창의성이 무엇이라고 생각하나요?

학생5 : 음 저는 수학적 창의력 창의성은 이제 자기가 직면한 문제를 지금까지 배워왔던 수학적 지식을 알맞은때 필요할 때 알맞게 사용해 가지고 그런 문제를 해결해나가는 능력이라 생각합니다.

교사 : 네 그럼 혹시 본 연구를 통해 본인 스스로 생각할 때 본인의 수학적 창의성이 향상되었다고 말을 할 수 있다고 생각하는지 아니면 없다고 생각하는지 이유와 함께 듣고 싶습니다.

학생5 : 저는 아까 말씀드렸다시피 이번 연구에 참여하기 전에는 수학은 이제 학교나 학원에서 주는 그런 정해진 문제들만을 푸는데 써왔기 때문에 딱히 여러 관점에서 수학을 볼 필요는 없었는데 이번 연구를 참여하게 되면서 수학을 이제 여러 관점에서 보는 경험이 되었고 이런 경험을 통해서 이제 어떨 때 수학이 필요하겠구나라는 느낌을 그런 경험을 할 수 있었다고 생각합니다. 그런 경험 덕분에 수학적 창의성을 함양할 수 있는 계기가 되었다고 생각합니다.

<대화문 9>

교사 : 수학에서의 창의성 즉, 수학적 창의성이 무엇이라고 생각하나요?

학생6 : 수학적 창의성 음 어떤 수학 문제를 봤을 때 뭔가 정해진 풀이 과정이 있을 거 아니에요. 그 풀이 과정 아니라 뭔가 새로운 풀이 과정으로 풀 수 있는 게 수학적 창의성이 아닐까 싶네요.

교사 : 네 그러면 본 연구에 참여하면서 본인 스스로 생각할 때 수학적 창의성이 향상되었다고 말할 수 있을까요?

학생6 : 아까 말했듯이 미적분 풀 때 벡터로 풀었으니까 창의성이 향상된 것 같아요. 그 문제를 보고 벡터로 해볼까? 했는데 풀려서 놀랐습니다.

학생들은 수학적 창의성에 대한 정확한 의미는 모르지만, 본인 기준에서 생각하는 창의성으로 판단하건대 열심히 노력하여 문제를 해결한 경험, 본인 사고의 틀을 깨는 여러 수학을 학습해서, 수학적 통찰을 경험해서, 새로운 접근을 생각해보려고 노력을 하는 등을 통해 본인 스스로가 수학적 창의성이 함양되었다고 생각하였다. 본 연구에서는 인터뷰를 진행한 참여 학생의 수가 적어 창의성 함양에 대한 구체적인 분석틀을 구성하여 체계적 분석을 하지는 못하였지만, 학생 스스로가 본인의 수학적 창의성이 향상되었다고 느끼는 감정 또한 큰 교육적인 의의를 갖는다고 볼 수 있다. 추후 충분한 참여 학생 수가 확보된다면 학생들과의 담화를 창의성 발현의 관점에서 분석해보는 것도 의미 있는 연구가 될 것으로 생각한다.

마지막으로 프로그램에 참여하면서 달라진 점에 대한 인터뷰 내용을 살펴보고자 한다. 연구에 참여하기 전과 후에 본인이 수학을 대하는 태도 등에 대해 자유롭게 이야기할 수 있도록 하였다.

- **학생 1** : 음 제가 수학을 대하는 태도는 문제를 풀 때 방식이 조금 바뀌긴 했습니다. 옛날에 문제를 풀 때는 문제의 답을 맞춰야 되겠다는 생각으로 오로지 답을 대한 방식으로만 접근을 하고 어떻게 답을 도출해야 할까를 생각했는데 지금은 그 문제를 풀어도 그 방식이 어떻게 다를까를 위주로 생각을 하고 있는 것 같습니다. 그리고 내가 푼 문제를 다른 사람들에게 어떻게 설명할까도 가끔 생각해봅니다.
- **학생 2** : 연구 내용에 관해 이제 좀 더 체계적이게 됐고 수학을 대하는 태

도도 옛날에는 그냥 어떻게 하면 되겠지 생각했다면 이제는 왜 그렇고 점점 더 세부적으로 생각하게 되어서 수학에 대한 더 깊이가 더 깊이를 더 알 수 있었고 수학을 더 좋아하게 될 수 있었던 시간인 것 같습니다.

- **학생 3** : 네 음...저는 이 프로그램에 참여하고 나서 현대 수학에 관심을 가지게 되었습니다. 그리고 현대 수학의 최전방에서 연구하고 싶다는 걸 느끼는 계기가 되었습니다. 이 프로그램에서는 선형대수학에 대한 내용을 배운 적이 있는데 이 과정에서 여러 정의들이 엄밀성을 알게 되었고 이러한 과정을 통해서 더 다양한 수학 이론을 배우고 싶다는 느낌이 감정이 들었습니다.
- **학생 4** : 수학 같은 경우에는 그냥 되게 추상적인 것으로만 여겼었거든요. 아까도 말했다시피 그냥 그 자체가 체계가 있고 세상 물리 법칙이라든가 그런 게 수학 기반으로 돌아가니까 언젠가는 미지 세계나 그런 쪽으로 가면 쓰이겠지만 실제로는 그렇게 유용하지 않은 그렇게 생각을 했었는데 그러니까 이런 걸 하고 나니까 달라진 거예요. 되게 일반적인 상황에서도 이게 적용할 수 있고 그러다 보니까 그냥 평소에 뭔가 사물을 마주쳐도 이거는 이렇게 하면은 뭔가 좀 더 좋은 방법을 찾아낼 수 있지 않을까 하는 생각이 가끔씩 들더라고요. 저 같은 경우는 프로그래밍을 하다 보니까 알고리즘 같은 경우를 분석을 해야 되는데 어떻게 하면 얘를 데이터를 좀 더 효율적으로 쓸 수 있을까 아니면 좀 더 빠르게 작동시킬 수 있을까 이거를 수학적으로 접근해 보게 된 것 같아요.
- **학생 5** : 저는 일단 이번 프로그램을 참여하기 전에는 아무래도 수학은 학교나 학원에서 문제 그냥 문제집에 있는 문제를 풀 때나 사용했었으니까 약간 어떤 이거를 배우면서 어떻게 어디서 쓰이는지도 궁금했었고 이제 문제를 푸는 방법은 아무래도 거의 정해져 있다 보니까 그냥 이제 제가 원래 배운 방식대로만 풀고 그런 약간 단조로운 느낌이 가능했었는데, 프로그램에 참여하고 이제 실생활에서 해결해야 되는 문제들을 수학으로 수학적 사고 과정을 거쳐서 해결하는 그런 과정 경험을 해보면서 이제 수학이 왜 필요한지도 약간 알게 되었고 그 과정에서 이제 그냥 문제를 풀기 위한 수학이 아니라 진짜로 그냥 문제집에 있는 문제를 해결하기 위한 수학이

아니라 실생활에서 필요한 수학을 조금 더 알게 된 것 같아요.

· **학생 6** : 일단 여기서 수학적 개념을 좀 많이 배웠단 말이죠. 행렬이나 벡터 같은 것들 더 깊게 배웠는데 학교 내신에서도 기하를 배우긴 하는데 이거보다 훨씬 얕게 들어간단 말이죠. 그래서 뭔가 학교 기하 수업 때 뭔가 어깨가 일단 조금 올라가고요. 그래서 학교 내신 과정에서 수업할 때 행렬이랑 제가 살짝 애들한테 알려주기도 했었고요. 아 그리고 맞아요. 제가 미적분 풀 때 벡터를 한번 사용해서 푼 적도 있어요. 이때도 되게 신기했어요.

학생들은 연구에 참여하면서 하나의 문제를 다양한 방법으로 시도했던 경험이 인상적이었다고 말하며, 이를 통해 수학 문제를 접근하는 방식이 달라졌음을 이야기한다. 연구를 통해 문제해결 과정에서 다양한 풀이를 생각하고, 어떤 방법이 가장 효율적일지를 생각한다는 점에서 학생들에게 문제해결능력이 함양되었음을 알 수 있었다. 또한 학생들은 수학적 사고를 좀 더 깊이할 수 있게 되었다고 이야기하며 수학에 대한 흥미가 향상되었으며, 앞으로 수학 공부를 더 해보고 싶다고 하였다.

제 5 장 결론 및 제언[16)]

제 1 절 요약 및 결론

본 연구에서는 모자 게임을 바탕으로 오류정정코드, 선형코드로 확장되는 수학 정보과학 융합 교육프로그램을 설계하여 학생들에게 융합적 사고능력과 창의성을 함양할 수 있도록 개발연구를 진행하였다. 개발연구의 예비설계, 교수실험, 회고분석의 단계를 반복적으로 거쳐 진행했으며 실제 2021년과 2022년, 2년 동안 교육프로그램을 개발 및 적용, 수정 보완을 반복하였다. 연구 대상은 서울대학교 과학영재교육원 중학생들과 서울대학교 사범대학 부설 시흥영재교육원 중고등학생들이며, 특히 2022년에 참가한 6명(서울시 소재 중학생 3명, 경기도 시흥시 소재 고등학생 3명)의 학생에 대해서는 프로그램 종료 후 소감문 작성 및 연구자와의 일대일 인터뷰를 진행하여 정성적 연구를 추가 진행하였다. 프로그램 전반에 걸쳐 학생들이 실세계 현상을 이해하고, 수학적 모델링 과정을 활용하여 실세계 현상의 수학적 원리와 구조를 이해할 수 있도록 설계하였다. 또한 협력 기반 문제해결 활동들을 통해 수학적 모델을 이해하고 적용하는 기회를 제공하여 집단창의성을 포함한 다양한 수학 교과 역량이 발달할 수 있도록 수업 요소들을 구성하였다. 2015 개정 중등교육과정에 포함되지 않은 벡터, 행렬 그리고 $\mathbb{Z}_2$-모듈 연산 등의 수학적 개념을 다룰 때에는 엄밀한 정의를 강조하기보다는 다양한 예시를 제시하여 학생들이 유추적 사고를 통해 이해할 수 있도록 지도하였다.[17)] 예를 들어, 학생들이 7-메시지 맞추기 게임의 승률을 구하기 위해서는 유한체 $\mathbb{Z}_2$위에서의 차원 정리(dimension theorem 혹은 rank-nullity theorem)가 필

16) 본 장의 내용은 서지영, 윤상균 (2022)의 내용을 토대로 보완한 것이다.
17) Polya (1990)는 특수화와 일반화를 반복하며 수학이 발전하고, 그 과정에서 특수한 예들 사이의 유추가 수학적 발견의 유용한 도구라고 하였다.

요한데, 차원 정리를 엄밀하게 증명하는 과정은 다루지 않고, 예시를 통해 제시하였다.

본 연구에서 개발한 프로그램의 교육적 의의는 다음과 같다.

첫째, 수학적 의사소통 능력을 함양할 수 있다. 학생들이 교사 또는 또래 학생들과의 활발한 의사소통을 반복적으로 경험할 수 있도록 프로그램을 설계하였다. 개발한 프로그램에서 학생들은 모자 게임의 규칙과 전략 및 승률에 대해 토의하고, 자신의 주장을 수학적 모델을 활용해 타인에게 논리적으로 설명하는 기회가 제공된다. 선행지식이 많이 요구하지 않도록 프로그램 과제를 개발하여 자신의 주장을 자유롭게 표현하기에 적합한 환경을 제공하였다. 이러한 프로그램 설계로 미래 사회의 핵심 역량인 의사소통 능력을 함양할 수 있었다. 4차 산업혁명의 시대에 자신의 의견을 논리적으로 표현하고 다양한 방법으로 타인과 협력하며 문제를 해결해나가는 능력은 굉장히 중요하다. 또한 의사소통 능력은 2015 개정 수학과 교육과정에서도 강조하고 있는 협력적 문제해결의 관점에서도 중요한 역량이다(여승현 외, 2021). 프로그램 내의 의사소통 과정에서 학생들은 다양한 발산적 사고와 수렴적 사고를 경험하며 문제를 해결하였는데, 이때 개인보다 뛰어난 집단 수준의 창의적 문제해결력을 발휘하였다. 실제로 4-모자 게임 활동에서 대다수 학생들이 3-모자 게임에서의 최적 전략을 적용하였을 때 기대보다 낮은 승률을 얻게 됨을 확인하며 갈등을 느낀다. 하지만 집단 내 상호작용을 통해 3-모자 게임의 경우와는 달리 비대칭적 전략을 활용해 4-모자 게임의 최대승률을 달성함을 확인하는 집단창의성을 발휘할 수 있었다. 교육은 개인보다는 집단을 강조하고 집단을 통해 서로의 지식을 경험하는 것을 중요하게 생각한다는 점에서(김민경 외, 2020) 교육적 의의가 있다.

둘째, 실세계 맥락에서 수학의 가치를 경험하는 기회를 제공한다. 개발된 교육프로그램은 총 5단계로 구성되었는데, 1단계(기본활동 단계)에서 실세계 상황인 3-카드 게임과 4-카드 게임의 최적 전략과 최대승률을 탐구하여 추론하는 활동과 추론한 바에 대해 수학적으로 정당화된 절대적 결론을 제공하는 2단계(수학적 정당화 단계) 활동은 수학의 유용성

을 경험하는 기회를 제공한다. 또한 3단계(수학적 모델링과 일반화 단계) 활동은 적은 인원수에서 발견하고 정당화한 전략의 수학적 구조를 일반적인 경우에 적용하고 탐구하여 수학적 연결성을 경험하는 기회를 제공한다. 수학적 연결성은 수학적 개념과 절차에 대한 이해를 확장·심화시키고, 문제해결력을 향상시키며, 수학의 가치를 이해하고 실생활과 다양한 학문 분야에서 수학을 활용할 수 있도록 하는 수학교육의 중요한 요소이다(장혜원, 2016). 또한 1단계부터 4단계까지의 과정에서 학습하는 n-카드 게임($n=2^k-1$ ($k\in\mathbb{N}$, $k\geq 2$))의 수학적 구조를 응용하여 기초 오류정정코드를 개발하고, 이의 원리를 이해하고 적용하여 실제로 오류 발생을 감지 및 정정하는 기회를 제공함으로써 수학의 실용성을 경험하도록 프로그램을 구성하였다. 5단계 활동에서는 정보이론에서의 중요한 소재인 오류정정코드를 조금 더 선형대수학적 관점에서 살펴보는 활동까지 확장해 구성하였다. 앞서 메시지 맞추기 게임 등을 통해 실습한 내용을 선형코드를 활용한 수학적 관점에서 분석 및 탐구하는 활동을 통해 수학과 정보과학의 융합적 사고능력을 함양시킬 수 있었다.

마지막으로 코딩을 수반하지 않는 수학과 정보 융합 교육프로그램으로 융합 교육에 관심 있는 교사들의 접근성을 높였다. 코딩을 수반하지 않더라도 3단계에서의 n-카드 게임의 수학적 모델링을 바탕으로 정보이론의 핵심 주제인 오류정정코드를 5단계에서 다룰 수 있도록 구성하였고, 벡터와 행렬을 바탕으로 인코딩, 오류감지, 오류정정, 디코딩의 수학적 원리와 구조를 명확히 파악할 수 있도록 설계하였다. 이러한 구성 및 설계는 코딩교육을 전문적으로 받지는 않았지만 수학 정보 융합 교육에 관심을 갖는 교사들의 접근성을 높이기 위함이다. 미래 사회에 필요한 역량은 단일능력이 아닌 복잡한 특성을 지니며, 다양한 능력을 갖추기 위한 융합형 인재 양성 교육이 필요하다(김민경, 이지영, 2020). 본 교육프로그램이 미래 사회를 이끌어갈 핵심 인재 양성에 보탬이 되기를 바란다.

제 2 절 연구 제한점 및 제언

본 연구에서는 2021년과 2022년, 2년간 서울대학교 과학영재교육원 중학생들, 서울대학교 사범대학 부설 시흥영재교육원 중고등학생들을 직접 지도하여 학생들에게 다양한 수학적 역량 함양 가능성을 확인하고 연구, 적용 및 보완을 반복하여 개발하였지만, 일반 학생 대상으로의 적용 가능성을 탐색하지는 못하였다. 교수실험과 상세한 회고 및 분석을 바탕으로 한 후속 연구가 이루어져 학교 현장으로의 적용 가능성을 탐색하기를 제언한다. 또한 프로그램 종료 후 학생들의 소감문과 인터뷰 내용을 보면 학생들이 학교에서 배우는 수학 학습에서는 답을 찾는 활동이 강조되어 문제의 풀이 과정보다 답에 연연하는 모습이 있었다고 한다. 교육프로그램을 통해 답보다도 과정의 중요성을 깨닫고, 답을 찾으면 그 연구가 끝나는 것이 아니라 다른 방법은 없는지, 본인의 의견을 어떻게 논리적으로 친구에게 전달할 수 있을지 등을 생각해보며 여러 가지 해결 방안을 생각해보게 되었다고 한다. 이러한 점을 바탕으로 학교 현장에서 정답뿐 아니라 수학적 과정과 그 과정을 스스로 정당화할 수 있는 것 또한 중요시하는 학교 현장의 분위기가 조성되기를 바란다.

본 연구에서는 창의성이 증진되었는지에 대한 상세한 분석 결과를 제시하지 않았는데, 적정 수의 프로그램 참여자가 확보된다면 수치적인 데이터와 문답 및 인터뷰 등을 바탕으로 한 양적·질적 연구가 이루어질 수 있을 것이라 기대한다. 미래 사회는 탁월한 개인보다는 협력적인 집단이 창출해내는 산출물이 현대 사회를 움직이는 원동력이 되고 있다(김민경, 이지영, 2020). 여러 분야의 지식이 상호작용을 통해 새로운 의미를 창출해내는 창의성은 집단과 개인의 능력을 함께 계발하는 다양한 연결고리가 될 것이다. 이에 창의성에 대한 후속 연구를 제안한다. 창의성의 하위 요소인 유창성, 융통성, 엄밀성 등에 대해 프로그램 참여 전후의 변화를 면밀히 파악하여 분석하는 연구가 이루어지기를 기대한다. 또한 융합교육 종합계획(교육부, 2020d)에서 제시한 바와 같이 융합형 프로젝트 기반의 학생 중심 교육활동이 많이 개발되어 미래세대에 요구되는 핵심 역

량 함양을 촉진할 수 있기를 바란다. 이를 위해서는 교사들이 융합 수업을 자유롭게 시도할 수 있는 교육 분위기가 필요하다.

마지막으로 2022 개정 교육과정 총론에서 강조하는 학습한 내용을 삶의 맥락에 적용하고 복잡한 문제를 해결할 수 있는 역량을 함양시켜줄 보다 다양한 수학교육 프로그램들이 개발되기를 기대한다.

참 고 문 헌

강한별, 이미숙, & 조한혁. (2021). 진화전략(Evolution Strategy)을 활용한 최대·최소 탐구과정 및 코딩환경 연구, **대한수학교육학회지 수학교육학 연구, 31**(1), 109-130.

고상숙, 한혜숙, 김현주, 이동근, 신동조, & 이창연. (2020). 수학적 모델링에 기반한 미래형 수학 교재 개발. **교육문화연구, 26**(5), 665-690.

고창수, 오영열. (2015). 수학적 모델링 활동이 수학적 문제해결력 및 수학적 성향에 미치는 영향. **한국초등수학교육학회지, 19**(3), 347-370.

교육부. (2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제2015-74호 [별책8]. 세종: 교육부.

교육부. (2017). **과학 · 수학 · 정보 교육 진흥법**. 교육부. [법률 제14903호].

교육부. (2020a). **생각하는 힘으로 함께 성장하고 미래를 주도하는 수학교육 종합 계획(안)**. [2020년～2024년].

교육부. (2020b). **제3차 수학교육 종합계획**. 교육부 보도자료(2020.05.24.).

교육부. (2020c). **인공지능, 학교 속으로! - 인공지능(AI), 초등 수학 공부 도우미로, 고교 진로 선택 과목으로 도입**. 교육부 보도자료(2020.09.14.).

교육부. (2020d). **학습의 패러다임을 바꾸어 가는 융합교육 종합계획(안)**. [2020년～2024년].

교육부. (2021). **2022 개정 교육과정 총론 주요 사항(시안)**. 교육부 보도자료(2021.11.24.).

권오남, 주미경. (2005). 탐구 지향 미분방정식 교수-학습의 효과 분석. **수학교육, 44**(3), 375-396.

김민경, 이지영. (2020). 체화된 인지 관점의 수학 중심 융합 수업에서 나

타난 초등학생의 집단창의성 발현에 관한 연구. **학습자중심교과교육연구, 20**(11), 1257-1287.

김민경, 이지영, & 김동희. (2020). **(체화된 앎(Embodied Understanding) 실현을 위한) 창의·융합 수학 수업의 개발과 실천적 탐구**. 서울: 경문사.

김선희. (2005). 문제 중심 학습의 방법으로서 수학적 모델링에 대한 고찰. **학교수학, 7**(3), 303-318.

김성원, 이산, 정은진, & 이영준. (2020). 과학· 수학· 정보 교과의 융합 교육을 위한 문제해결과정. **한국컴퓨터교육학회 학술발표대회 논문집, 24**(1), 7-9.

김성원, 이영준. (2021). 과학·수학·정보 융합 교육 프로그램이 중학생의 컴퓨팅 사고력에 미치는 효과. **컴퓨터교육학회 논문지, 24**(3), 1-10.

김진숙. (2016). **제4차 산업혁명과 교육의 역할**. 월간교육. 2016년 7월호, 104-113.

김혜미, 한선영. (2018). 수학 문제해결 역량 평가도구 개발. **학교수학, 20**(1), 83-105.

나귀수, 박미미, 김동원, 김연, & 이수진. (2018). 미래 시대의 수학교육 방향에 대한 연구. **수학교육학연구, 28**(4), 437-478.

류성림, 이종학, 윤마병, & 김학성. (2018). 초등학교 영재교육을 위한 수학· 과학 중심의 융합교육 프로그램 개발. **한국융합학회논문지, 9**(10), 217-228.

박만구. (2009). 수학교육에서 창의성의 개념 및 신장 방안. **수학교육 논문집, 23**(3), 803-822.

박선영, 한선영. (2018). 수학적 모델링 과정을 반영한 교과서 문제 재구성 예시 및 적용. **수학교육, 57**(3), 289-309.

박진형. (2017). 수학적 모델링 활동에 의한 창의적 사고 촉진 사례 연구. **수학교육학연구, 27**(1), 69-88.

서지영, 윤상균. (2022). 수학 정보과학 융합을 위한 창의적 문제해결 활

동 개발: 영재 학생을 대상으로 한 모자 게임을 중심으로. **수학교육 논문집, 36**(3), 439-467.

성지현, 이종희. (2017). 수학영재의 집단창의성 발현 모델 개발. **수학교육학연구, 27**(3), 557-580.

신기철, 서보억. (2019). 수학·정보 융합교육을 위한 코딩과 연계한 교수학습 자료 개발연구. **과학교육연구지, 43**(1), 17-42.

여승현, 서희주, 한선영, & 김진호. (2021). 초등 수학교과서의 문제해결 역량 및 과제 유형 분석: 수와 연산영역의 도전/생각 수학과 탐구 수학을 중심으로. **수학교육, 60**(4), 431-449.

우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수, & 임재훈. (2006). **수학교육학 연구방법론.** 서울: 경문사.

유홍규, 윤종국. (2017). 영재교육을 위한 수학적 모델링 프로그램의 개발 및 적용 :보로노이 다이어그램과 들로네 삼각분할을 중심으로. **수학교육 논문집, 31**(3), 257-277.

이경화. (2015). **수학적 창의성의 눈으로 본 수학교육 수학적 창의성**. 서울: 경문사.

이경화. (2016). 현실적 수학교육 이론의 재음미: 수학적 창의성 교육의 관점에서. **수학교육학연구, 26**(1), 47-62.

이대현. (2019). 직관적·형식적 탐구 기반의 문제해결식 접근법에 따른 수학 문제해결 지도 방안 탐색. **한국수학사학회지, 32**(6), 281-299.

이상구, 이재화, & 함윤미. (2020). 인공지능(Artificial Intelligence)과 대학수학교육. **수학교육 논문집, 34**(1), 1-15.

이지훈. (2000). **사례연구방법**. 대전: 대경.

임철일. (2019). 미래 사회와 교육을 위한 교육공학 연구 및 실천 영역의 재조명. **교육공학연구, 35**(2), 253-287.

장혜원. (2016). **학교수학과 수학적 연결성**. 서울: 경문사.

장화익, 이중원, 김재영, 이정민, 김명석, 이충형, 이상욱, 최무영, 양형진, & 김민수. (2015). **양자·정보·생명**. 서울: 한울아카데미.

정영옥. (2005). 교과과정 개발을 위한 기초로서의 개발연구에 대한 고찰. **수학교육학연구, 15**(3), 353-374.

정영옥, 이경화, & 나귀수. (2018). **현실적 수학교육의 이론과 실제**. 서울: 교우사.

정진환, 조한혁. (2020). 코딩교육 명령문의 수학화: 대수교육을 중심으로. **수학교육학연구, 30**(1), 131-151.

정혜윤, 이경화, 백도현, 정진호, & 임경석. (2018). 수학적 모델링 관점에 의한 <수학과제 탐구> 과목용 과제의 설계. **학교수학, 20**(1), 149-169.

정혜윤, 이경화. (2019). 집단창의성 발현을 위한 수학적 모델링 수업의 설계. **수학교육학연구, 29**(1), 157-188.

조무정, 진석언. (2016). 초등학교 과학 영재학생의 집단 창의성 발현과정 경험에 대한 현상학적 연구. **창의력교육연구, 16**(2), 35-59.

최경아. (2017). 수학 교과 역량 관점에서의 수학적 모델링에 관한 선행 연구 탐색. **한국학교수학회논문집, 20**(2), 187-210.

최윤석, 배종수. (2004). 초등 수학에서 문제 만들기를 적용한 수업이 수학적 문제 해결력 및 태도에 미치는 효과. **한국초등수학교육학회지, 8**(1), 23-43.

한선영. (2019). 예비 수학 교사들의 수학적 모델링 및 그 교육적 활용에 대한 인식. **수학교육, 58**(3), 443-458.

한정민, 박만구. (2010). 수학적 창의성 신장을 위한 교사의 발문 특성 연구. **한국초등수학교육학회 연구발표대회 논문집**, 219-235.

홍진곤, 박정숙, 설정수, 오세준, 박민규, & 박성훈. (2021). **인공지능 수학**. 서울: 천재교과서.

황선욱, 권성훈, 정두섭, 박상의, & 홍창섭. (2021). **인공지능 수학**. 서울: 미래엔.

Alon. N., Hassidim, A., Lubetzky, E., Stav, U., & Weinberg, A. (2008). *Broadcasting with side information*. The 49th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science

(FOCS), pp. 823 - 832.

Asempapa, R. S. (2015). Mathematical modeling: Essential for elementary and middle school students. *Journal of Mathematics Education, 8*(1), 16-29.

Bar-Yossef, Z., Birk, Y., Jayram, T. S., & Kol, T. (2006). *Index coding with side information.* The 47th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), pp. 197 - 206.

Birk, Y. & Kol, T. (2006). Coding-on-demand by an informed source (ISCOD) for efficient broadcast of different supplemental data to caching clients. *IEEE Trans. Inform. Theory, 52*, pp. 2825 - 2830.

Blum, W., & Niss, M. (1991). Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects－State, trends and issues in mathematics instruction. *Educational studies in mathematics, 22*(1), 37-68.

Blum, W. (2001). *Denksport für Hutträger*. Die Zeit, May, 3, 8.

Blum, W., & Ferri, R. B. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt?. *Journal of mathematical modelling and application, 1*(1), 45-58.

Butler, S., Hajiaghayi, M., Kleinberg, R., & Leighton, T. (2008). Hat guessing games. *SIAM J. Discrete Math. 22*(.2), 592 - 605.

Chandra, A., Furst, M., & Lipton, R. (1983). *Multiparty protocols*. The 15th Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC), pp. 93 - 99.

Cobb, P. (2000). *Conducting teaching experiments in collaboration with teachers*. In A. E. Kelly, R.A. Lesh (Eds.), Handbook of research design in mathematics and science education (pp. 307-333). London: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Cox, C., De Silva, J., DeOrsey, P., Kenter, H. J., Retter, T. & Tobin, J. (2015). How to make the perfect fireworks display: Two strategies for Hanabi. *Mathematics Magazine, 88*(5), 323 - 336.

Ebert, T. (1988). *Applications of Recursive Operators to Randomness and Complexity*. Doctoral dissertation, University of California, Santa Barbara. https://dl.acm.org/doi/10.5555/927911

Feige, U. (2010). On optimal strategies for a hat game on graphs. *SIAM J. Discrete Math. 24*(3), 782 - 791.

Freudenthal, H. (1973). *Mathmatics as an educational task.* Reidel.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education.* Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Pulishers.

Gadouleau, M. (2018). Finite dynamical systems, hat games, and coding theory. *SIAM J. Discrete Math. 32*(3), 1922 - 1945.

Gravemeijer, K. P. E. (2001). Developmental research, a course in elementary data analysis as an example. In P*aper presented at'The Netherlands and Taiwan Conference on Common Sense in Mathematics Education', Taipei (Taiwan), 19-11-2001.*

Gravemeijer, K., & Cobb, P. (2006). *Design research from a learning design perspective*. In Educational design research (pp. 29-63). Routledge.

Hendriana, H., Johanto, T., & Sumarmo, U. (2018). The Role of Problem-Based Learning to Improve Students' Mathematical Problem-Solving Ability and Self Confidence. *Journal on Mathematics Education, 9*(2), 291-300.

Holevo, A. S. (2019). Quantum systems, channels, information. In *Quantum Systems, Channels, Information*. de Gruyter.

Julie, C., & Mudaly, V. (2007). *Mathematical modelling of social*

issues in school mathematics in South Africa. In Modelling and applications in mathematics education (pp. 503-510). Springer.

Krzywkowski, M. (2010). On the hat problem, its variations, and their applications. *Annales Universitatis Paedagogicae Cracoviensis Studia Mathematica, 9*(1), 55-67.

Krzywkowski, M. (2011). Hat problem on odd cycles. *Houston Journal of Mathematics, 37*, 1063-1069.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The challenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and learning, 7*(3), 231-258.

Lee, L. (1996). *An initiation into algebraic culture through generalization activities*. In Approaches to algebra (pp. 87-106). Springer.

Lubetzky, E., & Stav, U. (2007). *Non-linear index coding outperforming the linear optimum.* The 48th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science (FOCS), pp. 161 - 167.

Ma, T., Sun, X., & Yu, H. (2011). *A new variation of hat guessing games*. In International Computing and Combinatorics Conference (pp. 616-626). Springer.

McMahon, D. (2008). Quantum computing explained. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Nemeth, C. J., & Nemeth-Brown. (2003). Better than Individual? The potential benefit of dissent and diversity for group creativity. In P.B. Paulus, & B. A. Nijstad (Eds.), *Group creativity: Innovation through collaboration* (pp. 63-84). Oxford University Press.

Nijstad, B. A., & Paulus, P. B. (2003). Group creativity: Common

themes and future directions. In P. B. Paulus (Ed.), *Group creativity: Innovation through collaboration* (pp. 326-346). Oxford University Press.

OECD. (2009). *PISA 2009.* Assessment Framework. Key Competencies in Reading, Mathematics and Science. Author.

Östergård, P., & Blass, U. (2001). On the size of optimal binary codes of length 9 and covering radius 1. *IEEE Trans. Inform. Theory 47* (2001), no. 6, 2556 - 2557.

Polya, G. (1990). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics (Vol. 1).* Princeton University Press.

Poulos, J. (2001). *Could you solve this $1 million hat trick?.* abcNews.

Robinson, S. (2001). Why mathematicians now care about their hat color. *The New York Times, Science Times Section,* page D, 5.

Schwab, K. (2017). *The fourth industrial revolution.* Currency.

Shannon, C. E. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell system technical journal, 27*(3), 379-423.

Shannon, C. E., & Weaver, W. (1949). *The Mathematical Theory of Communication.* University of Illinois Press.

Surya, E., & Putri, F. A. (2017). Improving mathematical problem-solving ability and self-confidence of high school students through contextual learning model. *Journal on Mathematics Education, 8*(1), 85-94.

Swetz, F., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical Modeling in the Secondary School Curriculum.* National Council of Teachers of Mathematics, Inc., 1906 Association Dr., Reston, VA 22091.

Szczechla, W. (2017). The three colour hat guessing game on cycle graphs. *Electron. J. Combin. 24*, no. 1, Paper No. 1.37, 19 pp.

Tan, J. P.-L., Caleon, I., Ng, H. L. Poon, C. L., & Koh, E. (2018). *Collective creativity competencies and collaborative problem-solving outcomes: Insights from the dialogic interactions of singapore student teams. In E. Care, P. Griffin, & M. Wilson (Eds.)*. Assessment and teaching of 21st century skills: Research and applications (pp. 95-118). Dordrecht: Springer.

Tantipongpipat, U. (2014). A combinatorial approach to Ebert's hat game with many colors. Electron. *J. Combin. 21,* no. 4, Paper 4.33, 18 pp.

Taylor, P. (2018). Teach the Mathematics of Mathematicians. *Education Sciences. 8*(2), 56.

Wilde, M. M. (2013). *Quantum information theory*. Cambridge University Press.

Zhou, C., & Luo, L. (2012). Group creativity in learning context: Understanding in a socialcultural framework and methodology. *Creative Education, 3*(4), 392-399.

Abstract

Development and application of creative problem-solving activities for integrating Mathematics and Information Science

Seo, Ji Young

Department of Mathematics Education

The Graduate School

Seoul National University

In the era of the 4th Industrial Revolution, technologies from various fields are fused and changes are taking place in society and culture. The speed, depth, and scope of this change are revolutionary changes that we have never experienced before. In this trend, changes are occurring rapidly in the educational world. The Ministry of Education implemented the Science, Mathematics, and Information Education Promotion Act in 2018 to foster creative talent through convergence between subjects for the purpose of fostering convergent talent.

Research on the importance and practical measures of education that combines actual mathematics and information is being conducted in various fields.

This study aims to develop an educational program that combines mathematics and information science with the expectation of cultivating important mathematics subject competencies such as mathematics problem-solving skills, communication skills, and creativity. It is clear that coding is an important factor when discussing information science from an educational point of view, but it does not always have to be accompanied. Therefore, this study organized creative problem-solving activities for the convergence of mathematics and information science, which do not require much coding knowledge and can be easily accessed in everyday languages. Development research was conducted for two years from 2021 to 2022, and at the teaching experiment stage of development research, middle and high school students at Seoul National University Science Gifted Education Center and Siheung Gifted Education Center affiliated with Seoul National University were directly applied for two years. The educational significance of this development study is as follows.

First, mathematical communication skills can be cultivated through the process of discussing the rules, strategies, and winning rates of hat games with friends.

Second, it can provide an opportunity to experience the value of mathematics in a real-world context. Through various card games and error correction code practice activities organized in the program, students can experience the usefulness and connectivity of mathematics in the real world.

Finally, it is a convergence education program of mathematics and

information that does not involve coding, which has implications for increasing access to convergence education even for teachers who have not received coding education professionally.

keywords : hat game, error-correcting code, channel capacity, information science, problem-solving, mathematical communication, mathematical modeling, creativity

Student Number : 2021-25138