Supplier Consolidation Effect

Ickhyun Nam*

〈目 次〉

Ⅰ. Introduction

In today's business, it is said that B2B rather than B2C is a prominent area for e-commerce. There may be several reasons for this argument. We think that in a business to business transaction the decision making behavior is based more on monetary terms than in B2C. Also the number of players involved are usually fewer in B2B case. In B2B area, there appear consolidation phenomena. In the area of purchasing, many large companies consolidate together and combine their orders. By doing this, they try to have more bargaining power against the suppliers and derive a better deal. In the opposite side, the suppliers can consolidate and increase the efficiency of the total system. Consolidation here means that all of the manufacturing capacities of the suppliers are controlled and optimized to minimize the total cost.

In this paper, we study the latter case, where suppliers can be better-off via cooperation. There may be several benefits for consolidating suppliers. One of the benefits comes from the effect that consolidation of orders reduce the switch-over cost of the system. Another benefit is due to the fact that we need smaller amount of capacity by pooling all the capacities of the suppliers altogether.

* College of Business Administration Seoul National Univ.

We first deal with the effect of set-up reduction. In this case, we assume that each supplier has sufficient capacity to process its assigned workload. And then we try to generalize by incorporating the cost incurring from surpassing capacity.

Ⅱ. Model

2.1 Assumptions

- The customer orders for part i to a supplier follow a Poisson process with arrival rate of λ_i , i=1,2,...,n. There are n parts to consider. Amount per order arrived follows a certain probabilistic distribution. Thus the accumulated order per unit time becomes a Compound Poisson process.
- The customer orders for each part are probabilistically independent.
- There are n suppliers. We first deal with the special case where the number of parts is the same as the number of suppliers in order to emphasize the effect of consolidation. We can relax this assumption without much difficulty.
- The suppliers are homogeneous in the sense that the order arrival probability is the same for each supplier.
- There is no economy of scale in parts production. That is, the unit time and cost for producing a part is the same regardless of the batch size.
- The set-up or switch-over cost from producing part i to part j is assumed to be 1 for all i, j. This assumption can be generalized to such cases where set-up cost depends on the part, on the supplier, or on the pair of adjacent parts processed. Set-up cost depending on the pair of adjacent jobs means that set-up cost from producing part i to producing part j is a function of (i, j).
- Each supplier processes the order accumulated for a unit time. This means that each supplier accumulate customer orders for several parts for a unit time and then start processing them. That is, the production run is done every unit time.

2.2 Models

We first consider the case where there is no capacity constraint. That is, each supplier does have sufficient capacity for processing the parts assigned to it. The original model is that each supplier handles its own orders accumulated for a unit time. It can have up-to n *kinds* of parts to manufacture. It is quite possible that each kind may have multiple number of orders from distinct customers.

In the consolidation model, each supplier is assigned only one part for processing. Thus in the consolidated case, we would be better off by having fewer switch-overs by assigning one kind of part processing to each supplier. We would analyze this effect in consolidation case.

We now derive the expected number of set-ups for individual and consolidated cases respectively.

a) Individual Case

The probability that each individual supplier has zero order for part i during a unit time is $e^{-\lambda_i}$ from the Poisson distribution. This comes from letting $x=0$ in the Poisson probability density function of $\frac{e^{-\lambda_i}\lambda_i^x}{x!}$. Representing that $x_i=1$ if the supplier has positive number of orders for part i, and $x_i=0$ otherwise, we have the joint probability for an individual supplier as follows:

$$P(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n}(1-e^{-\lambda_i})^{x_i}e^{-\lambda_i(1-x_i)}.$$

This can be called a *multinomial-Bernoulli* distribution. Since we are concerned only whether there is one or more orders to process regardless of the amount for each part, this can be called a Bernoulli distribution. We deal with this kind of success-failure event for n number of parts, and thus the term multinomial is added.

The number of set-ups for each supplier is the number of kinds of parts for it to process, which is $X_1+X_2+\ldots+X_n$. Then the expected number of set-ups for each individual supplier is easily derived as follows.

$$E(X_1+\ldots+X_n)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}(1-e^{-\lambda_i})=n-\sum_{i=1}^{n}e^{-\lambda_i}.$$

For the general case other than Poisson arrivals, the expected value should be

$\sum_{i=1}^{n}p_i$, where p_i is the probability of having positive number of orders for part i.

The expected number of total set-ups across the whole industry(n suppliers) is then

$$n(n-\sum_{i=1}^{n}e^{-\lambda_i}).$$

In the consolidated case, we assume that supplier i processes all of the orders of i to the industry. Thus in the consolidated case, each supplier specializes on only one part and we can reduce the number of set-ups in the whole industry. The expected number of set-ups in the consolidated case is now then

$$\sum_{i=1}^{n}(1-e^{-\lambda_i n})=n-\sum_{i=1}^{n}e^{-\lambda_i n}.$$

Here $e^{-\lambda_i n}$ represents the expected number of case where there is no order for part i accumulated for a unit time throughout the industry.

Proposition 1:

In the consolidated case where each supplier is assigned a distinct part, the expected number of set-ups is reduced by

$$\frac{n(n-\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i})}{n-\sum_{i=1}^{n} e^{-\lambda_i n}}$$

compared with the individual case.

In the special case where λ_i's are such that $e^{\lambda_i} \approx 0$, the expected number of set-ups is reduced to 1/n in the consolidated case.

We now consider the capacity of each supplier. In the previous model, each supplier is assumed to have sufficient capacity to handle the orders. Now we consider the case where there incurs a penalty cost for the order amount over the capacity. This penalty can be overtime cost or the spot price for outsourcing processing the order.

We first consider the case where the order of part i cannot be split among suppliers. That is, the whole order of part i can be assigned to one and only one supplier. This means that we would prefer a single supplier for each part. (This is not necessarily true if we split the orders which come from multiple customers.) When we want a homogeneous quality and order tracking capability, this case would be more appropriate. In this case we now should consider not only the number of set-ups but also the capacity shortages. Here are the formulations.

We consider the case where there are m parts and n suppliers.

$x_{ij} = 1$ if part i is assigned to supplier j, and 0 otherwise.

Capacity shortage of supplier j is

$(k_j - \sum_{i=1}^{m} d_i x_{ij})^+ \equiv y_j$, where k_j is capacity of j and d_i is the order amount of part i for the whole industry. In the following formulation, the set-up cost is denoted by s and the penalty cost for capacity shortage by p.

$$\min \quad \sum_{j=1}^{n} (\sum_{i=1}^{m} x_{ij}) s_j + \sum_{j=1}^{n} p_j y_j$$

subject to:

$$\sum_j x_{ij}=1,\ y_j \geq k_j - \sum_i d_i x_{ij},\ y_j \geq 0,\ x_{ij} \in \{0,1\}.$$

We now consider the more general case where fraction of order can be assigned to a supplier. This means that each order for a part can be split among multiple suppliers. This split can be beneficial in reducing the capacity shortage cost but may increase the set-up cost. The additional constraints are

$$\sum_i x_{ij}=1,\ x_{ij} \geq 0,\ x_{ij} \leq u_{ij},\ u_{ij} \in \{0,1\}$$

In this case, the set-up cost in the previous objective function should be replaced by $\sum_j \sum_i u_{ij} s_j$.

We now consider some extensions of our model.

Ⅲ. Extensions

3.1 Asymmetric switch-over cost

In a more general case, we have an asymmetric switch-over cost. Here by asymmetric switch-over cost, we mean that switch-over cost depends on the pair of consecutive parts to be processed. Thus we should have the switch-over cost item in addition to the previous objective function, $\sum_j C_j(u_{1j}, u_{2j}, \ldots, u_{mj})$.

The function of Cj is "partially" optimized cost using Travelling Salesman Problem and is not linear at all. Thus it is beyond the linear programming area. Here grouping the components is relevant, not just the number of components.

3.2 Others

We can think of the following extensions for further research.

- general stochastic process other than Poisson
- n parts and m suppliers
- time span for accumulating orders as a decision variable.
- economy of scale
- incentive conflict among suppliers when consolidated and assigned a specific part and amount
- learning effect by producing fewer kinds of parts and more of each.
- costs of capacity overage and shortage.
- incoming orders during the current production run can be incorporated to the current run in order to reduce set-up. This will affect the due date of each order. Delay may thus be considered.

Also using news vendor model, we may derive the optimal amount of buffer capacity. By consolidating the supplier capacity, the optimal buffer capacity should be lower in the consolidation case due to pooling effect. This may be more outstanding when there is correlation among the orders. We mainly have two major effects of consolidation: reduced setups and reduced capacity requirement(resource pooling)

GM, Ford and Daimler Chrysler announced the development of a joint exchange called Covisint for procurement, supply-chain management and collaborative product development. And this can be another kind of pooling effect.

Reference

1. *Production and Operations Management* by Joseph S. Martinich, John Wiley & Sons, Inc., 1997.
2. Operations Research by Hamdy A. Taha, Mac Millan, 1992.

공급사슬 불확실성의 효과적 관리에 대한 연구

박 상 욱*

〈目 次〉

Ⅰ. 서 론

지난 10년 간 생산관리 분야에서 가장 활발하게 연구되고 있는 주제는 공급사슬 관리(Supply Chain Management, SCM)이다. 이러한 현상은 기업간 경쟁이 어느 때 보다도 치열한 현실에서 기업이 경쟁력을 갖기 위해서는 낮은 비용과 높은 서비스 수준을 동시에 달성하여야 한다는 사실에 기인한다고 할 수 있다. 요즘의 경쟁은 기업 대 기업의 경쟁이 아니라 공급사슬 대 공급사슬의 경쟁이라고 말하여 진다. 공급사슬의 구성원이 자신의 입장만을 고려하여 내린 의사결정은 더 이상 최적의 의사결정이라고 볼 수 없으며, 공급사슬 참가자들의 상호작용을 고려한 의사결정이 우월한 성과를 낳을 수 있다. 공급사슬 관리와 관련하여 여러 중요한 의사결정들이 존재하지만 그 중에서 가장 중요하다고 할 수 있는 것은 역시 공급사슬에 존재하는 불확실성을 관리하는 것일 것이다. 공급사슬 상에서 제조업자나 중간상들은 크게 두 가지의 불확실성에 직면한다. 그것은 공급의 불확실성과 수요의 불확실성이다. 요즘 많은 기업들이 JIT 생산시스템을 채택하고 있으며, 그들의 성공여부는 적은 양의 재고로 공급사슬 상에 존재하는 불확실성의 부정적 효과를 어떻게 최소화 할 수 있는 가에 달려있다. 현재 까지 이와 같은 불확실성에 대한 대부분의 문헌들은 두 가지 불확실성 중 하나에 초점을 맞춘 연구들이다. 즉, 하나는 주어진 것이라고 간주하고 다른 하나의 불확실성이 재고관련 비용에 미치는 영향을 분석하는 연구를 수행하였다. 이 논문의 목적은 이 들 두 불확실성 간의 상호작용에 대해 연구하는 것이다. 즉, 공급의 불확실성으로 인한 재고관련 비용의 증가와 수요의 불확실성의 크기와의 상관관

* 서울대학교 경영대학 교수

계를 밝히고자 한다.

공급의 불확실성을 모형화 하는 방법에는 크게 두 가지가 있다. 하나는 확률적 공급 리드타임을 사용하는 방법이고 다른 하나는 확률적 공급량을 사용하는 방법이다. 확률적 공급 리드타임이란 공급업자의 리드타임이 일정한 확률 분포를 따른 다고 가정하는 것이며, 확률적 공급량이란 공급업자의 리드타임은 일정하나 공급하는 양과 주문한 양의 차이가 일정한 확률 분포를 따른다고 가정하는 것이다. 이 논문에서는 공급업자가 소매상의 주문에 따라 배달해 주는 실제 배달량과 원래 주문량과의 차이가 확률분포를 따르는 경우를 모형화 하여 분석한다. 즉, 공급업자가 소매상의 주문량을 전량 배달해 주는 경우도 있으나, 주문량보다 적게 배달해 줄 가능성이 있는 경우를 모형화 한다. 또한 제조업자는 확률적 분포를 따르는 수요를 충족시켜야 한다.

본 연구는 공급 및 수요 불확실성 문제를 다기간 Newsboy 문제로 모형화 한다. 소매상은 정규분포를 따르는 수요를 충족시켜야 하며, 각 기간 수요는 동일한 확률분포를 따르며, 또한 상호 독립적으로 분포한다. 소매상은 매 기간마다 공급업자에게 주문을 하며, 공급업자는 이것을 l 기간이 지난 후에 배달하는데, 이때 공급업자가 배달하는 양이 주문량 전량일 확률이 β이고 (주문량-K) 개일 확률이 $(1-\beta)$이다. 구입 단가는 c이고 배달되는 시점에 지급된다. 논의의 간결성을 위하여 주문에 따른 고정비가 없다고 가정한다(주문 고정비가 존재하는 경우에도 유추적인 결과를 얻을 수 있다는 것을 보일 것이다). 만약 가지고 있는 재고로 모든 수요를 만족시킬 수 없는 경우에는 다음 기의 주문량에서 충족시킨다(=backordering). 소매상의 재고유지 비용 함수와 재고고갈 비용 함수는 선형이라고 가정한다. 사용되는 모형에서는 할인요소(discounting factor)를 사용하며, 할인된 총 비용(=무한기간 동안 발생하는 구매 비용, 재고유지 비용, backorder 비용의 합)을 최소화하는 주문정책을 구하고자 한다. 모형 분석에서 구한 최적 주문정책을 사용한다는 가정 하에서 수치분석(numerical study)을 통해 공급 불확실성과 수요 불확실성이 재고비용의 증가에 미치는 개별적 영향 뿐 아니라 두 불확실성의 상호 작용이 비용에 미치는 영향을 분석한다. 또한 이러한 분석결과가 공급사슬 관리에 주는 시사점을 설명한다.

이 논문의 가장 중요한 발견 중의 하나는 수요의 불확실성이 매우 높은 경우 공급의 불확실성의 증가에 따른 재고비용의 증가는 수요의 불확실성이 낮은 경우에 비해 상대적으로 낮다는 사실이다. 마찬가지 논리로 공급의 불확실성이 매우 높은 경우 수요의 불확실성으로 인한 비용의 증가가 공급의 불확실성이 낮은 경우에 비해 상대적으로 낮다는 사실을 확인할 수 있다. 이러한 결과는 중요한 경영상의 의미를 갖는다. 즉, 공급사슬 상의 불확실성을 효과적으로 관리하기 위해서는 두 가지 불확실성 수준이 적절한 균형을 이루어야 한다는 것이다. 다시 말하면 공급의

불확실성을 줄이는 투자를 한다 할 지라도 수요의 불확실성이 매우 크다면 그러한 투자는 큰 효과를 거두기 어렵다는 것이다. 같은 논리로 추가적인 투자를 통해 수요의 불확실성을 줄인다 하더라도 공급업자의 신뢰도가 낮다면 공급사슬 전체의 효율성은 크게 개선되지 못하는 병목현상이 발생한다.

본 논문은 다음과 같이 구성되어 있다: 2절에서는 공급의 불확실성이 존재하는 경우의 동적 재고모형에 대한 과거의 연구를 살펴본다. 3절에서는 문제를 동적계획 문제로 모형화하여 최적 주문 정책을 유도한다. 4절에서는 수치분석을 통해 수요 및 공급의 불확실성에 따른 비용증가를 측정하고 이것이 경영의사결정에 주는 시사점을 찾아본다. 5절에서는 본 논문의 결과를 요약하고 이러한 결과가 실제 경영의사결정에 시사하는 바에 대해 설명한다.

Ⅱ. 과거의 연구

공급측면의 불확실성을 모형화 하는 방법에는 여러 가지가 있을 수 있다. 그 중에 대표적인 방법이 공급측면의 불확실성을 공급업자 배달시간(lead-time)의 불확실성으로 모형화 하는 것이며 여러 논문들이 이러한 접근법을 사용하고 있다. Kaplan(1970)은 확률분포를 따르는 배달시간을 갖는 정기주문 시스템을 모형화 하였다. 그는 배달시간은 배달 주기의 배수라고 가정하였다. 두 가지 가정 하에서(즉, 나중에 주문한 것이 먼저 주문한 것보다 일찍 배달될 수 없다는 가정(=no order-crossing)과 배달 시간은 현재 처리 중인 주문의 수나 양에 영향을 받지 않는다는 가정 하에서), 최적 주문정책은 배달시간이 확정적인 경우의 최적 주문 정책과 같이 기본재고 정책의 형태를 갖지만 최적 기본재고(base-stock) 수준에 차이가 있음을 보이고 그 이유를 설명하였다. Ehrhardt(1984)는 배달시간에 대해 Kaplan과 동일한 가정을 하고 있다. 그는 미시적 기본재고 정책이 최적이 되는 조건을 제시하였으며, 무한기간(infinite horizon) 또는 유한기간(finite horizon) 문제 모두에서 주문고정비가 양의 값을 갖는 경우 (s,S) 정책이 최적 주문정책이라는 것을 증명하였다. Park 등(1996)은 배달시간이 주문주기보다 작은 경우를 분석하여 Ehrhardt(1984)와 같은 결과를 도출한다. Nahmias(1979)는 재고가 부족하면 판매기회를 상실하는 경우(lost-sales case)를 가정하고 배달의 불확실성을 분석하고 있다.

공급의 불확실성을 공급량의 불확실성으로 모형화 한 논문들도 찾아 볼 수 있다. 박상욱(1998, 2001)은 확률적 수요를 갖는 경우 Newsboy 문제를 기본모형으로 하여 공급량의 불확실성을 무한기간 문제로 모형화하고 몇 가지 가정 하에서 최적주문정책이 안정적 기본재고

정책(stationary base-stock policy)임을 증명하였으며 최적 주문량이 만족하여야 하는 최적 조건을 유도하였다. Gullu 등(1999)은 공급량의 불확실성을 세 개의 사건으로 나누어 모형화 하였다. 즉, 공급업자가 주문량 전량을 공급할 수 있는 경우, 전혀 공급하지 못하는 경우, 부분적으로 충족시키는 경우의 세가지로 나누고 각각의 경우에 확률을 부여한다. 확률적 동적계획법을 사용하여 기본재고 정책이 최적임을 보였으며, 수요가 기간별로 변화하나 그 값을 미리 알 수 있는 경우를 분석하여 Newsboy 공식 형태의 최적조건을 구하였다. .

본 연구는 공급의 불확실성을 공급량의 불확실성으로 모형화 하여 수요와 공급의 불확실성이 재고관련 비용에 미치는 영향에 대해 분석하고 이러한 정보가 공급사슬 경영에 던져주는 시사점을 밝히고자 한다.

Ⅲ. 공급량 불확실성 모형

본 논문에서 사용되는 정의들을 정리해 보면 다음과 같다.

K = 공급업자가 주문량 전량을 공급하지 못하는 경우 주문량에 미달하는 양

l = 공급업자의 배달기간

α = 할인요소

β = 공급업자가 주문량 전량을 공급 해줄 확률

p = backorder 비용/개*기간

h = 재고유지 비용/개*기간

c = 구입단가

x = 주문할 당시의 재고수준(=보유재고 + 배달 중에 있는 주문량 - backorder)

z = 당기 주문량

y = $x+z$

δ = 일 기간 수요를 나타내는 확률변수, 평균이 μ이고, 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다.

δ^k = k 기간 수요를 나타내는 확률변수, 평균이 $k\mu$이고, 표준편차가 $\sigma\sqrt{k}$인 정규분포를 따른다.

$L(y)=h\int_{-\infty}^{y}(y-\delta)\phi(\delta)d\delta+p\int_{y}^{\infty}(\delta-y)\phi(\delta)d\delta$, 기초재고가 y일 때 일 기간 총 기대비용. 단, $\phi(.)$는 일 기간 수요의 확률 밀도함수.

$L^k(y) = h\int_{-\infty}^{y}(y-\delta^k)\phi^k(\delta^k)d\delta^k + p\int_{y}^{\infty}(\delta^k - y)\phi^k(\delta^k)d\delta^k$. 첫 기간의 기초재고가 y이고 이후로 새로운 배달이 없다고 가정하고 구한 k 기간 말의 총 기대비용. 단, $\phi^k(.)$는 k 기간 수요의 확률 밀도함수.

앞의 정의들을 이용하여 공급의 불확실성이 존재하는 무한기간 문제를 동적계획 문제로 모형화하여 보자. 논의의 간결성을 위해, 문제의 일반성을 해치지 않고 $l=0$이라 가정하자. $f_t(x_t)$를 t번째 주문량 결정시 재고수준(inventory position)이 x_t일 때, t번째 주기부터 발생하는 총 기대비용의 합이라 정의하면 배달량에 불확실성이 존재하는 문제는 동적계획법을 사용하여 다음과 같이 모형화 할 수 있다. $t=1, 2, ...$에 대해 다음이 성립한다.

DP:

$$f_t(x_t) = \min_{y_t \ge x_t} \left\{ \begin{aligned} &\beta c(y_t - x_t) + (1-\beta)c(y_t - x_t - K) \\ &+ \beta L(y_t) + (1-\beta)L(y_t - K) \\ &+ \alpha E[\beta f_{t+1}(y_t - \delta) + (1-\beta)f_{t+1}(y_t - K - \delta)] \end{aligned} \right\} \tag{1}$$

식 (1)의 괄호 안에 있는 첫 두 항목은 t 번째 주기의 구입비용을, 다음 두 항목은 t 번째 주기의 기대 재고유지 비용과 backorder 비용의 합을, 마지막 항목은 $(t+1)$ 번째 주기 이 후에 발생하는 총 기대비용의 합을 나타낸다.

DP에 있는 항목들을, 특히 구입비용 항목들을 재배치해 보자. x_t는 y_t의 함수가 아니라 y_{t-1}의 함수이기 때문에, t 번째 주기에 x_t로 인한 구입비용의 증감을 t 번째 주기 총 기대비용에서 빼어서 $(t-1)$ 번째 주기의 총 기대비용에 더해 주어도 원래문제(= DP) 의 최적 해를 변화 시키지 않는다. 구입비용 항목들을 위에서 설명한 바와 같이 재배치하면 t 번째 주기의 구입비용은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$c(1-\alpha)(y_t - (1-\beta)K) + \alpha c\mu \tag{2}$$

식 (2)를 이용하여 순환방정식을 다음과 같이 재정의 할 수 있다. 즉, $t=1, 2, ...$에 대해 다음이 성립한다.

$$\widetilde{f}_t(x_t) = \min_{y_t \ge x_t} \begin{Bmatrix} c(1-\alpha)(y_t - (1-\beta)K) + \alpha c\mu \\ + \beta L(y_t) + (1-\beta)L(y_t - K) \\ + \alpha E[\beta \widetilde{f}_{t+1}(y_t - \delta) + (1-\beta)\widetilde{f}_{t+1}(y_t - K - \delta)] \end{Bmatrix} \tag{3}$$

식 (3)에서 $y_t \ge x_t$을 무시하면 $\widetilde{f}_t$는 더 이상 x_t의 함수가 아니다. 따라서 미시적 문제(myopic problem)을 풀어 t 번째 주기의 최적 주문량(=주문 직후의 재고수준) y_t^*를 구할 수 있으며, 또한 각 주기에 해당하는 미시적 문제가 모두 동일하므로 다음이 성립함을 알 수 있다.

$$y_1^* = y_2^* = \cdots = y_t^* = y_{t+1}^* = \cdots \tag{4}$$

즉, 매 주기 마다 최적 주문량은 변하지 않는다 (stationary policy).

미시적 정책이 공급의 불확실성이 있는 무한기간 Newsboy 문제를 최적화하며, 최적 주문정책은 주기마다 변하지 않는다는 것을 보였다. 다음으로 미시적 문제를 풀어 최적 주문정책의 형태를 구하도록 하자. 앞으로의 논의에서는 표현의 간결성을 위해 주기를 나타내는 첨자 t를 생략한다.

주기초의 재고 x가 주어졌을 때 미시적 문제는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

MP:

$$\min_{y \ge x} \begin{Bmatrix} c(1-\alpha)(y - (1-\beta)K) + \alpha c\mu \\ + \beta L(y) + (1-\beta)L(y-K) \end{Bmatrix} \tag{5}$$

$G(y)$를 다음과 같이 정의하자.

$$G(y) = c(1-\alpha)(y - (1-\beta)K) + \beta L(y) + (1-\beta)L(y-K)$$

$G(y)$는 총 기대비용 중 y의 함수인 항목들로만 이루어진다. 식 (5)는 다음과 같이 다시 쓸 수 있다.

$$\min_{y \ge x} \{G(y) + \alpha c\mu\} \tag{6}$$

식 (6)의 괄호 안에 있는 두 번째 항목은 상수이므로 주문정책을 선택하는데 영향을 주지않기 때문에, $G(y)$를 최소화 하는 것만으로도 충분하다. $L(.)$가 볼록함수 (convex function) 이기

때문에 $G(y)$도 볼록 함수임을 쉽게 증명할 수 있다(Veinott (1965)). 제약식 $y \geq x$를 무시할 때, 최적인 y는 $\frac{dG(y)}{dy} = 0$을 만족시킨다. $\Phi(.)$ 을 표준 정규분포의 분포함수(distribution function)라 하면 y^*는 다음 조건을 만족한다.

$$\beta\Phi(z_1^*) + (1-\beta)\Phi(z_2^*) = \frac{p-(1-\alpha)c}{p+h}, \tag{7}$$

단, $z_1^* = \frac{y^* - \mu}{\sigma}$ 이고, $z_2^* = \frac{y^* - K - \mu}{\sigma}$.

따라서, 미시적 문제의 최적 주문정책은 기본재고 정책이다. 즉, 만약

$x < y^*$이면, y^*까지 재고수준을 올리고,

$x \geq y^*$이면, 주문을 하지 않는다.

위의 사실과 식 (4)을 결합하면, 무한기간 문제에서는 안정적 기본재고 정책(stationary base stock policy)이 최적임을 알 수 있다.

식 (7)은 closed form이 아니므로 역함수를 사용하여 바로 최적해를 구할 수 없기 때문에 수치탐색법(numerical search)을 사용하여 해를 구하여야 한다. 식 (7)의 좌변이 y 값이 증가함에 따라 단조증가하기 때문에 최적해는 유일하며 수치탐색법을 사용하여 그 해를 쉽게 구할 수 있다.

앞에서 공급의 불확실성이 존재하는 경우 무한기간 Newsboy 문제의 최적 주문정책은 안정적 기본재고 정책이라는 것을 보였다. 이러한 결과는 보다 일반적 문제에 대해서도 유효하다는 것을 보일 수 있다.

(1) $l \geq 1$인 경우

$l \geq 1$인 경우에도 앞 절에서 보인 사실이 성립함을 쉽게 증명할 수 있다. 차이점은 앞으로 l 기간 후까지 배달 받을 총량이 $(l+1)$개의 서로 다른 값을 가질 수 있다는 것이다. 앞으로 l 기간 후까지 배달 받는 총량이 총 주문량 보다 $m \cdot K$개 적을 확률은 ${}_lC_m\beta^{l-m}(1-\beta)^m$이 된다(단, $m = 0,1,\ldots,l$). ${}_lC_m\beta^{l-m}(1-\beta)^m$을 θ_m이라 정의하면 최적 주문량에 대해 다음이 성립함을 증명할 수 있다.

$$\sum_{m=0}^{l}\theta_m\Phi(z_m)=\frac{p-(1-\alpha)c}{p+h}\text{, 단, } z_m^{*}=\frac{y^{*}-mK-(l+1)\mu}{\sigma\sqrt{l+1}},\forall m \tag{8}$$

(2) 배달량이 3개 이상의 서로 다른 값을 갖는 경우

앞에서 배달량이 확률분포를 따르며 서로 다른 2 개의 값을 갖는 경우, 안정적 기본재고 정책이 최적임을 알았다. 이러한 결과는 배달량이 확률분포에 따르며 서로 다른 3 개 이상의 값을 갖을 수 있는 경우, 즉, 공급업자가 주문량보다 K_i개 만큼 적게 배달해 줄 확률이 β_i, $i=1,2,...n$ (단, $n>2$이고 $\sum_{i=1}^{n}\beta_i=1$)인 경우에도 유효하다. 즉, 고려해야 할 경우의 수는 늘어나지만, 앞에서와 동일한 방법으로 안정적 기본재고 정책이 최적임을 증명할 수 있다.

(3) 주문 고정비가 있는 경우

본 논문이 논의의 간결성을 위해 주문 고정비가 0인 경우를 분석하였으나, 본 논문의 결과를 주문 고정비가 있는 경우로 쉽게 일반화 할 수 있다. 예를 들어, 재고유지 비용과 back order 비용 함수가 볼록 비감소 함수(convex and non decreasing function)이고 구매 비용 함수가 선형인 경우, $G(.)$가 볼록 함수이기 때문에 시스템 계수들이 일정한 조건을 만족하면, 최적 주문정책이 (s, S) 정책임을 쉽게 증명할 수 있다(Veinott (1966)).

Ⅳ. 수치분석

본 절에서는 수요와 공급의 불확실성의 상호작용이 재고비용에 미치는 영향을 분석하기 위해 수치분석을 수행한다. 이러한 목적을 위해 8개의 시스템 계수들을 다음과 같이 변화시켜 300개의 서로 다른 계수 집합을 구성하였다.

$l=0$,

$\alpha=0.9$,

$\mu=10$,

$\sigma=1, 2, 3, 4, 5$,

$p=3, 4, 5$,

$h=1$,

$c=1, 3, 5, 7$,

$K=1, 2, 3, 4, 5,$
$\beta=0.5$

총 300개의 문제에 대해 3절에서 구한 최적조건을 만족하는 최적 주문량과 일기간 총 기대비용을 계산하였다. 모형의 가정을 설명할 때 밝힌 바와 같이 일기간 수요는 평균이 μ이고 표준편차가 σ인 정규분포를 따른다고 가정하였으며 각 문제의 최적주문정책은 최적 조건인 식 (7)을 만족하는 y의 값을 수치 탐색법을 사용하여 찾아냄으로써 신속하게 구할 수 있었다. 일기간 총 기대비용은 식 (5)에 있는 총 비용함수를 수치적으로 평가함으로써(numerical evaluation) 그 값을 계산하였다. 수행된 수치분석의 결과 중 σ와 K의 변화에 따른 일 기간 총 기대비용은 p와 c의 12개 조합 각각에 대해 〈표 1〉에 정리되어 있다. 공급의 불확실성의 감소에 따른 비용 감소율은 (p=3, c=1)인 경우에 대해 〈표 2〉에 정리되어 있다.[1] 〈표 2〉에 있는 값들은 다른 시스템 계수들 값은 고정되어 있고 K의 값이 1단위 줄어들었을 때(공급의 불확실성이 한 단위 줄어들었을 때) 비용의 감소율을 나타낸다.

〈표 1〉 일 기간 총 기대비용

(1) p=3, c=1인 경우

	σ=1	2	3	4	5
K=1	2.5	3.75	5.06	6.38	7.71
2	2.91	3.99	5.22	6.5	7.81
3	3.44	4.36	5.49	6.71	7.97
4	3.99	4.83	5.84	6.98	8.2
5	4.54	5.34	6.26	7.32	8.48

(2) p=4, c=1 인 경우

	σ=1	2	3	4	5
K=1	2.66	4.05	5.5	6.97	8.44
2	3.1	4.31	5.68	7.1	8.55
3	3.64	4.71	5.97	7.33	8.73
4	4.19	5.2	6.35	7.63	8.98
5	4.74	5.73	6.8	8	9.29

1) 식 (5)에 있는 총 기대비용의 계산 시 $\alpha c\mu$는 상수로 변하지 않기 때문에 포함하지 않았다.

〈표 1〉 일 기간 총 기대비용(계속)

(3) p=5, c=1 인 경우

	σ=1	2	3	4	5
K=1	2.78	4.28	5.84	7.42	9
2	3.24	4.56	6.04	7.57	9.12
3	3.78	4.98	6.34	7.8	9.31
4	4.33	5.48	6.74	8.12	9.58
5	4.88	6.01	7.21	8.51	9.91

(4) p=3, c=3 인 경우

	σ=1	2	3	4	5
K=1	4.61	5.97	7.38	8.8	10.23
2	5.08	6.23	7.56	8.94	10.34
3	5.69	6.64	7.84	9.16	10.52
4	6.34	7.16	8.23	9.46	10.76
5	6.99	7.76	8.7	9.83	11.07

(5) p=4, c=3 인 경우

	σ=1	2	3	4	5
K=1	4.82	6.34	7.93	9.54	11.15
2	5.32	6.63	8.13	9.69	11.27
3	5.95	7.08	8.45	9.93	11.47
4	6.6	7.64	8.88	10.27	11.74
5	7.25	8.25	9.38	10.68	12.08

(6) p=5, c=3 인 경우

	σ=1	2	3	4	5
K=1	4.97	6.63	8.36	10.1	11.85
2	5.5	6.94	8.57	10.26	11.98
3	6.13	7.41	8.91	10.53	12.19
4	6.78	7.99	9.36	10.88	12.49
5	7.43	8.62	9.9	11.32	12.86

〈표 1〉 일 기간 총 기대비용(계속)

(7) p=3, c=5 인 경우

	σ=1	2	3	4	5
K=1	6.7	8.13	9.61	11.11	12.62
2	7.2	8.4	9.8	11.26	12.73
3	7.89	8.84	10.11	11.49	12.92
4	8.64	9.41	10.52	11.81	13.18
5	9.39	10.07	11.03	12.21	13.51

(8) p=4, c=5 인 경우

	σ=1	2	3	4	5
K=1	6.95	8.58	10.29	12.01	13.74
2	7.5	8.9	10.5	12.17	13.87
3	8.22	9.39	10.85	12.43	14.08
4	8.97	10	11.31	12.8	14.37
5	9.72	10.7	11.87	13.25	14.74

(9) p=5, c=5 인 경우

	σ=1	2	3	4	5
K=1	7.14	8.93	10.8	12.69	14.58
2	7.72	9.27	11.03	12.86	14.72
3	8.45	9.79	11.41	13.15	14.96
4	9.2	10.44	11.9	13.54	15.28
5	9.95	11.16	12.5	14.03	15.68

(10) p=3, c=7 인 경우

	σ=1	2	3	4	5
K=1	8.76	10.23	11.77	13.32	14.88
22	9.29	10.52	11.96	13.46	14.99
3	10.03	10.97	12.28	13.71	15.19
4	10.87	11.57	12.71	14.04	15.46
5	11.72	12.28	13.24	14.45	15.8

〈표 1〉 일 기간 총 기대비용(계속)

(11) p=4, c=7 인 경우

	σ=1	2	3	4	5
K=1	9.05	10.78	12.57	14.39	16.21
2	9.65	11.11	12.8	14.56	16.34
3	10.45	11.63	13.16	14.84	16.57
4	11.29	12.3	13.66	15.22	16.88
5	12.14	13.07	14.26	15.7	17.27

(12) p=5, c=7 인 경우

	σ=1	2	3	4	5
K=1	9.28	11.19	13.18	15.19	17.21
2	9.92	11.55	13.43	15.38	17.36
3	10.73	12.12	13.83	15.69	17.61
4	11.58	12.83	14.37	16.11	17.95
5	12.43	13.63	15.02	16.63	18.38

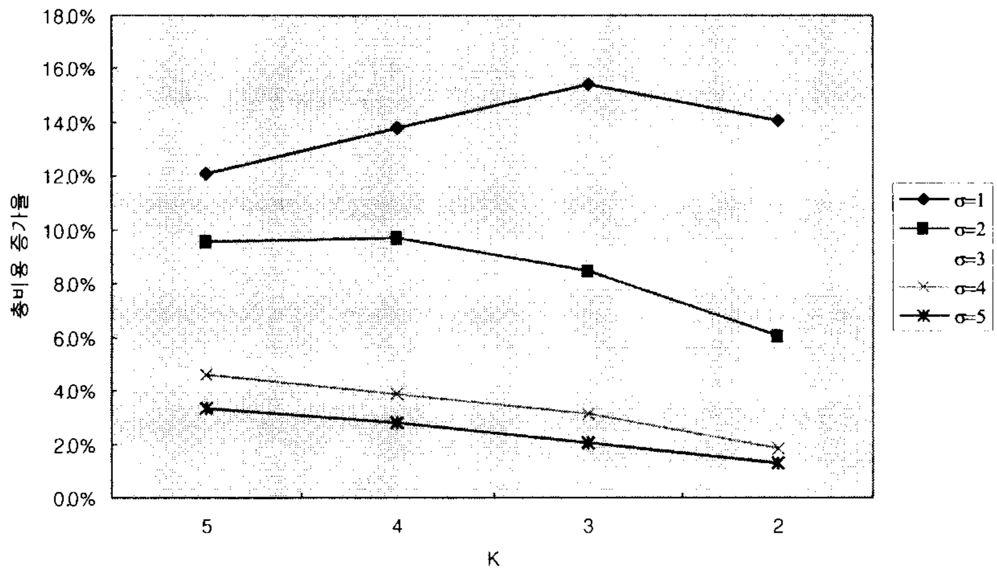
〈표 1〉을 관찰하면 쉽게 예상할 수 있는 바와 같이 수요의 불확실성의 크기를 나타내는 σ와 공급의 불확실성의 크기를 나타내는 K의 값이 증가함에 따라 총비용이 증가함을 관찰 할 수 있다. 또한 각 불확실성이 한 단위 씩 증가함에 따라 총비용의 증가하는 속도가 커지는 것을 관찰할 수 있다. 이러한 현상은 일반적인 재고관리모형에서 관찰되는 재고량을 늘림에 따라 추가적인 단위 재고의 가치가 체감한다는 사실과 직접적인 관련이 있다고 하겠다. 따라서 기업이 투자를 통해 공급량의 불확실성을 통제하려고 하는 경우 단위 투자에 대한 공급 불확실성의 감소가 투자액의 증가에 따라 감소할 것이라는 것을 유추할 수 있으며 경제적 불확실성의 수준이 존재함을 알 수 있다.

〈표 2〉 공급 불확실성 감소에 따른 총비용 감소율 (p=3, c=1)

K	σ=1	2	3	4	5
5->4	12.1%	9.6%	6.7%	4.6%	3.3%
4->3	13.8%	9.7%	6.0%	3.9%	2.8%
3->2	15.4%	8.5%	4.9%	3.1%	2.0%
2->1	14.1%	6.0%	3.1%	1.8%	1.3%

<표 2>를 관찰해 보면 수요의 불확실성이 증가함에 따라 공급의 불확실성 감소로 인한 비용의 증가가 오히려 작아진다는 것을 알 수 있다. 즉, σ가 1, 2, 3, 4, 5로 증가함에 따라 K가 한 단위 줄어드는데 따른 비용 감소율이 작아 지는 것을 관찰할 수 있다. 즉, σ가 1인 경우 K가 5에서 4로 감소하는 경우 비용감소율은 12.1%이나 σ가 2인 경우 그 감소율은 9.6%이며 σ가 3, 4, 5로 증가함에 따라 비용 감소율은 각각 6.7, 4.6, 3.3%로 계속 줄어든다. K가 4에서 3으로, 3에서 2로, 2에서 1로 감소되는 경우에도 같은 현상을 관찰할 수 있다. 이러한 현상은 단지 p=3, c=1인 경우에서만 관찰 된 것이 아니라 모든 12개의 p와 c의 조합에 대해서 똑 같이 관찰되었기 때문에 일반적으로 성립한다고 말할 수 있다. <그림1>은 (p=3, c=1)인 경우 수요의 불확실성(σ)의 크기가 K 값의 감소에 따른 비용 감소율에 어떤 영향을 주는 지를 도시화 하고 있다.

<그림 1> 공급 불확실성 감소에 따른 총비용 감소율 (p=3, c=1)



이러한 발견은 공급량의 불확실성을 줄이려는 기업의 노력에 큰 시사점을 던져 준다. 즉, 기업이 직면한 수요의 불확실성이 크다면 공급량의 불확실성을 줄이기 위해 많은 투자를 하여도 큰 비용 감소를 달성할 수 없다는 것이다. 따라서 기업이 재고관련 비용을 효과적으로 줄이기 위해서는 공급 불확실성을 줄이는 노력 뿐 아니라 수요의 불확실성을 줄이려는 노력을 동시에 실행하여야 효과적인 비용감소를 달성할 수 있을 것이다. 다르게 해석해 보면 한 기업이 직면하

고 있는 수요의 불확실성이 큰 경우에는 공급 불확실성을 줄이기 위해 많은 투자를 하여도 얻을 수 있는 이득이 상대적으로 작기 때문에 공급 확실성의 프레미엄은 크지않으며 공급업자의 선정에 있어서 공급 불확실성이 다른 선정기준에 비해 그 중요도가 낮아진다고 할 수 있다.

V. 결 론

본 논문에서는 공급사슬의 불확실성을 수요와 공급의 불확실성 두 가지로 모형화 하여 두 불확실성의 상호작용의 특성을 모형화 하였다. 공급의 불확실성은 배달량의 불확실성으로 단순화 하여 모형화 하였고 수요의 불확실성은 확률 분포를 따르는 수요를 가정하여 모형화 하였다. 이런 단순화된 모형 구성은 문제의 본질을 왜곡시켰다고 보기 보다는 오히려 공급사슬의 불확실성이 비용에 미치는 영향을 명확하게 표현해 주고 있을 뿐 아니라 주요 시스템 요소들 간의 상호 관계를 이해하는데 큰 도움을 줄 수 있다.

논문의 주요 결과를 요약하고 이러한 결과가 공급의 불확실성과 관련된 경영의사결정에 대해 갖는 시사점을 설명함으로써 이 글을 맺고자 한다. 본 논문은 다기간 Newsboy 모형을 기본모형으로 하여 공급의 불확실성을 공급량의 불확실성으로 수요의 불확실성은 확률적 수요로 모형화하고 최적 주문정책을 도출하였으며 Newsboy 모형과 유사한 최적조건을 만족하는 최적 주문량은 수치 탐색법을 사용하여 쉽게 구할 수 있다는 것을 보였다. 수요와 공급의 불확실성이 재고비용의 증가에 미치는 영향과, 또한 수요와 공급의 불확실성 간의 상호작용이 재고비용 증가의 크기에 미치는 영향을 분석하기 위해 300개의 시스템 계수 집합에 대해 수치분석을 수행하였다. 수치분석 결과를 보면 수요(공급)의 불확실성이 증가함에 따라 총 기대비용이 가속적으로 증가함을 알 수 있다. 이러한 현상은 수치분석이 이루어진 300개의 계수집합 모두에서 공통적으로 관찰되었다. 따라서 기업이 불확실성을 통제하려고 하는 경우 이를 위한 단위 투자에 대한 불확실성의 감소가 투자액의 증가에 따라 감소할 것이라는 것을 알 수 있었으며 경제적 불확실성의 수준이 존재함을 알 수 있었다.

본 논문의 가장 중요한 발견은 σ로 표현된 수요의 불확실성이 증가함에 따라 공급의 불확실성의 증가로 인한 비용의 증가가 오히려 작아진다는 것이다. 이러한 발견은 공급량의 불확실성을 줄이려는 기업의 노력에 큰 시사점을 던져 준다. 즉, 기업이 직면한 수요의 불확실성이 크다면 기업이 재고관련 비용을 효과적으로 줄이기 위해서는 공급량의 불확실성을 줄이기 위한 노력만으로는 부족하며 수요의 불확실성을 줄이려는 노력을 동시에 실행하여야 한다는 것이다. 즉, 유통시스템의 개선, 추가적 시장조사, 정확도가 높은 수요예측기법의 사용 등을 통해 수요의 불확

실성을 낮은 수준에서 유지해야만 공급 불확실성 감소를 통한 의미 있는 비용감소를 달성할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. 박상욱, "공급 불확실성 하에서의 다기간 Newsboy 문제의 최적 주문정책에 대한 연구," 〔경영논집〕, 32권3호(1998), pp 60-68.
2. 박상욱, "공급업자의 불확실성이 재고관리 비용에 미치는 효과에 관한 연구," 〔한국경영과학회지〕, 26권3호(2001), pp 105-117.
3. Ehrhardt, R., "(*s, S*) Policies for a Dynamic Inventory Model with Stochastic Lead Times," *Operations Research*, 32, 1984, pp. 121-132.
4. Gullu, R., E. Ebru, and N. Erkip(1999), "Analysis of an Inventory System under Supply Uncertainty", International Journal of Production Economics, 59, pp. 377-385.
5. Jönsson, H. and E. A. Silver, "Stock Allocation among a Central Warehouse and Identical Regional Warehouse in a Particular Push Inventory Control System," *International Journal of Production Research*, 25, 1987, pp. 191-205.
6. Jönsson, H. and E. A. Silver, "Analysis of a Two-echelon Inventory Control System with Complete Redistribution," *Management Science*, 33, 1987, pp. 215-227.
7. Kaplan, R. S., "A Dynamic Inventory Model with Stochastic Lead Times," *Management Science*, 16, 1970, pp. 491-507.
8. Kumar, A., L. B. Schwarz, and J. E. Ward, "Risk-Pooling along a Fixed Delivery Route Using a Dynamic Inventory-Allocation policy," *Management Science*, 41, 1995, pp. 344-362.
9. Nahmias, S., "Simple Approximation for a Variety of Dynamic Leadtime Lost-Sales Inventory Models," *Operations Research*, 27, 1979, pp. 904-924.
10. Park, Sangwook, L. B. Schwarz, and J. E. Ward, "A Single Retailer Periodic-Review System with Stochastic Lead times," Working Paper, 1996.
11. Veinott, A. F., "Optimal Policy for a Multi-Product, Dynamic Non-Stationary

Inventory Problem." *Management Science*, 12, 1965, pp. 206-222.

12. Veinott, A. F., "On the Optimality of (s,S) Inventory Policies: New Conditions and a New Proof," *SIAM J. Appl. Math.*, 14, 1966, pp. 1067 1083.