

확률적 수요에 대한 설비 outsourcing 효과의 선형계획법 활용*

남 익 현**

《目 次》

- I. 들어가며
- II. 예제

- III. 결 론

I. 들어가며

선형계획법은 구조가 단순하고 선형성과 확정성이라는 특징에 의해 수리적 모형 구성에 있어 적용 가능성이 크다는 장점을 갖고 있다. 하지만 선형계획법의 대진제인 확정성은 현실에서 발생할 수 있는 변이를 포함하지 않는 한계로 인해 커다란 문제가 될 수 있다. 이러한 확정성의 한계를 극복하기 위해 선형계획법에서 흔히 사용하는 것은 감도분석(sensitivity analysis)이다. 그러나 이러한 감도분석은 그 효용에 있어 매우 제한적인 효과만을 제공한다. 확률성에 대한 내용을 부분적으로 다룰 수는 있지만 현실에서 나타나는 확률적인 내용은 근본적으로 다루기 힘들다고 할 수 있다.

본 글에서는 남익현 1, 2[2006]에서와 같이 선형계획법 활용의 한 형태로 감도분석에서 다룰 수 없는 내용을 다루고자 한다. 특정 기업의 제품에 대한 시장 수요가 확률적일 경우에 선형계획법을 적용하는 상황이다. 일반적으로 선형계획법에서는 여러 가지 제약상황 하에서 최적의 의사결정변수의 값을 결정하는데, 그러한 의사결정의 여러 단계가 동시에 이루어지는 것이 아니고 순차적으로 진행되는 경우가 많다. 본 글에서 다루려는 모형은 기업 입장에서의 의사결정을 여러 단계별로 구분하여 분석한다.

보다 구체적으로 살펴보면, 일차적으로 기업이 원자재를 구매하고, 2단계에서는 구매한 원자재와 설비를 활용하여 두 종류의 제품을 생산하며, 마지막으로 3단계에서 생산된 물량의 범위

* 본 논문은 서울대학교 경영정보연구소의 연구비지원에 의해 수행되었습니다.

** 서울대학교 경영대학

내에서 시장에 판매를 하게 된다. 이와 관련하여 남익현 1[2006]에서 다룬 핵심적인 내용은 시장수요가 확률적 분포를 따르는 경우 수요량에 대한 정보가 언제 알려지는가에 따라 의사결정의 형태가 달라진다는 것이다. 수요정보의 실현시점은 생산전략상 대응시간의 신속성과 상응하여 구분할 수 있다. 한편 남익현 2[2006]에서는 수요정보의 실현 시점에 대응하여 자재 조달, 생산, 판매의 의사결정을 수행하는 것의 대안으로 추가적인 수요에 대한 정보를 활용할 때 수요정보에 대한 예측을 보다 정확하게 할 수 있는 경우를 다루었다. 이 경우에는 실제 시장수요에 대한 정보는 얻을 수 없지만 시장수요에 대한 예측정보를 바탕으로 의사결정을 수행하고 이로 인해 상당한 기대이익을 증가시킬 수 있는 것이다. 즉 확률변수인 시장수요에 대한 사전적 확률에 추가하여 별도의 정보수집을 통해 시장수요에 대한 분포를 보다 정교하게 함으로써 얻을 수 있는 혜택을 살펴보았다.

본 논문에서는 또 다른 대안으로 남익현 1, 2[2006]에서 장기적 제약식으로 분류되었던 설비제약을 다루고자 한다. 즉 새로운 생산전략으로 생산설비에 대한 outsourcing을 대안으로 보고 이 경우 목적함수값의 증가분을 살펴보고자 한다. 이러한 대안은 남익현 2[2006]에서 다루었던 정보시스템의 도입과 비교될 수 있다. 본 글에서는 보다 구체적인 비교를 위해 남익현 1, 2[2006]에서 사용한 것과 동일한 예제를 통해 논리를 전개하고자 한다.

Higle and Wallace[2003]의 연구는 수요 실현시점에 따라 별도의 선형계획법을 구성하여야 함을 주장하고 이는 일반적인 선형계획법의 감도분석에서 다룰 수 없는 내용이라는 점을 강조하였다. 남익현 1, 2[2006]의 연구에서는 제약식을 의사결정자가 단기간에 변형시킬 수 있는지 여부에 따라 단기적 제약식과 장기적 제약식으로 구분하여 분석하였고, 확률적인 수요의 실현시점을 생산시스템의 선택이라는 생산전략상의 가치를 평가한다는 점에서 공헌이 있다고 할 수 있다. 본 논문에서는 장기적 제약식을 의사결정 영역으로 도입하기 위해 설비 outsourcing을 다루고자 한다.

II. 예 제

남익현 1, 2[2006]에서 다루었던 예제를 재인용하도록 하자. 분석대상이 되는 관악기업은 두 종류의 의류를 생산하는 업체이다. 비교분석을 위해 관악기업은 risk-neutral하다고 가정한다. 이는 목적함수값을 비교할 경우 확률적 기대값을 사용하기 위해 도입한 것이다. 관악기업에서 생산하는 의류는 중저가 제품(제품 1)과 고가 제품(제품 2) 두 가지이다. 이러한 두 가지 종류의 제품을 표시하기 위해 첨자 i 를 사용하기로 하자. 관악기업에 대한 선형계획모형의 특징

은 고객의 수요가 확률적이라는 것이다. 이들 제품에 대한 시장 수요는 확률분포를 따르는데 해당 확률은 가능한 3가지 시장상황에 따라 달라진다. 시장상황은 j 로 표현하며, $j=1$ 은 불경기, $j=2$ 는 보통 경기, $j=3$ 은 호경기를 나타낸다. 다음 표는 각 시장 상황별 두 제품에 대한 시장 수요량과 해당 시장 상황의 발생확률을 표현하고 있다.

j	1	2	3
$\{D_1, D_2\}$	(20,10)	(25,20)	(30,28)
확률 $P(j)$	0.3	0.5	0.2

이 표가 나타내는 것은 시장상황에 대한 사전적 확률을 표시하는 것이다. 이러한 확률적인 수요가 언제 실현되는지에 따라 타당한 선형계획모형이 달라진다. 수요의 실현이라 함은 수요량에 대한 정보가 언제 확정되는가를 말하는 것이다. 관악기업의 경우 원자재를 구입하고 이를 이용하여 두 가지 제품을 생산하고 생산된 물량을 이용하여 시장에 판매를 한다. 이 때, 수요의 실현시기에 따라 3가지 모형이 발생하는데, 가장 이상적인 경우(Case 1)가 시장 수요가 알려진 후 원자재 구매, 생산, 판매가 이루어지는 경우이다. 두 번째 경우(Case 2)는 원자재 구매 단계 이후에 수요가 알려지고 나서 생산, 판매가 이루어지는 경우이다. 세 번째(Case 3)는 원자재 구매, 제품 생산이 이루어진 후 수요를 파악할 수 있고 그 이후 판매가 가능한 경우이다.

다음으로 관악기업의 실행가능영역을 규정하는 제약식을 살펴보자. 먼저 관악기업이 의류를 생산하는데 있어 필요한 자원은 두 가지라고 가정한다. 하나는 원자재에 해당하는 원단으로 중저가 제품을 생산하는 경우 단위당 원단 1단위가 소요되고 고가의류의 경우 1벌 생산을 위해 원단 2단위가 소요된다. 원단은 시장에서 필요한 만큼 구매할 수 있으며 구매단가는 단위당 4원이다. 이러한 원단과 관련된 제약식이 단기적 제약식이 된다. 일반적인 선형계획법의 경우 기업이 사용 가능한 원단의 수량에 대한 정보가 주어지고 이를 바탕으로 제약식이 구성된다. 하지만 본 모형에서는 단기적 제약식을 사용함으로써 원단의 가용량 또한 의사결정변수로 포함시키고 있다. 원단의 구매량을 나타내는 의사결정변수는 x 을 사용하기로 하자. 의류생산에 필요한 두 번째 제약식은 기계에 해당하는 것으로 기계설비의 가용시간은 120시간이며 중저가 의류와 고가 의류를 한 단위 생산하는데 소요되는 설비시간은 각각 3, 4 시간이다. 이러한 설비의 가용시간 제약이 장기적 제약식으로 이는 단기에 변동이 어려운 제약식을 의미한다. 관악기업의 수익을 나타내기 위한 정보로 중저가 의류의 시장가격은 10원이며 고가 의류의 경우 시장가격이 20원으로 알려져 있다. 이러한 관악기업의 문제를 선형계획법으로 표현하면 다음과 같

이 나타낼 수 있다.

$$\text{Max}\{10s_1 + 20s_2 - 4r_1\}$$

s. t.

$$m_1 + 2m_2 \leq r_1$$

$$3m_1 + 4m_2 \leq 120$$

$$s_1 \leq m_1$$

$$s_1 \leq D_1$$

$$s_2 \leq m_2$$

$$s_2 \leq D_2$$

여기서 m_i 는 제품 i 의 생산량을 나타내고 s_i 는 제품 i 의 판매량을, D_i 는 제품 i 의 수요량을 나타낸다. 여기서 의사결정변수는 $\{m_i, s_i, r_i\}$ 이며 $\{D_i\}$ 는 확률분포에 의해 결정되는 수요량으로 확률변수이다. 이러한 확률변수 $\{D_i\}$ 로 인해 위의 모형은 선형계획의 형태로 구성되어 있지만 실제 선형계획법이라고 할 수 없는 것이다.

남익현 1, 2[2006]에서 이들을 수요 정보의 노출시점에 따라 세 가지 경우로 분류하고 각 경우별로 적합한 선형계획모형을 통해 얻은 기대이익을 요약하면 다음의 표와 같다.

	Case 1	Case 2	Case 3
남익현1(기본)	302.4	280	270
남익현2(정보)	302.4	290.6	283.2

위의 연구 결과를 토대로, 본 논문에서는 관악기업이 장기적 제약식으로 파악하고 있는 설비 제약에 대해 살펴보고자 한다. 많은 경우 자신들의 설비 제약을 넘어 외부로부터 가공을 위탁할 수 있는 것이다. 즉 추가적인 설비시간을 시장에서 구매할 수 있을 경우, 최적목적함수값의 기대치가 얼마나 개선되는지를 알아보고자 한다. 구체적인 수치를 얻기 위해 설비가용시간을 outsourcing하는데 시간당 0.5원의 비용이 든다고 하자. 본 논문에서는 이와 같이 남익현 1[2006]의 Case 1, Case 2 와 Case 3의 경우에 새로운 의사결정 변수로 설비가용시간 구매량 r_2 을 도입한다. 이를 반영하여 모형화를 하면 다음과 같다.

$$\text{Max}\{10s_1 + 20s_2 - 4r_1 - 0.5r_2\}$$

s. t.

$$m_1 + 2m_2 \leq r_1$$

$$3m_1 + 4m_2 \leq 120 + r_2$$

$$s_1 \leq m_1$$

$$s_1 \leq D_1$$

$$s_2 \leq m_2$$

$$s_2 \leq D_2$$

이러한 모형을 각 Case 별로 적용하여 최적해를 구하여 보자.

2.1 Case 1(완전정보의 경우)

이는 수요에 대한 정보를 확인한 후 해당 수요에 대응하는 원자재 조달 계획, 생산, 판매를 결정할 수 있는 경우를 말한다. 시장 상황이 $j=1$ 인 경우 위의 선형계획모형에서 $D_1=20, D_2=10$ 을 대입한 경우를 풀면 되는데 이 때 최적해에서 outsourcing 수량은 0이고 최적목적함수값은 $\pi(1)=240$ 이 나온다. 마찬가지로 방법으로 $j=2$ 인 경우 최적해에서 outsourcing 수량은 $r_2^*=35$ 최적목적함수값은 $\pi(2)=372.5$, $j=3$ 인 경우 outsourcing 수량은 $r_2^*=82$ 최적목적함수값은 $\pi(3)=475$ 가 나온다. 따라서 수요에 대한 완전정보의 경우 최적목적함수값의 기대치는 j 의 사전 확률에 의해 $\pi_i = p(j=1)\pi(1) + p(j=2)\pi(2) + p(j=3)\pi(3) = 0.3*240 + 0.5*372.5 + 0.2*475 = 353.25$ 로 계산할 수 있다. 우리는 시장 상황인 j 가 알려진 후 해당하는 선형계획모형에서 제시하는 최적해를 실행하면 되는 것이며 3가지 시나리오 중 하나를 실행하게 된다.

2.2 Case 2(즉응생산의 경우)

이는 생산은 신속하게 이루어져 시장수요가 밝혀진 후에 제품생산을 시작할 수 있지만 원자재의 조달기간이 길어 원자재 조달과 관련된 의사결정을 수요실현 시점 이전에 하여야 하는 경우를 말한다. 즉 생산 리드타임이 자재조달 리드타임보다 현저하게 작은 경우를 말한다. 이 경우에는 수요실현 시점 이후에 제품에 대한 생산과 판매에 대한 의사결정이 이루어지므로 의사결정변수가 (m_j, s_j) 로 6개이다. 즉 시장상황 j 에 맞추어 각 제품의 생산량을 결정하고 이를 바탕으로 판매량을 결정하게 된다. 하지만 원자재 조달량을 나타내는 r_1 과 설비시간의 outsourcing 수량 r_2 은 미리 결정되어야 하므로 시장 상황 j 와 무관하게 정의된다. Case 1에서와 같은 논리로 목적함수는 각 상황별 기대값으로 표현할 수 있는 바 다음과 같다.

$$z = 0.3(10s_{11} + 20s_{21}) + 0.5(10s_{12} + 20s_{22}) + 0.2(10s_{13} + 20s_{23}) - 4r_1 - 0.5r_2$$

Case 2에 해당하는 선형계획모형을 살펴보면 다음의 표로 나타낼 수 있다. 참고로 표의 마지막 행에는 최적해와 최적목적함수값($\pi_2 = 297.5$)을 나타내었다.

변수	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{21}	s_{22}	s_{23}	m_{11}	m_{12}	m_{13}	m_{21}	m_{22}	m_{23}	r_1		RHS	RHS
목적 함수	3	5	2	6	10	4							-4	-0.5	=	
(1)							1			2			-1		<=	
(2)								1			2		-1		<=	
(3)									1			2	-1		<=	
(4)							3			4			-1		<=	120
(5)								3			4		-1		<=	120
(6)									3			4	-1		<=	120
(7)	1						-1								<=	
(8)		1						-1							<=	
(9)			1						-1						<=	
(10)				1						-1					<=	
(11)					1						-1				<=	
(12)						1						-1			<=	
(13)	1														<=	20
(14)		1													<=	25
(15)			1												<=	30
(16)				1											<=	10
(17)					1										<=	20
(18)						1									<=	28
	20	25	9	10	20	28	20	25	9	22.5	20	28	65	35		297.5

Case 2의 경우에는 원자재 구매와 설비시간의 outsourcing 수량에 대한 의사결정을 한 후 시장상황을 파악하여 적정량의 생산 및 판매 의사결정을 하여야 한다. 여기에서 해석상 주의하여야 할 점은 선형계획모형에서는 시장상황이 어떻게 될 지 사전에 알 수 없기 때문에 목적함수의 기대값을 구하기 위해 모든 변수 (s_j, m_j)를 도입하였지만, 실제로는 이들 12개 변수 중 시장 상황 j 에 따라 $\{s_{1j}, s_{2j}, m_{1j}, m_{2j}\}$ 4개만이 집행된다는 사실이다.

2.3 Case 3(기획생산의 경우)

세 번째 경우는 시장수요에 대한 정보수집이 가장 늦게 이루어지는 경우를 말한다. 시장수요가 알려지기 이전에 원자재의 조달과 제품의 생산이 이루어져야 하는 상황을 의미하며, 이는 전통적으로 사용되는 기획생산에 해당한다. 이 경우에는 판매량만이 시장 수요에 대응하여 결정되는 것이므로 의사결정변수는 $\{s_j, m_1, r_1, r_2\}$ 으로 case 2의 경우보다 축소된다. 원자재 조달, 설비시간 outsourcing, 생산과 관련된 의사결정변수인 $\{r_1, r_2, m_1, m_2\}$ 은 시장상황을 나타내는 첨자 j와는 무관하게 정의가 되어야 하기 때문이다. 보다 구체적으로 해당되는 선형계획모형을 다음의 표로 표현할 수 있다. 이 경우의 최적목적함수값도 $\pi_3 = 297.5$ 임을 알 수 있다.

변수	s_{11}	s_{12}	s_{13}	s_{21}	s_{22}	s_{23}	m_1	m_2	r_1		RHS	RHS
목적 함수	3	5	2	6	10	4			-4	-0.5	=	
(1)							1	2	-1		<=	
(2)							3	4		-1	<=	120
(3)	1						-1				<=	
(4)		1					-1				<=	
(5)			1				-1				<=	
(6)				1				-1			<=	
(7)					1			-1			<=	
(8)						1		-1			<=	
(9)	1										<=	20
(10)		1									<=	25
(11)			1								<=	30
(12)				1							<=	10
(13)					1						<=	20
(14)						1					<=	28
	20	25	25	10	20	20	25	20	65	35		297.5

설비가용시간을 외부로부터 outsourcing 할 수 있다는 전제하에 지금까지 다룬 세 가지 경우의 최적목적함수값의 기대치를 남익현1, 2[2006]의 결과와 함께 정리하여 보면 다음과 같다.

	Case 1	Case 2	Case 3
남익현 1(2006)	302.4	280	270
남익현 2(2006)	302.4	290.6	283.2
Outsourcing	353.25	297.5	297.5

위의 표에서 각 Case 별 최적목적함수값의 차이, 즉 각 열 사이의 차이는 생산시스템의 속도, 즉 리드타임의 차이로부터 기인하는 것으로 해석할 수 있다. 즉 좌측의 열에 해당하는 것들이 우측 열에 비해 생산전략상 속도가 빠른 경우로 볼 수 있다. 1행과 2행 사이의 차이는 시장조사기관의 정보의 가치를 나타내는 것이다. 그리고 1행과 3행의 차이는 설비시간 outsourcing의 효과를 나타내는 것이다. 이 표에서 이윤극대화를 위한 세 가지 생산전략 즉, 조달 및 생산 속도 신속화, 수요예측 정교화, 설비 outsourcing의 효과를 비교하여 볼 수 있다.

III. 결 론

수요가 확률적인 상황의 경우 확률변수의 실현 시점에 따라 선형계획모형을 별도로 구성하는 것이 보다 정확한 예측모형으로서의 가치가 있다. 확률변수 대신 기대값을 대체하여 사용하는 경우 오류가 발생하는 것이 일반적이므로 확률변수의 실현시점에 따라 적절한 선형계획모형을 구성하여야 함을 알 수 있다. 본 논문에서는 확률적인 수요의 실현 시점에 따라 적합한 선형계획모형이 있음을 인식하고 이윤극대화를 위해 장기적 제약식에 대한 의사결정으로 설비시간의 outsourcing이 가능한 경우를 살펴보았다. 이와 같이 설비의 outsourcing이 가능한 경우 기존의 모형에서보다는 최적목적함수값이 개선되는 것이 일반적이다. 이는 설비가용시간이 장기적 제약식으로 한정되어 있던 것을 단기적 제약식으로 변환함으로써 가능해진 것이다. 이러한 분석은 남익현 1(2006)이 시장상황에 대한 정보의 노출 시점에 따라 적합한 선형계획모형을 구성하여 생산전략상의 속도요소에 의해 경우의 수를 나눈 것을 보완하는 내용이라 할 수 있다. 또한 남익현 2(2006)에서 다루었던 시장수요에 대한 예측정보를 정교화함으로써 얻는 효과와 대비하여 또 다른 생산전략이 될 수 있다.

참 고 문 헌

1. Hagle, J.L. and Wallace, S.W., Sensitivity Analysis and Uncertainty in Linear

- Programming, Interfaces, Vol. 33, No. 4, July-Aug., pp. 53-60, 2003.
2. Winston, W. L. 1995. Introduction to Mathematical Programming: Applications and Algorithms, 2nd ed. Duxbury Press, Belmont, CA, 1995.
 3. 남익현1, 수요실현 시점에 따른 선형계획법의 응용, 경영논집 40, pp. 83-95, 2006-06.
 4. 남익현2, 선형계획법에서 확률적 수요에 대한 추가 정보효과, 경영정보논총 16, pp. 67-76, 2006-08.