서비스시간 지정모형

남 익 현*

《目 次》

Ⅰ 서 론

우리는 서비스 시스템을 연구하기 위해 대기행렬모형을 많이 이용하고 있다. 이 경우 가장 흔히 사용되는 평가기준이 고객의 평균 대기시간이다. 즉 고객의 평균대기시간이 작은 시스템이 보다 더 양호하다고 평가를 내리고 있다. 그러나 단순히 고객의 대기시간 평균값을 가지고 시스템의 우열을 가르는 것은 몇 가지 문제가 있다. 그 중 하나는 동일한 평균이라고 하더라도 분산이 작은 시스템의 경우가 보다 양호하다고 볼 수 있을 것이다. 그 이유는 분산이 적은 경우 고객의 입장에서 자신이 서비스를 받기 위해 소요하여야 할 시간을 보다 정확히 예측할 수 있기 때문이다.

이러한 서비스의 예측성을 높이기 위한 방안 중 하나가 서비스 제공자가 고객에게 서비스소요시간을 지정하여 주는 것이다. 이는 서비스제공자가 고객에게 일정 시간을 제시하는데 그 의미는 제시된 시간 내에 대기 및 서비스를 완수하겠다는 약속을 하는 것이라고 볼 수 있다. 이 경우 고객은 해당 서비스 제공자의 과거 실적을 고려하여 해당 서비스를 구매할 것인지를 결정할 것이다. 여기서 과거 실적이라 함은 약속한 서비스시간을 준수한 확률로 보면 될 것이다. 이러한 서비스 시간 지정은 실제로 여러 형태로 활용되고 있다. 가령 배달피자 가게에서 일정 시간을 약속하여 해당 주문을 받은 후 일정 시간 내에 배달을 약속하는 경우를 생각해 볼 수 있다. 또한 물품주문이나 고장수리를 처리할 경우에도 약속시간의 준수여부가 매우 중요할 수 있다. 따라서 본 논문에서는 단순히 평균소요시간을 performance measure로 사용하는 것에 한 걸음 더 나아가 이러한 서비스시간 지정을 모형화 하도록 한다.

* 서울대학교 경영대학.

Ⅱ. 모 형

먼저 분석의 편의를 위해서 고객의 도착과 서비스시간에 대한 가정을 다음과 같이 한다. 고객의 주문이 Poisson process로 도착하고 도착율은 λ로 표시하기로 한다. 여기서 주의하여야 할 것은 도착율 λ는 외생변수가 아니라 서비스제공자의 의사결정에 의해 영향을 받아 간접적으로 결정되어지는 변수라는 것이다. 또한 서비스 소요시간은 지수분포를 따른다고 가정하고 서비스율은 μ로 표시하기로 하자. 서비스제공자는 서비스 지정시간을 제시하는데 이를 T로 표시하기로 한다. 지정시간 T는 서비스제공자가 고객에게 제시하는 약속시간으로 고객이 도착하였을 때 T시간 내에 서비스를 완료해 주겠다는 약속을 나타내는 것이다. 고객은 T를 제시 받고 다음의 효용함수를 통해 효용이 발생하고 이러한 효용함수는 고객과 서비스제공자 모두가 알고 있다고 가정하자.

$$U(t,T) = a1_{\{t<T\}} + be^{-T}$$

이 효용함수에서 t는 서비스를 완료하는데 소요되는 총시간을 나타내는 확률변수이다. 함수 $1_{\{\}}$는 { } 안의 사건이 발생하면 1이고 그렇지 않으면 0이 되는 함수이다. 따라서 약속대로 T시간 내에 서비스가 완료되면 고객은 a만큼의 효용을 얻게 된다는 것을 나타내고 있다. 이 효용함수의 특징은 약속된 시간 T 이전에 서비스가 완료될 경우 얼마나 일찍 완료되었는지는 고려되지 않는다는 것이다. 즉 약속시간이 지켜졌는가에 따른 이항함수의 형태를 띠는 것이다. 따라서 소요시점이 정확하게 지켜지는 것이 중요한 JIT와 같은 상황하에서는 타당하지 못할 수도 있음에 주의하여야 한다. 또한 약속시간 T를 길게 제시하면 약속을 지킬 가능성은 높아지지만 그 효용이 감소될 것인데 이를 나타내는 것이 두 번째 항목인 be^{-T}이다. 우리는 be^{-T}이 T가 증가함에 따라 감소하며 T가 무한대로 갈 때 0으로 수렴함을 알 수가 있는데 이는 우리가 원하는 특성을 나타내는 것이다. 여기서는 고객의 효용이 이러한 두 항목의 선형 합으로 나타내어 진다고 가정하였다. 물론 상수 항이 더 포함될 경우에는 다음의 형태를 띨 수가 있다.

$$U(t,T) = a1_{\{t<T\}} + be^{-T} + k$$

하지만 이는 고객의 reservation utility 수준에서 조정을 하면 된다. 즉 기존의 reservation utility에서 k를 차감한 것을 고객의 reservation utility로 나타내고 이를 c로 표시하기로 하

자. 그리고 추가적으로 고객은 risk-neutral하기 때문에 기대효용을 고려하여 서비스 구매의 사결정을 내린다고 가정한다.

따라서 고객은 자신의 기대효용이 reservation utility인 c보다 클 경우에 해당 서비스를 구매할 것이다. 서비스 가격은 의사결정변수가 아니라 시장에서 결정되어 있고 이는 reservation utility에 포함되어 조정되어 있다고 가정하기로 하자. 이를 바탕으로 서비스 시간이 T로 지정되었을 때 고객도착율의 균형값은 다음과 같이 정해 진다.

Proposition 1 :

서비스 지정 시간이 T로 주어져 있고 또한 $c-a<be^{-T}<c$ 를 만족할 경우, 고객의 도착율은 다음과 같다.

$$\lambda=\mu+\frac{1}{T}\ln(1-\frac{c-be^{-T}}{a})$$

〔증명〕

고객은 자신의 기대효용이 reservation utility인 c보다 큰 경우에 해당 서비스를 구매할 것이다. 고객의 기대효용은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$E(U)=a[1-e^{-(\mu-\lambda)T}]+be^{-T}$$

이는 서비스소요시간 t는 지수분포를 따르므로 즉, $Exp(\mu)$를 따르므로 $E[1_{\{t<T\}}]=\Pr[t<T]$ $=1-e^{-(\mu-\lambda)T}$에서 구할 수 있다.

이를 reservation utility인 c와 동일하게 놓고 방정식을 풀면 균형 도착율이 위의 주장과 같이 유도된다.

$$a[1-e^{-(\mu-\lambda)T}]+be^{-T}=c$$

$$1-e^{-(\mu-\lambda)T}=\frac{c-be^{-T}}{a}$$

$$e^{-(\mu-\lambda)T}=1-\frac{c-be^{-T}}{a}$$

$$\lambda-\mu=\frac{1}{T}\ln(1-\frac{c-be^{-T}}{a})$$

$$\lambda=\mu+\frac{1}{T}\ln(1-\frac{c-be^{-T}}{a})$$ Q.E.D.

가정에 의해 $0<\frac{c-be^{-T}}{a}<1$이므로 $\ln(1-\frac{c-be^{-T}}{a})<0$ 이 성립하고 따라서 우리는 안정적 대기행렬모형을 위한 조건인 $\lambda<\mu$이 만족됨을 알 수 있다.

위의 Proposition에서 나타내는 내용은 서비스제공자가 약속시간으로 T를 제시하면 고객들은 기대효용을 고려하여 서비스구매여부를 결정할 것이다. 기대효용이 reservation utility 보다 클 경우 구매를 하게 되며 이를 충족시키는 조건으로부터 고객의 균형도착율이 도출되는 것이다.

서비스의 판매가격이 p로 고정되어있다고 가정하고 서비스율 μ를 도입하고 유지하는데 들어가는 단위시간당 비용을 $C(\mu)$로 표시할 때 서비스제공자의 이익함수는 다음과 같이 나타낼 수 있다. 여기서 $C(\mu)$는 concave function이고 2차 미분이 가능한 연속함수라고 가정한다.

$$\Pi=[\mu+\frac{1}{T}\ln(1-\frac{c-be^{-T}}{a})]p-C(\mu)$$

여기서 서비스율에 대한 최적투자량은 $C'(\mu^*)=p$를 만족시키는 μ^*로 결정할 수 있다. 다음으로 최적 서비스 지정시간인 T^*를 구하는 과정을 살펴보기로 하자. 우선 1차필요조건인 $\frac{\partial\Pi}{\partial T}=0$으로부터 다음 조건을 구할 수 있다.

$$\frac{T(-b/a)e^{-T}}{1-\frac{c-be^{-T}}{a}}=\ln(1-\frac{c-be^{-T}}{a})$$

여기서 $x=1-\frac{c}{a}+\frac{be^{-T}}{a}$ 로 치환을 하면 위 식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{b}{a}[\frac{c-a+ax}{b}]\ln[\frac{c-a+ax}{b}]=x\ln x$$

우측 식에서 x의 유효한 범위가 0<x<1 이고 로피탈의 정리에 의해 $\lim_{x\to0+}x\ln x=0$을 알 수 있고 따라서 우측식은 다음의 그래프로 표시할 수 있다.

좌측의 식인 $\frac{b}{a}[\frac{c-a+ax}{b}]\ln[\frac{c-a+ax}{b}]$은 우측식을 x축으로 상수항만큼 이동한 후 x축과 y축으로 일정비율 변환한 것이므로, 위의 방정식에서 최적해가 존재함을 보일 수 있으며 이를 x^*로 표시하면 최적 서비스 지정시간은

$$T^{*} = -\ln[\frac{c - a + \alpha x^{*}}{b}]$$

로 결정되어 진다. 여기서는 2차필요조건에 대한 분석은 생략하기로 한다.

Ⅲ. 확 장

본 절에서는 앞서 다룬 기본 모형을 응용하는 것을 고려해 보기로 한다. 가령 배달 피자음식점의 경우 흔히 사용하는 전략은 일정 시간을 약속하고 이를 위반할 시에는 어떠한 보상을 해주는 경우가 많다. 구체적으로는 Domino's Pizza의 경우 30분의 약속시간을 제시하고 고객의 주문시점으로부터 30분내에 피자를 배달하여 주지 못할 경우에는 주문내용에 따라 일정액의 할인을 하여준다. 이를 다루는 모형을 앞서 다룬 내용을 응용하여 살펴보기로 하자. 만약 서비스제공자가 약속시간을 지키지 못하였을 경우 α만큼의 효용에 해당하는 금액을 환불해 준다고 가정하자. 이 경우 고객의 효용함수는 다음과 같이 표시할 수 있을 것이다.

$$U(t,T) = a1_{\{t<T\}} + be^{-T} + \alpha 1_{\{t \ge T\}} = (a-\alpha)1_{\{t<T\}} + \alpha + be^{-T}$$

따라서 앞서 다룬 모형에서 α와 reservation utility c를 조정하면 동일한 모형이 됨을 알 수 있다.

Ⅳ. 결 론

본 논문에서는 대기행렬모형의 응용형태로 서비스 제공자가 완료시간을 지정하고 이를 잠재고객에게 제시하는 모형을 다루었다. 잠재고객은 서비스제공자의 과거실적을 고려하여 서비스의 구매여부를 결정한다. 서비스제공자의 의사결정변수는 서비스완료에 대한 시간과 자신의 총기대효용을 최대화하기 위한 최적의 생산용량인 서비스율인 μ이 된다. 우리는 기대효용의 한 형태를 가정하고 분석하였다.

이러한 모형은 실제 여러 가지로 활용되고 있다. 이 용도는 서비스제공을 위한 총소요시간을 단축하는 것도 중요하지만 경우에 따라서는 약속한 시간을 얼마나 잘 지키는가도 중요하기 때문이다. 전통적으로는 총소요시간의 기대치를 적정하게 유지하는 것이 목적이 되는 경우가 많았지만 시간을 지정하고 이를 준수하는 정도에 의해서도 서비스제공자의 선택에 영향을 미치는

경우가 많다. 가령 자동차 수리를 맡기고자 할 때 빠른 시간내에 수리하는 것도 중요하지만 약속한 시간을 준수하는 것도 매우 중요하다. 약속한 시간에 맞추어 다른 교통편을 준비할 경우 약속 시간이 지켜지면 되지 일찍 수리가 마쳐지는 것이 반드시 좋은 것만은 아닐 수 있기 때문이다. 본 논문에서 다룬 모형은 전통적으로 다루어온 평가기준인 대기시간의 최소화가 아닌 다른 기준에 의해 평가하는 것이 타당할 수 있음을 나타내는 것이 그 의의 중 하나라고 할 수 있을 것이다. 물론 본 논문에서 다룬 형태 이외의 효용함수를 다룰 경우 보다 의미있는 분석이 타당할 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Donald Gross and Carl M. Harris, Fundamentals of Queueing Theory, John Wiley & Sons, Inc., 1998.
2. Jean Tirole, The Theory of Industrial Organization, The MIT Press, 1988.