공학석사학위심사논문

영구자석 동기기 약자속 운전 영역의 비선형 최적화 기반 실시간 토크 제어

Real Time Torque Control of PMSM under
Flux Weakening Operation Based on Nonlinear Optimization

2023 년 8 월

서울대학교 대학원
전기·정보 공학부
박 재 연

영구자석 동기기 약자속 운전 영역의 비선형 최적화 기반 실시간 토크 제어

지도 교수 설 승 기

이 논문을 공학석사 학위논문으로 제출함
2023 년 06 월

서울대학교 대학원
전기·정보공학부
박 재 연

박재연의 공학석사 학위논문을 인준함
2023 년 06 월

위 원 장 _____ 하 정 익 _____ (인)

부위원장 _____ 설 승 기 _____ (인)

위 원 _____ 최 성 휘 _____ (인)

초 록

높은 효율과 전력 밀도를 가지는 매입형 영구자석 동기기는 전기자동차 견인용 전동기로 널리 사용되고 있다. 이러한 견인 전동기는 정토크 영역 및 정출력 영역에서 최적 효율 운전이 요구된다. 전동기 구동 시스템의 직류단 전압과 최대 인가 전류가 제한되어 있는 상황에서 전동기의 운전 영역을 고속 운전 영역으로 확대시키기 위해서는 약자속(Flux weakening, FW) 운전이 필요하며, 기저 속도(Base speed) 이상에서도 토크 제어가 필요하다. 실제 전동기는 자기 포화(Magnetic saturation) 및 교차 결합(Cross-coupling) 현상, 운전 조건의 변동이 발생하므로, 이와 같은 비이상적인(Non-ideal) 특성을 실시간으로 반영하는 약자속 운전이 필요하다.

본 논문에서는 자기포화 및 교차 결합을 고려한 영구자석 동기기 모델에 대하여, 제정수 오차에 강인한 약자속 운전 토크 제어기를 제안한다. 약자속 운전 상황에서의 토크 제어를 비선형 최적화 문제로 정의하고 순차 2차 계획법(Sequential quadratic programming, SQP) 방법을 적용하여 매 샘플별 최적 전류 지령을 산출하는 해석적 최적해를 유도한다. 유도한 최적해를 임베디드 시스템(Embedded system)과 같은 실시간 제어 시스템에서 구현하기 위해 연산 측면에서 간소화된 최적해를 함께 제안한다. 간소화된 최적해는 근사 과정을 필요로 하지 않기 때문에 본래 최적해와 동치이다. 제안하는 약자속 운전 토크 제어기는 등토크 곡선 및 전류 제한원 상에서의 약자속 운전에서 인덕턴스 제정수 오차에 따른 운전점의 정상 상태 오차가 없다. 이러한 원인을 이론적으로 규명하고 실험적으로 보인다. 단위 전압당 최대 토크(Maximum torque per voltage, MTPV) 운전에서는 인덕턴스 오차로 인해 운전점의 정상 상태 오차가 발생하는데, 오차 발생 원인을 분석한다.

약자속 제어에 대해 최적화 기법을 적용한 다수의 선행 연구들은 KKT 조건(Karush–Kuhn–Tucker condition)을 충분 조건으로 활용해 운전 상황별 판별식을 유도하고, 유도한 판별식의 교점 찾기 문제로 약자속

운전을 접근하였다. 이러한 접근법으로 인하여 전류에 대한 자속 편미분 값인 증분 인덕턴스(Incremetnal inductance)가 필요했다. 이는 운전점별로 변하는 값이며, 이를 반영하기 위해서는 사전 시험을 통해 운전점별 제정수 참조표를 구성하거나 고주파 전압 신호 주입을 통해 해당 값을 추정해야 한다.

본 논문에서는 우선 일반적으로 필요 조건으로 성립하는 KKT 조건을 충분 조건으로 가정할 수 있는지 살펴본다. KKT 조건을 충분 조건으로 활용함으로써 약자속 운전을 쌍대 문제(Dual problem)의 최적화 관점에서 접근한다. 이러한 접근법으로 인해 조절 변수(Tunnging factor)가 필요 없는 최적해를 유도할 수 있으며, 인덕턴스 제정수 변동에 강인한 약자속 운전 토크 제어기를 구성할 수 있다.

본 논문에서는 기저속도 3000 r/min, 최대 토크 360 N·m의 전기자동차 견인용 매입형 영구자석 동기기에 대해 제안된 약자속 최적 운전 방법을 실험했으며, 이를 통해 2배의 기저 속도 운전 상황에서 초당 최대 토크 7.5배의 토크 지령 변화율에도 최적 운전점을 추종할 수 있음을 확인하였다.

주요어: 영구자석 동기기, 약자속 운전, 실시간 토크 제어, 비선형 최적화

학 번: 2021-22810

목 차

표 목차

그림 목차

기호 및 약어(Nomenclature)

기호	뜻(국문)	뜻(영문)
윗첨자 ‘⊤’	전치 연산자	Transpose operator for a matrix
윗첨자 ‘-1’	역행렬	Inverse matrix
윗첨자 ‘e’	동기 좌표계	Syncrhonous reference frame (SRF)
윗첨자 ‘r’	회전자 기준 좌표계	Rotor reference frame (RRF)
아래첨자 ‘dqs’	고정자 dq 벡터	Stator dq vector
아래첨자 ‘opt’	최적해	Optimal solution
아래첨자 ‘active’	부등호 제약 조건 함수가 등호를 만족할 때 최적해	Optimal solution when the inequality constraint meets equality
아래첨자 ‘inactive’	부등호 제약 조건 함수가 등호를 만족하지 못할 때 최적해	Optimal solution when the inequality constraint does not meet equality
$\mathbf{x}_{dqs}^{e} = \begin{bmatrix} x_{ds}^{e} \\ x_{qs}^{e} \end{bmatrix}$	동기 좌표계상에서의 dq 벡터	dq vector in SRF
$\mathbf{x}_{dqs}^{r} = \begin{bmatrix} x_{ds}^{r} \\ x_{qs}^{r} \end{bmatrix}$	회전자 기준 좌표계상에서의 dq 벡터	dq vector in RRF
V_{max}	전동기 최대 인가 전압 크기 [V]	Maximum voltage magnitude for motor [V]
I_{max}	전동기 최대 인가 전류 크기 [A]	Maximum current magnitude for motor [A]
$f_o(\cdot)$	비용 함수	Cost function
$f_i(\cdot)$	전류 제한 조건 함수	Current constraint function
$f_v(\cdot)$	전압 제한 조건 함수	Voltage constraint function
$\mathcal{L}(\cdot)$	라그랑지안 함수	Lagrangian function

$d(\cdot)$	쌍대 함수	Dual function
$\boldsymbol{\rho}$	부등호 조건 함수에 대한 여유 변수	Slack variable for inequality constraint funciton
$\mathbf{v}$	등호 조건 함수에 대한 여유 변수	Slack variable for equality constraint function
$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}}$	스칼라 값 함수 f의 벡터 $\mathbf{x}$에 대한 도함수 (= 기울기 벡터)	First order derivative (= Gradient vector) of f with respect to $\mathbf{x}$
$\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}$	벡터 값 함수 $\mathbf{f}$의 벡터 $\mathbf{x}$에 대한 도함수 (= 야코비안 행렬)	First order derivative (= Jacobian matrix) of $\mathbf{f}$ with respect to $\mathbf{x}$
$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathbf{x}^2}$	스칼라 값 함수 f의 벡터 $\mathbf{x}$에 대한 이계도함수 (= 헤시안 행렬)	Second order derivative (= Hessian matrix) of f with respec to $\mathbf{x}$
V_{dc}	인버터 DC 전압 [V]	DC link voltage of inverter [V]
T_e	출력 토크 [N·m]	Output torque [N·m]
p	극 쌍 수	The number of pole-pairs
x^*	지령 변수	Reference variable
$\hat{x}$	추정 변수	Estimated variable
$x[k]$	변수 x의 k번째 샘플 값	k-th sampled value of variable x
ω_r	회전자 전기각 회전 속도	Electrical rotor speed
$\mathbf{J}$	반시계 90° 회전 변환 행렬	Counter-clockwise rotation matrix as 90°
$\mathbf{i}$	전류 벡터 변수	Current vector variable
$\mathbf{v}$	전압 벡터 변수	Voltage vector variable
$\boldsymbol{\lambda}$	자속 벡터 변수	Flux-linkage vector variable

제 1장 서론

1.1 연구의 배경

영구자석 동기기(Permanent-magnet synchronous motor, PMSM)는 희토류 영구자석과 같은 자석 소재 발전에 힘입어 높은 토크(Torque), 전력 밀도, 효율을 갖는다는 특징이 있다. 이러한 강점을 기반으로 현재 다양한 산업 분야에 활용되고 있다. 특히 전기 자동차의 견인용 전동기로 활용되면서 21세기 교통 수단의 전동화를 이끌고 있다.

영구자석 동기기는 회전자에 영구자석이 부착되는 방법에 따라 표면 부착형 영구자석 동기기(Surface mounted PMSM, SPMSM)및 매입형 영구자석 동기기(Interior mounted PMSM, IPMSM)로 크게 나눌 수 있다. 이 중 매입형 영구자석 동기기는 회전자에 영구자석을 매립함으로써 높은 회전 속도에서도 기계적 안정성을 확보할 수 있고, 영구 자석에 의한 토크 뿐만 아니라 자기 저항(Reluctance)에 의한 토크 또한 발생시킬 수 있다. 또한 표면 부착형 영구자석 동기기보다 유효 공극(Effective air gap)이 작아 운전 영역을 확장시킬 수 있다 [1]. 이러한 특징들로 인해 매입형 영구자석 동기기는 전기자동차 견인용 전동기로 널리 활용되고 있다.

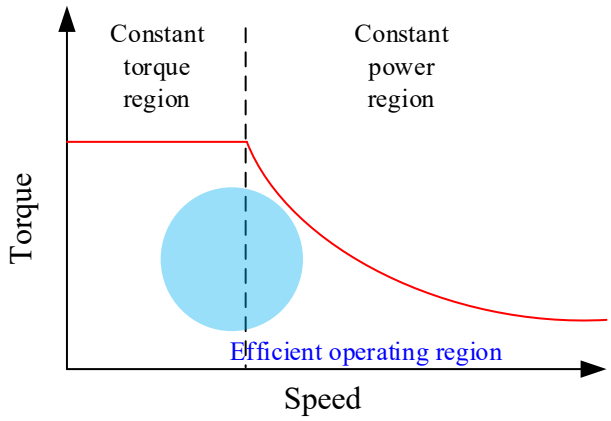


그림 1-1. 매입형 영구자석 동기기의 운전 영역

그림 1-1은 매입형 영구자석 동기기의 능력 곡선 및 운전 영역을 개념적으로 보여주고 있다. 매입형 영구자석 동기기의 최적 효율 운전 영역은 구체적인 설계에 따라 달라지지만, 대체로 중고속 운전 영역에 존재한다 [2]. 일례로 아래 그림은 TOYOTA사의 하이브리드(Hybrid) 자동차 Prius에 사용된 전동기의 능력 곡선과 운전점 별 효율을 보여준다. 중, 고속 운전 영역에서 최대 효율을 달성하는 것을 확인할 수 있다 [3].

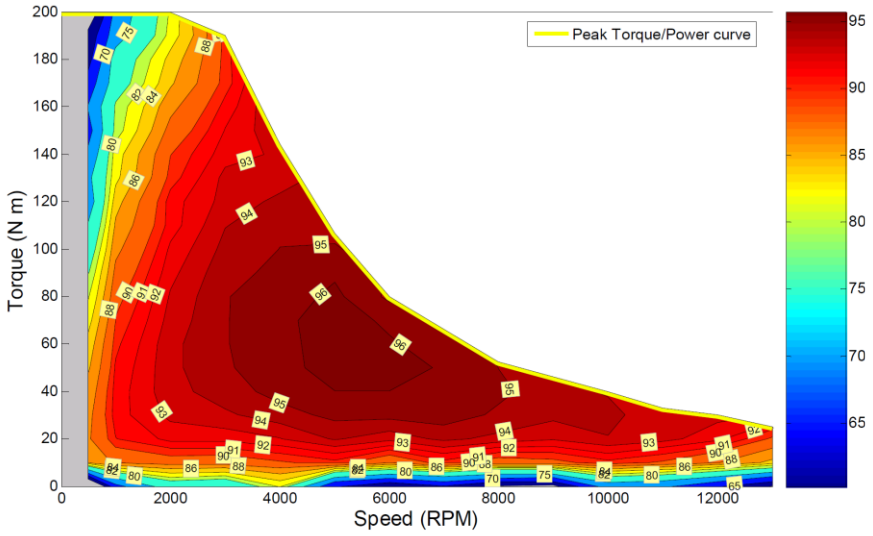


그림 1-2. 참고 문헌 [3]의 Prius(2010) 능력 곡선 및 효율

따라서 전기 자동차 견인용 전동기의 주요 운전 범위에는 정토크 영역(Constant torque region) 및 정출력 영역(Constant power region) 모두 포함되며, 도심 및 고속도로 주행에 있어서 최대 효율 운전점이 정토크 영역 및 정출력 영역에 있도록 설계된다 [4]. EPA(U.S. Environmental protection agency)의 도심 주행 시험 곡선(Driving cycle)인 LA04와 급가속 및 고속 주행 시험 곡선인 US06을 살펴보면 전동기의 능력 곡선 상 고속-저토크 운전이 요구되며 [5], 이는 정출력 영역에서 또한 토크 제어가 필요함을 시사한다.

영구자석 동기기는 일반적으로 인버터(Inverter)로 구동된다. 인버터 DC 전압의 한계로 전동기 인가 전압이 제한되고, 스위칭 소자 및 전동기의 전류 한계로 전동기 구동 시스템의 최대 전류가 제한된다. 이와 같은 제약 조건을 고려하여 회전자 기준 d축, q축 전류를 순시적으로 제어하면 주어진 운전 속도에서 전동기의 기계적 출력 토크를 제어할 수 있다. 특히 매입형 영구자석 동기기는 출력 토크에 영구 자석에 의한 토크 성분과 자기 저항에 의한 토크 성분이 복합적으로 작용하기 때문에, 토크 제어를 위해서는 d축, q축 운전점을 모두 고려해야 한다.

매입형 영구자석 동기기의 최대 효율 운전 및 높은 에너지 밀도를 달성하려면, 정출력 영역으로의 운전 영역 확대는 필수적이다. 정출력 영역에서의 운전은 전압 제한 조건을 필히 고려해야 하며, 이를 위해서는 전압 및 전류 제한 조건을 순시적으로 만족시키는 약자속(Flux weakening, FW) 운전이 필요하다. 물리적으로 약자속 운전은 음의 d축 전류를 활용하여 영구자석에 의한 고정자 쇄교 자속의 크기를 줄이고, 결과적으로 역기전력의 크기를 제어해 순시적인 전류 가제어성(Controllability)을 확보하는 것을 의미한다. 전기자동차 도심 주행 및 고속 주행 상황을 고려하면 전기자동차 견인용 전동기로서 약자속 운전은 전류 가제어성을 확보하는 것에서 나아가 토크 제어 능력이 요구된다. 따라서 정출력 운전 영역으로의 확장과 고속-저토크 상황에서의 토크 제어를 가능하게 하는 약자속 운전이 필요하다.

영구자석 동기기의 운전영역 확장을 위해 약자속 운전과 관련된 다양한 연구가 진행되어 왔다. 이상적인 전동기의 선형 모델에 대해 해석적인 방법으로 최적해를 유도한 연구가 진행된 바 있으나 [6], [7], 실제 전동기는 자기 포화 및 교차 결합 효과가 존재하기 때문에 해석적으로 구한 최적 운전점은 실제 최적 운전점과 오차가 있다.

전동기의 비이상적인 효과를 고려하기 위해 참조표를 활용한 약자속 운전 방법들이 제안되어 왔다 [8]–[11]. 운전점별 제정수를 참조표로 구성하거나 사전 시험을 통한 최적 운전점을 참조표로 구성해 사용한다.

참조표 기반의 약자속 운전은 전동기의 비이상적인 특성을 반영해 최적 운전을 수행할 수 있지만, 온도 변화에 따른 영구자석의 자속 밀도 변화와 같이 전동기의 시변적인 요소와 제작 공차에 대처하기 어렵다.

이와 같은 문제들을 해결하고자 인버터 출력 전압 및 전동기 전류 신호를 궤환 받아 사용하는 약자속 운전 기법들이 연구되어 왔다 [12]–[29]. 전압 신호 궤환과 선형 제어기를 이용한 약자속 운전은 일정 속도 제어 시 유용하게 활용될 수 있으나, 매입형 영구자석 동기기의 등토크 곡선 특성을 반영하기 어려워 정확한 토크 제어에는 어려움이 있다 [13]–[16]. 토크 가제어성을 확보하기 위해 참조표 및 선형 제어기를 함께 사용하는 연구가 진행된 바 있으나 [12], [21], 이 경우 앞서 서술한 참조표 방식과 마찬가지로 사전 시험이 필요하며 참조표 작성시 주의를 기울여야 한다.

한편, 전압 이용률을 극대화하기 위해 식스-스텝(Six-step) 운전을 고려한 약자속 운전이 연구되었다. 전압 평면에서 토크 지령에 대한 등토크 곡선과 전류 제한 조건을 고려해 전압 지령을 직접 계산하는 방식이 연구되었다 [17]–[20]. 이상적인 전동기를 가정하기 때문에 제정수 변동에 취약하다는 단점이 있으며, 특히 이 같은 방식은 전류 제어 방식이 아니기 때문에 제정수 오차가 있으면 예상보다 큰 전류를 야기할 수 있다. 이로 인해 전류 제한을 만족시키지 못할 수 있다 [18]. 식스-스텝의 장점을 가져오면서 전류 제어 방식을 채택한 연구 또한 진행된 바 있으며, 이 경우 전압각 및 자속각을 이용해 전류 제어를 수행한다 [26]–[29]. 상위 토크 제어기를 두어 토크 제어 또한 수행할 수 있다. 그러나 식스-스텝만을 위한 전류 제어기가 별도로 필요하며, PWM(Pulse width modulation) 운전 및 식스-스텝 운전 사이의 절환 시 전류 제어기 간에도 절환이 필요하다.

전류 제어기 구조를 유지하면서 약자속 운전을 수행하기 위해 전류 지령을 출력하는 약자속 제어기가 연구되었다 [22]–[25]. 전류 제한 및 전압 제한 조건을 고려하기 위해 최적화 및 수치해석적 알고리즘을 사용하였다. 그러나 이 같은 수치해석적 알고리즘을 동작시키고자

한다면, 전류에 대한 자속 편미분 값인 증분 인덕턴스(Incremental inductance)가 요구되어 운전점별 제정수 참조표를 사용하거나 [22]–[24], 참조표를 사용하지 않는 경우 고주파 전압 신호 주입이 필요하다 [25]. 참조표를 사용하는 경우 앞서 서술한 바와 같이 사전 시험이 필요하며, 고주파 전압 신호 주입의 경우 전압 이용률을 떨어뜨리는 단점이 있다.

본 논문에서는 전류 및 전압 제한 조건을 명시적으로 다루는 최적화 관점에서 약자속 운전을 접근하여, 참조표 및 고주파 전압 주입이 필요 없는 약자속 운전 토크 제어기를 제안하고자 한다. 먼저, 약자속 운전에 대해 새롭게 최적화 문제를 정의하고, 이를 매 샘플마다 푸는 해석적인 최적해를 유도한다. 유도한 최적해를 실시간 제어 시스템에서 구현하기 위해 연산 과정이 간소화 된 해를 함께 제안한다. 이때 간소화 된 해는 근사 과정(Approximation)을 필요로 하지 않으며, 유도한 최적해와 동일한 값을 계산할 수 있다. 추가로 본 논문에서는 인덕턴스 오차에 의한 효과를 분석한다. 인덕턴스 오차가 있을 시에도 등토크 곡선 및 전류 제한 원 상 운전에서 정상 상태 오차가 없는 운전이 가능함을 이론적으로 규명하고 이를 실험적으로 보인다. 단위 전압당 최대 토크(Maximum torque per voltage, MTPV) 운전 상황에서는 인덕턴스 오차에 기인한 정상 상태 오차가 필연적으로 발생하는데, 이와 같은 오차가 발생하는 이유를 밝힌다.

따라서 본 논문에서 제안하는 약자속 토크 제어기는 MTPV 운전 영역이 없는 유한 속도 시스템에 적합하며, 전기자동차 견인용 전동기에서 필요로 하는 정출력 영역에서의 토크 제어가 가능할 것으로 생각된다.

1.2 연구의 목적

본 연구의 목적은 다음과 같다.

- 매입형 영구자석 동기기의 약자속 운전 상황에 대하여 비선형 최적화 문제를 새롭게 정의한다. 정의한 최적화 문제에 대하여 비선형 최적화 알고리즘이 적용 가능한지 확인하고, 이를 적용해 매 샘플마다 제어기가 필요로 하는 최적해를 수식적으로 유도한다. 유도된 최적해는 실현 가능한 토크 지령에 대해 정확한 토크 제어가 가능하고, 전류 제한원 상에서는 최대 토크를 출력할 수 있다.

- 임베디드 시스템(Embedded system)을 위시한 실시간 제어기에서의 구현을 위해 연산이 간소화된 최적해를 유도한다. 슈어 보수 행렬(Schur complement matrix)을 활용하여 3×3 역행렬 연산을 2×2 역행렬 연산으로 변환해 연산 측면에서 간소화된 최적해를 유도한다. 간소화된 최적해의 유도 과정에서 근사는 필요하지 않으며, 본래의 최적해와 동치이다.

- 유도한 최적해를 기반으로 약자속 운전을 수행할 때 등토크 곡선 및 전류 제한원 상 운전에 대해서는 정상 상태 오차가 없는 운전이 가능함을 보인다. MTPV 운전 상황 시 정상 상태 오차가 발생하는데, 이러한 오차가 발생하는 이유에 대해 분석한다.

1.3 논문의 구성

본 논문은 다음과 같이 구성한다.

제 1장에서는 본 논문의 연구 배경과 목적에 대해서 논의한다.

제 2장에서는 영구자석 동기기의 모델링을 살펴보고, 약자속 운전 영역에 대해 분류한다. 약자속 운전에 관한 기존 연구를 소개하고 그 한계에 대해서 논의한다.

제 3장에서는 약자속 운전에 대한 비선형 최적화 문제를 정의하고, 비선형 최적화 알고리즘이 적용 가능한지 살펴본다.

제 4장에서는 비선형 최적화 알고리즘을 적용하여 매 샘플마다 제어기가 필요로 하는 최적해를 수식적으로 유도한다. 실시간 제어기에 구현할 수 있는 간소화된 최적해도 함께 제안한다. 유도된 최적해에 대해 등토크 곡선 상 및 전류 제한원 상 운전에서 정상상태 오차가 없는 원인과 MTPV 운전에서 정상상태 오차가 발생하는 원인에 대해서 분석한다.

제 5장에서는 시뮬레이션 및 실험을 통해 제안하는 약자속 토크 제어기의 성능과 이론적 분석을 검증한다. 이를 바탕으로 유한 속도 시스템에 대해서 참조표 및 제정수 추정 과정 없이 약자속 운전 토크 제어가 가능함을 보인다.

제 6장에서는 본 논문의 연구결과 및 향후 과제에 대하여 기술한다.

제 2장 약자속 운전 방법에 대한 연구

본 장에서는 영구자석 동기기의 모델링과 약자속 운전에 대해 정의하고, 기존의 약자속 운전 방법에 관한 연구를 살펴본다.

2.1절에서는 고정자 쇄교 자속 기반의 영구자석 동기기 모델링을 통하여 표면 부착형 영구자석 동기기 및 매입형 영구자석 동기기를 포괄적으로 서술한다. 전압 방정식 및 토크 출력에 대해 서술한다. 이러한 모델링으로부터 약자속 운전이 필요해지는 운전 조건에 대해 서술하고 약자속 운전 영역에 대해 분류한다.

2.2절에서는 기존의 약자속 운전 방법에 관한 연구를 분류하고 기본적인 동작 원리에 대해 서술한다. 모델 및 참조표 기반의 전향 보상 방식, 전압 및 전류 신호를 궤환 받는 방식으로 나누어 살펴보며 특히 제정수 오차에 대처할 수 있는 궤환 방식에 집중해 살펴본다.

2.1 약자속 운전의 정의

2.1.1 영구자석 동기기 모델링

영구자석 동기기의 전압 방정식은 회전자 기준 좌표계에서 아래와 같이 서술된다.

$$\mathbf{v}_{dqs}^{r} = \mathbf{R}_s \mathbf{i}_{dqs}^{r} + \frac{d\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r}}{dt} + \omega_r \mathbf{J} \boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r} \tag{2.1}$$

위 첨자 '*r*'은 회전자 기준 좌표계를 뜻하며 아래 첨자 '*dqs*'는 기준 *dq* 좌표계에서의 고정자 물리량을 의미한다. 회전자 기준 *dq* 좌표계에서의 고정자 물리량은 아래와 같이 벡터로 정의되며 굵은 글꼴로 표기된다.

$$\mathbf{x}_{dqs}^{r} = \begin{bmatrix} x_{ds}^{r} \\ x_{qs}^{r} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2 \tag{2.2}$$

식 (2.1)의 $\mathbf{i}_{dqs}^{r}$, $\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r}$, $\mathbf{R}_s$ 는 각각 고정자 전류, 고정자 쇄교 자속, 고정자 저항을 의미한다. 회전자 기준 좌표계 *dq* 전류 평면에서 교차 결합되는 저항 성분이 없고 상당 저항이 동일하다는 가정 하에 $\mathbf{R}_s$ 는 항등 행렬 $\mathbf{I}_2$와 스칼라 변수 R_s의 곱으로 정의할 수 있다.

$$\mathbf{R}_s \triangleq R_s \mathbf{I}_2 \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{2.3}$$

식 (2.1)의 **J**는 반시계 방향으로 90도 회전시키는 회전변환 행렬이며 아래와 같이 정의된다.

$$\mathbf{J} \triangleq \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} \tag{2.4}$$

영구자석 동기기의 고정자 쇄교 자속은 고정자 전류와 회전자 각에 대한 함수로 표현될 수 있다 [30]. 그러나 본 논문에서는 회전자 각에 의한 자속 변화량이 작다고 가정하여 자기 포화 및 교차 결합 효과만을 고려했다. 이 경우 $\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r}$ 은 $\mathbf{i}_{dqs}^{r}$ 에 대한 비선형 벡터 값 함수(Nonlinear

vector-valued function)로 표현된다.

$$\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}):\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \tag{2.5}$$

동기기가 출력하는 기계적 토크는 $\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r}$ 와 $\mathbf{i}_{dqs}^{r}$ 의 외적(Cross product)으로 정의될 수 있으며 아래와 같이 서술된다. p는 극 쌍(Pole-pair) 수를 의미한다.

$$T_e(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \frac{3}{2}p(\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r} \times \mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \frac{3}{2}p\left(\mathbf{J}\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r}\right)^{\top}\mathbf{i}_{dqs}^{r} \tag{2.6}$$

표면부착형 영구자석 동기기와 매입형 영구자석 동기기는 자속과 전류 관계에서 차이를 보이며, 회전자의 기계적인 형상 차이가 인덕턴스의 돌극성(Saliency) 형태로 나타난다. 이상적인 영구자석 동기기는 아래와 같이 표현되며, 표면부착형 영구자석 동기기는 d축 인덕턴스와 q축 인덕턴스가 같고 매입형 영구자석 동기기는 서로 다른 값을 갖는다.

$$\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r} = \mathbf{L}_s\mathbf{i}_{dqs}^{r} + \Lambda_f = \begin{bmatrix} L_{ds} & 0 \\ 0 & L_{qs} \end{bmatrix}\mathbf{i}_{dqs}^{r} + \begin{bmatrix} \Lambda_f \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.7}$$

$$\text{Ideal SPMSM: } L_{ds} = L_{qs} \tag{2.8}$$

$$\text{Ideal IPMSM: } L_{ds} \neq L_{qs} \tag{2.9}$$

식 (2.7)의 $\boldsymbol{\Lambda}_f$ 는 회전자 영구 자석에 의한 고정자 쇄교 자속을 의미한다.

본 논문에서는 전동기의 자기 포화 및 교차 결합 효과를 고려하였으며, 인덕턴스 형태를 특정하지 않았다. 따라서 식 (2.1), (2.5), (2.6)의 모델링에 기반한 약자속 운전 방법에 대해 다룬다.

2.1.2 약자속 운전 영역 분류 [12], [31], [32]

인버터(Inverter)로 구동되는 전동기 구동 시스템은 DC 전압의 한계로 전동기에 인가할 수 있는 전압의 크기가 제한된다. 고정자 기준 좌표계에서 2-레벨 인버터가 인가할 수 있는 전압은 6각형 형태로 제한되며, 인버터 선형 변조만을 가정할 경우 6각형의 내접원으로

제한된다. 이 경우 내접원의 크기는 $V_{dc}/\sqrt{3}$ 만큼의 반지름을 갖는다.

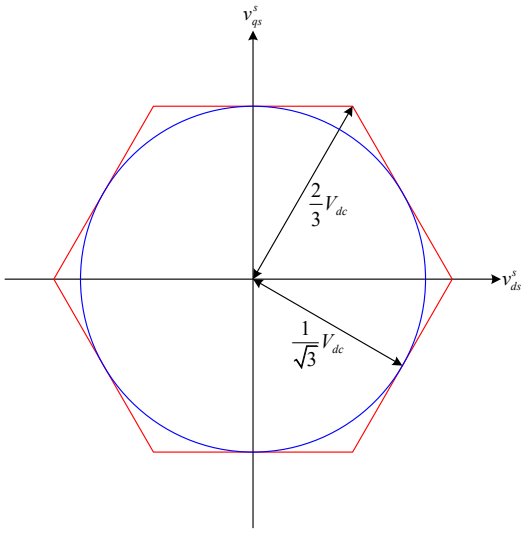


그림 2-1. 전동기에 인가되는 인버터 전압 제한

본 논문에서는 PWM 선형 변조 영역만을 가정하여 약자속 운전을 다루고 있으며 이 경우 전압 제한 조건은 아래와 같이 서술된다.

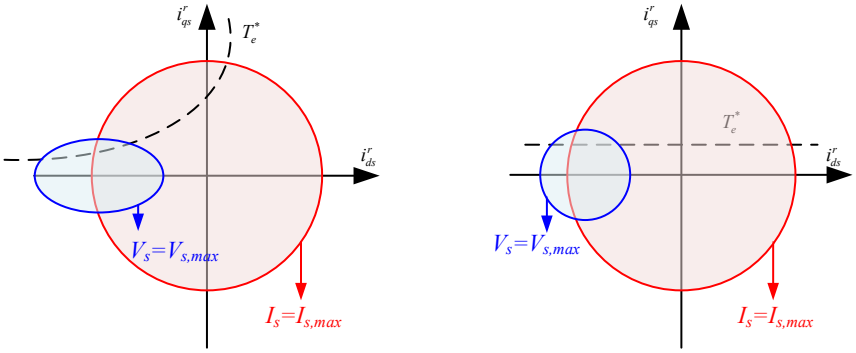
$$\mathbf{v}_{dqs}^{r\top}\mathbf{v}_{dqs}^{r} - V_{max}^2 \le 0 \tag{2.10}$$

인버터와 전동기에 흘릴 수 있는 전류의 크기는 방열 성능의 한계로 제한되며 아래와 같이 서술된다.

$$\mathbf{i}_{dqs}^{r\top}\mathbf{i}_{dqs}^{r} - I_{max}^2 \le 0 \tag{2.11}$$

약자속 운전의 쉬운 이해를 돕기 위해 이상적인 전동기를 가정하고 저항 성분에 의한 전압 강하가 충분히 작다고 가정하면 전압 제한 조건 (2.10)을 식 (2.12)와 같이 전류 평면 위에 도시할 수 있다. 이 경우 전압 제한은 돌극성 유무에 따라 전류 평면에서 타원 혹은 원으로 표현된다.

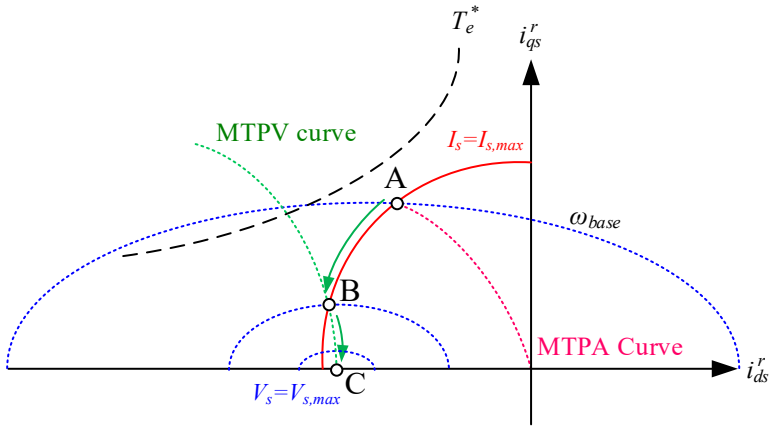
$$L_{ds}^2\left(\frac{\Lambda_f}{L_{ds}} + i_{ds}^r\right)^2 + L_{qs}^2 i_{qs}^{r\,2} - \left(\frac{V_{max}}{\omega_r}\right)^2 \le 0 \tag{2.12}$$



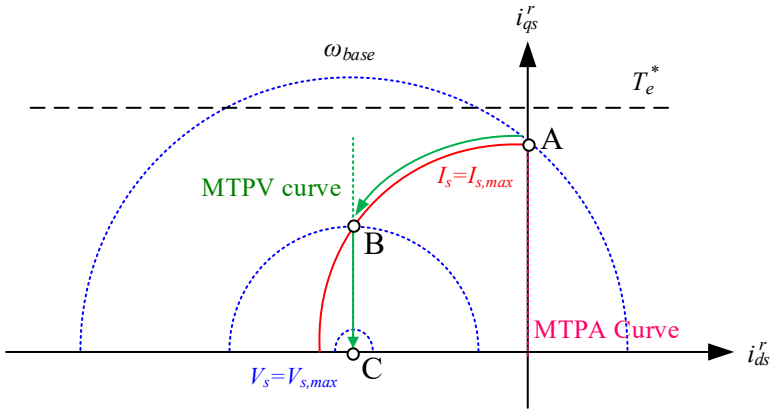
(가) 매입형 영구자석 동기기 (나) 표면부착형 영구자석 동기기

그림 2-2. 전류 평면에서의 전압 제한 및 전류 제한

전동기를 운전할 수 있는 영역은 그림 2-2의 전류 제한 영역 내부와 전압 제한 영역 내부 모두에 속하는 영역만이 해당된다. 저속의 경우에는 전압 제한 영역이 전류 제한 영역을 모두 포함하면서 전류 제한 영역 내부의 모든 운전점들이 실현 가능하지만, 속도가 증가하면 역기전력이 커짐에 따라 전압 제한 영역은 타원의 중심으로 점점 작아지게 된다. 따라서 고속 운전의 경우 전압 제한 조건을 필히 고려해 운전점을 정해야 안정적인 제어가 가능하다. 이런 의미에서 약자속 운전이란 운전 조건에 따라 실시간으로 전압 및 전류 제한 조건을 만족하는 운전점으로 이동하는 것을 의미하며, 물리적으로는 음의 d축 전류를 활용해 고정자 쇄교 자속의 크기를 줄이고 결과적으로 역기전력을 줄이는 형태의 운전을 의미한다. 만일 전류 제한 원이 전압 타원의 중심을 포함하면 이론적인 최대 속도가 전기적인 요소로 제한되지 않으므로 무한(Infinite) 속도 시스템이라 표현한다. 만일 포함하지 않으면 유한(Finite) 속도 시스템이라 표현한다 [32].



(가) 매입형 영구자석 동기기

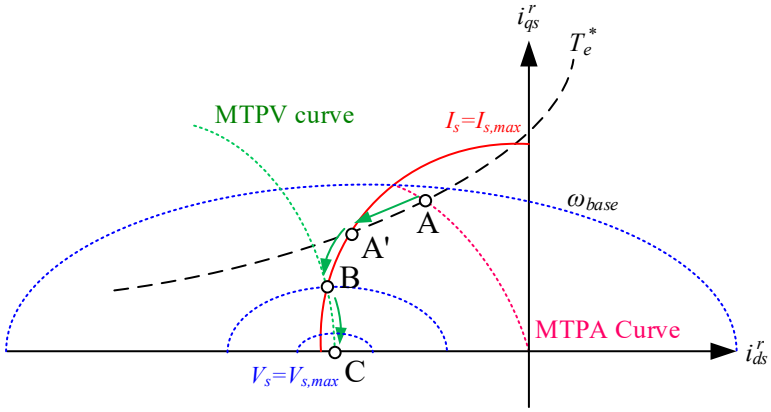


(나) 표면부착형 영구자석 동기기

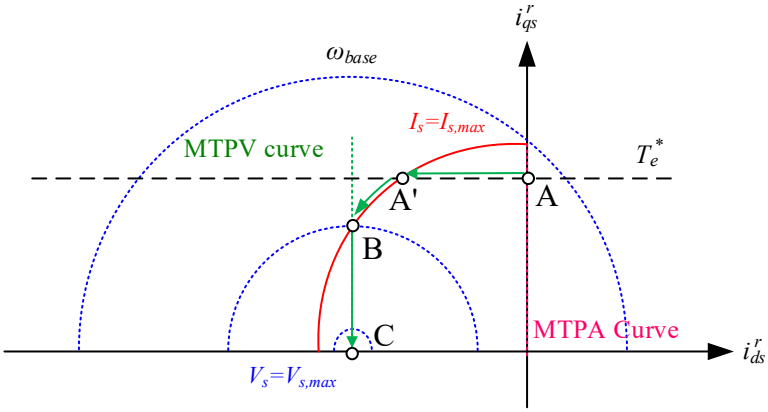
그림 2-3. 실현 불가능한 토크 지령에 대한 약자속 운전 영역

그림 2-3은 무한 속도 시스템에 있어서 실현 불가능한 토크 지령이 주어졌을 때의 약자속 운전 영역을 개념적으로 도시한 것이다. 초록색 화살표는 전동기 회전 속도가 단조 증가하고 있을 때의 전류 운전점 궤적을 그린 것이다. 빨간 실선은 전류 제한 원을 의미하고 그림 (가)의 파란 파선 타원과 그림 (나)의 파란 파선 원은 전압 제한 곡선을 의미한다. 최대 토크 운전점에서 전류 제한 원과 전압 제한 타원이 겹칠 때의 운전 속도를 기저 속도(Base speed, ω_{base})라고 정의한다. 최외곽 전압 제한 원은 기저 속도에서의 전압 제한 타원을 도시한 것이다. 기저 속도보다 속도가 올라갈 경우 약자속 운전 영역에 진입하게 된다. 그림

2-3의 MTPA는 단위 전류당 최대 토크(Maximum torque per amepere, MTPA) 운전점을 뜻하고 MTPV는 단위 전압당 최대 토크(Maximum torque per voltage, MTPV) 운전점을 의미한다. 두 운전점의 수학적 정의는 부록 E에 수록하였다. 그림 2-3과 같이 토크 지령이 실현 불가능한 경우 무한 속도 시스템의 약자속 운전은 전류 제한원 상에서의 운전(A→B)과 MTPV 곡선 상에서의 운전(B→C)으로만 이루어진다.



(가) 매입형 영구자석 동기기



(나) 표면부착형 영구자석 동기기

그림 2-4. 실현 가능한 토크지령에 대한 약자속 운전 영역

그림 2-4는 무한 속도 시스템에 있어서 실현 가능한 토크 지령이 주어졌을 때의 약자속 운전 영역을 개념적으로 도시한 것이다. 그림 2-3과 대비하여 등토크 곡선을 따라 움직이는 운전 상황(A→A')이

추가되었고, 약자속 운전 영역에 진입하는 속도는 기저속도보다 높아졌다.

약자속 운전 유형으로 볼 때 그림 2-3의 약자속 운전은 그림 2-4의 부분집합으로 볼 수 있다. 또한 유한 속도 시스템의 약자속 운전은 MTPV 운전이 제외된 약자속 운전으로 이해할 수 있으므로 무한 속도 시스템 약자속 운전의 부분집합으로 볼 수 있다. 따라서 본 논문에서는 그림 2-4의 운전을 기준으로 아래 표와 같이 약자속 운전 영역을 분류한다.

표 2-1. 약자속 운전 영역 분류

운전 궤적	운전 영역
A→A'	등토크 곡선 상 운전
A'→B	전류 제한 원 상 운전
B→C	MTPV 운전

약자속 운전 영역에 진입하는 경우 인버터 출력 전압의 크기가 고정된다. 이는 항상 전압 제한 타원의 경계선 상에서 운전되고 있음을 의미하며, 부등식 (2.10)에서 등호가 만족되고 있음을 시사한다.

본 절에서는 이상적인 전동기 모델을 통해 약자속 운전을 정의하고 운전 영역을 분류하였다. 이러한 이해를 바탕으로 본 논문에서는 자기 포화 및 교차 결합 효과가 고려된 전동기의 약자속 운전을 다룬다.

2.2 기존의 약자속 운전 방법에 대한 연구

약자속 운전 방법은 크게 전동기 모델 및 참조표 기반의 전향 보상(Feedforward) 방식과 전압 및 전류 신호를 되먹임 받는 궤환(Feedback) 방식으로 나눌 수 있다. 전향 보상 방식의 경우 참고 논문 [6], [7]에서 이상적인 전동기 모델에 대한 해석적인 방법으로 최적 운전점을 도출하였다. 그러나 실제 전동기는 자기 포화 및 교차 결합 효과가 존재하기 때문에 해석적으로 구한 최적 운전점은 실제 최적 운전점과 오차가 있다. 전동기의 비이상적인 효과를 고려하기 위해 참조표를

활용한 약자속 운전 방법들이 제안되어 왔다 [8]–[11]. 참고 문헌 [8]에서는 자속 포화를 고려한 전동기 모델로부터 해석적인 해를 유도하였다. 사전 시험을 통해 구한 운전점 별 인덕턴스를 구하고 이를 참조표로 구성해 약자속 운전 시 사용한다. 참고 문헌 [9]–[11]에서는 다양한 운전 조건에서의 사전 시험을 통해 약자속 최적 운전점들을 구하고 이를 참조표로 저장해 사용한다. 참조표는 토크 지령 및 운전 속도, 전압 정보에 따라 전류 지령 혹은 전압 지령 각을 출력한다. 참조표 기반의 약자속 운전은 전동기의 비이상적인 특성을 반영해 최적 운전점에서 동작할 수 있으나, 제작 공차와 온도 변화에 따른 영구자석의 자속 밀도 변화에 대처하기 어렵다. 이러한 문제들을 해결하고자 인버터 출력 전압 및 전동기 전류 신호를 궤환 받아 사용하는 약자속 운전 기법들이 연구되어 왔다 [12]–[29]. 본 절에서는 궤환 방식의 약자속 운전 기법들에 대해 살펴보며, 그림 2-5는 이러한 운전 기법에 관한 연구들의 흐름도를 보여준다.

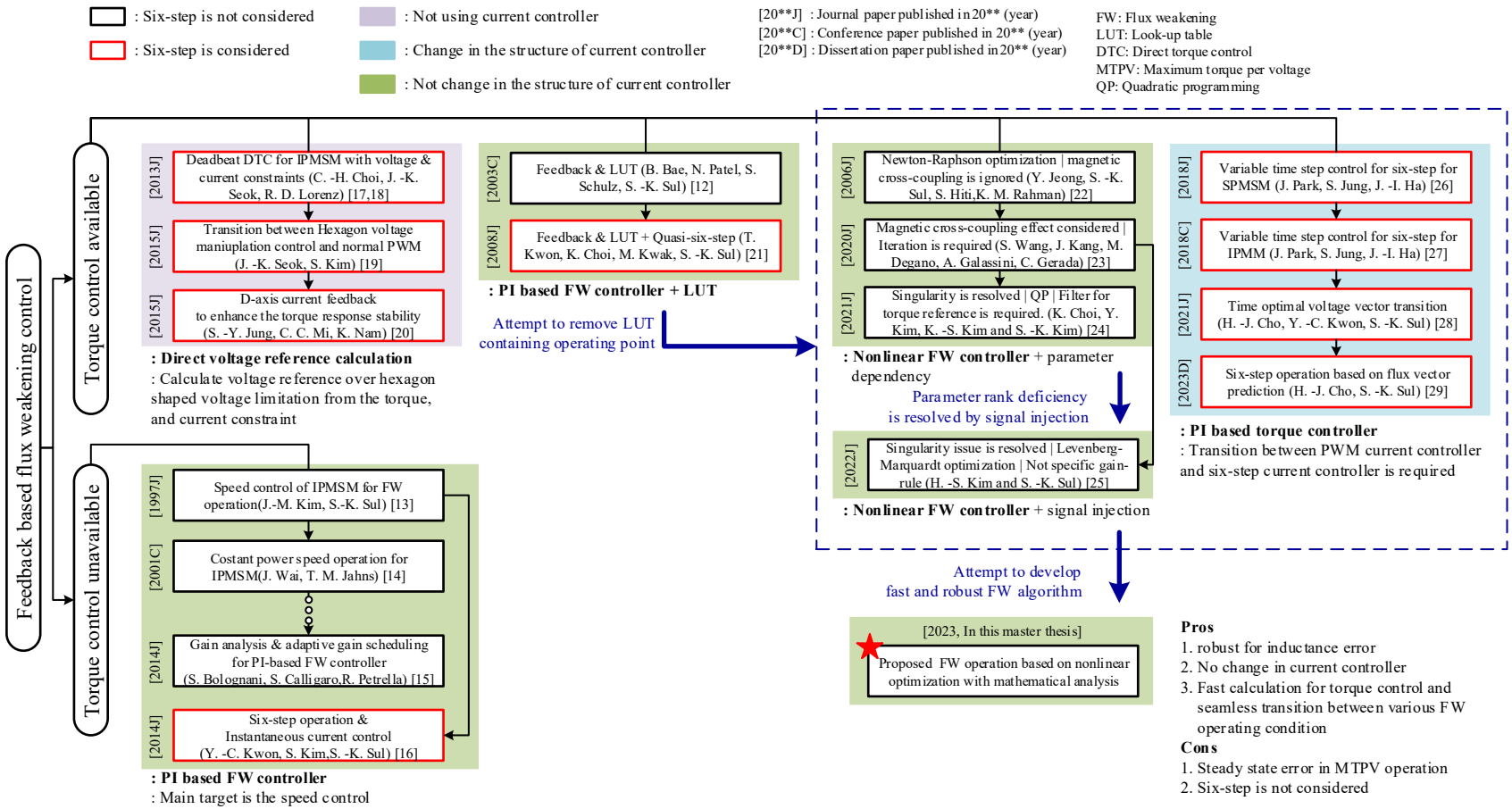
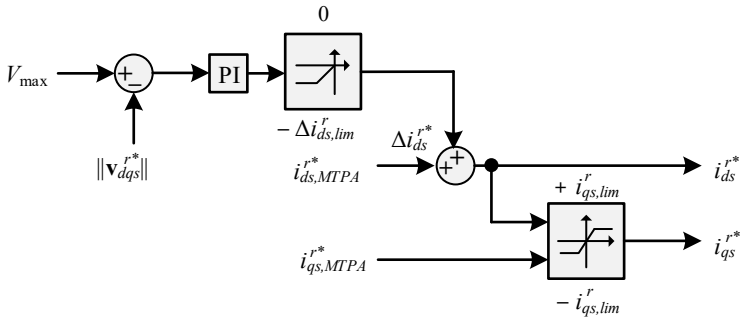


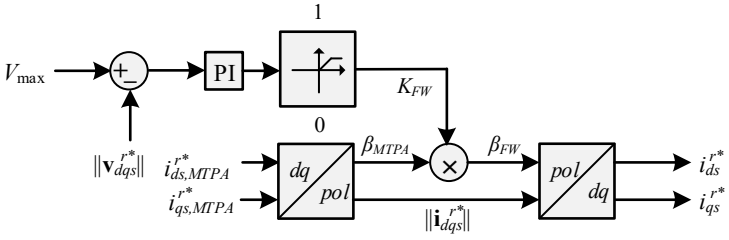
그림 2-5. 궤환 방식 약자속 제어기 연구의 흐름도

2.2.1 선형 제어기 기반 방식 [13]–[16]

인버터 출력 전압 지령을 궤환 받아 비례 적분(Proportional-Integral, PI) 제어기를 통해 전류 지령을 수정하는 형태의 약자속 제어기가 제안되었다 [13]–[15]. 출력 전압의 크기가 전압 제한 크기보다 클 경우 d축 전류를 음의 방향으로 밀거나 [13] 전류 각을 회전시키는 방식 [14]을 통해 약자속 운전 효과를 만든다. 아래 그림은 이러한 선형 제어기 기반의 약자속 제어기 구성도를 보여준다.



(가) 참고 문헌 [13]의 약자속 제어기



(나) 참고 문헌 [14]의 약자속 제어기

그림 2-6. PI 기반 약자속 제어기

그림 2-6 (가)의 $\Delta i^{r}_{ds,lim}$ 은 일반적으로 현재 운전점과 전류 제한원 사이의 d축 거리로 결정되며 d축 전류 지령이 정해지면 q축 전류 지령은 전류 제한원을 넘지 않도록 $\pm i^{r}_{qs,lim}$ 으로 제한된다. 그림 (나)의 β_{MTPA} 각은 dq 전류 평면상 음의 d축으로부터 MTPA 전류 운전점이 시계 방향으로 벌어진 각을 의미한다. K_{FW} 값을 이용해 β각을 줄이면 운전점은 전류 크기를 유지한 채 음의 d축에 가깝게 기울게 된다. 이를 통해 약자속

운전 효과를 일으킬 수 있다. 참고 문헌 [15]에서는 위와 같은 PI 기반 약자속 제어기의 이득을 정하는 방법에 대해 분석하였으며, 가변 이득을 통해 인버터 출력 전압 크기 제어에 대해 일정한 대역폭을 유지할 수 있음을 보였다. 그림 2-6의 전압 크기를 비교하는 부분을 보면 PI 기반 약자속 제어기는 PWM 선형 변조 구간에서만 동작이 가능하다. 참고 문헌 [16]은 참고 문헌 [13]의 약자속 제어를 식스-스텝 영역까지 확장시키고 순시적인 전류 제어를 가능하게 했다.

참고 문헌 [13]의 약자속 제어기는 d축 전류를 우선으로 전류 궤적을 움직이므로 표면부착형 영구자석 동기기에 대해서는 토크 제어가 가능할 수 있다. 그러나 매입형 영구자석 동기기까지 고려한다면 선형 제어기 기반의 약자속 제어기는 등토크 곡선을 따라 이동할 수 없으므로 약자속 운전 영역에서의 정확한 토크 제어는 어렵다. 따라서 이 경우 주로 상위 제어기인 속도 제어기가 구성되어 토크 명령을 수정하게 된다. 이러한 약자속 제어기는 일정 속도 제어에 쉽게 적용될 수 있으나, 토크를 직접 제어해야할 경우 토크 오차를 줄이기는 어렵다.

2.2.2 전압 지령 직접 계산 방식 [17]–[20]

매 샘플 시점마다 전압 평면에서 토크 지령 곡선과 전압 제한 6각형과의 교점을 찾아 전류 제어기 없이 전압 지령을 출력하는 구조이다. 따라서 약자속 운전시 식스-스텝 운전까지 확장 가능하다.

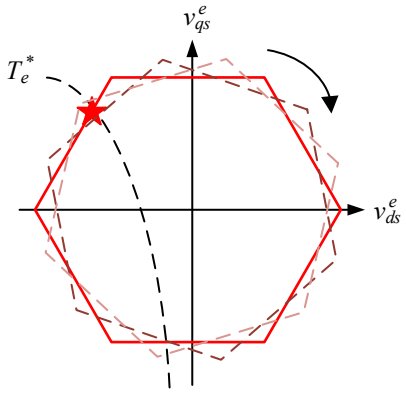


그림 2-7. 전압 평면에서 전압 제한 조건과 토크 지령 곡선

그림 2-7은 동기좌표계 전압 평면에서 토크 지령에 대한 토크 곡선과 전압 제한을 개념적으로 도시한 것이다. 회전자가 반시계 방향으로 회전할 때 동기 좌표계에서 전압 육각형은 시계 방향으로 회전하는데, 이를 파선으로 도시하였다. 저항 성분에 의한 전압 강하가 작고 이상적인 전동기라는 가정하에 전압 평면에서 토크 곡선은 아래와 같이 정의된다 [20].

$$v_{qs}^{e} = -\frac{2T_e}{3p}\frac{\omega_e^2 L_{ds}L_{qs}}{L_{ds}-L_{qs}}\frac{1}{v_{ds}^{e}} - \omega_e \Lambda_f \frac{L_{qs}}{L_{ds}-L_{qs}} \tag{2.13}$$

참고 문헌 [17], [18]은 전류 제한을 고려해 토크 지령을 만족하는 운전점을 찾았으며, 참고 문헌 [19], [20]에서는 전류 제한이 고려되지 않았다. 참고 문헌 [20]은 토크 곡선 및 전압 제한 6각형과의 교점과 더불어 동기 좌표계 기준 d축 전류 응답을 궤환 받아 전압 각을 제어하는 방식을 제안하였으며, 이를 통해 토크 리플을 저감하였다.

그러나 위와 같은 방식은 전동기 제정수에 민감하다. 자기 포화 및 교차 결합에 의해 전동기 인덕턴스가 변동하면 토크 곡선은 물론 전압 평면에서 바라보는 전류 제한 영역이 변동하게 된다. 따라서 위와 같은 전압 지령 직접 계산 방식을 구현하기 위해서는 실시간 제정수 추정이 필요하다 [18].

2.2.3 선형 제어기 및 참조표 기반 방식 [12], [21]

선형 제어기 및 참조표 기반 방식은, 다양한 운전 조건에서의 사전 시험을 통해 최적 운전점에 대한 참조표를 작성하고 전압 신호를 궤환 받아 실제 최적 운전점과 참조표의 운전점 오차를 보상하는 방식이다. 참조표는 토크 지령과 자속 크기로부터 회전자 기준 좌표계 *dq* 전류 지령을 출력하도록 구성된다. 직류단 전압과 회전 속도로부터 최대 자속 크기를 구하고 이로부터 토크 지령 제한기를 구성한다. 주어진 토크 지령은 토크 지령 제한기를 거쳐 참조표 입력으로 들어간다. 자속 지령은 PI 제어기를 거친 인버터 출력 전압 신호로부터 구성되며, 참조표 입력으로 들어간다. 아래 그림은 참고 문헌 [12]의 약자속 제어기 구조도이다.

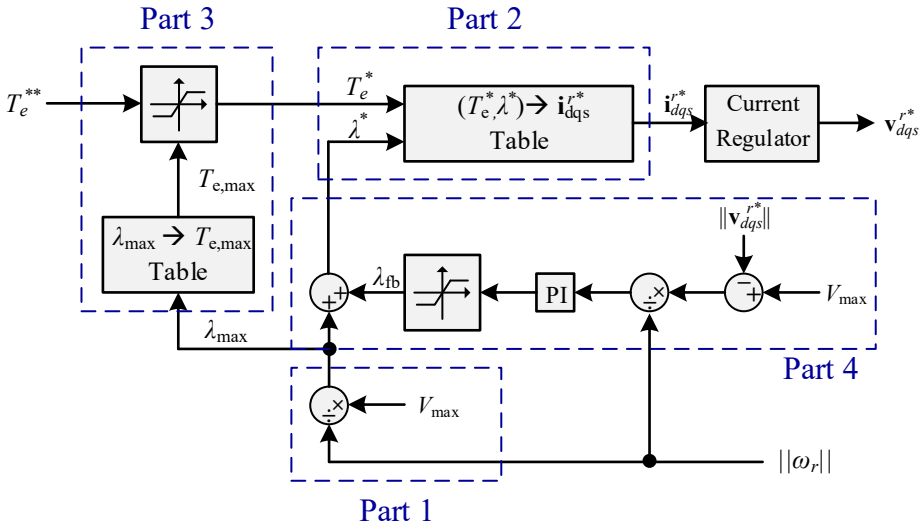


그림 2-8. 참고 문헌 [12]의 약자속 제어기 구조도

그림 2-8의 V_{max}는 PWM 선형 변조를 가정하여 $V_{dc}/\sqrt{3}$ 로 정해진다. 참고 문헌 [21]는 전압을 궤환 받는 방식을 수정해 [12]의 방법을 통해서도 식스-스텝과 유사한 전압 이용률을 확보했다.

선형 제어기 및 참조표 기반 방식은 표 2-1의 모든 약자속 운전 영역에서의 운전이 가능하며 참조표 오차는 전압 신호 궤환을 통해

보정될 수 있다. 그러나 이와 같은 방식은 다양한 운전 조건에서의 사전 시험을 필요로 하며 참조표 작성시 주의를 기울여야 한다.

2.2.4 전압 및 자속 각 제어 기반 전류 제어 방식 [26]–[29]

약자속 운전시 전압 이용률을 최대로 확보하기 위해 식스-스텝 운전이 필요하다. 따라서 식스-스텝을 유지하면서 전류 제어를 수행하는 연구가 진행되었다 [16]. 회전 주파수가 샘플링 주파수에 근접해지는 초고속 운전 상황에서 디지털 제어는 토크 리플을 야기하는데, 이러한 문제가 발생하는 원인을 규명하고 해결하고자 하는 연구 역시 진행되었다 [26]–[29].

참고 문헌 [26]에서는 표면부착형 영구자석 동기기에서 회전자 기준 좌표계 q축 전류를 전압 각으로 제어하는 방법을 제안하였으며, 샘플링 주기를 가변해 전압 인가 시간을 제어하는 방식을 제안하였다. 이와 같은 방식은 식스-스텝을 유지하면서 약자속 운전 시 등토크 곡선 상 운전이 가능하고, 전류 제한 원 상에서의 운전이 가능하다. 참고 문헌 [27]에서는 같은 방식의 식스-스텝 운전을 매입형 영구자석 동기기로 확장하였으나, 토크 지령이 더 이상 q축 전류 지령에만 비례하지는 않기 때문에 토크를 전압 각으로 제어하는 방법이 제안되었다. 제안된 방법은 등토크 곡선 상에서 운전이 가능하나 토크 제한기가 적용되지 않는 이상 전류 제한 원 상에서의 운전은 어렵다.

참고 문헌 [28]에서는 고정자 쇄교 자속의 동적 특성을 고려해 식스-스텝 운전 상황에서 시간-최적 전압 인가 방법을 제안하였으며, 참고 문헌 [29]에서는 고정자 자속 기준 제어(Stator flux oriented control, SFOC)를 도입해 식스-스텝 상황에서 토크 제어를 수행하는 방법이 제안되었다. SFOC 상에서의 q축 전류를 자속각을 통해 제어함으로써 등토크 곡선 상의 운전과 전류 제한원 상에서의 운전이 가능하다.

전압 및 자속 각 제어 기반의 전류 제어 방식은 식스-스텝을 달성할 수 있으면서 전류를 순시 제어할 수 있으므로 전류 제한 조건을 만족할

수 있다. 그러나 이와 같은 방식은 일반적인 전류 제어기와 과변조 결합 방식과 달리 식스-스텝만을 위한 전류 제어기가 필요하며, 제어기 간의 절환이 필요하다.

2.2.5 최적화 기반 전류 지령 계산 방식 [22]–[25]

표 2-1의 약자속 운전들은 아래와 같이 전압 제한 타원, 등토크 곡선, 전류 제한 원, MTPV 운전 곡선들의 교점으로 표현될 수 있다.

표 2-2. 약자속 운전 영역 별 교점 분류

운전 영역	운전 교점
등토크 곡선 상 운전	등토크 곡선 및 전압 타원 교점
전류 제한 원 상 운전	전류 제한 원 및 전압 타원 교점
MTPV 운전	MTPV 운전 곡선 및 전압 타원 교점

약자속 운전 영역 별 운전점을 두 곡선 간의 교점으로 이해하고 비선형 연립 방정식의 해를 구하는 알고리즘을 적용해 실시간으로 최적 운전점 지령을 산출하는 연구가 진행된 바 있다 [22], [23], [25].

두 비선형 연립 방정식의 해는 아래와 같은 최적화 문제를 풀어 구할 수 있으며, 경사 하강법(Gradient descent method), 뉴턴-랩슨 방법(Newton-raphson method), 르벤버그-마쿼트 방법(Levenberg-marquardt method) 등 다양한 수치해석적 알고리즘이 이에 적용될 수 있다.

$$\min_{\mathbf{i}_{dqs}^{r}} f_o(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) = f_m^2(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) + f_v^2(\mathbf{i}_{dqs}^{r})$$

$$\text{where } f_m(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \begin{cases} \mathbf{i}_{dqs}^{r\top}\mathbf{i}_{dqs}^{r} - I_{max}^2 & : \text{전류 제한원 상 운전} \\ (T_e(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) - T_e^*)^2 & : \text{등토크 곡선 상 운전}, \\ f_{MTPV}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) & : \text{MTPV 곡선 상 운전} \end{cases} \tag{2.14}$$

$$f_v(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \mathbf{v}_{dqs}^{r\top}\mathbf{v}_{dqs}^{r} - V_{max}^2 .$$

문제 (2.14)의 $f_m(\cdot)$은 약자속 운전 영역별 판별식이다. 비용 함수 $f_o(\cdot)$는 판별식 $f_m(\cdot)$과 $f_v(\cdot)$ 가 모두 0 값을 가져야 최소값 0 값을 갖게 된다. 이는 표 2-2에 나타난 바와 같이 각 운전 영역별로 전압 타원과의 교점 찾기를 의미한다. $f_{MTPV}(\cdot)$는 MTPV 운전점 여부를 판별하는 함수로서 그 유도 과정을 부록 E에 수록하였다.

참고 문헌 [22]은 뉴턴-랩슨 방법을 이용하여 문제 (2.14)를 풀었으며, 등토크 곡선과 전압 타원과의 교점 영역만이 고려되었다. 인덕턴스 교차

결합 효과는 무시되었고, 운전점별 자속 값을 참조표 형태로 저장하여 사용하였다.

참고 문헌 [23] 또한 뉴턴-랩슨 방법을 이용해 문제 (2.14)를 풀었으며, 모든 약자속 운전 영역이 고려되었다. 자기 포화 효과 및 교차 결합 효과를 모두 고려하기 위해 운전점별 인덕턴스 참조표가 사용되었다. 참고 문헌 [22]과 달리 매 샘플마다 여러 번의 반복 계산을 통해 전류 지령을 갱신하는데, 이때 반복 횟수를 정하는 오차 상한 값을 실험적으로 정해야 한다.

참고 문헌 [25]에서는 뉴턴-랩슨 방법을 이용할 때 자기 포화가 심한 영역에서 불안정해지는 현상을 해결하고자 르벤버그 마쿼트 방법을 사용해 문제 (2.14)를 풀었다. 또한 고주파 전압 신호 주입을 통해 순시적으로 운전점 별 증분 인덕턴스 성분을 추출하는 방법을 제안하였고, 이를 통해 인덕턴스 참조표 없이 약자속 운전을 수행할 수 있었다. 그러나 르벤버그 마쿼트 방법을 사용하기 위해서는 감쇄 계수(Damping coefficient, μ_k)를 실험적으로 정해주어야 하며, 약자속 운전 시에도 고주파 전압 신호 주입을 해야 하므로 전압 이용률이 떨어진다.

참고 문헌 [24]는 [22], [23], [25]와 달리 매 샘플 시점마다 현재의 운전점에서의 출력 토크 곡선을 전류에 대해 선형화한다. 이후 전류 제한 원 및 전압 타원 내부에서 선형화된 토크 곡선 운전점 중 전류를 최소화하는 운전점을 찾았으며, 아래와 같은 문제를 풀었다.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\Delta \mathbf{i}^r_{dqs}} (\mathbf{i}^r_{dqs} + \Delta \mathbf{i}^r_{dqs})^\top (\mathbf{i}^r_{dqs} + \Delta \mathbf{i}^r_{dqs}) \\
&\text{subject to} \\
&T_e^l(\mathbf{i}^r_{dqs}, \Delta \mathbf{i}^r_{dqs}) = T^*_{e,LPF}, \\
&\mathbf{i}^r_{dqs}{}^\top \mathbf{i}^r_{dqs} - I^2_{s,max} \le 0, \\
&\mathbf{v}^r_{dqs}{}^\top \mathbf{v}^r_{dqs} - V^2_{s,max} \le 0 .
\end{aligned}
\tag{2.15}
$$

문제 (2.15)의 $T_e^l(\cdot)$ 은 전류에 대해 선형화된 토크 함수를 뜻하며, $T^*_{e,LPF}$ 는 선형화 과정에서 발생하는 오차를 줄이기 위해 토크 지령에 저역 통과 필터를 적용한 값을 의미한다. 저역 통과 필터의 대역폭은

운전점 수렴 속도와 관계가 있으며, 실험을 통해 정하는 조절 인자(Tunning factor)이다. 전류 제한원 상에서의 운전과 MTPV 운전 상황에서는 토크 지령이 실현 불가능해질 수 있으므로 토크 지령 제한기가 필요하다. 정적(Static) 인덕턴스 기반의 전동기 모델을 가정하고 지령을 계산하기 때문에, 자기 포화 및 교차 결합 현상이 발생하면 계산되는 지령에 정상 상태 오차가 발생한다. 이에 대처하기 위해서는 운전점별 정적 인덕턴스 참조표 혹은 인덕턴스 추정이 필요하다.

비선형 연립 방정식 풀이 기반 [22], [23], [25] 및 선형 근사를 통한 2차 계획법 기반 [24] 약자속 제어기는 전압 및 전류 제한 조건을 명시적으로 다루고 있다. 각 운전 영역별로 판별식을 통한 명확한 모드 절환이 가능하기 때문에, 식스-스텝 운전을 제외한다면 다양한 운전 조건에서 토크 제어가 가능한 실시간 약자속 제어기로 유용하다. 또한 전류 지령을 계산하기 때문에 전류 제어기의 절환 과정이 없으며 이로 인해 기존의 전류 제어 기반 전동기 구동 시스템에 쉽게 적용 가능하다.

그러나 제정수 의존성이 심하고 제정수에 오차가 발생하면 계산하는 전류 지령에 정상 상태 오차가 발생한다. 따라서 참조표 없이 구동하기 위해서는 고주파 신호 주입 혹은 제정수 추정이 반드시 필요하다. 또한 안정적인 동작을 위해 감쇄 계수 [25], 반복 횟수 [23], 토크 지령 저역 통과 필터 [24] 등이 존재하지만 이는 실험적으로 구하는 조절 인자이기 때문에 사전 시험이 필요하다.

본 논문에서는 약자속 운전에 대한 최적화 문제를 새로 정의하고 이에 대한 매 샘플별 해석적 해를 유도함으로써 아래와 같은 강점을 가진 약자속 제어기를 제안하고자 한다.

1) 인덕턴스 오차에 강인하며 참조표 및 제정수 추정 과정이 없다.
2) 사전 시험을 통한 조절 인자가 없다.
3) 전류 제어기 구조를 유지한다.
4) 빠른 토크 제어 동특성을 확보한다.

제 3장 약자속 운전 영역에서의 토크 제어를 위한 최적화

본 장에서는 수학적 최적화 기법을 소개하고 이를 이용하여 약자속 운전 영역에서의 토크 제어를 위한 최적화 문제를 정의한다.

3.1절에서는 수학적 최적화 기법에서 사용되는 용어의 정의, 라그랑지안 함수(Lagrangian function)와 라그랑지안 쌍대 함수(Lagrangian dual function)의 정의를 소개한다. 쌍대성(Duality) 및 쌍대 문제(Dual problem)에 대해 설명하고 최적화 문제의 해가 만족하는 최적성 조건에 대해 기술한다. 최적성 조건은 볼록 최적화(Convex optimization)에 대해 필요충분 조건이 성립하는데, 이를 바탕으로 2차 계획법(Quadratic programming, QP) 문제가 해석적 해를 가질 수 있음을 설명한다. 비선형 최적화 문제를 해결하기 위해 2차 계획법 문제를 반복적으로 푸는 순차 2차 계획법(Sequential Quadratic Programming, SQP)에 대해 소개한다. SQP로 찾는 해가 실제 최적해로 수렴하기 위한 수렴성 조건에 대해 서술한다.

3.2절에서는 3.1절에서 기술한 내용을 바탕으로 약자속 운전 영역에서의 토크 제어를 위한 비선형 최적화 문제를 정의한다. 정의한 문제가 2장에서 설명한 약자속 운전 상황을 모두 포함한다는 것을 밝힌다. FEA로 추출한 전동기 자속맵을 이용하여 정의한 문제가 강한 쌍대성(Strong duality)을 나타냄을 보이고 SQP 방법으로 최적해에 도달할 수 있음을 설명한다.

3.1 최적화 기법 및 최적성 조건 [33]

3.1.1 수학적 최적화 및 라그랑지안 함수, 쌍대 함수의 정의

$$\begin{aligned} &\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f_o(\mathbf{x}) \\ &\text{subject to } g_i(\mathbf{x}) \le 0, i = 1,\cdots,m \\ &\qquad\qquad h_j(\mathbf{x}) = 0, j = 1,\cdots,p. \end{aligned} \tag{3.1}$$

수학적 최적화는 위와 같이 기술되며 비용 함수(Cost function) $f_o(\cdot)$, 부등호 제약 조건 함수(Inequality constraint function) $g_i(\cdot)$, 등호 제약 조건 함수(Equality constraint function) $h_j(\cdot)$, 최적화 변수(Optimization variable) $\mathbf{x}$로 구성된다. 최적화는 비용 함수를 최소화시킴과 동시에 제약 조건을 만족시키는 n-차원 실수 변수를 찾는 것을 목표로 하며 이를 만족하는 변수를 최적해(Optimal solution)라고 표현한다. 최적해에서 갖게 되는 비용 함수 값을 최적 비용(Optimal cost)이라 부른다. 임의의 한 점에서 모든 제약 조건을 만족하면 이를 실현 가능하다고 표현하며, 이러한 점들을 모아 놓은 집합을 실현 가능한 집합(Feasible set)이라고 정의한다. 만일 최적해가 부등호 제약 조건에 대해 아래와 같은 등호를 성립시키면, 해당 부등호 제약 조건을 활성(Active) 제약 조건이라고 정의한다. 그렇지 않은 제약 조건들을 비활성(Inactive) 제약 조건이라고 정의한다.

$$\begin{aligned} \text{Active constraint: } g_i(\mathbf{x}_{opt}) &= 0 \\ \text{Inactive constraint: } g_j(\mathbf{x}_{opt}) &< 0 \end{aligned} \tag{3.2}$$

목적함수와 제약 조건 함수들이 모두 선형이면 선형 최적화(Linear optimization)라고 정의하며, 이 중 하나라도 선형이 아니면 비선형 최적화(Nonlinear optimization)라고 정의한다. 본 논문에서 정의하는 비용 함수, 제약 조건 함수는 모두 미분 가능한 함수라고 가정한다.

라그랑지안 함수는 비용 함수와 제약 조건 함수들의 선형 결합으로 이루어진 함수로 아래와 같이 구성된다. 이때 선형 결합 계수를 여유

변수(Slack variable)라고 부른다.

$$\mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\rho},\mathbf{v}) = f_o(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^\top \mathbf{h}(\mathbf{x})$$
$$\text{where } \boldsymbol{\rho} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^p, \mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \mathbf{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_p \end{bmatrix} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p . \tag{3.3}$$

원 문제 (3.1)은 제약 조건이 만족되지 않을 시 무한대의 비용을 부과하는 문제로 이해할 수 있다. 이러한 비용 함수는 (3.4)와 같이 여유 변수에 대해서 라그랑지안 함수를 최대화하여 정의할 수 있다. 이를 기반으로, 주어진 최적화 문제 (3.1)을 아래의 문제 (3.5)와 같이 쓸 수 있다.

$$\gamma(\mathbf{x}) = \sup_{\boldsymbol{\rho}\geq\mathbf{0},\mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\rho},\mathbf{v}) = \begin{cases} f_o(\mathbf{x}) & \mathbf{f}(\mathbf{x}) \leq \mathbf{0} \,\&\, \mathbf{h}(\mathbf{x}) = 0 \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3.4}$$

$$\inf_{\mathbf{x}} \gamma(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{x}} \sup_{\boldsymbol{\rho}\geq\mathbf{0},\mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\rho},\mathbf{v}) . \tag{3.5}$$

위 식의 $\sup_{\boldsymbol{\rho}\geq\mathbf{0},\mathbf{v}}$ 연산자는 벡터 변수 ν와 각 요소가 0보다 큰 벡터 변수 $\boldsymbol{\rho}$에 대한 상한을 의미한다. 따라서 $\gamma(\cdot)$ 함수는 $\mathbf{x}$가 제약 조건을 만족하지 않을 때 무한대의 값을 갖고, 제약 조건을 만족하면 비용 함수 값을 갖는다. $\inf_{\mathbf{x}}$ 연산자는 벡터 변수 $\mathbf{x}$에 대한 하한을 의미한다.

한편, 최적화 변수에 대하여 라그랑지안 함수를 최소화한 함수를 라그랑지안 쌍대 함수라고 정의하며, 아래와 같이 표기한다.

$$d(\boldsymbol{\rho},\mathbf{v}) = \inf_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\rho},\mathbf{v}) . \tag{3.6}$$

라그랑지안 함수는 제약 조건 함수에 곱해진 여유 변수에 대하여 어파인 함수(Affine function)이다. 어파인 함수는 절편이 0이 아닌 선형 함수를 뜻한다. 라그랑지안 쌍대 함수는 이러한 어파인 함수들의 하한값들을 가져온 함수이기 때문에 비용 함수와 제약 조건 함수의 형태와 상관 없이 위로 볼록한 함수가 된다.

3.1.2 쌍대 문제 및 쌍대성, 최적성 조건의 정의

쌍대 문제는 라그랑지안 쌍대 함수를 목적 함수로 갖고 여유 변수를 최적화 변수로 갖는 최적화 문제를 의미하며, 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{gathered}\sup_{\boldsymbol{\rho},\mathbf{v}} d(\boldsymbol{\rho},\mathbf{v}) = \sup_{\boldsymbol{\rho},\mathbf{v}} \inf_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\rho},\mathbf{v}) \\ \text{subject to } \boldsymbol{\rho} \geq \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{3.7}$$

쌍대 문제 (3.7)을 보면 원 문제 (3.5)에서 inf, sup 연산자의 연산 순서를 바꾼 문제로 이해할 수 있다. 최대–최소 부등식(Max–min inequality)에 따라 항상 아래와 같은 부등식이 성립한다.

$$\sup_{\boldsymbol{\rho}\geq\mathbf{0},\mathbf{v}} \inf_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\rho},\mathbf{v}) \leq \inf_{\mathbf{x}} \sup_{\boldsymbol{\rho}\geq\mathbf{0},\mathbf{v}} \mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\rho},\mathbf{v}). \tag{3.8}$$

위 부등식에서 만일 등호를 만족한다면, 원 문제는 강한 쌍대성(Strong duality)을 만족한다고 표현하고, 그렇지 않으면 약한 쌍대성(Weak duality)을 만족한다고 표현한다. 만일 원 문제가 강한 쌍대성을 만족한다면 상보 여유 정리(Complementary slackness)를 만족한다. 이는 부등호 제약 조건 함수와 이에 대한 여유 변수의 곱이 최적해에서 0 값을 갖게 된다는 것을 의미한다. 이에 대한 유도 과정은 부록 A에 수록되어 있다.

$$\rho_{i,opt} f_i(\mathbf{x}_{opt}) = 0, i = 1, \cdots m. \tag{3.9}$$

또한 강한 쌍대성과 상보 여유 정리는 아래와 같은 등호를 성립시키는데, 이는 쌍대 문제를 풀면 원 문제의 최적해를 구할 수 있음을 시사한다. 아래 식의 $\arg\min_{\mathbf{x}}$ 과 $\arg\max_{\mathbf{x}}$ 연산자는 각각 주어진 함수를 최소화시키는 변수 **x,** 최대화 시키는 변수 **x**를 반환하는 연산자이다.

$$\begin{gathered}\mathbf{x}_{opt} = \arg\min_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x},\boldsymbol{\rho}_{opt},\mathbf{v}_{opt}) \\ \text{where } \mathbf{x}_{opt} \triangleq \arg\min_{\mathbf{x}} \gamma(\mathbf{x}),\ (\boldsymbol{\rho}_{opt},\mathbf{v}_{opt}) \triangleq \arg\max_{\boldsymbol{\rho}\geq 0,\mathbf{v}} d(\boldsymbol{\rho},\mathbf{v}).\end{gathered} \tag{3.10}$$

강한 쌍대성을 만족하는 임의의 비선형 최적화 문제에 대하여 원 문제

최적해와 쌍대 문제의 최적해는 커쉬-쿤-터커 조건(Karush–Kuhn–Tucker optimality conditions, KKT conditions)을 필요조건으로 갖는다. 본 논문에서의 최적성 조건은 아래의 KKT 조건을 가리킨다.

$$\text{Primal feasibility: } \mathbf{f}(\mathbf{x}_{opt}) \le \mathbf{0},\ \mathbf{h}(\mathbf{x}_{opt}) = \mathbf{0} \tag{3.11}$$

$$\text{Dual feasibility: } \boldsymbol{\rho}_{opt} \ge \mathbf{0} \tag{3.12}$$

$$\text{Complementary slackness: } \rho_{i,opt} f_i(\mathbf{x}_{opt}) = 0 \tag{3.13}$$

$$\text{Stationarity: } \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}_{opt}, \boldsymbol{\rho}_{opt}, \mathbf{v}_{opt}) = \mathbf{0}. \tag{3.14}$$

KKT 조건은 필요조건이므로 그 역이 항상 성립하는 것은 아니다. 그러나 원 문제가 볼록 최적화 문제라면 원 문제의 최적해와 쌍대 문제의 최적해는 KKT 조건을 필요충분조건으로 갖는다. 따라서 볼록 최적화 문제에 한하여 KKT 조건식을 충분조건으로 활용해 원 문제를 풀 수 있으며, 볼록 최적화 중 하나인 2차 계획법 문제의 경우 해석적 최적해를 유도할 수 있다. 부록 B와 C에 볼록 최적화 문제의 정의와 등호 제약 조건을 갖는 2차 계획법 문제의 해가 수록되어 있다.

3.1.3 제약 조건을 고려한 SQP 기반의 비선형 최적화 기법 [34]

순차 2차 계획법(Sequential Quadratic Programming, SQP)은 임의의 비선형 최적화 문제로부터 하위 문제(Subproblem)로 2차 계획법 문제를 구성하고, 하위 문제를 반복적으로 풀어 원 문제의 최적해를 도출하는 방법이다. 2차 계획법 문제는 볼록 최적화 문제에 해당하므로 KKT 조건식을 충분조건으로 활용해 최적해를 유도할 수 있다. 따라서 하위 문제의 해는 추가적인 반복 계산 없이 도출할 수 있다.

원 문제 (3.1)로부터 하위 문제는 아래와 같이 구성된다. $\mathbf{B}_k$ 는 하위 문제 속 비용 함수의 볼록성(Convexity)을 결정한다. 후술할 스텝 길이 매개변수와 더불어 $\mathbf{B}_k$ 를 결정하는 방법에 따라 수렴성 및 수렴 속도가 결정된다.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\Delta\mathbf{x}} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\top} \Delta\mathbf{x} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{x}^{\top}\mathbf{B}_k\Delta\mathbf{x} \\
&\text{subject to } \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\top} \Delta\mathbf{x} + \mathbf{f}(\mathbf{x}_k) \le \mathbf{0}, \\
&\qquad\qquad \left(\frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\top} \Delta\mathbf{x} + \mathbf{h}(\mathbf{x}_k) = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{3.15}
$$

위 하위 문제의 쌍대 문제를 풀면 하위 문제 및 하위 문제의 쌍대 문제 최적해를 구할 수 있다. 이후 아래와 같이 해를 갱신함으로써 원 문제 및 원 문제의 쌍대 문제 최적해를 구할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + \alpha\Delta\mathbf{x}, \\
\boldsymbol{\rho}_{k+1} &= \boldsymbol{\rho}_k + \alpha\Delta\boldsymbol{\rho}, \\
\mathbf{v}_{k+1} &= \mathbf{v}_k + \alpha\Delta\mathbf{v}
\end{aligned} \tag{3.16}
$$

$\Delta\mathbf{x}, (\Delta\boldsymbol{\rho}, \Delta\mathbf{v})$ 는 각각 하위 문제의 최적해, 하위 쌍대 문제의 최적해를 의미하며, α 는 스텝 길이 매개변수(Step length parameter)을 의미한다.

SQP 방법의 국소 수렴성(Local convergence)를 보장하기 위해서 $\mathbf{B}_k$ 행렬은 아래의 조건들을 만족 시켜야 한다.

$$
\exists\beta_1 > 0 \text{ such that } \mathbf{d}^{\top}\mathbf{B}_{\mathbf{k}}\mathbf{d} \ge \beta_1 \| \mathbf{d} \|^2 \ \forall\, \mathbf{d} \in \left\{ \mathbf{d} : \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\top} \mathbf{d} = 0 \right\}. \tag{3.17}
$$

$$
\exists\beta_2 > 0 \text{ such that } \| \mathbf{B}_k \| \le \beta_2 \,. \tag{3.18}
$$

$$
\exists\beta_3 > 0 \text{ such that } \| \mathbf{B}_k^{-1} \| \le \beta_3. \tag{3.19}
$$

조건 (3.17) 은 $\mathbf{B}_k$가 행렬 $\left(\partial\mathbf{h}/\partial\mathbf{x}\right)^{\top}$ 의 영 공간(Null space)에 속하는 벡터들에 대하여 양의 정부호 행렬(Positive definite matrix)이어야 함을 뜻한다. 조건 (3.18)과 (3.19)의 $\|\cdot\|$은 행렬 노름(Norm)을 뜻하며, 벡터 L1-Norm 혹은 L2-Norm 으로부터 유도된다. 조건 (3.18)과 (3.19)는 하위 문제를 만드는 매 반복 계산마다 $\mathbf{B}_k$의 크기가 유한하고 역행렬이 존재해야함을 의미한다. 위와 같은 조건들을 만족하는 행렬 $\mathbf{B}_k$를 잡을 때, SQP의 방법은 가장 가까운 국소 최적해로 수렴할 수 있게 된다. 행렬 $\mathbf{B}_k$를 잡는 방법에 따라 여러 SQP 방법의 변형이 있으며, 수렴

속도에 차이를 보인다.

SQP 방법 자체로는 전역 수렴성(Global convergence)을 보장하지 않으며, 전역 수렴성을 보이기 위해서는 장점 함수(Merit function)를 도입해 전역 수렴성을 판별하여야 한다. 본 논문에서는 국소 수렴성을 이용해 약자속 운전을 추종하므로 전역 수렴성에 대해서는 다루지 않는다.

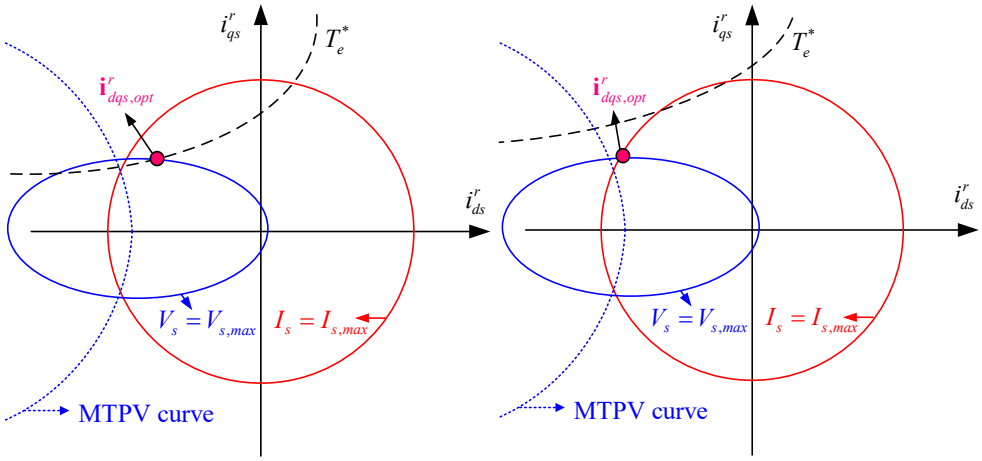
3.2 약자속 운전을 위한 최적화 문제 정의 및 분석

3.2.1 약자속 전 운전 영역을 포괄하는 최적화 문제 정의

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{i}_{dqs}^{r}} f_o(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \frac{1}{2}\left(T_e(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) - T_e^{*}\right)^2 \\
&\text{subject to } f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \mathbf{i}_{dqs}^{r\top}\mathbf{i}_{dqs}^{r} - I_{\max}{}^2 \le 0, \\
&\qquad f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \mathbf{v}_{dqs}^{r}(\mathbf{i}_{dqs}^{r})^{\top}\mathbf{v}_{dqs}^{r}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) - V_{max}^2 = 0 .
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

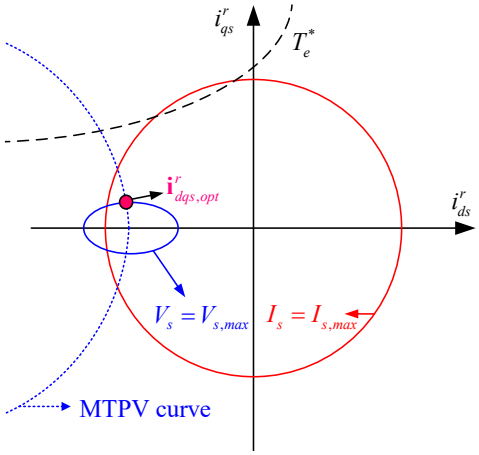
약자속 운전은 위와 같은 최적화 문제로 정의할 수 있다. 비용 함수 $f_o(\cdot)$ 는 토크 오차의 제곱으로 표현되었으며, 최적화 변수는 RRF에서의 dq 전류 운전점, $\mathbf{i}_{dqs}^{r}$ 이다. $f_{\mathbf{v}}(\cdot)$ 은 전압 제한 조건을 의미하고, $f_{\mathbf{i}}(\cdot)$ 은 전류 제한 조건을 의미한다. 약자속 운전은 전동기 측 출력 전압의 크기를 최대 크기로 고정한 상태에서 전류 크기가 최대 전류를 넘지 않게 제어하는 운전이다. 따라서 전압 제약 조건과 전류 제약 조건은 각각 등호 제약 조건 함수, 부등호 제약 조건 함수로 구성되었다.

2장에서 서술한 바와 같이, 약자속 운전은 (1) 등토크 곡선 상에서의 운전, (2) 전류 제한 원 및 전압 타원 교점 상에서의 운전, (3) 단위 전압당 최대 토크(Maximum torque per voltage, MTPV) 운전으로 구성된다. 문제 (3.20)의 비용 함수는 오직 운전 (1)에서만 0 값을 달성할 수 있으며 등토크 곡선과 전압 타원의 교점에서 최적해를 갖는다. 운전 (2)에서는 전류 제한 조건 함수가 활성화되고, 두 제약 조건 함수의 교점 중 토크 지령에 가장 가까운 토크를 내는 교점이 최적해가 된다. 운전 (3)에서는 전류 제한 조건 함수가 다시 비활성화되고, 전압 타원 위 운전점들 중 토크 지령과 가장 가까운 토크를 내는 운전점이 최적해가 된다. 따라서 문제 (3.20)의 최적해는 각 운전 상황별 최적 운전점을 모두 포함한다.



(가) 등토크 곡선 상 운전

(나) 전류 제한 원 상 운전



(다) MTPV 곡선 상 운전

그림 3-1. 약자속 운전 유형 별 최적해 위치

그림 3-1은 각 운전 유형별로 문제 (3.20)의 최적해를 개념적으로 도시한 것이다. 그림 3-1 (가)에서는 최적해가 1개로 보이지만, 전류 제한원의 크기에 따라 2개의 최적해가 존재할 수도 있다. 아래 그림은 문제 (3.20)의 최적해가 2개가 되는 상황을 보여준다.

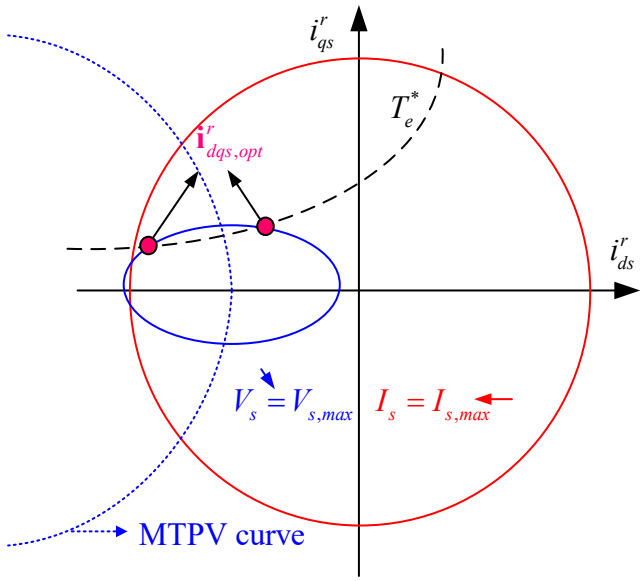


그림 3-2. 등토크 곡선 상 운전 중 최적해가 유일하지 않은 경우

그림 3-2의 경우 2개의 최적해가 존재하는데, 약자속 운전 시 동손을 최소화 하기 위해서는 원점에 가까운 운전점을 택해야 한다. 전류 크기를 비용 함수에 추가해 전류 크기가 작은 운전점을 전역 최적해가 되도록 유도 할 수 있지만, 이는 계산의 복잡성을 증대시킨다. 또한 토크 오차 비용과 전류 크기 비용 간의 가중치를 명확하게 결정하기 어렵다. 그러나 오른쪽 최적해와 가까운 운전점에서부터 최적해를 추종하기 시작하면 전류 크기를 비용 함수로 고려하지 않아도 국소 수렴점만 추종하여 원하는 운전점에 안착할 수 있다. 한 예로 최소 동손 운전점에서 약자속 운전 영역을 진입하는 경우가 그러하다.

따라서 본 논문에서는 전류 크기를 비용 함수에 포함하지 않은 문제 (3.20)를 다루며, 최소 동손 운전점에서 약자속 운전 영역을 진입한다고 가정해 국소 수렴점을 추종한다.

3.2.2 제안하는 최적화 문제의 쌍대성

문제 (3.20)의 라그랑지안 함수는 (3.3)에 따라 아래와 같이 구성된다.

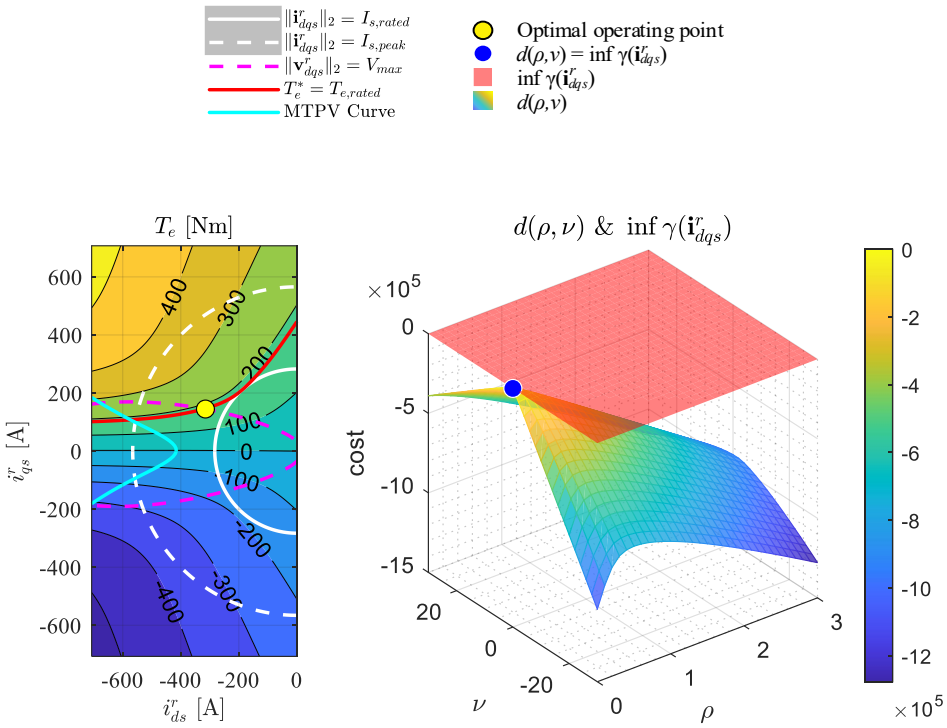
$$\mathcal{L}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}, \rho, \nu) = f_o(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) + \rho f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) + \nu f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) \tag{3.21}$$

위 라그랑지안 함수로부터 제약 조건에 대해 이상적인 비용을 갖는 비용 함수는 (3.4)에 따라 아래와 같이 구성된다.

$$\begin{aligned}\gamma(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) &= \sup_{\rho \geq 0, \nu} \mathcal{L}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}, \rho, \nu) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2}\left(T_e(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) - T_e^*\right)^2 & \| \mathbf{i}_{dqs}^{r} \|_2 \leq I_{max} \ \& \ \| \mathbf{v}_{dqs}^{r} \|_2 = V_{max} \\ \infty & \text{otherwise} \end{cases}.\end{aligned} \tag{3.22}$$

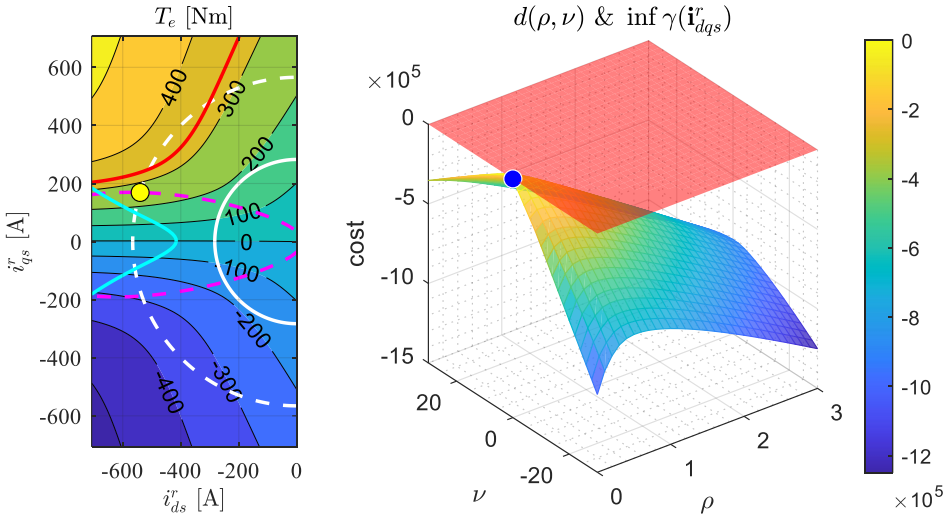
위 $\gamma(\cdot)$ 은 여유변수에 대해서 라그랑지안 함수를 최대화시킨 함수이기 때문에, 운전점의 위치와 제약 조건에 따라 여유 변수의 값이 결정된다. 만일 현재 운전점의 전류 크기가 최대 전류보다 작으면 여유변수 ρ 는 하한 값을 0으로 갖고 있기 때문에 0 값을 갖는다. 만일 운전점의 전류 크기가 최대 전류보다 크면 $f_{\mathbf{i}}(\cdot)$ 가 양수 값을 가지기 때문에, ρ 는 무한대의 값을 갖는다. 출력 전압의 크기가 최대 전압과 같지 않으면 $f_{\mathbf{v}}(\cdot)$ 는 0이 아닌 값을 갖게 되고, ν 값은 $f_{\mathbf{v}}(\cdot)$ 와 같은 부호의 무한대의 값을 갖는다. 따라서 $\gamma(\cdot)$ 의 하한 값은 토크 제곱의 오차 값이 되고, 만일 T_e^*가 실현 가능하면 0이 된다.

원 문제 (3.20)의 강한 쌍대성을 보이기 위해서는 원 문제에 대한 쌍대 함수를 구하고 쌍대 함수의 상한 값이 $\gamma(\cdot)$ 의 하한 값과 같은지 확인하면 된다. 이를 확인하기 위해 대상 전동기에 대해 유한 요소 해석(Fintie Element Analysis, FEA)을 실시해 자속맵을 추출하고 이로부터 쌍대 함수를 추출해 강한 쌍대성을 확인한다. 대상 전동기의 자속 분포도 및 제정수는 부록 D 수록되어 있다.



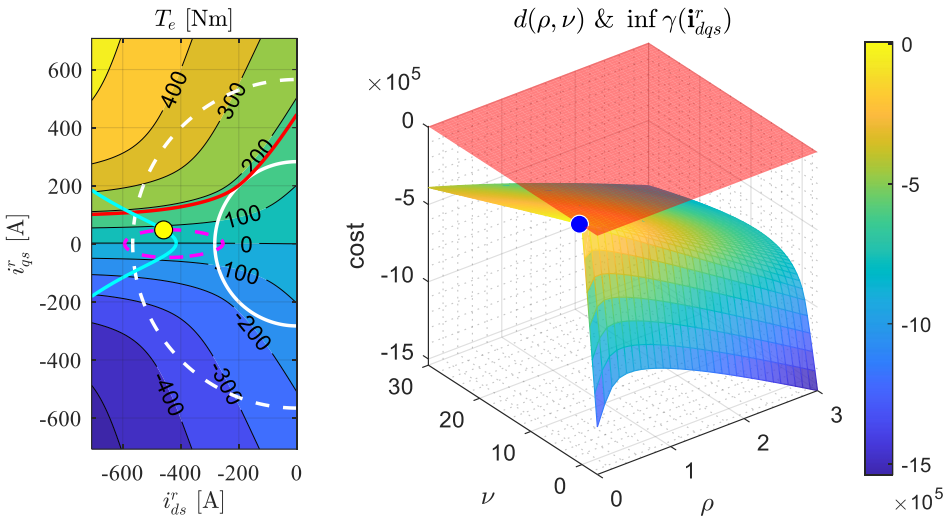
(가) 토크 맵과 최적 운전점 (나) 쌍대 함수 $d(\rho,\nu)$ 및 $\gamma(\mathbf{i}^r_{dqs})$의 하한 평면

그림 3-3. ω_{rm}=4,300 r/min , T_e^*=$T_{e,rated}$ 최적 운전점과 쌍대성 확인



(가) 토크 맵과 최적 운전점 (나) 쌍대 함수 $d(\rho,\nu)$ 및 $\gamma(\mathbf{i}^r_{dqs})$의 하한 평면

그림 3-4. ω_{rm}=4,300 r/min, T_e^*=1.8 $T_{e,rated}$ 최적 운전점과 쌍대성 확인



(가) 토크 맵과 최적 운전점 (나) 쌍대 함수 $d(\rho,\nu)$ 및 $\gamma(\mathbf{i}_{dqs}^r)$의 하한 평면

그림 3-5. ω_{rm}=12,700 r/min, T_e^*=$T_{e,rated}$ 최적 운전점과 쌍대성 확인

그림 3-3, 그림 3-4, 그림 3-5의 약자속 운전 영역 별 쌍대성의 여부를 보여준다. 각각의 그림에서 (가)는 대상 전동기의 운전 영역별 토크 맵과 최적 운전점을 보여준다. 하얀 실선 및 점선은 각각 정격 전류와 전류 제한 원을 의미한다. 전류 제한 원은 MTPV 운전점을 포함하기 위해 피크 전류 크기로 설정해 도시하였다. 분홍 파선은 전압 제한 타원을 의미하며 PWM의 선형 변조를 가정해 $V_{dc}/\sqrt{3}$로 전압 크기를 정하였다. 옥색 실선은 MTPV 곡선으로 MTPV 진입 순간에서의 속도를 기준으로 도시되었다. 각각의 그림에서 (나)는 라그랑지안 함수 (3.21)의 쌍대 함수를 보여준다. 빨간 면은 $\gamma(\cdot)$ 의 하한 값을 의미한다. 운전 유형과 상관 없이 쌍대 함수의 상한값과 $\gamma(\cdot)$ 의 하한값이 접한다는 것을 확인할 수 있다. 이는 약자속 운전 유형별 모든 최적 운전점에 대해 강한 쌍대성이 성립할 수 있음을 시사한다. 본 논문에서는 이러한 관측을 기반으로 문제 (3.20)의 강한 쌍대성이 성립한다고 가정한다. 강한 쌍대성이 성립하면 쌍대 문제를 풀어 최적해에 도달할 수 있으므로 3.1.3절에서 소개한 SQP 방법을 통해 약자속 최적화 문제를 풀고자 한다.

제 4장 SQP 최적화 기반 약자속 운전 영역에서의 실시간 토크 제어

본 장에서는 3장에서 다룬 최적화 기법을 기반으로 제안하는 약자속 운전 영역에서의 실시간 토크 제어기를 서술한다.

4.1절에서는 제안하는 토크 제어기의 구성을 소개한다. 입력 변수와 출력 변수를 정의하고, 제안하는 제어기가 동작하기 위해 필요한 외부 제어기 및 관측기를 서술한다.

4.2절에서는 약자속 운전을 위한 최적화 문제 (3.20)에 SQP 최적화 방법을 적용하여 하위 문제를 구성한다. 구성된 하위 문제에 대한 해석적 최적해를 유도하고 제안하는 약자속 운전 토크 제어기의 구체적인 구현 방법을 다룬다. 유도 과정에서 벡터 미분이 사용되는데, 이에 대한 표기 및 미분 방법은 부록 F에 수록되어 있다. 해석적 최적해는 부록 C에 수록되어 있는 2차 계획법 풀이 방법에 기반해 서술한다.

4.3절에서는 유도된 최적해에 전동기 제정수 오차가 미치는 영향을 분석한다. 특히 인덕턴스 오차에 집중해 분석하며, 이를 통해 제안하는 제어기가 유한 속도 시스템에 대해서는 인덕턴스 오차에 강인함을 밝힌다. 제안하는 알고리즘은 등토크 곡선 상에서의 운전, 전류 제한 원 상에서의 운전에서는 정상 상태 오차가 없다. 그러나 MTPV 운전 영역에서는 정상 상태 오차가 발생하는데 그러한 원인을 분석한다.

4.1 제안하는 약자속 운전 토크 제어기의 구성

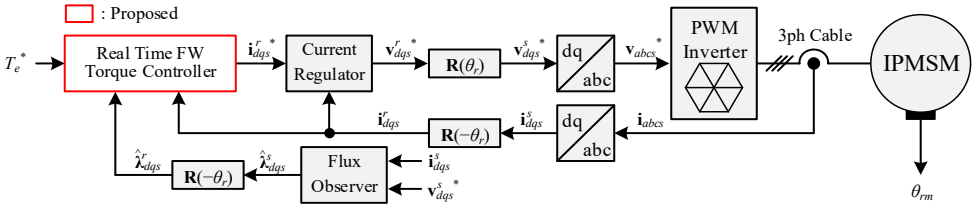


그림 4-1. 제안하는 약자속 운전 토크 제어기 알고리즘의 구성도

그림 4-1은 제안하는 약자속 운전 토크 제어기의 구성도를 나타낸다. 제안하는 토크 제어기는 토크 지령을 입력 변수로 받으며, 출력 변수로는 전류 제어기에게 필요한 전류 지령을 출력한다. 제안하는 제어기를 구성하기 위해서는 자속 관측기와 전류 제어기가 필요하다. 교류 전동기의 고정자 자속은 역기전력을 적분하여 추정할 수 있다. 그러나 적분기 구현 시 역기전력 신호에 직류 성분 오차가 있으면 발산할 수 있으므로, 적분기에 고역 통과 필터(High pass filter, HPF)를 연결하여 자속 관측기를 구성하였다. 전류 제어기는 상태 궤환 전류 제어기 및 복소수 벡터 전류 제어기 등 다양한 형태의 전류 제어기로 구성될 수 있다. 본 논문에서는 복소수 벡터 전류 제어기(Complex vector current controller)를 적용하였다.

4.2 제안하는 알고리즘의 동작 원리

4.2.1 매 샘플에서의 최적화 문제 기술

본 절에서는 문제 (3.20)을 SQP 하위 문제 (3.15)형태로 변환한다. 제안하는 알고리즘의 목표는 매 샘플마다 변환된 문제의 최적해를 사용하여 토크 지령에 맞는 최적 전류 지령을 생성하는 것이다. 하위 문제를 구성하기 위해서는 비용 함수를 볼록 함수로 근사하고 제약 조건 함수를 선형화해야 한다. 비용 함수를 근사하려면 라그랑지안 함수 (3.21)

의 도함수와, 조건 (3.17) - (3.19)를 만족하는 행렬 $\mathbf{B}_k$가 필요하다.

문제 (3.20)의 하위 문제는 아래와 같이 구성된다.

$$\begin{aligned}
&\min_{\Delta\mathbf{i}^r_{dqs}} \hat{f}_o(\Delta\mathbf{i}^r_{dqs}) = \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\mathbf{i}^r_{dqs}}\right)^\top \Delta\mathbf{i}^r_{dqs} + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{i}^r_{dqs}{}^\top \mathbf{B}_k \Delta\mathbf{i}^r_{dqs} \\
&\text{subject to } f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) + \left(\frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial\mathbf{i}^r_{dqs}}\right)^\top \Delta\mathbf{i}^r_{dqs} \le \mathbf{0}, \\
&\qquad f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) + \left(\frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{i}^r_{dqs}}\right)^\top \Delta\mathbf{i}^r_{dqs} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.1}$$

식 (4.1)에서 대괄호 안 k는 k번째 샘플에서 측정된 물리량을 의미한다. 전류에 대한 편미분 연산이 이루어지는 항들은 모두 도함수(Derivative)를 유도하여 계산된다. $f_{\mathbf{i}}(\cdot)$와 $f_{\mathbf{v}}(\cdot)$의 도함수는 아래와 같이 유도된다.

$$\frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial\mathbf{i}^r_{dqs}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{i}^r_{dqs}}\left(\mathbf{i}^r_{dqs}{}^\top \mathbf{i}^r_{dqs} - I^2_{max}\right) = 2\mathbf{i}^r_{dqs}. \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial\mathbf{i}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{i}^r_{dqs}}\left(\mathbf{v}^r_{dqs}{}^\top \mathbf{v}^r_{dqs} - V^2_{max}\right) = 2\left(\frac{\partial\mathbf{v}^r_{dqs}}{\partial\mathbf{i}^r_{dqs}}\right)^\top \mathbf{v}^r_{dqs}. \tag{4.3}$$

전류에 대한 전압 도함수는 아래와 같이 유도된다.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{v}^r_{dqs}}{\partial\mathbf{i}^r_{dqs}} &= \mathbf{R}_s + \omega_r\mathbf{J}\frac{\partial\boldsymbol{\lambda}^r_{dqs}}{\partial\mathbf{i}^r_{dqs}} \\
&= \mathbf{R}_s + \omega_r\mathbf{J}\mathbf{L}_h.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

식 (4.4)에서의 $\mathbf{L}_h$를 증분 인덕턴스(Incremental inductance)라고 표기한다.

전류에 대한 비용 함수의 도함수는 아래와 같이 유도된다.

$$\frac{\partial f_o}{\partial\mathbf{i}^r_{dqs}} = \left(T_e(\mathbf{i}^r_{dqs}) - T_e^*\right)\frac{\partial T_e}{\partial\mathbf{i}^r_{dqs}}. \tag{4.5}$$

전류에 대한 토크 도함수는 아래와 같이 유도된다.

$$\frac{\partial T_e}{\partial\mathbf{i}^r_{dqs}} = \frac{\partial}{\partial\mathbf{i}^r_{dqs}}\left(\frac{3}{2}p(\mathbf{J}\boldsymbol{\lambda}^r_{dqs})^\top \mathbf{i}_{dqs}{}^r\right) = \frac{3}{2}p\left(\mathbf{J}\boldsymbol{\lambda}^r_{dqs} + \left(\mathbf{J}\mathbf{L}_h\right)^\top \mathbf{i}_{dqs}{}^r\right). \tag{4.6}$$

식 (4.2), (4.3), (4.5)를 대입하면 아래 식에 따라 전류에 대한 라그랑지안 함수 (3.21)의 도함수를 계산할 수 있다.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} = \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} + \rho \frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} + \nu \frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}}. \tag{4.7}$$

하위 문제 (4.1)의 비용 함수 $\hat{f}_o(\cdot)$ 를 연산할 때 라그랑지안 도함수 $\partial \mathcal{L} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}$ 와 $\mathbf{\Delta i}_{dqs}^{r}$ 의 내적을 수행하는데, 선형화된 전압 제약 조건을 보면 $\partial f_{\mathbf{v}} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}$ 와 $\mathbf{\Delta i}_{dqs}^{r}$ 의 내적은 상수 값임을 알 수 있다. 비용 함수에서 상수 값은 최적해에 영향을 주지 않으므로 비용 함수에서 제거할 수 있다. 따라서 아래와 같이 정의한 하위 문제는 문제 (4.1)과 같은 최적해를 갖게 된다.

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{\Delta i}_{dqs}^{r}} \hat{f}_o(\mathbf{\Delta i}_{dqs}^{r}) = \left(\frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} + \rho \frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} \mathbf{\Delta i}_{dqs}^{r} + \frac{1}{2} \mathbf{\Delta i}_{dqs}^{r\top} \mathbf{B}_k \mathbf{\Delta i}_{dqs}^{r} \\
&\text{subject to } f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}[k]) + \left(\frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} \mathbf{\Delta i}_{dqs}^{r} \le \mathbf{0}, \\
&\qquad f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}[k]) + \left(\frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} \mathbf{\Delta i}_{dqs}^{r} = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.8}$$

한편, 그림 3-1을 보면 약자속 운전 상황에서 최적 운전점은 전류 제한 원에 존재하거나 그 내부에 존재하는 것을 확인할 수 있다. 이는 원 문제 (3.20)의 전류 제한 조건 $f_{\mathbf{i}}(\cdot)$ 가 등호를 만족하는지에 따라 결정된다. 따라서 부등호 조건을 포함하고 있는 원 문제 (3.20)은 아래와 같이 등호 조건만을 포함하는 2개의 문제로 나누어서 볼 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{i}_{dqs}^{r}} f_o(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \frac{1}{2}\left(T_e(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) - T_e^{*} \right)^2 \\
&\text{subject to } f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \mathbf{v}_{dqs}^{r}(\mathbf{i}_{dqs}^{r})^{\top} \mathbf{v}_{dqs}^{r}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) - V_{max}^2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.9}$$

$$
\begin{aligned}
&\min_{\mathbf{i}_{dqs}^r} f_o(\mathbf{i}_{dqs}^r) = \frac{1}{2}\left(T_e(\mathbf{i}_{dqs}^r) - T_e^*\right)^2 \\
&\text{subject to } f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}_{dqs}^r) = \mathbf{i}_{dqs}^{r\top}\mathbf{i}_{dqs}^r - I_{\max}{}^2 = 0, \\
&\qquad f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}_{dqs}^r) = \mathbf{v}_{dqs}^r(\mathbf{i}_{dqs}^r)^\top \mathbf{v}_{dqs}^r(\mathbf{i}_{dqs}^r) - V_{max}^2 = 0.
\end{aligned} \tag{4.10}
$$

문제 (4.9)는 항상 최적 운전점이 전류 제한 원 내부에 있다고 가정해 푸는 문제이다. 따라서 부등호 제약 조건 함수가 사라진다. 문제 (4.10)은 항상 최적 운전점이 전류 제한 원과 전압 제한 타원 교점에 위치한다고 가정해 푸는 문제이다. 따라서 부등호 제약 조건이 등호 제약 조건으로 바뀐다. 최적 운전점은 전류 제한 원에 있거나 내부에 있으므로, 만일 문제 (4.9)의 최적해가 전류 제한 원을 벗어난다면, 문제 (4.10)의 최적해가 최적 운전점이 된다.

하위 문제 (4.8) 또한 마찬가지로 등호 조건만을 가진 2개의 문제로 나누어질 수 있다.

$$
\begin{aligned}
&\min_{\Delta\mathbf{i}_{dqs}^r} \hat{f}_o(\Delta\mathbf{i}_{dqs}^r) = \left(\frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r}\right)^\top \Delta\mathbf{i}_{dqs}^r + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{i}_{dqs}^{r\top}\mathbf{B}_k\Delta\mathbf{i}_{dqs}^r \\
&\text{subject to } f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}_{dqs}^r[k]) + \left(\frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r}\right)^\top \Delta\mathbf{i}_{dqs}^r = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

$$
\begin{aligned}
&\min_{\Delta\mathbf{i}_{dqs}^r} \hat{f}_o(\Delta\mathbf{i}_{dqs}^r) = \left(\frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r}\right)^\top \Delta\mathbf{i}_{dqs}^r + \frac{1}{2}\Delta\mathbf{i}_{dqs}^{r\top}\mathbf{B}_k\Delta\mathbf{i}_{dqs}^r \\
&\text{subject to } f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}_{dqs}^r[k]) + \left(\frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r}\right)^\top \Delta\mathbf{i}_{dqs}^r = \mathbf{0}, \\
&\qquad f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}_{dqs}^r[k]) + \left(\frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r}\right)^\top \Delta\mathbf{i}_{dqs}^r = \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

문제 (4.11)에서는 문제 (4.9)과 같은 가정을 가진다. 이로 인해 전류 제한 조건 함수가 사라졌으므로 비용 함수를 계산할 때 $\rho\left(\partial f_{\mathbf{i}}/\partial \mathbf{i}_{dqs}^r\right)$ 와

$\mathbf{\Delta i}_{dqs}^{r}$ 의 내적항이 사라진다. 문제 (4.12)에서는 문제 (4.10)과 같은 가정을 가진다. 이로 인해 부등호 제약 조건이 등호 제약 조건이 된다. 따라서 $\rho\left(\partial f_{\mathbf{i}}/\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}\right)$ 와 $\mathbf{\Delta i}_{dqs}^{r}$ 의 내적항이 상수가 되고 이는 최적해에 영향을 끼치지 않으므로 비용 함수에서 제외된다.

조건 (3.17) - (3.19)를 만족하는 행렬 $\mathbf{B}_k$로는 라그랑지안 함수 (3.21)의 이계 도함수(Second order derivative)를 고려할 수 있다. 매 샘플 순간 하위 문제를 풀면서 라그랑지안 함수에 포함된 여유 변수를 갱신한다면, 라그랑지안 함수의 이계도 미분은 행렬 $\mathbf{B}_k$가 만족해야 하는 성질들을 만족한다[34]. 라그랑지안 함수의 이계 도함수는 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}} = \frac{\partial^2 f_o}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}} + \rho \frac{\partial^2 f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}} + \nu \frac{\partial^2 f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}}. \tag{4.13}$$

비용 함수의 이계 도함수 $\partial^2 f_o \big/ \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}$ 은 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}} = \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \left(\frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} + (T_e - T_e^*) \frac{\partial^2 T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}}. \tag{4.14}$$

전류에 대한 자속의 이계 미분이 충분히 작고 운전점 국소 근방에서 자속을 증분 인덕턴스로 선형화 할 수 있다고 가정하면[35], 전류에 대한 토크 이계 도함수는 아래와 같다.

$$\frac{\partial^2 T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}} \simeq \frac{3}{2} p \left(\mathbf{JL}_h + (\mathbf{JL}_h)^{\top} \right). \tag{4.15}$$

전류 제한 조건 함수의 이계 도함수 $\partial^2 f_{\mathbf{i}} \big/ \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}$ 은 다음과 같이 유도되며, $\mathbf{I}_2$ 는 2×2 항등행렬을 의미한다.

$$\frac{\partial^2 f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}} = 2\mathbf{I}_2. \tag{4.16}$$

전압 제한 조건 함수의 이계도함수 $\partial^2 f_{\mathbf{v}} \big/ \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}$ 은 식 (4.15)와 같은 가정 아래 다음과 같이 유도된다.

$$\frac{\partial^2 f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}} = 2\left(\frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^{r}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}}\right)^{\top} \frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^{r}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}}. \tag{4.17}$$

라그랑지안 함수의 이계 도함수를 구성하는 모든 행렬이 대칭 행렬이므로 라그랑지안의 이계 도함수 또한 대칭행렬이 된다.

원 문제 (3.20)이 (4.9)과 (4.10)로 나뉘어졌으므로, 라그랑지안 함수의 이계 도함수 또한 두 경우에 따라 나뉘어 쓸 수 있다. 최적해가 전류 내부에 있다고 가정하는 문제 (4.9)에는 전류 제한 조건이 없으므로 라그랑지안의 이계 도함수가 다음과 같이 바뀐다.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}} = \frac{\partial^2 f_o}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}} + \nu \frac{\partial^2 f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}}. \tag{4.18}$$

문제 (4.10)의 라그랑지안 이계 도함수는 (4.13)과 형태는 같지만, 전류 제한 조건이 등호를 성립하게 되면서 0 이상이어야 했던 ρ는 음수 값을 가질 수 있게 된다.

하위 문제 (4.8)에서 나누어져 나온 문제 (4.11)과 (4.12)의 $\mathbf{B}_k$에는 각각 $\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}$ 와 $\partial^2 \mathcal{L} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}$ 이 대입되어야 한다. 따라서 이를 포함해 매 샘플마다 제어기가 풀어야하는 하위 문제는 아래 두 종류의 문제로 기술된다.

$$\begin{aligned} &\min_{\Delta \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \hat{f}_o(\Delta \mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \left(\frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}}\right)^{\top} \Delta \mathbf{i}_{dqs}^{r} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{i}_{dqs}^{r\ \top} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}}\right) \Delta \mathbf{i}_{dqs}^{r} \\ &\text{subject to } f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}[k]) + \left(\frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}}\right)^{\top} \Delta \mathbf{i}_{dqs}^{r} = 0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} &\min_{\Delta \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \hat{f}_o(\Delta \mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \left(\frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}}\right)^{\top} \Delta \mathbf{i}_{dqs}^{r} + \frac{1}{2} \Delta \mathbf{i}_{dqs}^{r\ \top} \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}}\right) \Delta \mathbf{i}_{dqs}^{r} \\ &\text{subject to } f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}[k]) + \left(\frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}}\right)^{\top} \Delta \mathbf{i}_{dqs}^{r} = 0, \\ &\qquad f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}[k]) + \left(\frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}}\right)^{\top} \Delta \mathbf{i}_{dqs}^{r} = 0. \end{aligned} \tag{4.20}$$

4.2.2 해석적 최적해의 유도

문제 (4.19)과 (4.20)은 등호 제약 조건을 가진 2차 계획법 문제로 해석적 최적해를 유도할 수 있다. 2차 계획법 문제의 최적해 유도 과정은 부록 C에 기술되어 있다. 문제 (4.19)의 최적해는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{i}^{r}_{dqs,inactive} \\ \nu[k] \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}}[k]}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}{}^{2}} & \dfrac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}} \\ \left(\dfrac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}\right)^{\top} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}} \\ f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}^{r}_{dqs}[k]) \end{bmatrix}. \tag{4.21}$$

문제 (4.19)는 전류 제한 조건을 항상 만족한다고 가정해 부등호 제약 조건을 비활성화한 문제이다. 따라서 이에 대한 최적해를 $\Delta\mathbf{i}^{r}_{dqs,inactive}$ 로 표기한다. 식 (4.21)에서 k-인덱스가 표기된 $\partial^2\mathcal{L}_{\mathbf{v}}[k]/\partial\mathbf{i}^{r}_{dqs}{}^{2}$ 은 매 샘플마다 갱신되는 라그랑지안 함수의 이계 미분값을 의미한다. 식 (4.21)을 통해 매 샘플마다 여유 변수 ν가 갱신되므로, k 샘플에서의 $\partial^2\mathcal{L}_{\mathbf{v}}[k]/\partial\mathbf{i}^{r}_{dqs}{}^{2}$ 값은 아래와 같이 계산된다.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}{}^{2}}[k] = \frac{\partial^2 f_o}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}{}^{2}} + \nu[k-1]\frac{\partial^2 f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}{}^{2}}. \tag{4.22}$$

한편, 문제 (4.20)은 전류 제한 원과 전압 타원의 교점 위에 최적해가 있다고 가정한 문제이므로, 비용 함수와 상관없이 제한 조건만으로도 최적해의 위치가 결정된다. 따라서 아래와 같은 최적해가 유도된다.

$$\Delta\mathbf{i}^{r}_{dqs,active} = -\begin{bmatrix} \left(\dfrac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}\right)^{\top} \\ \left(\dfrac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}\right)^{\top} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}^{r}_{dqs}[k]) \\ f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}^{r}_{dqs}[k]) \end{bmatrix}. \tag{4.23}$$

문제 (4.20)은 부등호 제약 조건이었던 전류 제한 조건을 등호 제약 조건으로 변경한 문제이므로 이에 대한 최적해를 $\Delta\mathbf{i}^{r}_{dqs,active}$ 로 표기한다.

4.2.3 실시간 연산을 위한 구현 방법

식 (4.21)과 (4.23)은 역행렬을 이용하여 최적해를 유도하였다. 그러나 마이크로컨트롤러(Microcontroller)를 사용하는 임베디드 시스템에서 실시간으로 2×2 보다 큰 행렬의 역행렬을 계산하는 것은 많은 연산량을 필요로 한다. 따라서 최적해에 대해 개별적으로 닫힌 형태의 해(Closed-form solution)가 필요하다.

블록 행렬(Block matrix)로 이루어진 정방 행렬의 역행렬은 아래와 같이 슈어 보수 행렬(Schur complement matrix)를 이용하여 하위 블록 행렬들의 역행렬 및 행렬 연산으로 구할 수 있다 [36].

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} + \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\left(\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1} \\ -\left(\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1} & \left(\mathbf{D}-\mathbf{C}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\right)^{-1} \end{bmatrix} \tag{4.24}$$

$$\text{where } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \text{ and } \mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m\times m}.$$

따라서 식 (4.21)의 역행렬 성분은 아래와 같이 표기할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^{\top} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^{-1} - \dfrac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{-1}}{\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} & \dfrac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}}{\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} \\ \dfrac{\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{-1}}{\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} & -\dfrac{1}{\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

$$\text{where } \mathbf{A} = \frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}}[k]}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \text{ and } \mathbf{B} = \frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \in \mathbb{R}^{2\times 1}.$$

그러므로 최적해 (4.21)의 $\Delta\mathbf{i}_{dqs,inactive}^{r}$ 및 $\nu[k]$는 아래와 같이 연산된다.

$$\Delta\mathbf{i}_{dqs,inactive}^{r} = -\left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{-1}}{\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}}\right)\frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}}{\mathbf{B}^{\top}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}[k]). \tag{4.26}$$

$$
\begin{aligned}
\nu[k] &= -\frac{\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1}}{\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}} + \frac{1}{\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} f_{\mathrm{v}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) \\
&= -\frac{1}{\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} \left(\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1} \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}} - f_{\mathrm{v}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) \right).
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

식 (4.26)와 (4.27)의 **A, B**행렬의 정의는 식 (4.25)와 동일하다. 한편, 식 (4.26)은 아래와 같이 변형함으로써 $\nu[k]$ 값을 이용해 연산량을 줄일 수 있다.

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathbf{i}^r_{dqs,inactive} &= -\left(\mathbf{A}^{-1} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1}}{\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} \right) \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}} - \frac{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}}{\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} f_{\mathrm{v}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) \\
&= -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B} \left(-\frac{\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1}}{\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}} + \frac{1}{\mathbf{B}^\top \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}} f_{\mathrm{v}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) \right) \\
&= -\mathbf{A}^{-1} \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}\, \nu[k] \\
&= -\mathbf{A}^{-1} \left(\frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}} + \mathbf{B}\, \nu[k] \right).
\end{aligned}
\tag{4.28}
$$

$\Delta \mathbf{i}^r_{dqs,active}$ 를 구하는 식 (4.23)의 역행렬 성분은 2×2 행렬이므로 쉽게 구할 수 있다. 디지털 제어기에서 구현해야하는 $\nu[k]$, $\Delta \mathbf{i}^r_{dqs,inactive}$, $\Delta \mathbf{i}^r_{dqs,active}$ 는 다음 쪽에 유도된 바와 같이 개별적인 해로 표현할 수 있으며, 식 (4.2), (4.3), (4.5), (4.14), (4.17), (4.22)를 이용하면 실시간으로 연산할 수 있다.

$$\nu[k] = -\frac{1}{\left(\frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}}\right)^\top \left(\frac{\partial^2 f_o}{\partial \mathbf{i}^{r\ 2}_{dqs}} + \nu\left[k-1\right]\frac{\partial^2 f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^{r\ 2}_{dqs}}\right)^{-1} \frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}}} \left(\left(\frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}}\right)^\top \left(\frac{\partial^2 f_o}{\partial \mathbf{i}^{r\ 2}_{dqs}} + \nu\left[k-1\right]\frac{\partial^2 f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^{r\ 2}_{dqs}}\right)^{-1} \frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}} - f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) \right). \tag{4.29}$$

$$\Delta\mathbf{i}^r_{dqs,inactive} = -\left(\frac{\partial^2 f_o}{\partial \mathbf{i}^{r\ 2}_{dqs}} + \nu\left[k-1\right]\frac{\partial^2 f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^{r\ 2}_{dqs}}\right)^{-1} \left(\frac{\partial f_o}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}} + \frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}}\nu[k]\right). \tag{4.30}$$

$$\Delta\mathbf{i}^r_{dqs,active} = -\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}}\right)^\top \\ \left(\frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}}\right)^\top \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) \\ f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial i^r_{ds}} & \frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial i^r_{qs}} \\ \frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial i^r_{ds}} & \frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial i^r_{qs}} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) \\ f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) \end{bmatrix} = -\frac{1}{\frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial i^r_{ds}}\frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial i^r_{qs}} - \frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial i^r_{qs}}\frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial i^r_{ds}}} \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial i^r_{qs}} & -\frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial i^r_{qs}} \\ -\frac{\partial f_{\mathbf{v}}}{\partial i^r_{ds}} & \frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial i^r_{ds}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) \\ f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) \end{bmatrix}. \tag{4.31}$$

제안하는 약자속 운전 토크 제어기의 최종 출력은 전류 지령이다. 운전 상황에 따라 $\mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,inactive}$ 혹은 $\mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,active}$ 중 원 문제의 제약 조건을 만족하는 최적해를 $\mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,opt}$ 로 선정해 다음과 같이 전류 지령을 생성한다.

$$\mathbf{i}^{r\ *}_{dqs}[k] = \mathbf{i}^{r}_{dqs}[k] + \mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,opt} \ . \tag{4.32}$$

$\mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,opt}$ 를 선정하는 방법은 다음과 같다.

$$\mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,opt} = \begin{cases} \mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,inactive} & (\mathbf{i}^{r}_{dqs}[k] + \mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,inactive})^{\top}(\mathbf{i}^{r}_{dqs}[k] + \mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,inactive}) \le I^{2}_{max} \\ \mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,active} & \text{otherwise} \end{cases} \tag{4.33}$$

$\mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,inactive}$ 는 최적해가 전류 제한 원 내부에 있을 것이라 가정하고 푼 결과이다. 따라서 실제 최적해가 전류 제한 원 내부에 있다면, $\mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,inactive}$ 를 이용하여 전류 지령을 생성했을 때 해당 전류 지령의 크기는 최대 전류 크기보다 작아야 한다. 만일 그렇지 않다면 실제 최적해가 전류 제한 원과 전압 타원의 교점에 있다는 뜻이므로 $\mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,active}$ 를 이용하여 전류 지령을 생성해야 한다. 따라서 약자속 운전 시 매 샘플마다 아래의 순서도로 연산을 진행하면, 제안하는 알고리즘을 구현할 수 있다.

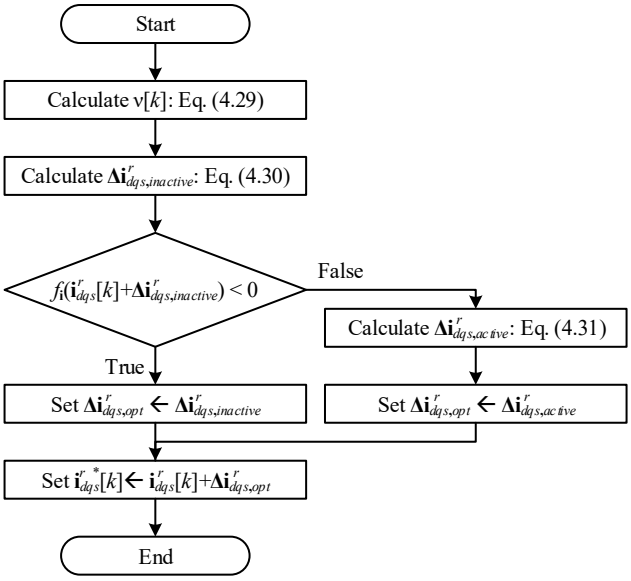


그림 4-2. 제안하는 약자속 운전 토크 제어기의 연산 순서도

4.3 제정수 오차가 최적해 수렴성에 미치는 영향 분석

4.2절에서 서술한 최적해에는 전류에 대한 토크의 편미분 $\partial T_e / \partial \mathbf{i}_{dqs}^r$ 과 전압의 편미분 $\partial \mathbf{v}_{dqs}^r / \partial \mathbf{i}_{dqs}^r$ 가 포함되어 있기 때문에 필연적으로 증분 인덕턴스 $\mathbf{L}_h$성분이 필요한 것처럼 보인다. $\mathbf{L}_h$를 실시간으로 알고자 한다면 고주파 신호 주입이 필요하며 이 경우 신호 주입을 위한 전압 여유가 필요해 약자속 운전에는 적절치 않다. 본 절에서는 4.2절에서 밝힌 최적해가 $\mathbf{L}_h$값이 정확하지 않더라도, 실제 운전점으로 수렴하는 운전 영역을 밝힌다. 이러한 분석을 기반으로 제안하는 알고리즘은 $\mathbf{L}_h$ 성분 대신 전동기 공칭 제정수인 정적 인덕턴스 값 $\mathbf{L}_s$를 넣고 동작한다.

실제 운전점별 $\mathbf{L}_h$와 제어기에 쓰이는 $\mathbf{L}_s$간의 오차는 다음과 같이 정의된다.

$$\Delta\mathbf{L} = \mathbf{L}_h - \mathbf{L}_s. \tag{4.34}$$

이하 절에서는 위 $\Delta\mathbf{L}$이 수렴성에 미치는 영향을 분석한다.

4.3.1 등토크 곡선 상에서의 운전 상황

제안하는 토크 제어기는 등토크 곡선 상에서 식 (4.28)로 전류 지령을 생성한다. 원 문제의 라그랑지안 이계도함수 $\partial^2 \mathcal{L} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\,2}$ 가 대칭 행렬이기 때문에 $\partial^2 \mathcal{L}_{\mathrm{v}}[k] / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\,2}$ 또한 대칭 행렬이 된다. 이는 행렬 구조에 의한 대칭이기 때문에 인덕턴스 오차와 무관하다. 정확한 $\mathbf{L}_h$ 대신 $\mathbf{L}_s$를 사용하였을 때 계산되는 추정 최적해 $\Delta\hat{\mathbf{i}}_{dqs,inactive}^r$ 는 아래와 같이 계산된다.

$$
\begin{aligned}
\Delta\hat{\mathbf{i}}^{r}_{dqs,inactive} &= -\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^{r\ 2}_{dqs}}\right)^{-1}\left(\frac{\partial \hat{f}_o}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}} + \hat{\nu}[k]\frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}\right) \\
&= -\left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^{r\ 2}_{dqs}}\right)^{-1}\left((T_e - T_e^*)\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}} + \hat{\nu}[k]\frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}\right).
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

식 (4.35)의 ^은 $\mathbf{L}_s$를 사용하여 계산된다는 뜻으로 추정값을 뜻한다. $\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \big/ \partial \mathbf{i}^{r\ 2}_{dqs}$ 행렬을 풀어 써보면 아래의 구조를 갖는다.

$$
\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^{r\ 2}_{dqs}} = \frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}\left(\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}\right)^{\top} + (T_e - T_e^*)\frac{\partial^2 \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}^{r\ 2}_{dqs}} + 2\hat{\nu}[k-1]\left(\frac{\partial \mathbf{v}^{r}_{dqs}}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}\right)^{\top}\frac{\partial \mathbf{v}^{r}_{dqs}}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}. \tag{4.36}
$$

SQP 수렴 조건 (3.17)에 $\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \big/ \partial \mathbf{i}^{r\ 2}_{dqs}$ 가 부합하는지 확인하기 위해 양의 정부호성(Positive definiteness) 및 양의 준-정부호성(Positive semi-definiteness)을 확인할 필요가 있다. 양의 정부호 행렬과 양의 준-정부호 행렬의 정의는 각각 아래와 같다.

$$
\text{Positive definite matrix: } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \succ 0 \leftrightarrow \mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} > 0, \forall x \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\} \tag{4.37}
$$

$$
\text{Postivie semi-definite matrix: } \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n} \succeq 0 \leftrightarrow \mathbf{x}^{\top}\mathbf{A}\mathbf{x} \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n - \{\mathbf{0}\} \tag{4.38}
$$

$\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}\left(\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}\right)^{\top}$ 은 행렬 구조 상 인덕턴스 오차와 무관하게 양의 준-정부호 행렬이다. 아래와 같이 임의의 벡터를 곱하면, $\partial \hat{T}_e \big/ \partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}$ 벡터와 임의의 벡터 내적의 제곱에 해당하기 때문이다.

$$
\mathbf{x}^{\top}\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}\left(\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}\right)^{\top}\mathbf{x} = \left(\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}}\cdot\mathbf{x}\right)^2 \geq 0. \tag{4.39}
$$

만일 $\mathbf{x}$가 $\partial \hat{T}_e \big/ \partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}$ 와 수직을 이루면 식 (4.39)는 0이 되며, 그 외의 벡터에 대해서는 항상 양의 값을 갖는다. SQP 수렴 조건 (3.17)에 따르면, $\mathbf{L}_s$를 이용해 계산되는 등식 제한 조건의 도함수 $\partial \hat{f}_{\mathbf{v}} \big/ \partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}$ 와 수직인 벡터에 대해 양의 정부호성이 확보되어야 한다. $\partial \hat{f}_{\mathbf{v}} \big/ \partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}$ 는 전압 타원의

추정 기울기 벡터(Gradient vector)이며 오직 추정 MTPV 운전점에서만 $\partial \hat{T}_e / \partial \mathbf{i}_{dqs}^r$ 와 $\partial \hat{f}_{\mathbf{v}} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^r$ 가 평행하다. MTPV 운전점 정의 및 설명은 부록 E에 수록되어 있다. 따라서 추정 MTPV 곡선 위 운전점들에서만 식 (4.39)는 0 값을 가질 수 있고, 추정 MTPV 곡선을 제외한 다른 운전점에서는 $\partial \hat{T}_e / \partial \mathbf{i}_{dqs}^r$ 와 $\partial \hat{f}_{\mathbf{v}} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^r$ 가 평행하지 않으므로 항상 아래 식과 같이 양의 정부호성을 갖는다.

$$\mathbf{u}^\top \frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} \left(\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} \right)^\top \mathbf{u} = \left(\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} \cdot \mathbf{u} \right)^2 > 0, \forall \mathbf{u} \in \left\{ \mathbf{u} : \left(\frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} \right)^\top \mathbf{u} = \mathbf{0} \right\}. \tag{4.40}$$

$\left(\frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^r}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} \right)^\top \frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^r}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r}$ 또한 마찬가지의 이유로 행렬 구조 상 인덕턴스 오차와 무관하게 양의 준정부호 행렬이나, 약자속 운전 중인 영구자석 동기기에 대해서는 항상 아래의 조건을 만족하는 양의 정부호 행렬이다.

$$\mathbf{u}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^r}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} \right)^\top \frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^r}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} \mathbf{u} > 0, \forall \mathbf{u} \in \left\{ \mathbf{u} : \left(\frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} \right)^\top \mathbf{u} = \mathbf{0} \right\}. \tag{4.41}$$

식 (4.41)의 조건을 만족하는 벡터 **u**로부터 아래와 같은 특성을 유도할 수 있다.

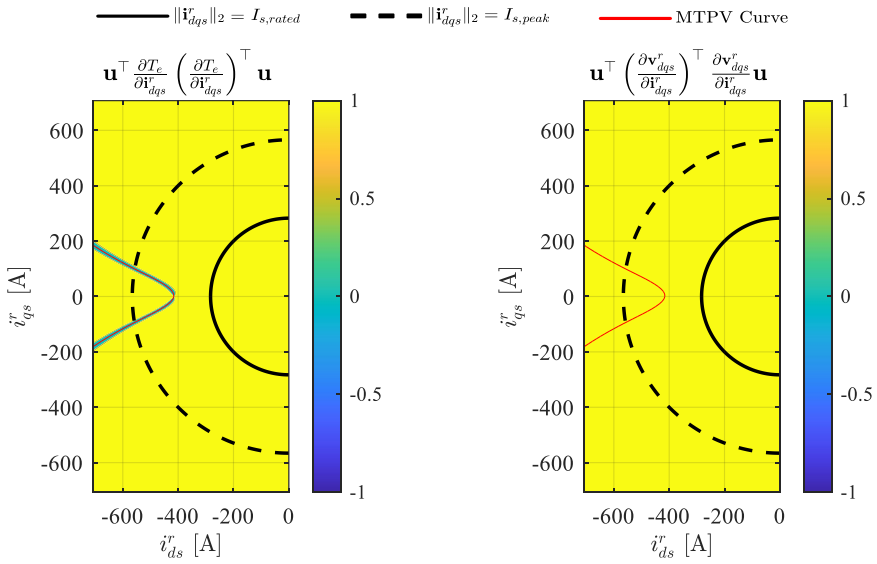
$$\left(\frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} \right)^\top \mathbf{u} = 2\mathbf{v}_{dqs}^{r\top} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^r}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} \right) \mathbf{u} = 0 \leftrightarrow \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^r}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} \right) \mathbf{u} = k\mathbf{J}\mathbf{v}_{dqs}^r \text{ for } k \neq 0. \tag{4.42}$$

식 (4.42)를 식 (4.41)의 양의 정부호성 판별식에 넣으면 아래와 같이 식이 유도된다.

$$\mathbf{u}^\top \left(\frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^r}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} \right)^\top \frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^r}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} \mathbf{u} = \left(k\mathbf{J}\mathbf{v}_{dqs}^r \right)^\top \left(k\mathbf{J}\mathbf{v}_{dqs}^r \right) = k^2 \mathbf{v}_{dqs}^{r\top} \mathbf{v}_{dqs}^r. \tag{4.43}$$

영구자석 동기기에는 영구 자석으로 인한 자속이 있고, 약자속 운전 중에서는 전동기가 회전하고 있으므로 역기전력이 발생하여 전압의 크기가 0이 되지 못한다. 따라서 식 (4.43)은 항상 양의 값을 갖는다.

그러므로 약자속 운전 중인 영구자석 동기기에 대해서 $\left(\frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^{r}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}}\right)^{\top} \frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^{r}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}}$ 행렬은 인덕턴스 오차와 무관하게 양의 정부호 행렬이 된다.



(가) 식 (4.40) (나) 식 (4.41)

그림 4-3. 운전점 별 양의 정부호성

그림 4-3은 각 운전점별 식 (4.40)와 (4.41)의 연산 결과를 보여준다. 연산에 사용된 $\mathbf{u}$는 $\partial f_{\mathrm{v}} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}$ 벡터를 90도 회전한 단위 벡터이다. 중요한 것은 양의 정부호성을 보이는 것이므로 색상값의 최대 최소는 1과 -1로 제한하였다. 노란색은 1 이상의 값을 의미한다. 그림 (가)에서는 MTPV 곡선 외 영역에서, 그림 (나)에서는 모든 영역에서 양수 값을 보인다.

$\partial^2 \hat{T}_e / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\,2}$ 은 인덕턴스 성분만 포함하므로 자속 성분을 포함하는 $\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \left(\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}}\right)^{\top}$ 에 비해 각 요소별로 극히 작은 값을 가지고 있다. 아래 이어지는 그림 4-4와 그림 4-5는 각각 $\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \left(\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}}\right)^{\top}$ 와 $\partial^2 \hat{T}_e / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\,2}$ 의 행렬 요소별 값들을 모든 운전점에 대하여 보여주고 있다.

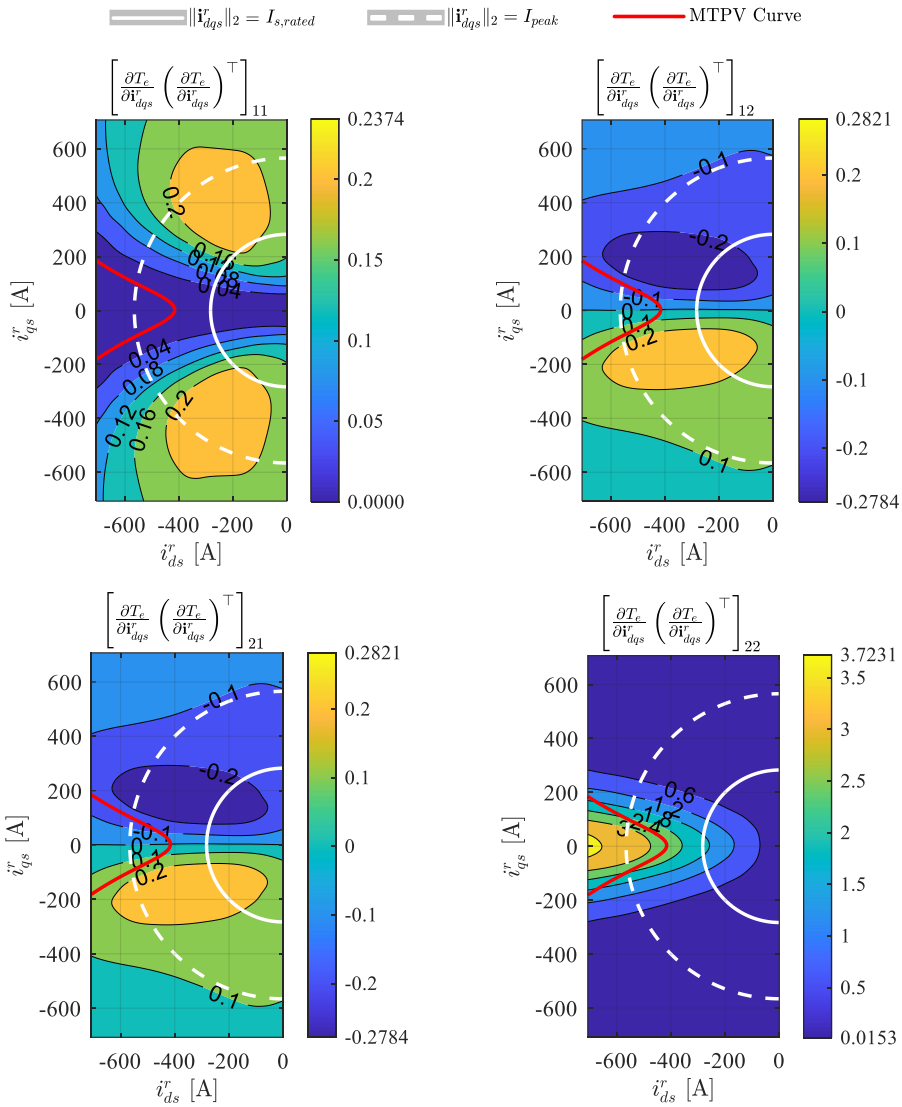


그림 4-4. 토크 1계 미분으로 이루어진 행렬

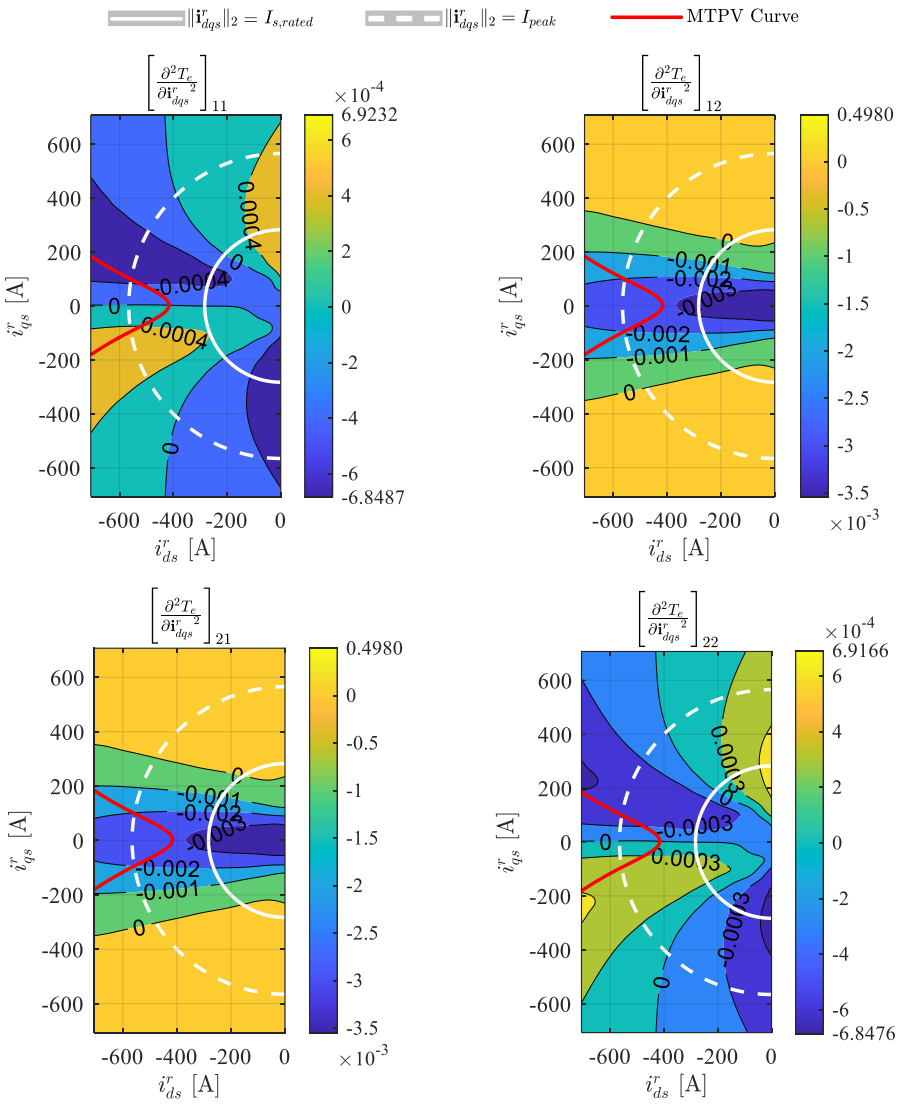


그림 4-5. 토크 2계 미분으로 이루어진 행렬

값의 범위 및 크기를 확인하면 약 200배 이상 차이가 나는 것을 확인할 수 있다. 특히 등토크 곡선 근방에 있으면 토크 오차가 작아 무시할만큼 작은 값을 가지게 된다. 따라서 위의 값을 포함하여 계산한다 하여도 $\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}} \big/ \partial \mathbf{i}^{r\,2}_{dqs}$ 행렬의 양의 정부호성에는 영향을 주지 않는다. 만일 $\partial^2 \hat{T}_e \big/ \partial \mathbf{i}^{r\,2}_{dqs}$ 을 무시한다면 아래와 같이 근사가 가능하다.

$$\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}} \simeq \frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r}\left(\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r}\right)^\top + 2\nu[k-1]\left(\frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^r}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r}\right)^\top \frac{\partial \mathbf{v}_{dqs}^r}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r}. \tag{4.44}$$

여유 변수 ν 는 $\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}$ 로 하여금 양의 정부호 행렬이 되도록 갱신되므로 $\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}$ 는 등토크 운전 영역에서 양의 정부호 행렬이 된다. 대칭 행렬이자 양의 정부호성을 가진 행렬은 가역 행렬이므로 $\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}$ 행렬은 가역 행렬이 된다. 국소 수렴점으로 수렴하는 SQP 방법은 $\Delta \hat{\mathbf{i}}_{dqs,inactive}^r$ 을 0 벡터로 보내도록 동작하는데, 가역 행렬의 영공간에는 0 벡터만 존재하기 때문에 식 (4.35)를 통한 약자속 운전은 아래의 방정식이 만족하는 운전점으로 수렴하게 된다.

$$(T_e - T_e^*)\frac{\partial \hat{T}_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} + \hat{\nu}[k]\frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} = \frac{\partial \hat{f}_o}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} + \hat{\nu}[k]\frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r} = \mathbf{0}. \tag{4.45}$$

식 (4.45)를 식 (4.29)에 대입하면 아래의 방정식을 만족하게 된다.

$$\frac{1}{\left(\frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r}\right)^\top \left(\frac{\partial^2 \mathcal{L}_{\mathbf{v}}[k]}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r\ 2}}\right)^{-1} \frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^r}} f_v(\mathbf{i}_{dqs}^r[k]) = 0. \tag{4.46}$$

식 (4.46)은 전압 제한 조건 함수가 0이 되는 것을 의미하므로, 운전점이 인덕턴스 오차와 무관하게 전압 타원 위로 수렴한다는 것을 뜻한다.

한편 식 (4.45)에서 서로 평행하지 않은 두 벡터의 합이 0 벡터가 되기 위해서는 각각의 벡터가 모두 0 벡터가 되어야 한다. 전동기 토크는 전류의 크기를 키워도 자속이 포화될지 언정 토크를 키울 수 있으므로 $\partial \hat{T}_e / \partial \mathbf{i}_{dqs}^r$ 가 0벡터가 될 수 없다. 전압 타원의 기울기 벡터 $\partial \hat{f}_{\mathbf{v}} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^r$ 또한 0벡터가 될 수 없다. 따라서 식 (4.45)를 만족하는 운전점으로 수렴하면 $(T_e - T_e^*)$ 와 여유 변수 ν가 0이 된다.

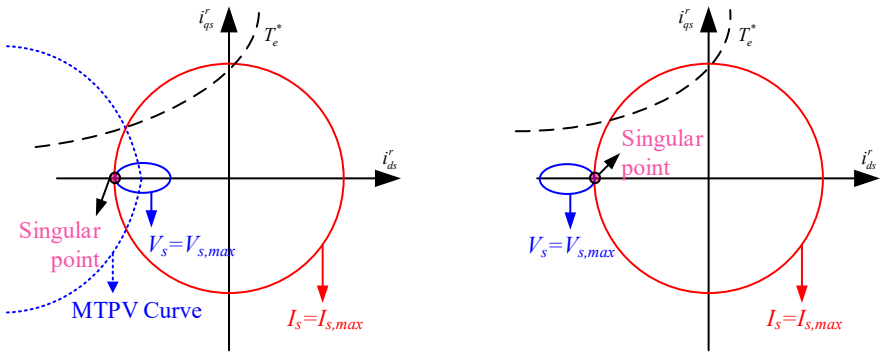
결론적으로 $\partial \hat{T}_e / \partial \mathbf{i}_{dqs}^r$ 와 $\partial \hat{f}_{\mathbf{v}} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^r$ 가 평행하지 않은 운전 영역, 즉

MTPV 운전점이 아닌 곳에서 식 (4.35)로 운전하는 약자속 운전 영역은 인덕턴스 오차와 무관하게 전압 타원과 등토크 곡선의 교점으로 수렴한다는 사실을 알 수 있다.

4.3.2 전류 제한 원 상에서의 운전 상황

제안하는 토크 제어기는 전류 제한 원 상에서 식 (4.23)으로 전류 지령을 생성한다. 정확한 $\mathbf{L}_h$ 대신 $\mathbf{L}_s$를 사용하였을 때 계산되는 추정 최적해 $\Delta\hat{\mathbf{i}}^r_{dqs,active}$은 아래와 같이 계산된다.

$$\begin{aligned}\Delta\hat{\mathbf{i}}^r_{dqs,active} &= -\begin{bmatrix}\left(\dfrac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}}\right)^\top \\ \left(\dfrac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}^r_{dqs}}\right)^\top\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) \\ f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k])\end{bmatrix} \\ &= -\begin{bmatrix} 2\mathbf{i}^r_{dqs}{}^\top \\ 2\mathbf{v}^r_{dqs}{}^\top(\mathbf{R}_s+\omega_r\mathbf{J}\mathbf{L}_s)\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k]) \\ f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}^r_{dqs}[k])\end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.47}$$



(가) 무한 속도 시스템의 경우 (나) 유한 속도 시스템의 경우

그림 4-6. 특이점이 발생하는 운전점

식 (4.47)에서 역행렬은 $\mathbf{L}_s$ 로 그려지는 전압 타원과 전류 제한 원이 서로 접하는 운전점을 제외하면 항상 구할 수 있다. 그림 4-6에서 이러한 특이점이 발생하는 운전점에 대하여 개념적으로 도시하고 있다.

해당 지점에서 특이점이 발생하는 이유는 전류 제한 원과 전압 타원이 서로 접하면서 전류 제한 원의 기울기 벡터 $\partial f_{\mathbf{i}} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}$ 와 전압 타원의 기울기 벡터 $\partial \hat{f}_{\mathbf{v}} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}$ 가 서로 평행이 되기 때문이다. 두 벡터가 평행이 되면 아래 방정식이 성립해 역행렬을 계산할 수 없게 된다.

$$\frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \times \frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} = \left(\mathbf{J} \frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} \frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} = 0 = \det \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} \\ \left(\frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial i_{ds}^{r}} & \frac{\partial f_{\mathbf{i}}}{\partial i_{qs}^{r}} \\ \frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial i_{ds}^{r}} & \frac{\partial \hat{f}_{\mathbf{v}}}{\partial i_{qs}^{r}} \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

영구자석 동기기 특성상 무한 속도 시스템에 대해서는 해당 지점에 도달하기 전 MTPV 곡선을 만나고 이후 운전점은 MTPV 곡선을 따라 움직인다. 따라서 비가역 행렬이 되는 운전점에는 도달하지 않는다. 유한 속도 시스템에서는 속도가 올라감에 따라 전압 타원이 전류 제한원 밖으로 벗어날 수 있지만, 이 경우 전류 제한원이 커지지 않는 이상 물리적으로 실현 불가능한 운전점이 된다. 따라서 유한 속도 시스템에서 실현 가능한 속도로 운전 영역을 제한한다면 식 (4.47)의 역행렬은 항상 연산할 수 있다. SQP 방법은 $\Delta \hat{\mathbf{i}}_{dqs,active}^{r}$ 를 0 벡터로 보내도록 동작하는데, 가역 행렬의 영 공간에는 0 벡터만 존재하므로 $\left[f_{\mathbf{i}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}[k]) \quad f_{\mathbf{v}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) \right]^{\top} \in \mathbb{R}^{2}$ 벡터가 0 벡터로 수렴하게 된다. 이는 곧 전류 제한 원과 실제 전압 타원의 교점에 수렴한다는 것을 의미한다.

4.3.3 MTPV 곡선 상에서의 운전 상황

제안하는 토크 제어기는 등토크 곡선 상에서의 운전과 마찬가지로 MTPV 곡선 상에서도 식 (4.35)로 전류 지령을 생성한다. 따라서 이 경우도 운전점은 식 (4.45)를 만족하는 운전점으로 수렴한다. MTPV 운전점의 경우 토크 오차를 0으로 보낼 수 없는 대신 $\partial \hat{T}_{e} / \partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}$ 와

$\partial \hat{f}_{\mathrm{v}} / \partial \mathbf{i}^{r}_{dqs}$ 가 평행한 운전점에 진입하게 된다. 그러나 문제는 전압 타원의 기울기 벡터, 토크의 기울기 벡터를 정확한 인덕턴스가 아닌 $\mathbf{L}_s$로 계산한다는 점이다. 따라서 앞서 기술한 등토크 곡선 상에서의 운전, 전류 제한 원 상에서의 운전과는 다르게 실제 MTPV 곡선이 아닌 오차가 있는 MTPV 운전점으로 안착하게 된다. 정확한 MTPV 운전을 추종하기 위해서는 MTPV 곡선 위 운전점에 대하여 증분 인덕턴스가 필요하다.

위와 같은 분석을 통해 제안하는 약자속 운전 토크 제어기는 등토크 곡선 상에서의 운전과 전류 제한 원 상에서의 운전 시 최적 운전점에 대해 정상 상태 오차가 없도록 추종할 수 있다. 따라서 유한 속도 시스템에 적합하다. 실현 가능한 토크 지령에 대해서는 정확한 토크 제어가 가능하고, 실현 불가능한 토크 지령에 대해서는 최대 토크를 출력할 수 있다.

제 5장 시뮬레이션 및 실험 검증

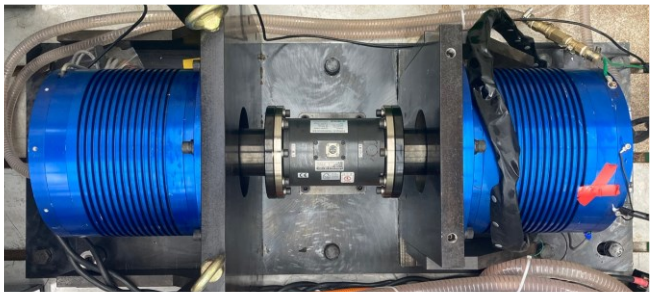
본 장에서는 4장에서 유도한 최적해를 기반으로 제안하는 약자속 운전 토크 제어기 시뮬레이션 및 실험 검증을 다룬다.

5.1절에서는 시뮬레이션 및 실험 조건에 대해 서술한다. 전류 제어기의 구조 및 대역폭, 자속 관측기의 구성 및 설정 파라미터에 대해 기술한다. 스위칭 및 샘플링 주파수를 포함한 실험 조건에 대해 서술한다.

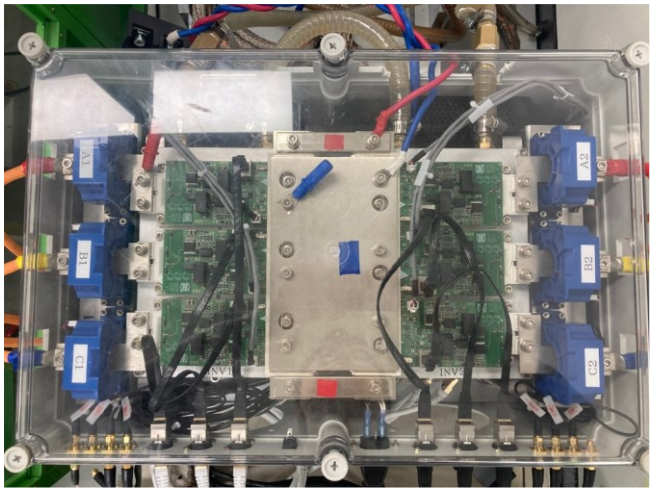
5.2절에서는 시뮬레이션 검증에 대해 서술한다. 4장에서 밝힌 수렴성 분석에 대해 운전 조건 별로 시뮬레이션을 진행하여 검증한다. 등토크 곡선 및 전류 제한원 상에서 인덕턴스 오차에 강인한 운전이 가능함을 보인다. MTPV 곡선 위 운전점으로 진입했을 때 인덕턴스 오차로 인해 발생하는 수렴점 오차를 확인한다. 실험에 사용된 전동기 및 인버터 최대 허용 전류는 MTPV 운전점을 포함하지 않으므로 MTPV 운전 검증은 시뮬레이션에서만 진행된다. 그림 4-2의 순서도와 같이 제안하는 토크 제어기는 약자속 운전 영역이 변화할 때 내부에 절환하는 단계가 존재한다. 이러한 절환 과정이 4장에서 분석한 바와 같이 원활하게 이루어지는지 확인한다. 절환 과정을 포함하여 제안하는 토크 제어기의 약자속 운전점 추종 동특성을 확인한다.

5.3절에서는 실험 검증에 대해 서술한다. 시뮬레이션과 같이 등토크 곡선 및 전류 제한원 상에서 정상 상태 오차가 없는 운전점 추종이 가능함을 확인한다. 약자속 운전 영역에서의 절환 과정을 확인하고 약자속 운전점 추종의 동특성을 실험적으로 확인한다. 제안하는 약자속 운전 토크 제어기는 등토크 곡선 상에서의 운전 시 정확한 토크 제어가 가능하므로 고속 속도 제어 상황에서의 속도 응답을 개선할 수 있다. 이러한 특성을 실험적으로 검증한다.

5.1 시뮬레이션 및 실험 조건



(가) 실험 대상 전동기



(나) 실험용 인버터

그림 5-1. 실험 세트 구성

본 논문에서 사용된 전동기와 실험용 인버터는 그림 5-1에 도시되어 있다. 전동기의 상세 사양은 부록 D에 수록하였다. 본 논문에서 사용된 DC 전압과 인버터 출력 상전압, 전류 제한 조건 조건은 표 5-1과 같이 설정하였다. 출력 상전압은 선형 변조를 가정 하였으며, 제어 여유 5%를 고려하여 크기가 제한되었다. 실험 상에서는 인버터 전류 용량을 고려해 전류 제한을 200 A로 설정하였고, MTPV 운전 검증 시뮬레이션에 한해서 전류 제한을 500 A로 설정하였다.

표 5-1. DC 전압, 상전압 및 상전류 제한 조건

변수	값	단위
DC 전압(V_{dc})	300	V
최대 상 전압($V_{s,max}$)	$0.95\times V_{dc}/\sqrt{3}$	V
최대 상 전류($I_{s,max}$)	200	A
[MTPV 시뮬레이션] 최대 상 전류($I_{s,max}$)	500	A

전류 제어기 관련 제정수 및 이득을 다음과 같이 설정하였다. 이때 사용된 고정자 인덕턴스는 제안하는 토크 제어기에서도 사용되었다.

표 5-2. 전류 제어기 관련 제정수 및 이득

변수	값	단위
전류 제어기 종류	복소수 벡터 전류 제어기	
전류 제어 대역폭(ω_{cc})	100	Hz
샘플링 주파수(f_{samp})	10	kHz
스위칭 주파수(f_{sw})	10	kHz
고정자 저항(R_s)	13.3	mΩ
d축 고정자 인덕턴스(L_{ds})	185.51	μH
q축 고정자 인덕턴스(L_{qs})	372.74	μH

약자속 운전은 고속 운전을 상정하고 있으므로, 전압 모델 기반의 자속 관측기를 사용하였다. 전압 모델 기반의 자속 관측기는 출력 전압을 적분하여 고정자 자속을 추정한다. 직류 성분 오차가 있으면 발산할 수 있으므로, 관측기 출력에 고역 통과 필터를 적용하였고, 이때 발생하는 위상차는 보상하였다.

표 5-3. 자속 관측기 관련 이득

변수	값	단위
자속 관측기 종류	전압 모델 기반 자속 관측기	
고역 통과 필터 차단 주파수(ω_{fo})	10	Hz
고역 통과 필터 감쇠 계수(ζ_{fo})	0.707	
고정자 저항(R_s)	13.3	mΩ

제안하는 약자속 운전 토크 제어기는 회전자 속도가 기저 속도 90% 이상인 경우 동작시키고, 그 미만이면 정지시키고 있다. 저속의 경우 자속 관측기에 오차가 발생할 수 있고 전압 타원이 전류 제한원 보다 커지게 되면 제안하는 토크 제어기의 연산이 불가능하기 때문이다. 기저 속도 90% 수준에서 제안하는 약자속 운전 토크 제어기를 동작시키는 이유는 약자속 운전 영역 진입 시 MTPA 운전과의 절환을 위해서다. 약자속 운전점은 항상 MTPA 운전점보다 크기가 더 큰 음의 d축 전류를 갖는다. 따라서 MTPA 운전을 위한 전류 지령과 약자속 운전을 위한 전류 지령을 비교할 때 d축 전류 지령을 비교하여 MTPA 운전과 약자속 운전을 절환할 수 있다. 실험 및 시뮬레이션에서는 아래와 같은 순서도로 절환하고 있으며, 빨간 선으로 표기된 상황에서만 제안하는 약자속 운전 토크 제어기의 전류 지령이 사용된다.

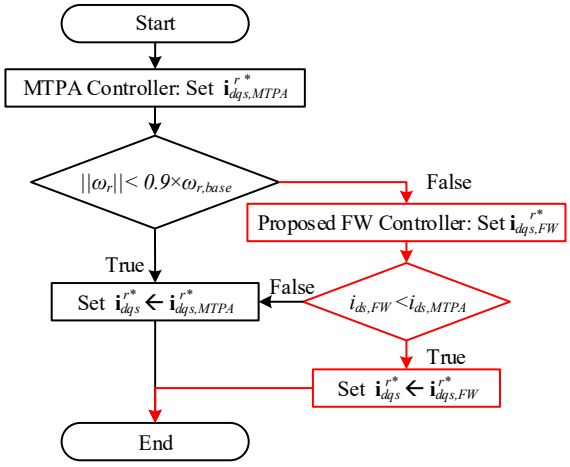
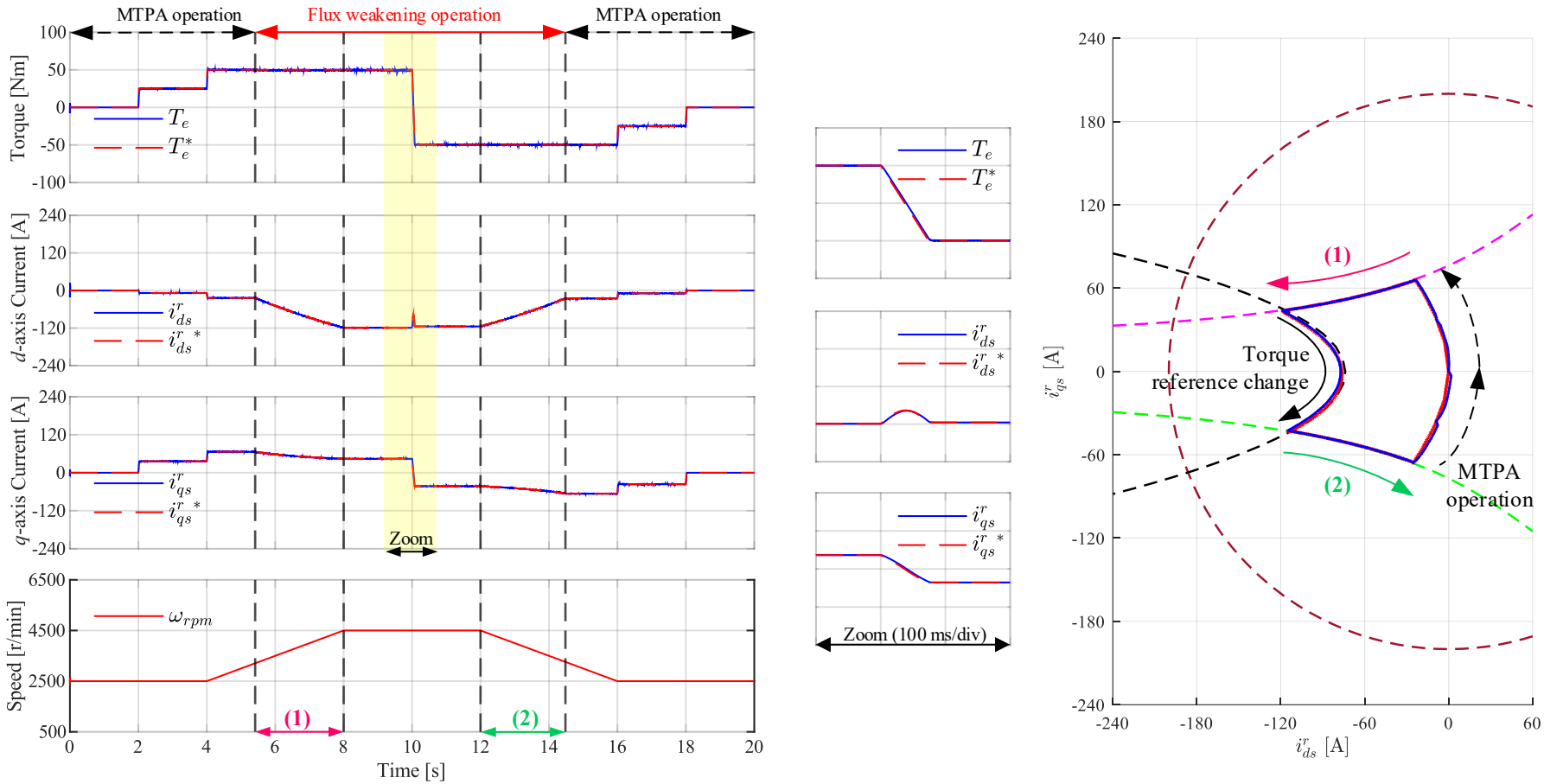


그림 5-2. MTPA 운전 및 약자속 운전 영역 절환 순서도

5.2 시뮬레이션 검증

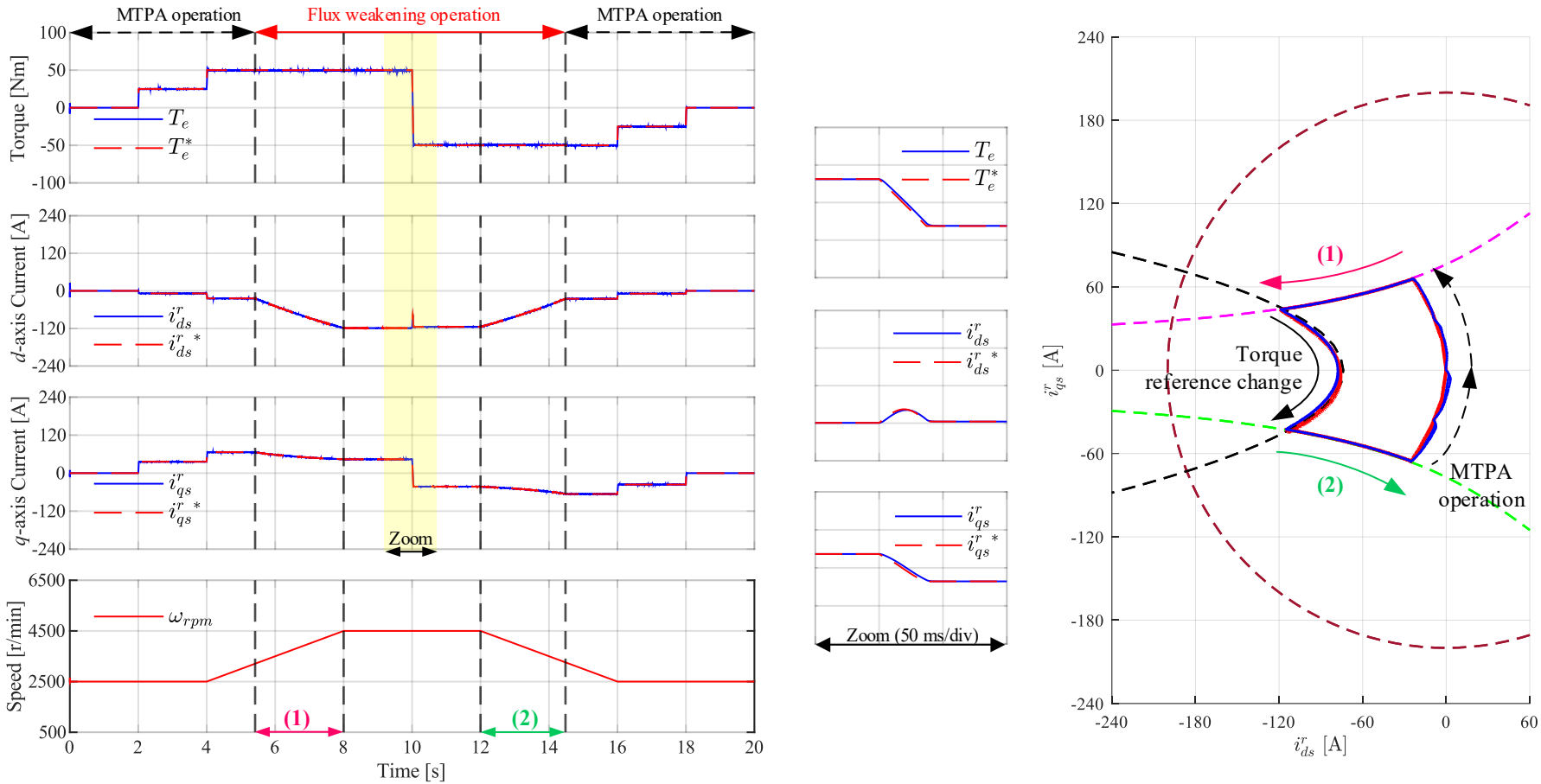
5.2.1 등토크 곡선 상에서의 운전 검증



(가) 시간에 따른 토크 응답, 전류 궤적 및 확대 파형

(나) 리사쥬 파형

그림 5-3. 실현 가능한 토크 지령에 대한 토크 응답, 전류 궤적 (T_e^*: 50 N·m → – 50N·m, 지령 변화율: 10 pu/s = 1,350 N·m/s)



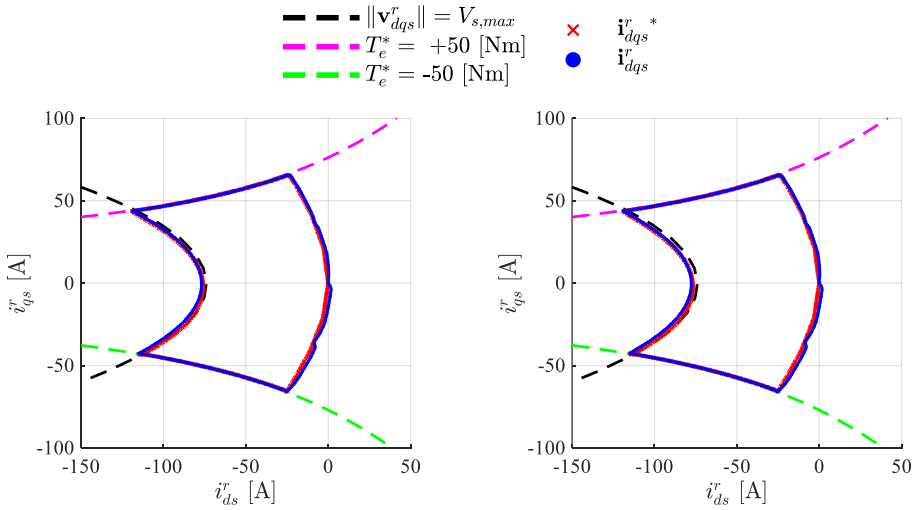
(가) 시간에 따른 토크 응답, 전류 궤적 및 확대 파형

(나) 리사쥬 파형

그림 5-4. 실현 가능한 토크 지령에 대한 토크 응답, 전류 궤적 (T_e^*: 50 N·m → – 50N·m, 지령 변화율: 20 pu/s = 2,700 N·m/s)

그림 5-3은 토크 지령을 ± 50 N·m로 주고 전동기 속도를 4,500 r/min까지 가속하여 등토크 곡선 상에서의 약자속 운전을 모의한 결과이다. 4초에 걸쳐 2,000 r/min을 가/감속 하였고, 속도가 변화함에 따라 등토크 곡선 상에서 전류 운전점이 움직이는 것을 확인할 수 있다. 4,500 r/min에서 토크 지령을 10 pu/s(=1,350 N·m/s) 변화율을 가지고 +50 N·m 에서 –50 N·m로 변화시켰다. 토크 지령이 변화함에 따라 운전점이 전압 타원을 타고 이동하는 것을 확인할 수 있다.

그림 5-4에서는 토크 지령의 응답성을 확인하기 위해 토크 지령 변화율을 20 pu/s(=2,700 N·m/s)로 설정한 뒤 +50 N·m 에서 –50 N·m로 지령을 변화시켜 응답성을 확인한 결과이다. 과도 상태에서는 전압 타원과 완벽히 일치하지 않지만 최종적으로는 전압 타원과 등토크 곡선의 교점을 추종하는 것을 확인할 수 있다. 과도 상태에서 전압 타원과 정확하게 일치하지 않는 것은 전류 제어기의 동특성이 제한되었기 때문이라 추정된다.



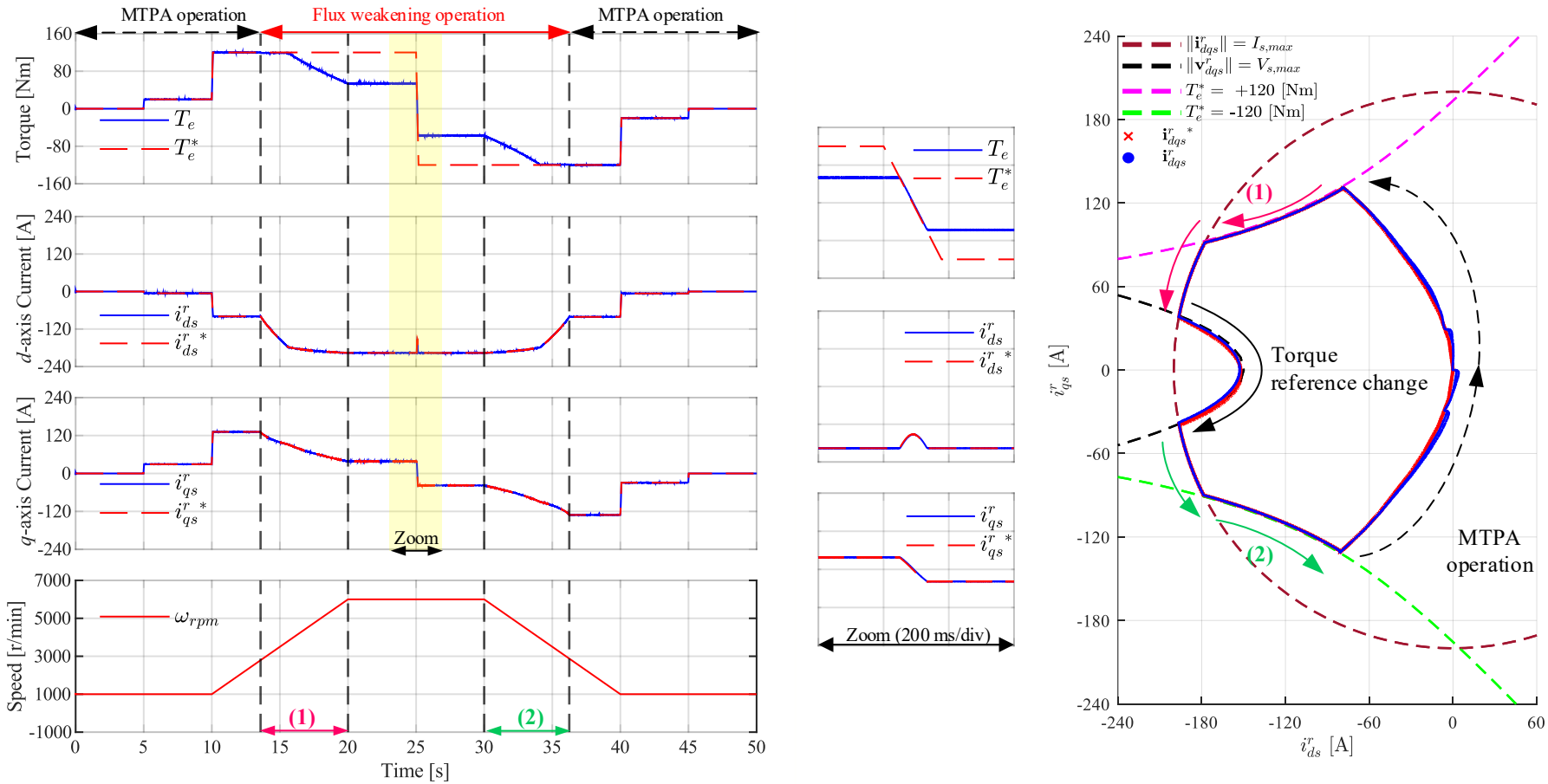
(가) 추정 $L_{s,est} = 0.5\ L_{s,nominal}$ (나) 추정 $L_{s,est} = 1.5\ L_{s,nominal}$

그림 5-5. 등토크 곡선 상에서의 운전 시 추정 인덕턴스 오차 영향

그림 5-5는 그림 5-3과 같은 조건에서 제안하는 약자속 운전 토크 제어기의 추정 인덕턴스에 오차가 있을 때를 모의한 시뮬레이션이다. 4.3.1절에서 보인 바와 같이 약자속 제어기에 사용된 인덕턴스 값이

달라도 실제 등토크 곡선 및 전압 타원 곡선의 교점을 정확히 추종하는 것을 확인할 수 있다. 구현 상에서는 전류 제어기에서 공칭 제정수인 정적 인덕턴스 값을 사용하기 때문에, 해당 값을 제안하는 약자속 운전 토크 제어기에도 동일하게 사용하면 된다. 이를 통해 운전점에 따른 인덕턴스의 실시간 보정 없이도 간단히 등토크 곡선 및 전압 타원 곡선의 교점을 추종할 수 있다.

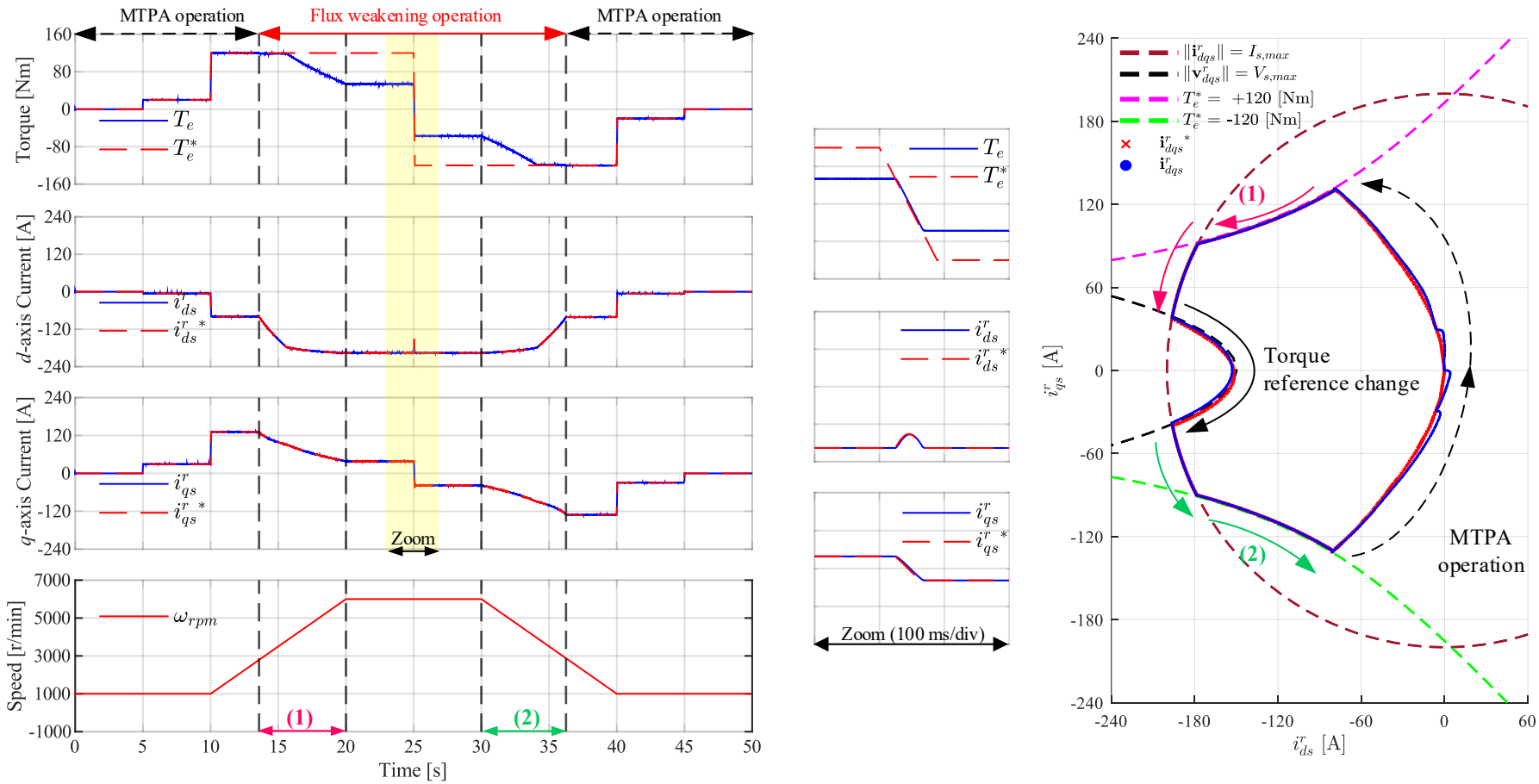
5.2.2 전류 제한 원 상에서의 운전 검증



(가) 시간에 따른 토크 응답, 전류 궤적 및 확대 파형

(나) 리사쥬 파형

그림 5-6. 실현 불가능한 토크 지령에 대한 토크 응답, 전류 궤적 (T_e* : 120 N·m → – 120N·m, 지령 변화율: 10 pu/s = 1,350 N·m/s)



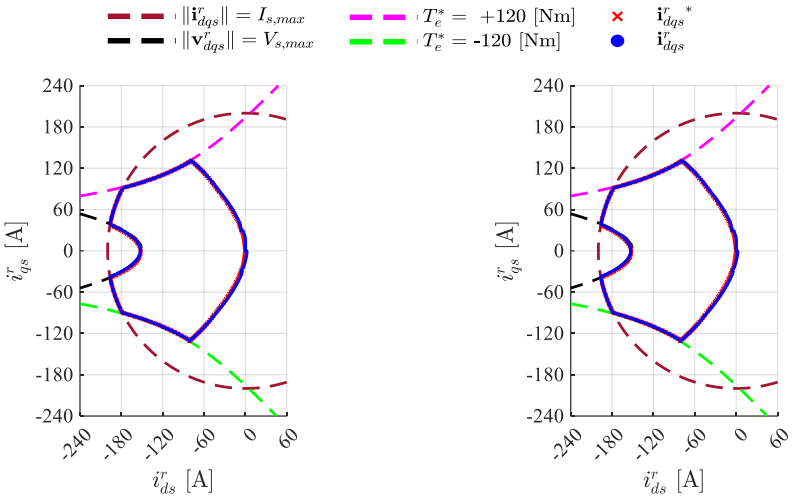
(가) 시간에 따른 토크 응답, 전류 궤적 및 확대 파형

(나) 리사쥬 파형

그림 5-7. 실현 불가능한 토크 지령에 대한 토크 응답, 전류 궤적 (T_e* : 120 N·m → – 120N·m, 지령 변화율: 20 pu/s = 2,700 N·m/s)

그림 5-6은 토크 지령을 ±120 N·m로 주고 속도 지령을 6,000 r/min까지 선형적으로 증가시켰을 때 전류 제한 원 영역에 대하여 약자속 운전을 시뮬레이션한 결과이다. 10초에 걸쳐 5,000 r/min만큼의 속도를 가/감속하였고 속도가 증가함에 따라 주어진 토크 지령은 실현 불가능한 토크 지령이 되었다. 따라서 전류 궤적은 등토크 곡선을 타고 움직이다가 토크 지령이 실현 불가능해지면 전류 제한원을 타고 움직이는 것을 확인할 수 있다. 이는 등토크 곡선 상에서 $\mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,inactive}$ 최적해를 사용하다가 식 (4.33)에 따라 $\mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,active}$ 로 절환하였음을 의미한다. 6,000 r/min 속도에서 10 pu/s(=1350 N·m/s) 변화율을 가지고 +120 N·m 에서 –120 N·m로 변화시켰다. 이 경우에는 전압 타원을 타고 운전점이 이동하는 것을 확인할 수 있다.

그림 5-7은 토크 지령의 응답성을 확인하기 위해 토크 지령 변화율을 20 pu/s(=2,700 N·m/s)로 설정한 뒤 120 N·m에서 –120 N·m로 변화시켜 응답성을 확인한 결과이다. (나)의 리사쥬 파형을 보면 그림 5-6과 마찬가지로 전압 타원을 따라 운전점이 이동하는 것을 확인할 수 있으며, 300 ms 이내로 최적 운전점에 도달하는 것을 확인할 수 있다.



(가) 추정 $\mathbf{L}_{s,est} = 0.5\ \mathbf{L}_{s,nominal}$ (나) 추정 $\mathbf{L}_{s,est} = 1.5\ \mathbf{L}_{s,nominal}$

그림 5-8. 전류 제한 원 상에서의 운전 시 추정 인덕턴스 오차 영향

그림 5-8은 제안하는 약자속 운전 토크 제어기의 추정 인덕턴스에 오차를 준 뒤, 그림 5-6과 같은 조건으로 수행한 시뮬레이션이다. 4.3.1절과 4.3.2절에서 보인 바와 같이 약자속 제어기에 사용된 인덕턴스 값이 달라도 동일한 등토크 곡선을 타고 이동하는 것을 확인할 수 있고, 같은 운전점에서 전류 제한원 운전으로 절환하는 것을 확인할 수 있다. 이후 실제 전류 제한 원 및 전압 타원의 교점을 추종해내는 것을 확인할 수 있다. 이와 같은 시뮬레이션 검증을 통해 인덕턴스 오차에 강인한 약자속 운전이 가능함을 알 수 있다.

5.2.3 MTPV 곡선 상에서의 운전 검증

MTPV 곡선은 속도에 따라 다르게 도시된다. 이는 전압 방정식의 저항 성분에 의해 나타나는 효과인데, 고속의 경우 속도에 비해 저항 성분이 작게 관여하여 무시될 수 있다. 이 경우 MTPV 곡선은 단위 자속 당 최대 토크(Maximum torque per flux, MTPF) 운전점과 유사하게 도시된다. 자세한 분석은 부록 E에 수록되어 있다. MTPF 곡선은 속도에 무관하게 도시할 수 있으므로 분석의 용이성을 위해 본 절에서는 MTPF 곡선을 기준으로 MTPV의 운전을 검증한다.

토크 곡선은 자속과 전류의 외적으로 구성된다. 자속을 전압의 적분 형태로 구한다면, 토크 곡선은 인덕턴스와 무관하게 추정할 수 있다. 그러나 MTPV와 MTPF 곡선은 전류에 대한 토크 및 전압 타원의 1계 미분으로 구성되므로 인덕턴스 값을 잘못 알면 정확하게 추정할 수 없다.

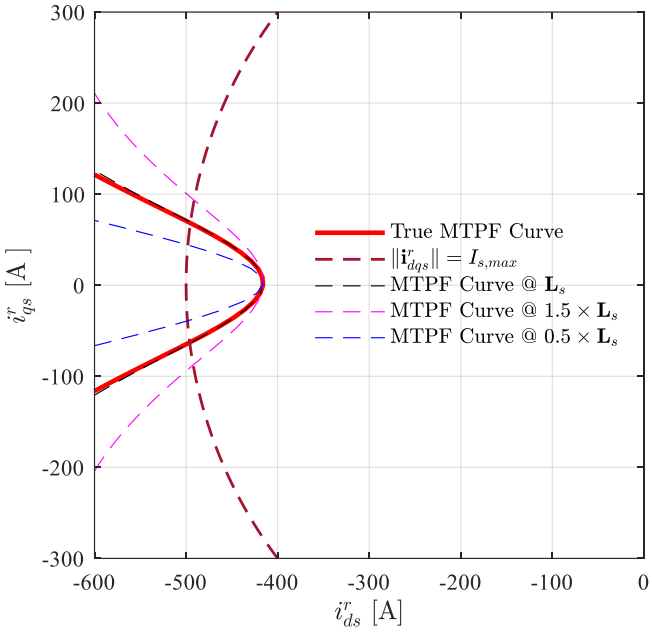
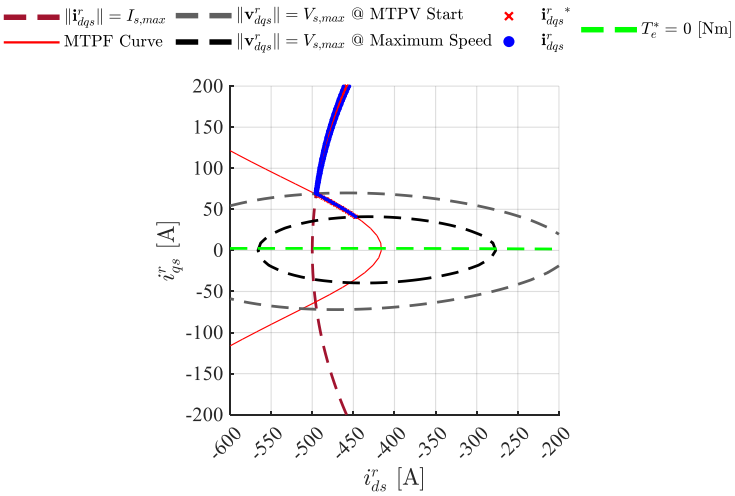


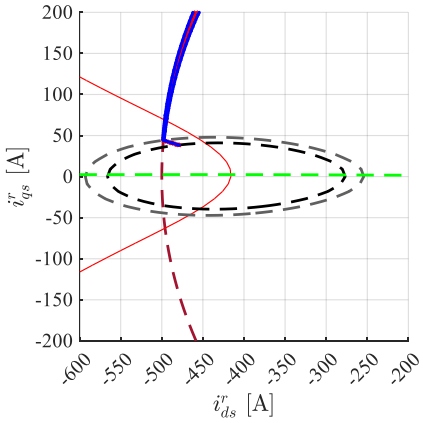
그림 5-9. 인덕턴스 오차에 의한 MTPF 곡선의 변화

그림 5-9는 인덕턴스 오차에 의한 MTPF 곡선의 영향을 보여준다. $\mathbf{L}_s$는 정격 인덕턴스 값을 의미한다. 대상 전동기는 공칭 제정수 정적 인덕턴스로 도시한 MTPF 곡선이 실제 MTPF 곡선과 가깝지만, 제정수를

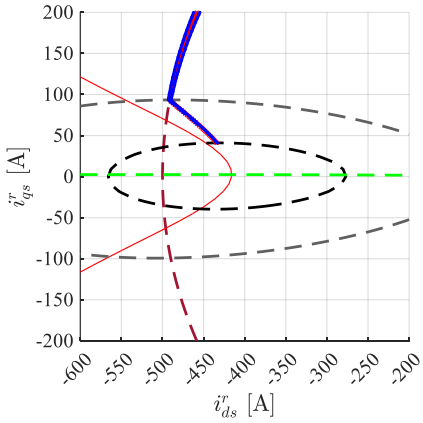
잘못 알고 있는 경우 위와 같은 MTPF 곡선은 보장되지 못한다. 잘못 추정되는 MTPF 및 MTPV 곡선은 제 2 약자속 영역으로 진입하는 속도를 변경시키고, 이후에도 최적 운전점에 도달하지 못하게 된다.



(가) . 1×Ls를 사용한 MTPV 추종 운전



(나) 0.5×Ls를 사용한 MTPV 추종 운전



(다) 1.5×Ls를 사용한 MTPV 추종 운전

그림 5-10. 제어기 인덕턴스 설정값에 따른 MTPV 운전 궤적

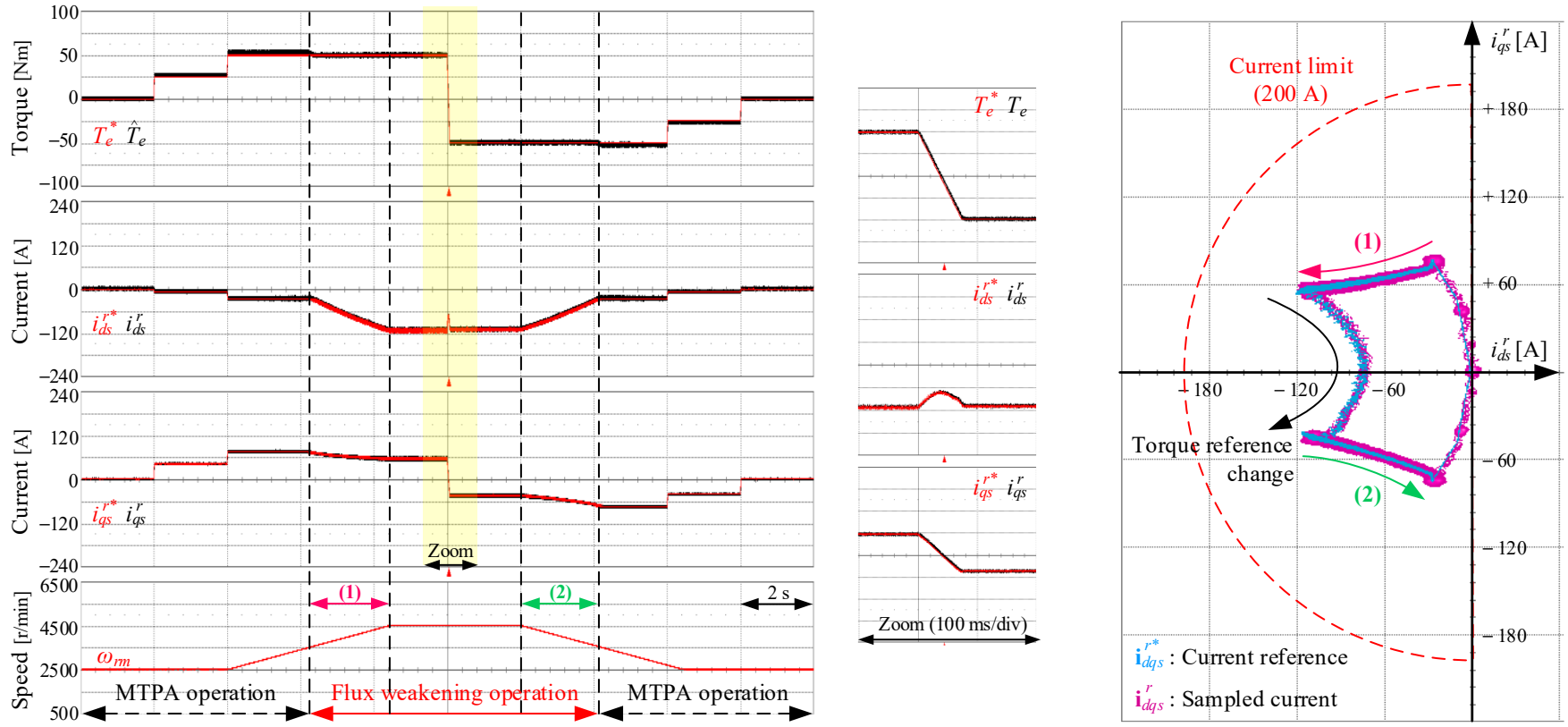
그림 5-10은 제안하는 약자속 운전 토크 제어기의 추정 인덕턴스 값을 다르게 설정했을 때의 MTPV 추종 운전 궤적을 보여준다. 1,500 r/min부터 12,000 r/min까지 전동기를 가속하여 MTPV 운전 궤적을 확인했다. 인덕턴스 제정수 오차로 인해 MTPV 운전시 정상 상태 오차를 확인할 수 있다. 회색 파선의 전압 타원 크기가 각 그림별로 다른데, 이는 MTPV 운전에 진입했다고 여겨지는 속도가 달라졌음을 의미한다.

공칭 제정수를 사용하면 실제 MTPV 운전점과 근접하게 동작한다는 것이 확인되지만, 이는 제정수 정보의 정확성에 따라 달라진다. 따라서 제안하는 약자속 운전 토크 제어기는 유한 속도 시스템에 대해서 쓰는 것이 적합하다.

5.3 실험 검증

5.3.1 등토크 곡선 상에서의 운전 검증

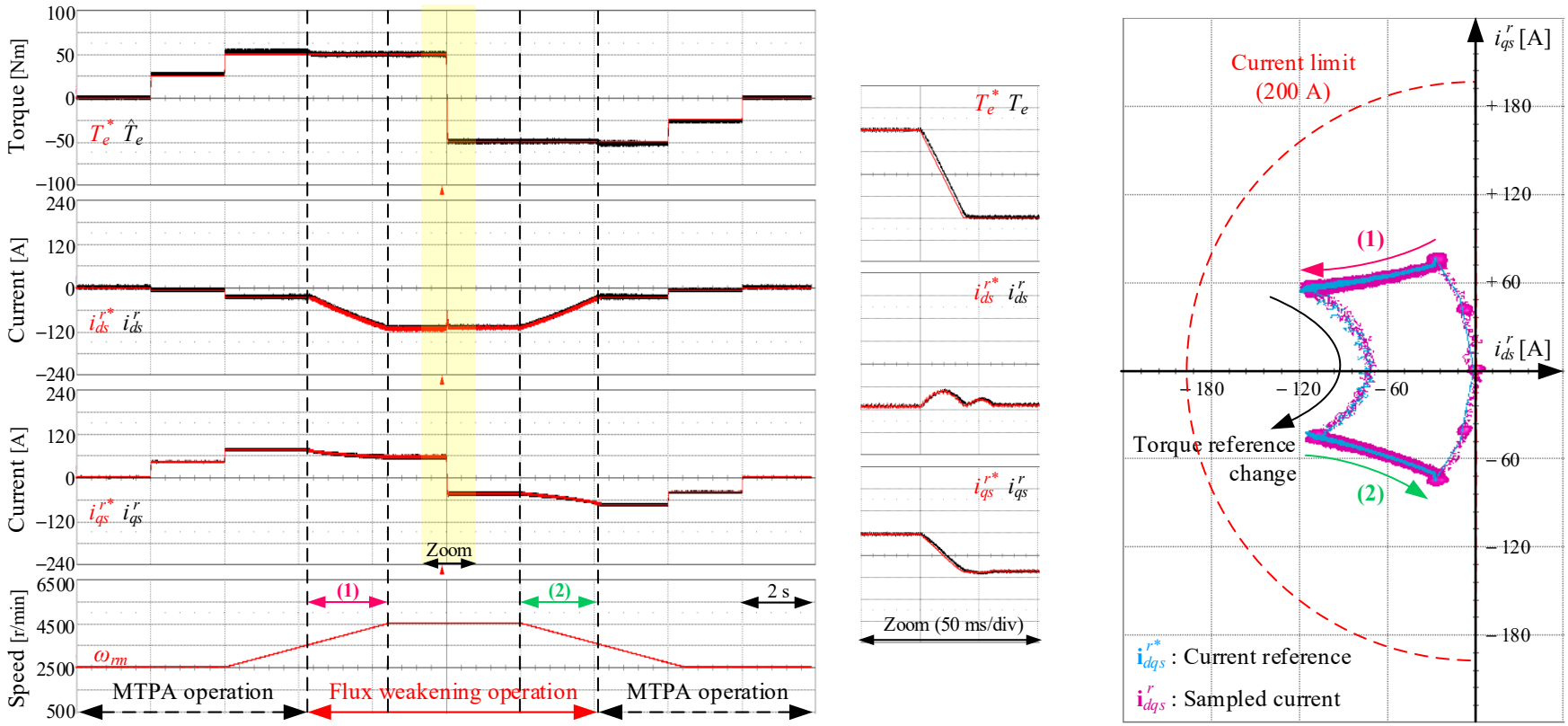
시뮬레이션 결과 검증을 위해 동일한 제정수와 운전 조건에서 대상 전동기를 실험적으로 구동해 아래의 결과를 얻었다.



(가) 시간에 따른 토크 응답 및 전류 궤적 및 확대 파형

(나) 리사쥬 파형

그림 5-11. 실현 가능한 토크 지령에 대한 토크 응답, 전류 궤적 실험 파형 (T_e^*: 50 N·m → – 50N·m, 지령 변화율: 10 pu/s = 1,350 N·m/s)



(가) 시간에 따른 토크 응답 및 전류 궤적 및 확대 파형

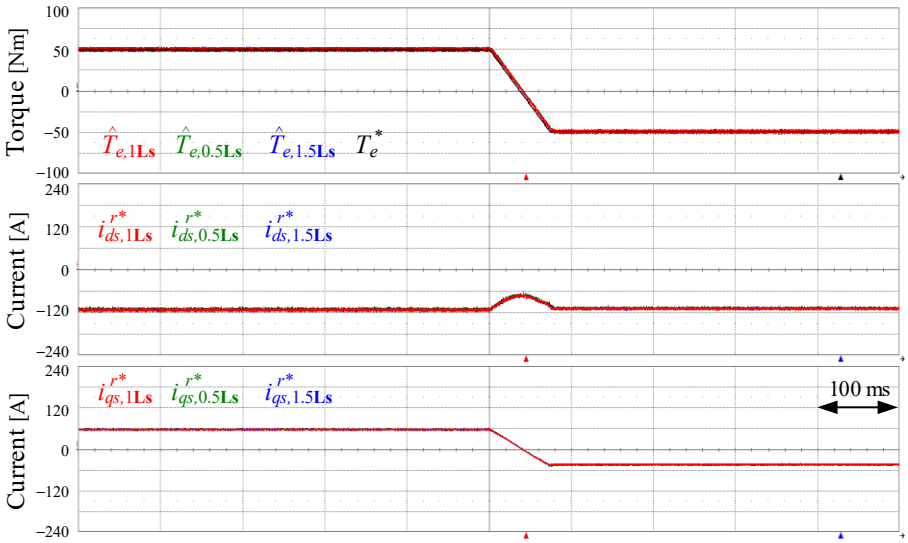
(나) 리사쥬 파형

그림 5-12. 실현 가능한 토크 지령에 대한 토크 응답, 전류 궤적 실험 파형 (T_e^*: 50 N·m → – 50N·m, 지령 변화율: 20 pu/s = 2,700 N·m/s)

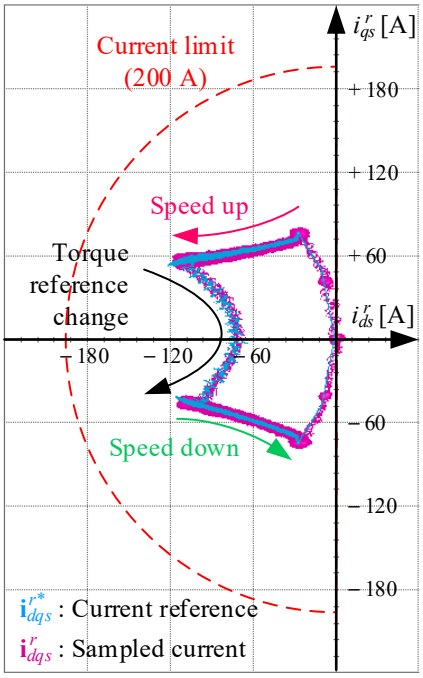
그림 5-11은 토크 지령을 ±50 N·m로 주고 전동기 속도를 4,500 r/min까지 가속하여 등토크 곡선 상에서의 약자속 운전을 실험한 결과이다. 토크 지령을 10 pu/s(=1,350 N·m/s) 변화율을 가지고 +50 N·m 에서 –50 N·m로 변화시켰다. 4초에 걸쳐 2,000 r/min을 가/감속 하였고, 속도가 변화함에 따라 등토크 곡선 상에서 전류 운전점이 움직이는 것을 (나)의 리사쥬 파형에서 확인할 수 있다. 또한 토크 지령이 변화함에 따라 운전점이 전압 타원을 타고 이동하는 것을 확인할 수 있다.

그림 5-12는 토크 지령의 응답성을 확인하기 위해 토크 지령 변화율을 20 pu/s(=2,700 N·m/s)로 설정한 뒤 +50 N·m 에서 –50 N·m로 지령을 변화시켜 응답성을 확인한 결과이다. 전압 타원을 따라 운전점이 이동함을 확인할 수 있으며, 150 ms 이내로 최적 운전점에 수렴하는 빠른 동특성을 확인할 수 있다.

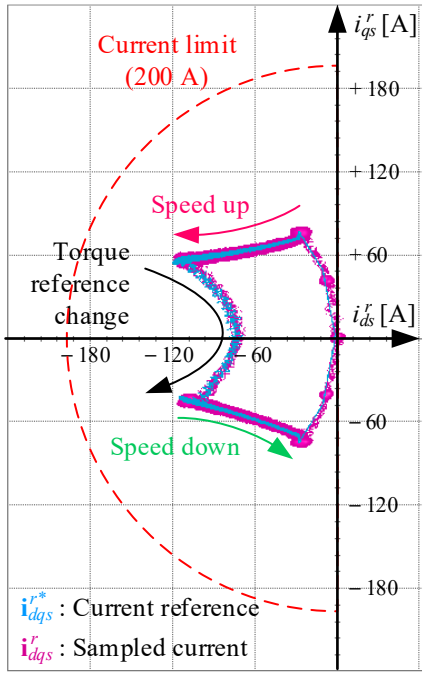
그림 5-12 (가) 그림 중 확대(Zoom)한 파형의 d축 전류 파형을 보면 위로 볼록한 파형이 2번 반복된다. 첫번째 볼록 파형은 전압 타원을 따라가면서 생기는 파형이고, 두번째 볼록 파형은 DC 링크 전압이 변동되면서 전압 타원이 커졌다 작아질 때 발생한 파형이다. *d*축 두번째 볼록 파형이 발생한 시점에서의 *q*축 전류 파형을 보면 음의 전류로 잠깐 빠졌다가 다시 복귀하는 것을 알 수 있으며, 이는 전압 타원이 커졌다 작아지면서 일시적으로 등토크 곡선 상에서 움직인 것을 의미한다.



(가) 4500 r/min에서 토크 지령 변화에 따른 토크 응답 및 전류 궤적



(나) 추정 $L_{s,est} = 0.5\ L_{s,nominal}$



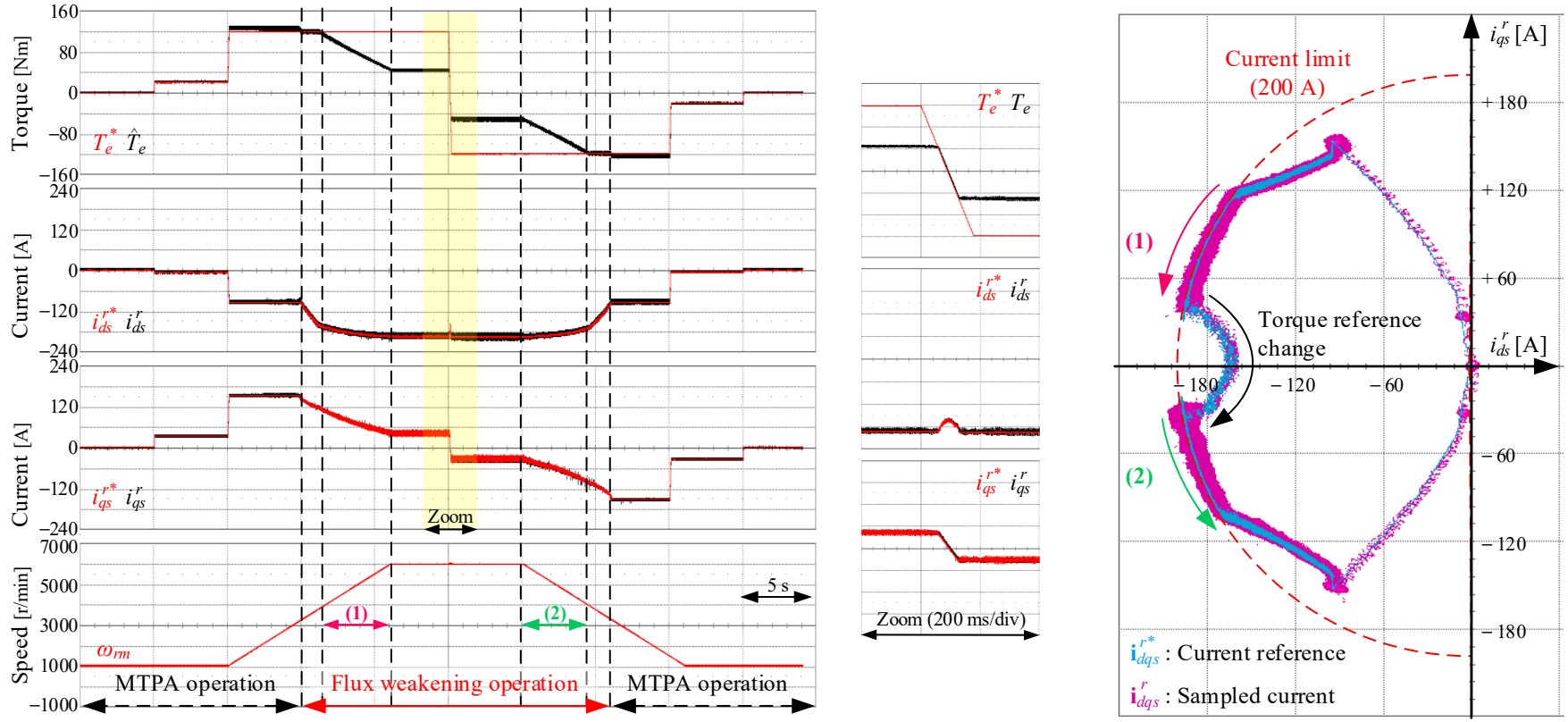
(다) 추정 $L_{s,est} = 1.5\ L_{s,nominal}$

그림 5-13. 등토크 곡선 상에서의 운전 시 추정 인덕턴스 오차 영향 실험 파형

그림 5-13은 제안하는 약자속 운전 토크 제어기에 사용되는 인덕턴스 값을 변경하고 진행한 실험 파형이다. 공칭 제정수인 정적 인덕턴스의

0.5배, 1.5배에 대하여 실험을 진행하였으며 운전 조건은 그림 5-11과 같다. 4.3.1절에서 증명한 바와 같이 인덕턴스 값을 변경하여도 정상상태 운전점은 동일하게 수렴하는 것을 확인할 수 있다. 그림 (나)와 (다)는 각각 0.5배 인덕턴스, 1.5배 인덕턴스 값으로 설정했을 때의 실험 리사쥬 파형을 보여주며, 두 파형 모두 속도 가/감속에 따라 동일한 등토크 곡선을 타고 움직이는 것을 확인할 수 있다.

5.3.2 전류 제한 원 상에서의 운전 및 운전 영역 절환 검증

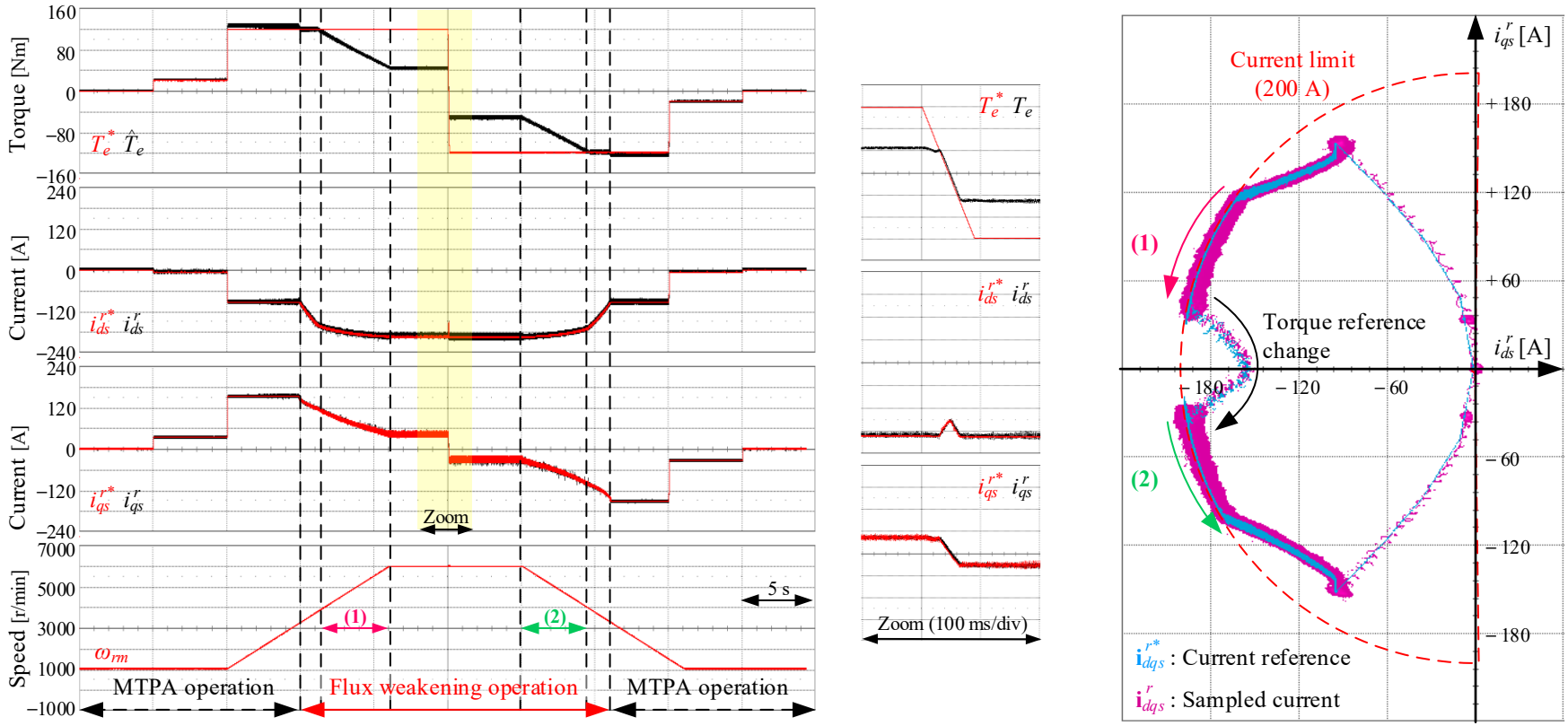


(가) 시간에 따른 토크 응답 및 전류 궤적 및 확대 파형

(나) 리사쥬 파형

그림 5-14. 약자속 운전 영역 절환 및 전류 제한 원 상에서의 토크 응답, 전류 궤적 실험 파형

(T_e^*: 120 N·m → – 120N·m, 지령 변화율: 10 pu/s = 1,350 N·m/s)



(가) 시간에 따른 토크 응답 및 전류 궤적 및 확대 파형

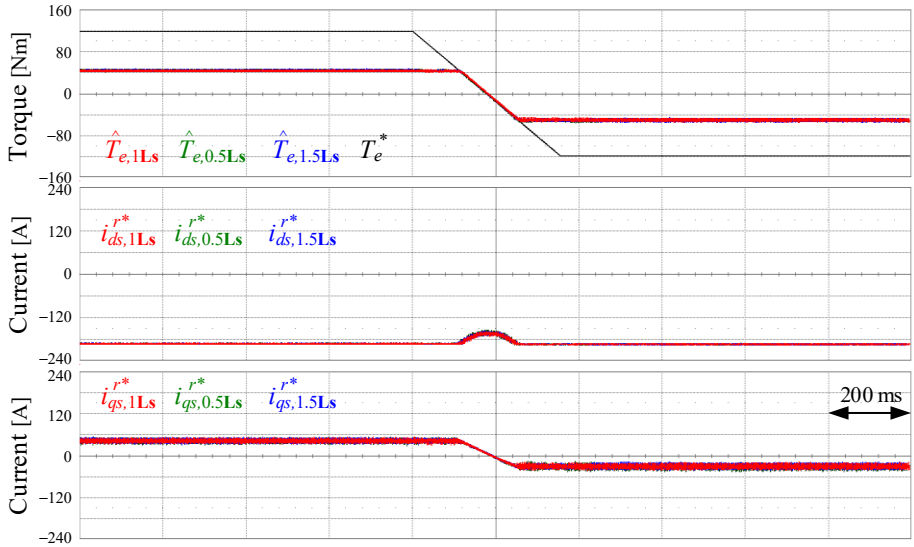
(나) 리사쥬 파형

그림 5-15. 약자속 운전 영역 절환 및 전류 제한 원 상에서의 토크 응답, 전류 궤적 실험 파형

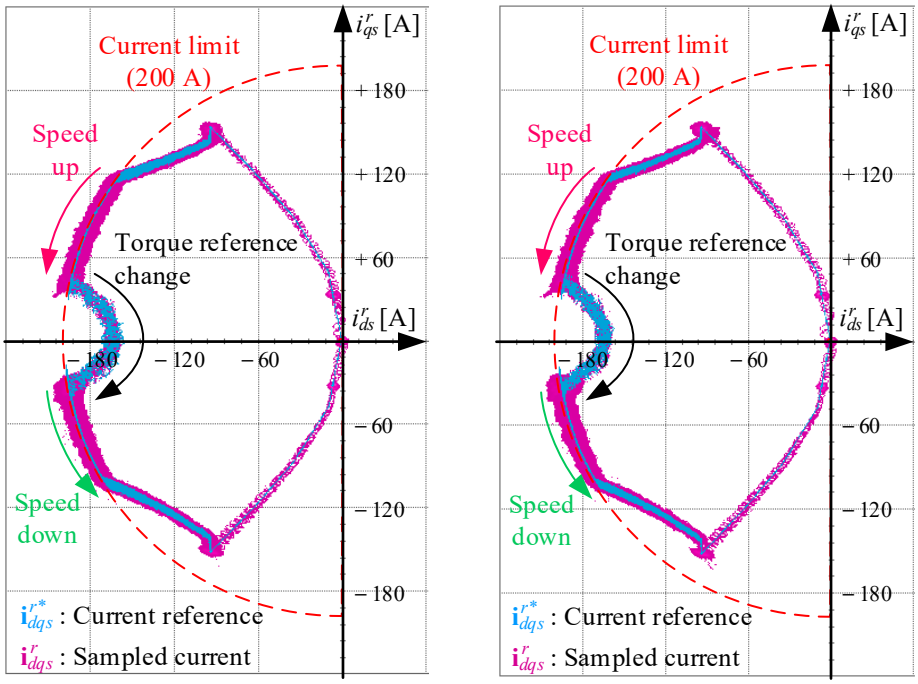
(T_e^* : 120 N·m → – 120N·m, 지령 변화율: 20 pu/s = 2,700 N·m/s)

그림 5-14는 토크 지령을 ±120 N·m로 주고 속도 지령을 6,000 r/min까지 가속하여 등토크 곡선 운전 및 전류 제한 원 영역에 대해 약자속 운전을 실험한 결과이다. 10초에 걸쳐 5,000 r/min을 가/감속 하였고, 6,000 r/min에서 토크 지령을 10 pu/s(=1,350 N·m/s) 변화율에 따라 +120 N·m 에서 –120 N·m로 변화시켰다. 속도가 올라가면서 토크 지령이 실현 불가능해지면 전류 제한 원을 따라 이동하는 것을 확인할 수 있다. 이는 등토크 곡선 상에서 $\mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,inactive}$ 최적해를 사용하다가 식 (4.33)에 따라 $\mathbf{\Delta i}^{r}_{dqs,active}$ 로 절환하였음을 의미한다.

그림 5-15는 토크 지령의 응답성을 확인하기 위해 토크 지령 변화율을 20 pu/s(=2,700 N·m/s)로 설정한 뒤 120 N·m 에서 –120 N·m로 변화시켜 응답성을 확인한 결과이다. 300 ms 이내로 최적 운전점에 도달하는 빠른 동특성을 확인할 수 있다.



(가) 6000 r/min에서 토크 지령 변화에 따른 토크 응답 및 전류 궤적



(나) 추정 $L_{s,est} = 0.5\ L_{s,nominal}$ (다) 추정 $L_{s,est} = 1.5\ L_{s,nominal}$

그림 5-16. 전류 제한원 상에서의 운전 시 추정 인덕턴스 오차 영향 실험 파형

그림 5-16은 제안하는 약자속 운전 토크 제어기에 사용되는 인덕턴스

값을 변경하고 진행한 실험 파형이다. 공칭 제정수인 정적 인덕턴스의 0.5배, 1.5배에 대하여 실험을 진행하였다. 4.3.2절에서 증명한 바와 같이 인덕턴스 값을 변경하여도 정상상태 운전점은 동일하게 수렴하는 것을 확인할 수 있다.

5.3.3 속도 제어기 개선 검증

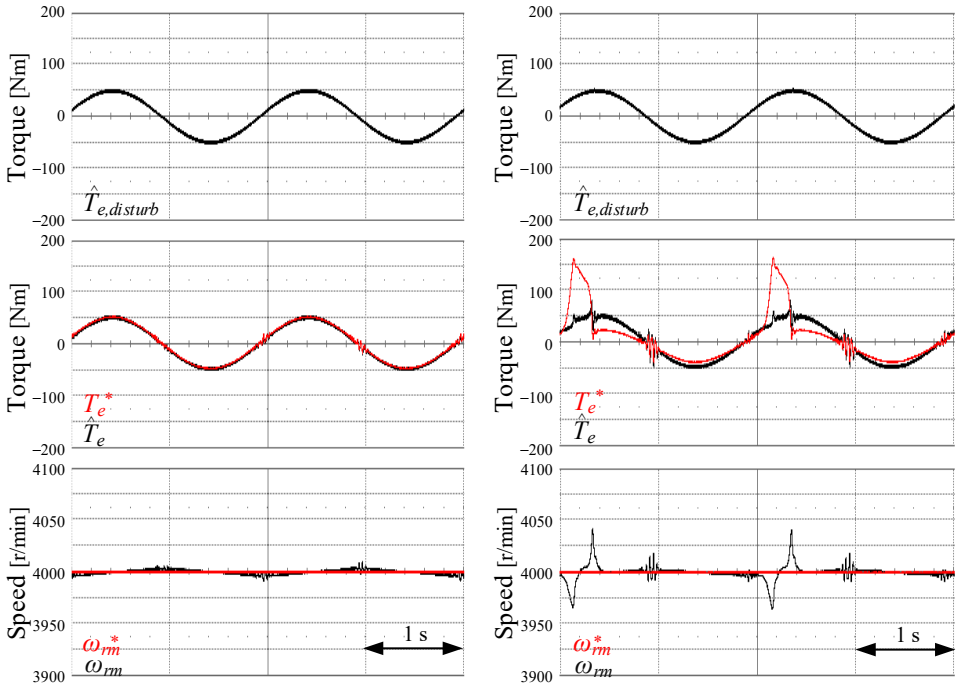
제안하는 약자속 운전 토크 제어기는 약자속 운전 중에서도 실현 가능한 토크 지령에 대해 정확한 토크를 출력할 수 있다. 이러한 특징은 고속 속도 제어 시 유용하며, 외란 토크에 대한 속도 응답을 개선할 수 있다. 본 절에서는 대상 전동기를 속도 제어 하면서 PI 제어기로 구성된 약자속 제어기[13]를 사용하였을 때, 제안하는 약자속 운전 토크 제어기를 사용하였을 때 각각의 속도 응답을 비교하였다. 속도 제어기는 IP 제어기를 사용하였으며 추정 관성 계수 $\hat{J}$ 는 0.127 kg·m^2, 추정 마찰 계수 $\hat{B}$ 는 2.6456 mN·m/(rad/s), 감쇠 계수 ζ는 1, 고유 주파수 ω_n 은 10 Hz가 되도록 설정하였다 [32]. PI 기반 약자속 제어기는 출력 전압 크기를 궤환 받는 약자속 제어기로 그림 2-6의 (가)와 같이 구현되었으며 MTPA 전류 지령을 수정해 약자속 운전을 가능하게 한다 [13], [15].

실험에 사용된 약자속 제어기 관련 제정수 및 이득은 다음과 같다.

표 5-4. PI 기반 약자속 제어기 관련 제정수 및 이득

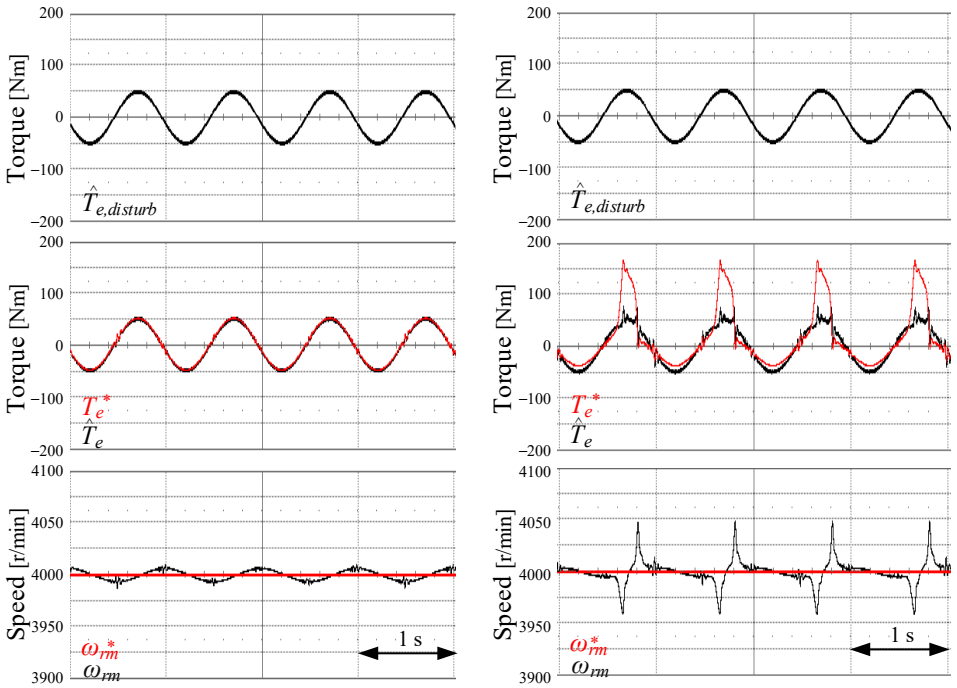
변수	값	단위
K_p	0.1	A/V
K_i	5.0	A/(V·s)
V_{max}	0.95 $V_{dc}/\sqrt{3}$	V
I_{max}	200	A
$\Delta i_{ds,lim}$	200	A

외란으로 작용하는 부하기의 토크 지령은 전향 보상하지 않았다. 대상 전동기가 4,000 r/min에서 속도 제어를 수행하고 부하 전동기로 50 N·m 크기의 토크를 0.5 Hz, 1 Hz, 2 Hz 주파수의 정현파 형태로 인가하였다.



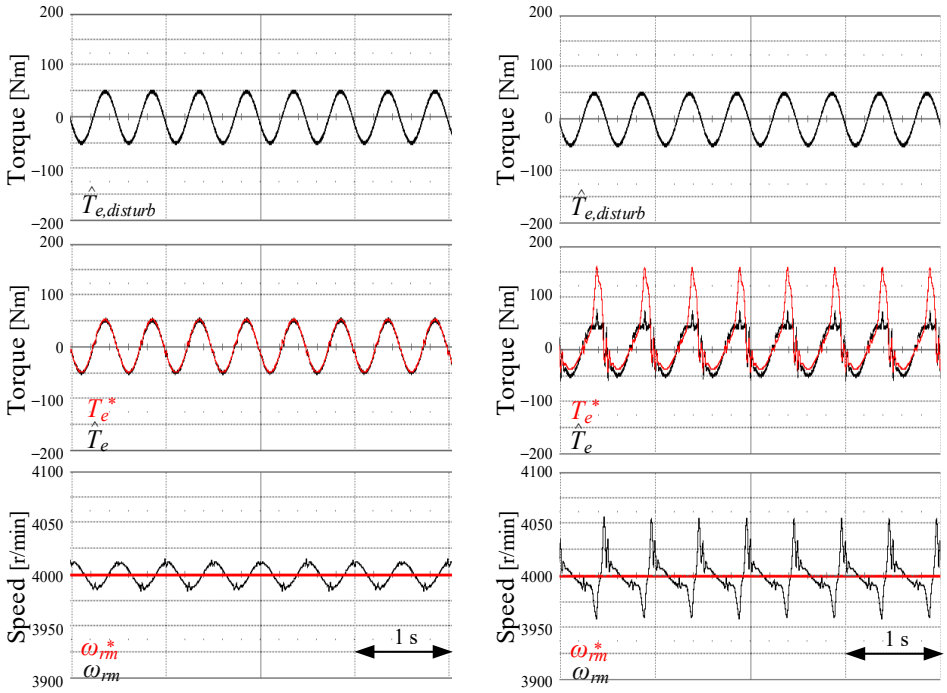
(가) 제안하는 약자속 운전 토크 제어기 (나) PI 기반 약자속 토크 제어기

그림 5-17. 0.5 Hz 외란 토크 인가 시 속도 응답



(가) 제안하는 약자속 운전 토크 제어기 (나) PI 기반 약자속 토크 제어기

그림 5-18. 1 Hz 외란 토크 인가시 속도 응답



(가) 제안하는 약자속 운전 토크 제어기 (나) PI 기반 약자속 토크 제어기

그림 5-19. 2 Hz 외란 토크 인가 시 속도 응답

그림 5-17, 그림 5-18, 그림 5-19는 각각 0.5 Hz, 1 Hz, 2 Hz 주파수의 정현파 외란 토크를 인가했을 때의 속도 응답 파형이다. (가)는 제안하는 약자속 운전 토크 제어기를 적용하였을 때의 속도 응답이고, (나)는 PI 기반 약자속 제어기를 적용하였을 때의 속도 응답이다. 각 그림 별 (가)에서 속도 제어기의 결과인 토크 지령이 정확히 출력됨을 확인할 수 있고, (나)에서는 그렇지 못하다는 것을 확인할 수 있다. 토크 지령이 정확히 출력되지 못하면 이러한 오차가 외란처럼 작용하여 속도 응답에 리플을 만들고 이러한 리플이 다시 속도 제어기에 되먹임 되어 토크 지령을 흔들게 된다. 속도 제어기를 설계할 때에는 토크 지령부터 출력 토크까지 이득을 1로 가정하여 설계하므로 [32], (나)와 같은 토크 오차는 속도 제어기 설계를 어렵게 만든다. 그러나 (가)에서 보인 바와 같이, 제안하는 약자속 운전 토크 제어기는 약자속 운전 영역까지 토크를 정확하게 제어할 수 있기 때문에 고속 영역에서의 속도 제어 시에도 유용하게 활용될 수 있다.

제 6장 결론

6.1 연구 결과

본 논문에서는 비선형 최적화 문제 정의 및 최적화 알고리즘을 통한 영구자석 동기기 약자속 운전에서의 토크 제어기를 연구하였다. 본 연구의 결과를 요약하면 아래와 같다.

- **약자속 운전에 대한 비선형 최적화 문제 정의**
  실현 가능한 토크 지령 및 실현 불가능한 토크 지령을 모두 포함한 약자속 운전을 최적화 문제로 정의하였다. 정의한 문제의 수학적 쌍대성을 확인해 쌍대 문제를 통한 최적해 유도 가능성을 확인했고, 국소 수렴점만을 추종하여도 실질적으로 필요한 전역 최적해에 도달할 수 있음을 보였다. 이를 통해 비선형 최적화 알고리즘 적용 가능성을 살펴보았다.

- **비선형 최적화 알고리즘 적용을 통한 샘플별 해석적 최적해 유도**
  순차 2차 계획법 적용을 통해 매 샘플별 제어기가 연산해야 하는 최적해를 유도하였다. 유도된 최적해는 전류 지령을 직접 계산한다. 실현 가능한 토크 지령 및 실현 불가능한 토크 지령에 대해 최적해가 모두 유도되었으며, 두 운전 영역에 대한 절환 기준 또한 이론적으로 규명되어 원활한 절환이 가능하다.

- **실시간 제어기 구현을 위한 간소화된 최적해 유도**
  임베디드 시스템을 위시한 실시간 제어기 상에서의 구현을 위해 연산 측면에서 간소화된 최적해를 유도하였다. 근사 과정 없이 유도했기 때문에 간소화된 해는 실제 최적해와 동치인 연산 값을 출력하며, 구현 시 필요한 연산 순서에 대해 소개하였다.

- **유도된 최적해에 인덕턴스 오차가 미치는 영향 분석**

  본 논문에서 제안하는 최적해에 인덕턴스 오차가 미치는 영향에 대해 분석하였다. 등토크 곡선 및 전류 제한 원 상에서 운전시 정상 상태 오차가 없는 운전을 보장하며 이를 이론적으로 규명하고, 실험적으로 보였다. MTPV 운전에 대해서는 정상 상태 오차가 발생하는데 이러한 원인을 이론적으로 규명하였다.

6.2 향후 과제

본 논문의 연구 결과를 토대로 향후 다음과 같은 연구가 진행될 수 있다.

- **식스-스텝 운전으로의 확장**

  본 연구는 인버터 PWM의 선형 변조를 가정하고 최적화 문제를 정의하였다. 전압 이용률의 확장 및 스위칭 손실의 저감을 위해서는 향후 6각형 모양의 전압 제한을 제약 조건으로 가지는 최적화 문제를 풀 필요가 있다. 선형 변조를 가정할 경우 전압 제한 조건은 타원 형태가 되어 제한 조건이 비-어파인(Non-affine) 함수이다. 그러나 전압 6각형의 경우 모든 경계 조건이 선형이기 때문에 어파인 제약 조건이며, 활성 제약 집합 방법(Active set method)이 적용 가능한 하위 문제로 변환될 수 있을 것으로 보인다. 이와 같은 연구가 진행된다면 전류 제어기 구조를 유지하면서 식스-스텝이 가능한 약자속 운전이 가능해질 수 있다.

- **MTPV 운전 시 인덕턴스 오차에 의한 정상상태 운전점 오차 개선**

  본 연구에서는 약자속 제어기에 사용되는 인덕턴스에 오차가 있을 때, MTPV 운전점의 오차 발생 원인을 이론적으로 규명하였다. 그러나 본 논문의 시뮬레이션 상에서는 정격 운전점에서의 정적 인덕턴스(Static inductance)로 추정한 MTPF 곡선이 시험용 전동기에 한해서 실제 MTPF 곡선과 유사함을 확인하였고, 이로 인해 추정 MTPV 운전점이 실제 운전점과 유사하다는 것을 확인했다. 이는 MTPF 운전점을 근사시키는 정적 인덕턴스 값이 존재함을 시사한다. 만일 MTPF 곡선을 근사 시키는 정적 인덕턴스 값을 알거나, 정격 운전점에서의 정적 인덕턴스가 충분히 MTPF 곡선을 근사시킬 수 있음을 보이면, 제안하는 제어기에 해당 인덕턴스 값을 사용하여 근사 MTPV 운전으로 확장이 가능해질 수 있다.

이를 통해 MTPV 정상 상태 운전시 인덕턴스 오차로 인한 운전점 오차를 줄일 수 있을 것으로 예상된다.

부 록

A. 상보 여유 정리 증명

원 문제 (3.1)의 최적해를 $\mathbf{x}_{opt}$, 쌍대 문제 (3.7)의 최적해를 $(\boldsymbol{\rho}_{opt}, \mathbf{v}_{opt})$ 라고 표기한다. 강한 쌍대성이 만족된다고 가정하자. 원 문제의 최적 비용과 쌍대 문제의 최적 비용이 같으면 아래와 같이 표현된다.

$$f_o(\mathbf{x}_{opt}) = d(\boldsymbol{\rho}_{opt}, \mathbf{v}_{opt}). \tag{A.1}$$

쌍대 문제의 최적 비용은 다음과 같이 계산된다.

$$d(\boldsymbol{\rho}_{opt}, \mathbf{v}_{opt}) = \inf_{\mathbf{x}} \mathcal{L}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\rho}_{opt}, \mathbf{v}_{opt}) = \inf_{\mathbf{x}} \left(f_o(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\rho}_{opt}^{\top} \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_{opt}^{\top} \mathbf{h}(\mathbf{x}) \right). \tag{A.2}$$

원 문제의 최적해는 제약 조건을 만족하기 때문에 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{opt}) \le \mathbf{0}$와 $\mathbf{h}(\mathbf{x}_{opt}) = \mathbf{0}$을 만족한다. 따라서 쌍대 문제의 최적 비용은 원 문제의 최적해의 값을 라그랑지안 함수에 대입했을 때보다 항상 작거나 같다.

$$d(\boldsymbol{\rho}_{opt}, \mathbf{v}_{opt}) \le f_o(\mathbf{x}_{opt}) + \boldsymbol{\rho}_{opt}^{\top} \mathbf{f}(\mathbf{x}_{opt}) + \mathbf{v}_{opt}^{\top} \mathbf{h}(\mathbf{x}_{opt}) \tag{A.3}$$

강한 쌍대성이 만족된다고 가정하였고, $\boldsymbol{\rho}_{opt} \ge \mathbf{0}$ 이고 $\mathbf{f}(\mathbf{x}_{opt}) \le \mathbf{0}$ 이므로 아래와 같은 부등식이 성립한다.

$$0 \le \rho_{i,opt} f_i(\mathbf{x}_{opt}) \le 0, \ i = 1, \cdots, \mathrm{m} \tag{A.4}$$

샌드위치 정리에 의해 아래의 등식이 성립한다.

$$\rho_{i,opt} f_i(\mathbf{x}_{opt}) = 0, \ i = 1, \cdots, \mathrm{m} \tag{A.5}$$

따라서 원 문제가 강한 쌍대성을 만족하면 부등호 제약 조건 함수와 이에 대한 여유 변수의 곱은 항상 0이 된다.

B. 볼록 함수 및 볼록 최적화의 정의

$\mathbf{f}:\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 함수가 주어졌을 때, 볼록 함수는 아래와 같이 정의된다.

$$\begin{gathered}\mathbf{f}(\theta\mathbf{x}+(1-\theta)\mathbf{y}) \le \theta f(\mathbf{x})+(1-\theta)\mathbf{f}(\mathbf{y}) \\ \forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n, \forall \theta \in [0,1]\end{gathered} \tag{B.1}$$

볼록 최적화란 비용 함수가 볼록 함수이고 제약 조건 함수들이 어파인 함수인 경우를 의미한다. 이는 아래와 같이 표현된다.

$$\begin{gathered}\min_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n} f_o(\mathbf{x}) \\ \text{subject to} \\ \mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{b} \le \mathbf{0}, \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = \mathbf{C}\mathbf{x}+\mathbf{d} = \mathbf{0}.\end{gathered} \tag{B.2}$$

C. 등호 제약 조건을 갖는 QP 문제의 최적해

식 (B.2)과 마찬가지로 2차 계획법 문제 또한 부등호 제약 조건을 가질 수 있다. 그러나 만일 최적해가 부등호 제약 조건 함수 경계선 내부에 있으면 해당 문제는 등호 제약 조건만 존재하는 문제로 변환된다. 어떤 부등호 제약 조건을 고려해 문제를 풀 것인지 결정하는 방법으로 활성 제약 집합 방법(Active set method)이 있으며, 이는 등호 제약 조건을 갖는 2차 계획법 문제를 여러번 푸는 하위 단계로 구성되어 있다 [37]. 따라서 본 부록에서는 기초적인 2차 계획법 최적해를 다루기 위해 등호 제약 조건을 갖는 2차 계획법 최적해를 유도한다.

아래와 같은 2차 계획법 문제를 정의하자.

$$\begin{gathered}\min_{\mathbf{x}} \mathbf{q}^\top \mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} \\ \text{subject to } \mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{k} = \mathbf{0} \\ \text{where } \mathbf{P} \succ 0 \in \mathbb{R}^{n\times n},\ \mathbf{x} \text{ and } \mathbf{q} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times m}, \mathbf{k} \in \mathbb{R}^m\end{gathered} \tag{C.1}$$

P는 양의 정부호 행렬임을 가정한다. 2차 계획법은 비용 함수가 볼록 함수이고 제약 조건 함수가 어파인 함수이므로 볼록 최적화 문제에 속한다. 볼록 최적화 문제는 KKT 조건을 충분조건으로 사용할 수 있다. 따라서 KKT 조건을 만족하는 해가 존재하면, 그 해는 위 2차 계획법의 최적해이다. 문제 (C.1)의 라그랑지안 함수는 다음과 같다.

$$\begin{gathered}\mathcal{L}(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \left(\frac{1}{2}\mathbf{x}^\top \mathbf{P}\mathbf{x} + \mathbf{q}^\top \mathbf{x}\right) + \mathbf{v}^\top \left(\mathbf{A}^\top \mathbf{x} + \mathbf{k}\right) \\ \text{where } \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m\end{gathered} \tag{C.2}$$

KKT 조건식을 만족하는 해는 아래의 두 방정식을 만족하게 된다.

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{x}_{opt}, \mathbf{v}_{opt})}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{P}\mathbf{x}_{opt} + \mathbf{A}\mathbf{v}_{opt} + \mathbf{q} = \mathbf{0} \tag{C.3}$$

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{x}_{opt} + \mathbf{k} = \mathbf{0} \tag{C.4}$$

위 방정식으로부터 변수 $(\mathbf{x}_{opt}, \mathbf{v}_{opt})$ 에 대한 선형 방정식이 유도되며, 그 해는 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{\top} & \mathbf{0}_{m\times m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{opt} \\ \mathbf{v}_{opt} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \tag{C.5}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{opt} \\ \mathbf{v}_{opt} \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^{\top} & \mathbf{0}_{m\times m} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix} \tag{C.6}$$

위 식에서 $\mathbf{0}_{m\times m}$은 원소가 모두 0인 $m\times m$ 크기의 행렬을 가리킨다.

D. 시험용 PMSM의 세부 사양

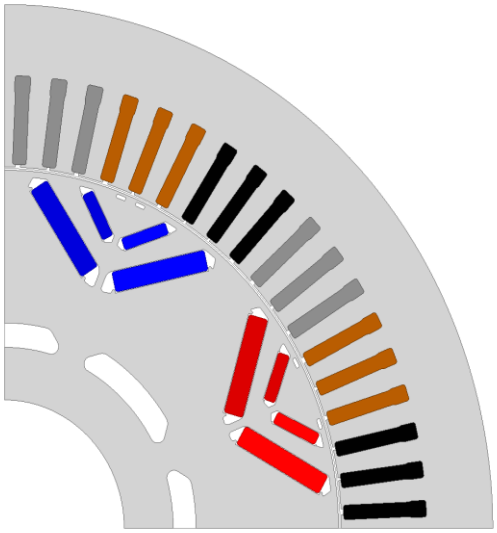


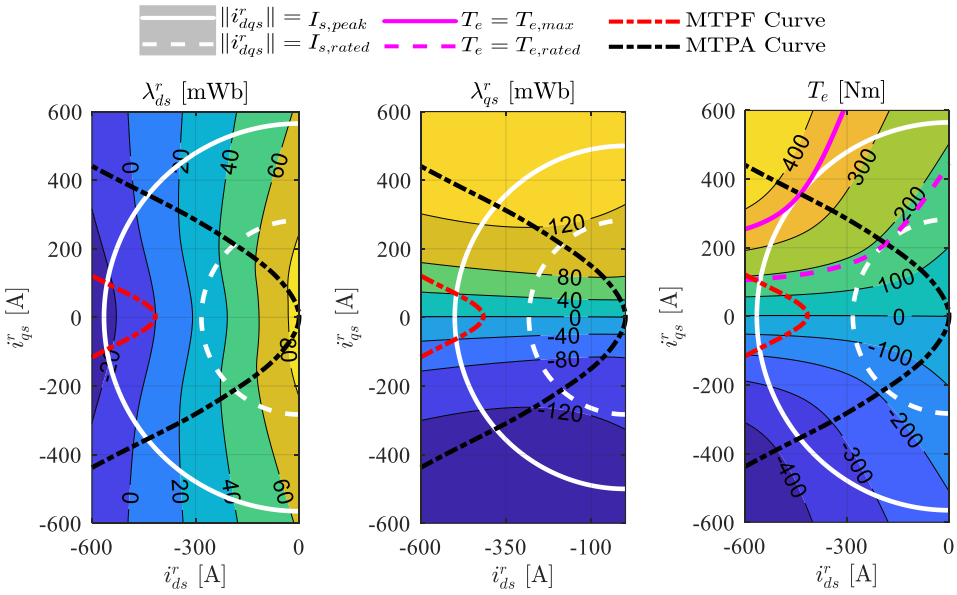
그림 D-1. 대상 전동기 단면도

대상 전동기는 전기 자동차 견인용 전동기로 아래의 제정수를 갖는다 [4].

표 D-1. 시험용 전동기 제정수

변수	값	단위
최대 출력 (P_{max})	150	kW
최대 토크 ($T_{e,max}$)	360	N·m
정격 토크 ($T_{e,rated}$)	184	N · m
최대 속도 ($\omega_{rpm,max}$)	8810	r/min
극 수 (p)	8	pole
최대 상 전류 ($I_{s,peak}$)	565	A_{peak}
정격 전류 ($I_{s,rated}$)	283	A_{peak}
고정자 권선 저항 (R_s)	13.3	mΩ
영구자석에 의한 고정자 쇄교 자속 (λ_f)	87.5	mWb
d축 고정자 인덕턴스 (L_{ds})	185.51	μH
q축 고정자 인덕턴스 (L_{qs})	372.74	μH

전동기의 공간 고조파를 고려할 경우 회전자 각도에 따라 자속 분포가 변화하게 되지만 본 논문에서는 공간 고조파의 영향이 크지 않다고 가정하였다. FEA를 통해 구한 운전점별 평균 자속 분포와 출력 토크는 아래와 같다.



(가) d축 자속 (나) q축 자속 (다) 출력 토크

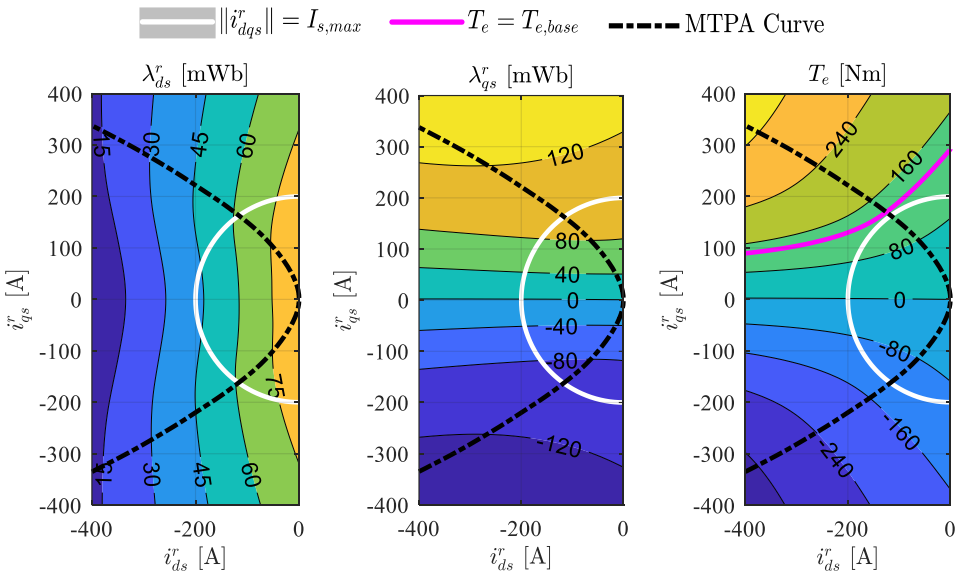
그림 D-2. 대상 PMSM의 자속 맵 및 토크 맵 (FEA)

실험 및 시뮬레이션 모두 DC 전압 300 V에서 진행하였고, 기저 속도를 3,000 r/min으로 설정하였다. 인버터 전류 용량을 고려하여 최대 상 전류를 200 A_{peak}로 제한하였고, 이에 따른 pu 기준은 아래와 같다.

표 D-2. 실험 1 pu 기준

변수	값	단위	비고
1 pu 토크 ($T_{e,base}$)	135	N · m	1 pu 기준
기저 속도 ($\omega_{rpm,base}$)	3,000	r/min	1 pu 기준
최대 상 전류 ($I_{s,max}$)	200	A_{peak}	1 pu 기준 및 전류 제한

위와 같은 제한 조건으로 운전되는 영역의 자속 분포와 출력 토크를 도시하면 아래와 같다.

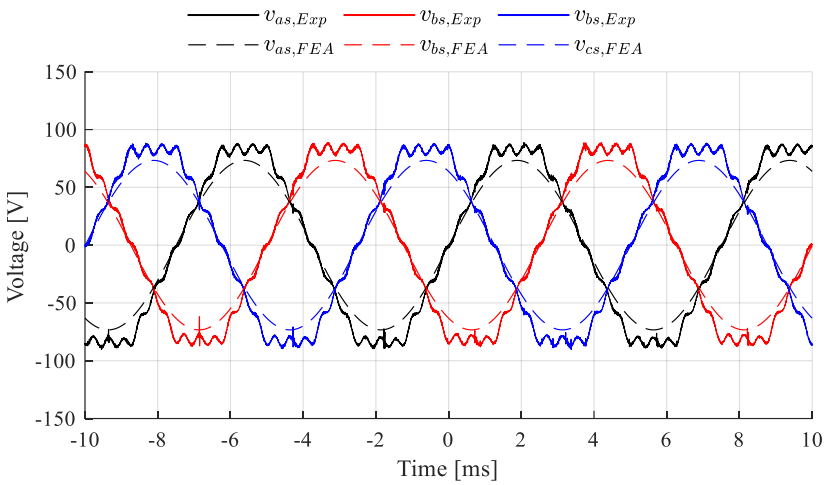


(가) d축 자속 (나) q축 자속 (다) 출력 토크

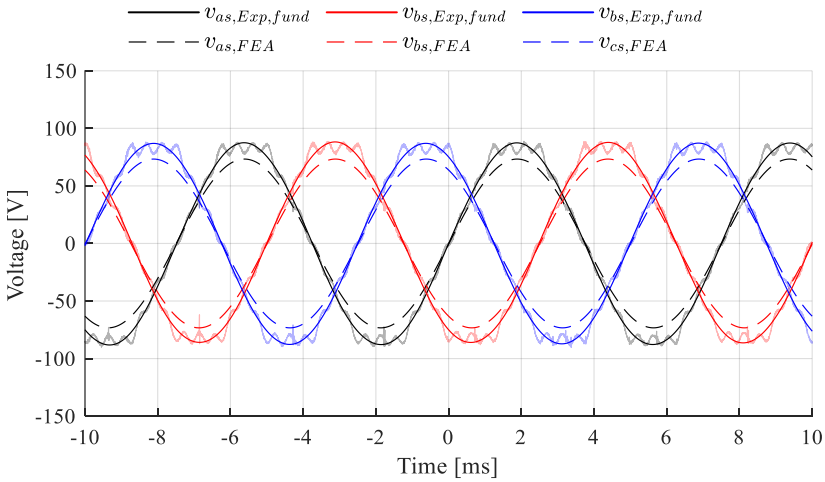
그림 D-3. 실험 운전 영역에 대한 자속 맵 및 토크 맵 (FEA)

한편, 영구자석의 자속 밀도는 온도에 대해 변할 수 있다. 따라서 영구자석이 매입되어 있는 회전자의 온도에 따라 고정자 쇄교 자속의 크기가 달라지게 된다 [38]. 이는 전동기 운전 상태에 따라 역기전력의 크기가 달라진다는 것을 의미하며, 결과적으로 전류 평면에서의 전압 제한 타원의 크기가 달라져 같은 속도, 토크 지령에서도 온도에 따라 전류 운전점이 달라지는 효과를 만든다.

아래 그림에서는 FEA 자속맵 기반 역기전력과 실제 실험 세트 전동기의 역기전력을 도시하였으며, 기본파 역기전력의 크기 차이는 온도 차이로 인하여 발생한 것으로 추정된다. 본 논문의 시뮬레이션은 이러한 온도 차이에 의한 고정자 쇄교 자속 크기의 오차를 보정하여 수행되었다.



(가) 실제 전동기 역기전력 및 FEA 모델 역기전력



(나) 실제 전동기 역기전력 기본파 및 FEA 모델 역기전력

그림 D-4. 실제 전동기 및 FEA 모델 역기전력

E. MTPA, MTPF, MTPV 운전

MTPA 곡선은 단위 전류당 최대 토크를 내는 운전점들의 집합으로 이해할 수 있으며 전류 크기 원과 등토크 곡선이 접하는 운전점들의 집합으로 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned}\text{MTPA Operating points} &= \left\{ \mathbf{i}_{dqs}^{r} : \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \parallel \frac{\partial (\mathbf{i}_{dqs}^{r\top} \mathbf{i}_{dqs}^{r})}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{i}_{dqs}^{r} : \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \times \frac{\partial (\mathbf{i}_{dqs}^{r\top} \mathbf{i}_{dqs}^{r})}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} = \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{i}_{dqs}^{r} : \left(\mathbf{J} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} \frac{\partial (\mathbf{i}_{dqs}^{r\top} \mathbf{i}_{dqs}^{r})}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} = \mathbf{0} \right\}\end{aligned} \tag{E.1}$$

식 (E.1)에서 전류에 대한 토크 도함수 벡터(=기울기 벡터, Gradient)를 90도 회전한 벡터와 전류 크기 원의 도함수 벡터 사이의 내적을 MTPA 운전점의 판별 함수로 사용할 수 있으며, 해당 값이 0일 때 MTPA 운전점에 존재한다고 볼 수 있다.

$$f_{MTPA}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \left(\mathbf{J} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} \frac{\partial (\mathbf{i}_{dqs}^{r\top} \mathbf{i}_{dqs}^{r})}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} = \left(\mathbf{J} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} 2\mathbf{i}_{dqs}^{r} \tag{E.2}$$

MTPF 곡선은 단위 자속당 최대 토크를 내는 운전점들의 집합으로 이해할 수 있으며, 자속 크기 타원과 등토크 곡선이 접하는 운전점들의 집합으로 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned}\text{MTPF Operating points} &= \left\{ \mathbf{i}_{dqs}^{r} : \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \parallel \frac{\partial (\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r\top} \boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r})}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{i}_{dqs}^{r} : \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \times \frac{\partial (\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r\top} \boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r})}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} = \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{i}_{dqs}^{r} : \left(\mathbf{J} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} \frac{\partial (\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r\top} \boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r})}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} = \mathbf{0} \right\}\end{aligned} \tag{E.3}$$

식 (E.3)에서 전류에 대한 토크 도함수를 90도 회전한 벡터와 자속 크기 원의 도함수 벡터 사이의 내적을 MTPF 운전점의 판별함수로 사용할 수 있으며, 해당 값이 0일 때 MTPF 운전점에 존재한다고 볼 수 있다.

$$f_{MTPF}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \left(\mathbf{J} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} \frac{\partial (\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r\top} \boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r})}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \tag{E.4}$$

MTPV 곡선은 단위 전압 당 최대 토크를 내는 운전점들의 집합으로 이해할 수 있으며 전압 크기 타원과 등토크 곡선이 접하는 운전점들의 집합으로 정의될 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{MTPV Operating points} &= \left\{ \mathbf{i}_{dqs}^{r} : \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \parallel \frac{\partial (\mathbf{v}_{dqs}^{r\top} \mathbf{v}_{dqs}^{r})}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{i}_{dqs}^{r} : \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \times \frac{\partial (\mathbf{v}_{dqs}^{r\top} \mathbf{v}_{dqs}^{r})}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} = \mathbf{0} \right\} \\ &= \left\{ \mathbf{i}_{dqs}^{r} : \left(\mathbf{J} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} \frac{\partial (\mathbf{v}_{dqs}^{r\top} \mathbf{v}_{dqs}^{r})}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} = 0 \right\} \end{aligned} \tag{E.5}$$

식 (E.5)에서 전류에 대한 토크 도함수를 90도 회전한 벡터와 전압 크기 타원의 도함수 벡터 사이의 내적을 MTPV 운전점의 판별함수로 사용할 수 있으며, 해당 값이 0일 때 MTPV 운전점에 존재한다고 볼 수 있다.

$$f_{\mathrm{MTPV}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) = \left(\mathbf{J} \frac{\partial T_e}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \right)^{\top} \frac{\partial (\mathbf{v}_{dqs}^{r\top} \mathbf{v}_{dqs}^{r})}{\partial \mathbf{i}_{dqs}^{r}} \tag{E.6}$$

한편, 식 (E.5)의 전류에 대한 전압 제곱의 도함수는 정상상태임을 가정하면 아래와 같이 유도될 수 있다.

$$\begin{aligned}\frac{\partial(\mathbf{v}_{dqs}^{r\top}\mathbf{v}_{dqs}^{r})}{\partial\mathbf{i}_{dqs}^{r}} &= R_s^2\frac{\partial(\mathbf{i}_{dqs}^{r\top}\mathbf{i}_{dqs}^{r})}{\partial\mathbf{i}_{dqs}^{r}} + 2\omega_r R_s\frac{\partial\left((\mathbf{J}\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r})^{\top}\mathbf{i}_{dqs}^{r}\right)}{\partial\mathbf{i}_{dqs}^{r}} + \omega_r^2\frac{\partial(\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r\top}\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r})}{\partial\mathbf{i}_{dqs}{}^{r}} \\ &= R_s^2\frac{\partial\left\|\mathbf{i}_{dqs}^{r}\right\|^2}{\partial\mathbf{i}_{dqs}^{r}} + 2\omega_r R_s\frac{1}{\left(\frac{3}{2}p\right)}\frac{\partial T_e}{\partial\mathbf{i}_{dqs}^{r}} + \omega_r^2\frac{\partial\left\|\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r}\right\|^2}{\partial\mathbf{i}_{dqs}^{r}}\end{aligned} \tag{E.7}$$

위 식 양변에 토크 도함수 벡터를 90도 회전한 $\mathbf{J}\left(\partial T_e/\partial\mathbf{i}_{dqs}^{r}\right)$ 를 내적하면 위 식 우변의 토크 도함수 벡터 항은 사라진다.

$$\begin{aligned}f_{\mathrm{MTPV}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) &= \left(\mathbf{J}\frac{\partial T_e}{\partial\mathbf{i}_{dqs}^{r}}\right)^{\top}\frac{\partial(\mathbf{v}_{dqs}^{r\top}\mathbf{v}_{dqs}^{r})}{\partial\mathbf{i}_{dqs}{}^{r}} \\ &= R_s^2\left(\mathbf{J}\frac{\partial T_e}{\partial\mathbf{i}_{dqs}^{r}}\right)^{\top}\frac{\partial\left\|\mathbf{i}_{dqs}^{r}\right\|^2}{\partial\mathbf{i}_{dqs}^{r}} + \omega_r^2\left(\mathbf{J}\frac{\partial T_e}{\partial\mathbf{i}_{dqs}^{r}}\right)^{\top}\frac{\partial\left\|\boldsymbol{\lambda}_{dqs}^{r}\right\|^2}{\partial\mathbf{i}_{dqs}^{r}} \\ &= R_s^2 f_{\mathrm{MTPA}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r}) + \omega_r^2 f_{\mathrm{MTPF}}(\mathbf{i}_{dqs}^{r})\end{aligned} \tag{E.8}$$

식 (E.8)을 살펴보면, MTPV 운전점은 MTPA 운전점과 MTPF 운전점의 선형 결합 형태로 표현된다는 사실을 알 수 있다. 이때 선형 결합 계수는 각각 저항 성분의 제곱과 속도의 제곱으로 표현된다.

따라서 MTPV 운전점은 고정자 권선 저항과 속도의 비율에 따라 다르게 도시된다. 그러나 고정자 권선 저항은 수 mΩ 수준이고 고속 영역에서 속도는 수백 rad/sec 수준이다. 이로 인해 고속 영역에서는 MTPF 운전점과 크게 달라지지 않는다. MTPF 운전점은 저항 성분이 관여하지 않아 모든 속도에 대해서 동일한 곡선이므로 고속 영역에서 최적 운전점 판별에 용이하다.

F. 벡터 미분 방법

벡터 변수를 입력 받아 스칼라 값을 출력하는 함수를 스칼라 값 함수(Scalar-valued function), 벡터 값을 출력하는 함수를 벡터 값 함수(Vector-valued function)이라 한다. 본 부록에서는 이러한 함수들의 벡터 미분을 설명하며, 사용되는 기호는 아래 식 (F.1)에 나타나 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Constant coefficient} \Rightarrow \ \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n}, \\ &\text{Scalar-valued function} \Rightarrow \ f(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}, \\ &\text{Vector-valued function} \Rightarrow \ \mathbf{f}(\mathbf{x}) \text{ and } \mathbf{g}(\mathbf{x}) : \mathbb{R}^{n} \to \mathbb{R}^{m}. \end{aligned} \tag{F.1}$$

스칼라 값 함수, 벡터 값 함수의 벡터 미분은 아래와 같이 계산된다.

$$\frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix}^{\top} \in \mathbb{R}^{n}. \tag{F.2}$$

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_1(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_2(\mathbf{x})}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_2} & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial f_m(\mathbf{x})}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}. \tag{F.3}$$

상수 벡터가 곱해진 벡터 $\mathbf{x}$에 대한 미분은 아래와 같이 계산된다.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{c}^{\top}\mathbf{x}) = \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n}. \tag{F.4}$$

상수 행렬이 곱해진 벡터 $\mathbf{x}$에 대한 미분은 아래와 같이 계산된다.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}. \tag{F.5}$$

두 벡터 값 함수의 곱 미분은 아래와 같이 계산된다.

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\left(\mathbf{f}(\mathbf{x})^{\top}\mathbf{g}(\mathbf{x})\right) = \left(\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\top}\mathbf{g}(\mathbf{x}) + \left(\frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}}\right)^{\top}\mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n} \tag{F.6}$$

참고 문헌

[1] B. K. Bose, “A high-performance inverter-fed drive system of an interior permanent magnet synchronous machine,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 24, no. 6, pp. 987–997, Jan. 1988, doi: 10.1109/28.17470.

[2] T. Finken, M. Felden, and K. Hameyer, “Comparison and design of different electrical machine types regarding their applicability in hybrid electrical vehicles,” in *2008 18th International Conference on Electrical Machines*, Sep. 2008, pp. 1–5. doi: 10.1109/ICELMACH.2008.4800044.

[3] T. A. Burress *et al.*, “Evaluation of the 2010 Toyota Prius Hybrid Synergy Drive System,” ORNL/TM-2010/253, 1007833, Mar. 2011. doi: 10.2172/1007833.

[4] F. Momen, K. Rahman, and Y. Son, “Electrical Propulsion System Design of Chevrolet Bolt Battery Electric Vehicle,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 55, no. 1, pp. 376–384, Jan. 2019, doi: 10.1109/TIA.2018.2868280.

[5] E. Carraro, M. Morandin, and N. Bianchi, “Traction PMASR Motor Optimization According to a Given Driving Cycle,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 52, no. 1, pp. 209–216, Jan. 2016, doi: 10.1109/TIA.2015.2477479.

[6] S. Morimoto, Y. Takeda, T. Hirasa, and K. Taniguchi, “Expansion of operating limits for permanent magnet motor by current vector control considering inverter capacity,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 26, no. 5, pp. 866–871, Sep. 1990, doi: 10.1109/28.60058.

[7] S. Morimoto, M. Sanada, and Y. Takeda, “Wide-speed operation of interior permanent magnet synchronous motors with high-performance current regulator,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 30, no. 4, pp. 920–926, Jul. 1994, doi: 10.1109/28.297908.

[8] S.-Y. Jung, J. Hong, and K. Nam, “Current Minimizing Torque Control of the IPMSM Using Ferrari’s Method,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 28, no. 12, pp. 5603–5617, Dec. 2013, doi: 10.1109/TPEL.2013.2245920.

[9] H.-K. Lee and K.-H. Nam, “An Overview: Current Control Technique for Propulsion Motor for EV,” *The Transactions of the Korean Institute of Power Electronics*, vol. 21, no. 5, pp. 388–395, Oct. 2016, doi: 10.6113/TKPE.2016.21.5.388.

[10] H. Lee, S. Hong, J. Choi, K. Nam, and J. Kim, “Sector-Based Analytic Overmodulation Method,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 66, no. 10, pp. 7624–7632, Oct. 2019, doi: 10.1109/TIE.2018.2883270.

[11] T. Schoenen, A. Krings, D. van Treek, and R. W. De Doncker, “Maximum DC-link voltage utilization for optimal operation of IPMSM,” in *2009 IEEE International Electric Machines and Drives Conference*, May 2009, pp. 1547–1550. doi: 10.1109/IEMDC.2009.5075409.

[12] B.-H. Bae, N. Patel, S. Schulz, and S.-K. Sul, “New field weakening technique for high saliency interior permanent magnet motor,” in *38th IAS Annual Meeting on Conference Record of the Industry Applications Conference, 2003.*, Oct. 2003, pp. 898–905 vol.2. doi: 10.1109/IAS.2003.1257641.

[13] J.-M. Kim and S.-K. Sul, “Speed control of interior permanent magnet synchronous motor drive for the flux weakening operation,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 33, no. 1, pp. 43–48, Jan. 1997, doi: 10.1109/28.567075.

[14] J. Wai and T. M. Jahns, “A new control technique for achieving wide constant power speed operation with an interior PM alternator machine,” in *Conference Record of the 2001 IEEE Industry Applications Conference. 36th IAS Annual Meeting (Cat. No.01CH37248)*, Sep. 2001, pp. 807–814 vol.2. doi: 10.1109/IAS.2001.955545.

[15] S. Bolognani, S. Calligaro, and R. Petrella, “Adaptive Flux-Weakening Controller for Interior Permanent Magnet Synchronous Motor Drives,” *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, vol. 2, no. 2, pp. 236–248, Jun. 2014, doi: 10.1109/JESTPE.2014.2299153.

[16] Y.-C. Kwon, S. Kim, and S.-K. Sul, “Six-Step Operation of PMSM With Instantaneous Current Control,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 50, no. 4, pp. 2614–2625, Jul. 2014, doi: 10.1109/TIA.2013.2296652.
[17] C.-H. Choi, J.-K. Seok, and R. D. Lorenz, “Deadbeat-direct torque and flux control for interior PM synchronous motors operating at voltage and current limits,” in *2011 IEEE Energy Conversion Congress and Exposition*, Sep. 2011, pp. 371–376. doi: 10.1109/ECCE.2011.6063793.
[18] C.-H. Choi, J.-K. Seok, and R. D. Lorenz, “Wide-Speed Direct Torque and Flux Control for Interior PM Synchronous Motors Operating at Voltage and Current Limits,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 49, no. 1, pp. 109–117, Jan. 2013, doi: 10.1109/TIA.2012.2229684.
[19] J.-K. Seok and S. Kim, “Hexagon Voltage Manipulating Control (HVMC) for AC Motor Drives Operating at Voltage Limit,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 51, no. 5, pp. 3829–3837, Sep. 2015, doi: 10.1109/TIA.2015.2416125.
[20] S.-Y. Jung, C. C. Mi, and K. Nam, “Torque Control of IPMSM in the Field-Weakening Region With Improved DC-Link Voltage Utilization,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 62, no. 6, pp. 3380–3387, Jun. 2015, doi: 10.1109/TIE.2014.2369453.
[21] T.-S. Kwon, G.-Y. Choi, M.-S. Kwak, and S.-K. Sul, “Novel Flux-Weakening Control of an IPMSM for Quasi-Six-Step Operation,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 44, no. 6, pp. 1722–1731, Jan. 2008, doi: 10.1109/TIA.2008.2006305.
[22] Y. Jeong, S. Sul, S. Hiti, and K. M. Rahman, “Online Minimum-Copper-Loss Control of an Interior Permanent-Magnet Synchronous Machine for Automotive Applications,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 42, no. 5, pp. 1222–1229, Sep. 2006, doi: 10.1109/TIA.2006.880910.
[23] S. Wang, J. Kang, M. Degano, A. Galassini, and C. Gerada, “An Accurate Wide-Speed Range Control Method of IPMSM Considering Resistive Voltage Drop and Magnetic Saturation,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 67, no. 4, pp. 2630–2641, Apr. 2020, doi: 10.1109/TIE.2019.2912766.
[24] K. Choi, Y. Kim, K.-S. Kim, and S.-K. Kim, “Real-Time Optimal Torque Control of Interior Permanent Magnet Synchronous Motors Based on a Numerical Optimization Technique,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 29, no. 4, pp. 1815–1822, Jul. 2021, doi: 10.1109/TCST.2020.3006900.
[25]H.-S. Kim and S.-K. Sul, “Real-Time Torque Control of IPMSM Under Flux Variations,” *IEEE Journal of Emerging and Selected Topics in Power Electronics*, vol. 10, no. 3, pp. 3345–3356, Jun. 2022, doi: 10.1109/JESTPE.2020.3032463.
[26] J. Park, S. Jung, and J.-I. Ha, “Variable Time Step Control for Six-Step Operation in Surface-Mounted Permanent Magnet Machine Drives,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 33, no. 2, pp. 1501–1513, Feb. 2018, doi: 10.1109/TPEL.2017.2676703.
[27] J. Park and J.-I. Ha, “Variable Time Step Control for Six-Step Operation in IPMM,” in *2018 IEEE Transportation Electrification Conference and Expo (ITEC)*, Jun. 2018, pp. 863–867. doi: 10.1109/ITEC.2018.8450222.
[28] H.-J. Cho, Y.-C. Kwon, and S.-K. Sul, “Time-Optimal Voltage Vector Transition Scheme for Six-Step Operation of PMSM,” *IEEE Transactions on Power Electronics*, vol. 36, no. 5, pp. 5724–5735, May 2021, doi: 10.1109/TPEL.2020.3028861.
[29] 조형준, “자속 벡터 예측 기반의 3상 영구자석 동기 전동기 식스-스텝 운전,” 학위논문, 서울대학교, 2023.
[30] X. Chen, J. Wang, B. Sen, P. Lazari, and T. Sun, “A High-Fidelity and Computationally Efficient Model for Interior Permanent-Magnet Machines Considering the Magnetic Saturation, Spatial Harmonics, and Iron Loss Effect,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 62, no. 7, pp. 4044–4055, Jul. 2015, doi: 10.1109/TIE.2014.2388200.
[31] Y.-D. Yoon, W.-J. Lee, and S.-K. Sul, “New flux weakening control for high saliency interior permanent magnet synchronous machine without any tables,” in *2007 European Conference on Power Electronics and Applications*, Sep. 2007, pp. 1–7. doi:

10.1109/EPE.2007.4417350.
[32] 설승기, 전기기기제어론, 개정증보판. 홍릉과학출판사, 2021.
[33] S. P. Boyd and L. Vandenberghe, *Convex optimization*. Cambridge, UK ; New York: Cambridge University Press, 2004.
[34] P. T. Boggs and J. W. Tolle, “Sequential Quadratic Programming,” *Acta Numerica*, vol. 4, pp. 1–51, Jan. 1995, doi: 10.1017/S0962492900002518.
[35] N. Bianchi and S. Bolognani, “Magnetic models of saturated interior permanent magnet motors based on finite element analysis,” in *Conference Record of 1998 IEEE Industry Applications Conference. Thirty-Third IAS Annual Meeting (Cat. No.98CH36242)*, Oct. 1998, pp. 27–34 vol.1. doi: 10.1109/IAS.1998.732255.
[36] F. Zhang, Ed., *The Schur Complement and Its Applications*, vol. 4. in Numerical Methods and Algorithms, vol. 4. New York: Springer-Verlag, 2005. doi: 10.1007/b105056.
[37] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical optimization*. in Springer series in operations research. New York: Springer, 1999.
[38] S. Li, B. Sarlioglu, S. Jurkovic, N. R. Patel, and P. Savagian, “Analysis of Temperature Effects on Performance of Interior Permanent Magnet Machines for High Variable Temperature Applications,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 53, no. 5, pp. 4923–4933, Sep. 2017, doi: 10.1109/TIA.2017.2700473.

Abstract

The interior permanent magnet synchronous motor(IPMSM) is widely used as an traction motor for electric vehicles because of its high efficieny and power density. The traction motor is needed to be operated with optimal efficiency in both constant torque region and constant power region. In order to extend the operating region of IPMSM into the high-speed region while the DC-link voltage and the maximum allowable current of the motor drive system are limited, the flux weakening(FW) operation is necessary, and the torque control is required even above the base speed. Since the motor has non-ideal characteristics such as magnetic saturation and cross-coupling effects, the real-time FW operation is needed to cope with such non-ideal characteristics.

In this paper, A real-time torque controller for PMSM under FW operation is proposed while considering magnetic saturation and cross-coupling effects of PMSM. Firstly, the torque control under FW operation is formulated as an nonlinear optimization problem. The analytic optimal solution to generate the optimal curernt reference at every sampling instant is induced by applying sequential quadratic programming(SQP) which is one of the nonlinear optimization techinques. The computationally efficient solution is also proposed for implementation in real-time control systems such as embedded systems. The computationally efficient solution is identical to the original solution because there is no approximation in derivation process. The theoretical and experimental results demonstrate that there is no steady-state error in *dq* current operating point while operating on both constant torque curve and current limit circle even if there is an inductance error. For the maximum torque per voltage(MTPV) operation, the steady-state error occurs because of an inductance error. The reason of this phenomenon is explained in this paper.

Previous studies utilizing optimization techniques have approached FW operation as an equation-solving problem to find the intersection point between two discriminant equations. Discriminant equations have been derived by utilizing the Karush-Kuhn-Tucker(KKT) conditions as sufficient conditions. This approach requires the incremental inductance, the partial derivative of the flux with respect to currents, which is changed according to the operating point. To remove the error

come from an inductance error, the parameter look-up table(LUT) for every operating points is required or the high-frequency voltage signal injection is needed to estimate the incremental inductance.

In this paper, we examine whether the KKT conditions, which generally hold as necessary conditions, can be assumed as sufficient conditions. By utilizing the KKT conditions as sufficient conditions, the torque control under FW operation is approached from the perspective to optimize the dual problem of the original problem. Thanks to this approach, the optimal solution can be derived without any tunning factors, and this solution promises the torque control which is robust to inductance parameter error.

In this paper, an experiment is conduted on the traction motor of electric vehicle whose maximum torque is 360 N·m, and the base speed is 3,000 r/min to validate the proposed control method. Experimental results show that the proposed torque controller tracks the optimal operating point when the torque reference is changed with slew-rate 2700 N·m/s at the 2 times of the base speed, 6,000 r/min.

Keywords: IPMSM, flux weakening operation, real-time torque control, nonlinear optimization

Student Number: 2021-22810