

## 선형계획법에서 확률적 수요에 대한 추가 정보효과\*

남 익 현\*\*

### 《目 次》

- |         |          |
|---------|----------|
| I. 들어가며 | III. 결 론 |
| II. 예 제 |          |

### I. 들어가며

선형계획법은 구조가 단순하고 확정적이라는 특징에 의해 수리적 모형 구성에 있어 적용 가능성이 큰 장점을 갖고 있다. 선형계획법의 대전제인 확정성은 현실에서 발생할 수 있는 변이를 고려하여야 한다는 한계로 인해 커다란 문제가 될 수 있다. 이러한 확정성의 한계를 극복하기 위해 선형계획법에서 사용하는 것이 감도분석(sensitivity analysis)이다. 하지만 이러한 감도분석은 그 효용에 있어 매우 제한적인 효과만을 제공한다. 확률성에 대한 내용을 부분적으로는 다룰 수는 있지만 현실적으로 중요한 확률적인 내용은 근본적으로 다루기 힘들다고 할 수 있다.

본 글에서는 남익현[2006]에서와 같이 선형계획법 활용의 한 형태인 감도분석으로 다룰 수 없는 내용을 검토해 보고자 한다. 보다 구체적으로는 기업의 제품에 대한 시장의 수요가 확률적일 경우를 다루고자 한다. 일반적으로 선형계획법에서는 여러 가지 제약상황하에서 최적의 의사결정변수의 값을 결정하는데, 현실적으로는 그러한 의사결정 과정이 동시에 이루어지는 것이 아니고 순차적으로 진행되는 경우가 많다. 본 글에서 다루려는 모형에서는 기업의 입장에서의 의사결정을 여러 단계별로 구분하여 다루게 된다. 보다 구체적으로 살펴보면, 일차적으로 기업이 원자재를 구매하고 2단계에서 구매한 원자재와 기존의 설비를 활용하여 두 종류의 제품을 생산하고 3단계에서 생산된 물량의 범위 내에서 시장에 판매를 하고자 한다. 그런데 남익현[2006]에서 다룬 핵심적인 내용은 시장수요가 확률적 분포를 따르는 경우 수요량에 대한 정보가 언제 알려지는가에 따라 의사결정의 형태가 달라진다는 것이다.

\* 서울대학교 경영대학

\*\* 본 논문은 서울대학교 경영연구소의 연구비지원에 의해 수행되었습니다.

본 글에서는 확률변수인 시장수요에 대한 사전적 확률에 추가하여 별도의 정보수집을 통해 시장수요에 대한 분포를 보다 정교하게 함으로써 얻을 수 있는 혜택을 살펴보고자 한다. 이러한 분석을 통해 남익현[2006]에서 다루었던 생산전략상의 가치뿐만이 아니라 정보시스템의 가치를 구할 수 있는 것이다. 본 글에서는 보다 구체적인 비교를 위해 남익현[2006]에서 사용한 것과 동일한 예제를 통해 논리를 전개하고자 한다.

Higle and Wallace[2003]의 연구는 수요 실현시점에 따라 별도의 선형계획법을 구성하여야 함을 주장하였다. 이는 일반적인 선형계획법의 감도분석에서 다룰 수 없는 내용이라는 점을 강조하는 것이다. 남익현[2006]의 연구에서는 제약식을 의사결정자가 단기간에 변형시킬 수 있는지 여부에 따라 단기적 제약식과 장기적 제약식으로 구분하여 분석하였고, 확률적인 수요의 실현시점을 생산시스템의 선택이라는 생산전략상의 가치를 평가한다는 점에서 공헌이 있다고 할 수 있다. 본 논문에서는 시장수요의 예측을 도와줄 수 있는 별도의 정보체계의 가치를 다루고자 한다.

## II. 예 제

비교분석을 위해 남익현[2006]에서 다루었던 예제를 재인용하도록 한다. 관악기업은 두 종류의 의류를 생산하는 업체이며 또한 관악기업은 risk neutral하다고 가정하기로 하자. 이러한 risk neutrality는 목적함수값을 비교할 경우 확률적 기대값을 사용하기 위해 도입한 것이다. 관악기업에서 생산하는 의류는 중저가 제품(제품 1)과 고가 제품(제품 2) 두 가지이다. 이러한 두 가지 종류의 제품을 표시하기 위해 첨자  $i$ 를 사용하기로 하자. 관악기업에 대한 선형계획모형의 특징은 고객의 수요가 확률적이라는 것이다. 이들 제품에 대한 시장 수요는 확률분포를 따르며 해당 확률은 가능한 3가지 시장상황에 따라 달라진다. 시장상황으로는 3가지를 가정하고 있는데 이는  $j$ 로 표시하고 개략적으로  $j=1$ 은 불경기,  $j=2$ 는 보통 경기,  $j=3$ 은 호경기를 표현한다. 다음 표는 각 시장 상황별 두 제품에 대한 시장수요량과 해당 시장 상황의 발생확률을 표현하고 있다.

$j$	1	2	3
$\{D_1, D_2\}$	(20,10)	(25,20)	(30,28)
확률 $P(j)$	0.3	0.5	0.2

이 표가 나타내는 것은 시장상황에 대한 사전적 확률이다. 이러한 확률적인 수요가 언제 실현되는지에 따라 타당한 선형계획모형이 달라진다. 수요의 실현이라 함은 수요량에 대한 정보가 언제 확정되는가를 말하는 것이다. 관악기업의 경우 원자재를 구입하고 이를 이용하여 두 가지 제품을 생산하고 생산된 물량을 이용하여 시장에 판매한다. 그런데 수요의 실현시기에 따라 3가지 모형을 다루고자 하는데 가장 이상적인 경우가 시장 수요가 알려진 후 원자재 구매, 생산, 판매의 3단계 모두가 이루어지는 경우이다. 두 번째 경우는 원자재 구매 단계 이후에 수요가 알려지고 그리고 나서 생산, 판매가 이루어지는 경우이다. 세 번째는 원자재 구매, 제품 생산이 이루어진 후 수요를 파악할 수 있고 그 이후 판매가 가능한 경우이다.

다음으로 관악기업의 실행가능영역을 규정하는 제약식을 살펴보면 관악기업이 의류를 생산하는데 있어 필요한 자원은 두 가지라고 가정하자. 하나는 원단으로, 중저가 제품을 생산하는 경우 단위당 원단 1단위가 소요되고 고가의류의 경우 1벌 생산을 위해 원단 2단위가 소요된다. 원단은 시장에서 필요한 만큼 구매할 수 있으며 구매단가는 단위당 4원이다. 이러한 원단과 관련된 제약식이 단기적 제약식이 된다. 일반적인 선형계획법의 경우 기업이 사용 가능한 원단의 수량에 대한 정보가 주어지고 이를 바탕으로 제약식이 구성된다. 하지만 본 모형에서는 원단의 가용량 또한 의사결정변수로 포함시켰는데 이는 단기적 제약식을 사용함으로써 가능하다. 원단의 구매량을 나타내는 의사결정변수로  $r_1$  을 사용하기로 하자. 의류생산에 필요한 두 번째 제약식은 생산설비인 기계에 해당하는 것으로, 기계의 가용시간은 120시간이며 중저가 의류와 고가 의류를 한 단위 생산하는데 소요되는 설비시간은 각각 3, 4 시간이다. 이러한 설비의 가용시간 제약은 장기적 제약식으로 이는 단기에 변동이 어려운 제약식을 의미한다. 관악기업의 수익을 나타내기 위한 정보로 중저가 의류의 시장가격은 10원이며 고가 의류의 경우 시장가격이 20원으로 알려져 있다. 이러한 관악기업의 문제를 선형계획법으로 표현하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\text{Max}\{10s_1 + 20s_2 - 4r_1\}$$

s. t.

$$m_1 + 2m_2 \leq r_1$$

$$3m_1 + 4m_2 \leq 120$$

$$s_1 \leq m_1$$

$$s_1 \leq D_1$$

$$s_2 \leq m_2$$

$$s_2 \leq D_2$$

여기서  $m_i$ 는 제품  $i$ 의 생산량을 나타내고  $s_i$ 는 제품  $i$ 의 판매량을,  $D_i$ 는 제품  $i$ 의 수요량을 나타낸다. 여기서 의사결정변수는  $\{m_i, s_i, r_i\}$ 이며  $\{D_i\}$ 는 확률분포에 의해 결정되는 수요량으로 확률변수이다. 이러한 확률변수  $\{D_i\}$ 로 인해 위의 모형은 선형계획의 형태로 구성되어 있지만 실제 선형계획법이라고 할 수 없는 것이다.

남익현(2006)에서는 시장 수요의 실현시점에 따라 세 가지 경우로 구분하였고 세 가지 경우에 따라 적합한 선형계획모형을 구성하여 얻은 결과를 요약하면 다음의 표와 같다.

	Case 1	Case 2	Case 3
기대수익	302.4	280	270

본 논문에서는 시장수요의 실현시점이 아니고 시장수요에 대한 추가정보를 수집하는 것의 가치를 다루고자 한다. 관악기업의 경우 별도의 시장조사기관과의 계약을 통해 시장상황에 대한 사전조사를 수행할 수 있다고 가정한다. 해당 시장조사기관의 과거자료를 분석하여 보면 해당 기관의 예측력을 파악할 수 있다. 다음 표에 나타난 자료는 과거 자료를 분석하여 얻은 조건부 확률  $P(e|j)$ 을 나타낸다. 즉 사후적으로 알려진 시장상황  $j$ 에 대한 시장조사기관의 예측치가  $e$ 로 나타났던 비율을 구한 것이다. 여기서  $e$ 는 시장상황에 대한 예측치를 나타내고  $j$ 는 실제 시장상황을 나타내는 것이다.

j	e	1	2	3
1		0.8	0.1	0.1
2		0.1	0.8	0.1
3		0.1	0.1	0.8

이 표에서 보면 예측력이 개략적으로 80%가 된다고 할 수 있을 것이다. 관악기업의 입장에서 시장조사기관을 이용할 경우 필요한 정보는 조사기관에서 제공한 정보인  $e$ 를 바탕으로 실제 시장상황이  $j$ 일 확률인  $P(j|e)$ 이 된다. 이는 위의 표에서 나타내는  $P(e|j)$ 과 사전적 확률인  $P(j)$ 를 바탕으로 베이즈 정리를 이용하여 구할 수 있다. 예를 들어

$$\begin{aligned}
 P(j=1|e=1) &= \frac{P(j=1, e=1)}{P(e=1)} = \frac{P(e=1|j=1)P(j=1)}{\sum_j P(e=1|j)P(j)} \\
 &= \frac{0.8 \cdot 0.3}{0.8 \cdot 0.3 + 0.1 \cdot 0.5 + 0.1 \cdot 0.2} = \frac{24}{31}
 \end{aligned}$$

이를 정리하면  $P(j|e)$ 와 관련하여 다음의 표를 구성할 수 있다.

e \ j	1	2	3
1	24/31	5/31	2/31
2	3/45	40/45	2/45
3	3/24	5/24	16/24

그리고 베이즈 정리를 이용하여 위의 표를 구하는 과정에서 분모식에서  $P(e=1)=0.31, P(e=2)=0.45, P(e=3)=0.24$  을 얻을 수 있다.

e	1	2	3
$P(e)$	0.31	0.45	0.24

본 논문에서는 시장조사기관을 활용할 경우 최적목적함수값의 기대치가 얼마나 개선되는지를 살펴보고자 한다. 남익현[2006]에서 다룬 완전정보하에서의 경우(Case 1)에는 시장조사기관을 사용할 이유가 전혀 없으므로 추가적인 분석이 불필요하다. 남익현[2006]의 Case 2와 Case 3의 경우에 시장조사기관의 예측치인  $e$ 를 활용하여 시장상황에 대한 예측확률을 수정하고 이를 바탕으로 선형계획법을 구성할 수 있다.

관약기업이 시장조사기관을 활용할 경우 시장조사기관으로부터 시장상황에 대한 예측치  $e$ 를 얻게 된다. 관약기업은 주어진 예측치  $e$ 를 바탕으로 시장상황  $j$ 에 대한 확률을 수정한다. 이러한 수정작업을 통해 구해진 보다 정교화된 확률이  $P(j|e)$ 인 것이다. 예측치  $e=1, e=2, e=3$ 인 세 가지에 대해 각 경우별로 남익현[2006]의 Case 2에서와 같은 선형계획모형을 수립하여 푸는데 이 때 목적함수값을 표현하기 위해  $P(j|e)$  확률을 사용하여야 한다. 그리고 여기서 구한 목적함수값에 대해  $P(e)$ 를 이용하여 기대값을 구하면 시장조사기관을 이용할 경우 Case 2에 대한 최종적인 목적함수의 기대값이 된다. 이러한 논리는 Case 3에 대해서도 동일하게 적용된다.

### 1. Case 1(완전정보의 경우)

이는 수요에 대한 정보를 확인한 후 해당 수요에 대응하기 위한 원자재 조달 계획, 생산, 판매를 결정할 수 있는 경우를 말하며 이 경우 추가적인 정보의 필요성이 없으므로 시장조사기관

을 사용하지 않을 것이다. 시장 상황이  $j=1$ 인 경우 위의 선형계획모형에서  $D_1=20, D_2=10$ 을 대입한 경우를 풀면 되는데 이 때 최적목적함수값은  $\pi(1)=240$ 이 나온다. 마찬가지로 방법으로  $j=2$ 인 경우 최적목적함수값은  $\pi(2)=320$ ,  $j=3$ 인 경우 최적목적함수값은  $\pi(3)=352$ 가 나온다. 따라서 수요에 대한 완전정보를 가정한 경우에는 최적목적함수값의 기대치가  $j$ 에 대한 사전 확률을 이용하여  $\pi_1 = p(j=1)\pi(1) + p(j=2)\pi(2) + p(j=3)\pi(3) = 0.3 \cdot 240 + 0.5 \cdot 320 + 0.2 \cdot 352 = 302.4$ 로 계산할 수 있다. 우리는 시장 상황인  $j$ 가 알려진 후 해당하는 선형계획모형에서 제시하는 최적해를 실행하면 되는 것이며 3가지 중 하나를 실행하게 된다.

## 2. Case 2(즉응생산의 경우)

이는 생산은 신속하게 이루어져 시장수요가 밝혀진 후에 제품생산을 시작할 수 있지만 원자재의 조달기간이 길어 원자재 조달과 관련된 의사결정을 수요실현 시점 이전에 하여야 하는 경우를 말한다. 생산 리드타임이 자재조달 리드타임보다 현저하게 작은 경우를 말한다. 이 경우에는 수요실현 시점 이후에 제품에 대한 생산과 판매에 대한 의사결정이 이루어지므로 이에 대응하는 의사결정변수가  $(m_j, s_j)$ 인 6개로 표시하여야 한다. 즉 시장상황  $j$ 에 맞추어 각 제품의 생산량을 결정하고 이를 바탕으로 판매량을 결정하게 된다. 하지만 원자재 조달량을 나타내는  $r_i$ 은 시장 상황  $j$ 를 알기 이전에 미리 결정되어야 하므로  $j$ 와 무관하게 정의된 단일 변수가 된다. Case 1에서와 같은 논리로 목적함수는 각 상황별 기대값으로 표현할 수 있는바 다음과 같다. 목적함수에서는 시장조사기관으로부터 얻은  $e$ 에 대한 정보를 바탕으로 시장상황  $j$ 의 발생확률을 수정하고 이를 바탕으로 목적함수인 기대이익을 표현한다. 따라서 시장조사기관을 이용하는 경우  $e$ 의 값에 따라 3가지 선형계획모형을 풀어야 한다. 예를 들어 시장조사기관으로부터  $e=1$ 이라는 정보를 얻은 경우 이익함수의 기대값은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$z(e=1) = \frac{24}{31}(10s_{11} + 20s_{21}) + \frac{5}{31}(10s_{12} + 20s_{22}) + \frac{2}{31}(10s_{13} + 20s_{23}) - 4r_1$$

Case 2에 해당하는 선형계획모형 중  $e=1$ 의 경우를 구체적으로 표현한 것을 살펴보면 다음의 표로 나타낼 수 있다. 참고로 표의 마지막 행에는 최적해와 최적목적함수값( $\pi(e=1)=240$ )을 나타내었다.

변수	$s_{11}$	$s_{12}$	$s_{13}$	$s_{21}$	$s_{22}$	$s_{23}$	$m_{11}$	$m_{12}$	$m_{13}$	$m_{21}$	$m_{22}$	$m_{23}$	$r_1$		RHS
목적 함수	$\frac{240}{31}$	$\frac{50}{31}$	$\frac{20}{31}$	$\frac{480}{31}$	$\frac{100}{31}$	$\frac{40}{31}$							-4	=	
(1)							1			2			-1	<=	
(2)								1			2		-1	<=	
(3)									1			2	-1	<=	
(4)							3			4				<=	120
(5)								3			4			<=	120
(6)									3			4		<=	120
(7)	1						-1							<=	
(8)		1						-1						<=	
(9)			1						-1					<=	
(10)				1						-1				<=	
(11)					1						-1			<=	
(12)						1						-1		<=	
(13)	1													<=	20
(14)		1												<=	25
(15)			1											<=	30
(16)				1										<=	10
(17)					1									<=	20
(18)						1								<=	28
	20	0	0	10	20	20	20	0	0	10	20	20	40		240

같은 논리로  $e=2$ 의 경우에는  $\pi(e=2)=311.11$ 이 나오고  $e=3$ 의 경우  $\pi(e=3)=317.55$ 이다. 따라서 최적목적함수의 기대값은

$$\sum_{k=1}^3 P(e=k)\pi(e=k) = 0.31*240 + 0.45*311.11 + 0.24*317.55 = 290.6$$

Case 2의 경우에는 원자재 구매 의사결정을 한 후 시장상황을 파악한 후 적정량의 생산 및 판매 의사결정을 하여야 한다. 그런데 해석상 주의하여야 하는 것이 선형계획모형에서는 시장상황이 어떻게 될지 사전에 알 수 없기 때문에 목적함수의 기대값을 구하기 위해 모든 변수  $\{s_j, m_j\}$ 를 도입하였지만, 이들 12개 변수 중 시장 상황  $j$ 에 따라  $\{s_{1j}, s_{2j}, m_{1j}, m_{2j}\}$  4개만이 실제 집행된다는 사실이다.

3. Case 3(기획생산의 경우)

세 번째 경우는 시장수요에 대한 정보수집이 가장 늦게 이루어지는 경우를 말한다. 이때 시장 수요가 알려지기 이전에 원자재의 조달과 제품의 생산이 이루어져야 하는 경우를 말하며 이는 전통적으로 사용되는 기획생산의 경우를 뜻한다. 이 경우에는 판매량만이 시장 수요에 대응하여 결정되는 것이므로 의사결정변수는  $\{s_j, m, r\}$ 으로 case 2의 경우보다 축소된다. 원자재 조달과 생산과 관련된 의사결정변수인  $\{r, m, m_2\}$ 은 시장상황을 나타내는 첨자 j와는 무관하게 정의가 되어야 하는 것이다. 앞의 Case 2의 경우와 마찬가지로 시장조사기관의 자료 e에 따라 별도의 선형계획모형을 구성하여 풀어야 한다. 예를 들어 e=2인 경우의 선형계획모형을 다음의 표로 표현할 수 있다.

변수	$s_{11}$	$s_{12}$	$s_{13}$	$s_{21}$	$s_{22}$	$s_{23}$	$m_1$	$m_2$	$r_1$		RHS
목적 함수	$\frac{30}{45}$	$\frac{400}{45}$	$\frac{20}{45}$	$\frac{60}{45}$	$\frac{800}{45}$	$\frac{40}{45}$			-4	=	
(1)							1	2	-1	<=	
(2)							3	4		<=	120
(3)	1						-1			<=	
(4)		1					-1			<=	
(5)			1				-1			<=	
(6)				1				-1		<=	
(7)					1			-1		<=	
(8)						1		-1		<=	
(9)	1									<=	20
(10)		1								<=	25
(11)			1							<=	30
(12)				1						<=	10
(13)					1					<=	20
(14)						1				<=	28
	13.3	13.33	13.33	10	20	20	13.33	20	53.3		306.67

시장조사기관이 제공하는 e에 따라 선형계획법을 적용하여 구한 최적목적함수값은  $\pi(e=1)=240$ ,  $\pi(e=2)=306.67$ ,  $\pi(e=3)=295$ 로 구할 수 있다. 시장조사기관에서 제공하는 e에 대한 확률과 각 경우별 최적목적함수값은 이용하여 구한 종합적인 최종 기대값은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\sum_{k=1}^3 P(e=k)\pi(e=k) = 0.31*240 + 0.45*306.67 + 0.24*295 = 283.2$$



지금까지 다룬 세 가지 경우의 최적목적함수값의 기대치를 남익현(2006)의 결과와 함께 정리하여 보면 다음과 같다.

	Case 1	Case 2	Case 3
남익현(2006)	302.4	280	270
예측정보	302.4	290.6	283.2
차이	0	10.6	13.2

위의 표에서 각 Case 별 최적목적함수값의 차이, 즉 각 열 사이의 차이는 생산시스템의 속도, 리드타임의 차이로부터 기인하는 것이며, 두 행 사이의 차이는 시장조사기관의 정보의 가치를 나타내는 것이다. 즉 위의 표를 통해 생산시스템에서의 속도의 효과와 정보의 효과를 함께 비교할 수 있는 것이다. 각 상황별로 정보의 가치를 구할 수 있으며 이러한 정보의 가치를 바탕으로 추가 정보의 활용여부를 결정하여야 한다. 즉 추가정보의 사용비용보다 커다란 기대 효과를 얻을 수 있을 경우에 추가정보를 활용하여야 하며 이 때 예상할 수 있는 혜택을 구할 수 있는 것이다.

### Ⅲ. 결 론

수요가 확률적인 상황의 경우 확률변수의 실현 시점에 따라 선형계획모형을 별도로 구성하는 것이 보다 정확한 예측모형으로서의 가치가 있다. 확률변수 대신 기대값을 대체하여 사용하는 경우 오류가 발생하는 것이 일반적이며 확률변수의 실현시점에 따라 적절한 선형계획모형을 구성하여야 함을 알 수 있다. 본 논문에서는 확률적인 수요의 실현 시점에 따라 수요정보를 미리 알 수는 없지만 별도의 시장조사기관을 활용할 경우 수요에 대한 예측력을 높일 수 있는 경우를 살펴보았다. 시장조사기관으로부터의 추가정보를 통해 수요에 대한 예측확률을 수정하고 이를 바탕으로 선형계획모형을 구성하여 최적해를 구할 수 있었다. 이러한 추가정보로부터 얻는 목적함수값의 증가분이 추가정보의 가치라고 해석할 수 있으며 시장조사기관의 이용료가 이 보다 작을 경우 추가정보를 활용하는 것이 바람직하다는 것을 알 수 있다. 이러한 분석은 남익현(2006)이 시장상황에 대한 정보의 노출 시점에 따라 적합한 선형계획모형을 구성하여야 하며 생산전략상의 속도요소에 의해 경우의 수를 나눈 것을 보완하는 내용이라 할 수 있다.

참 고 문 헌

1. Hige, J.L. and Wallace, S.W. 2003. Sensitivity Analysis and Uncertainty in Linear Programming, Interfaces, Vol. 33, No. 4, July-Aug., pp. 53-60.
2. Winston, W. L. 1995. Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms, 2<sup>nd</sup> ed. Duxbury Press, Belmont, CA.