經營論集, 第 35 卷 1號 (2001年 3月)

확률적 조달기간을 갖는 정기주문시스템의 최적주문정책에 관한 연구*

박 상 욱**

본 논문은 공급 불확실성이 존재하는 다기간 Newsboy 문제의 주문정책 결정을 분석한다. 즉, 하나의 소매상을 갖는 정기주문시스템의 조달기간이 확률분포를 따르는 경우의 주문량 결정문제를 분석하여 최적주문정책의 형태를 도출한다. 소매상의 기간 당 수요는 정규분포를 따르고, 재고유지비용과 주문지연비용(backorder cost)은 기말재고의 선형함수로 나타낼 수 있다고 가정한다. 소매상은 매 m 기간 마다 공급업자에게 주문을 하고, 공급업자는 이 주문량을 β의 확률로 즉시, 또는 $(1-\beta)$의 확률로 $b(<m)$ 기간 이후에 소매상에게 배달한다. 본 논문은 조달기간이 일정한 확률분포를 따르는 경우에도 최적주문정책의 형태가 조달기간이 확정적인 경우와 비교할 때 변하지 않는 것을 보여준다. 최적 주문량은 본 논문에서 제시되는 최적해의 필요충분조건을 이용한 선형탐색법(linear search method)을 사용하여 쉽게 구할 수 있다. 이러한 결과는 세 개 이상의 서로 다른 조달기간이 있는 경우나(또는 조달기간이 연속확률분포를 따르는 경우에도) 일반적으로 성립한다. 이러한 분석은 주문에 따른 고정비가 존재하는 경우에도 적용할 수 있으며 이 경우에는 (s, S) 정책이 최적주문정책이라는 것을 증명할 수 있다.

I. 서 론

재고 모형 중 가장 널리 알려진 모형 중의 하나인 다기간 Newsboy 모형은 여러 가지 가정들은 사용하고 있으며, 그 중의 하나가 공급업자의 신뢰도(reliability)가 완벽하다는 것이다. 즉, Newsboy 모형에서는 공급측면의 불확실성이 없다고 가정하기 때문에 공급업자는 매 주문주기마다 고객의 주문량 전량을 항상 약속된 시간에 배달해

* 이 연구는 서울대학교 경영대학 경영연구소 연구비 지원에 의해 수행되었음.

** 서울대학교 경영대학 전임강사

줄 수 있다. 그러나 현실에서는 이와 같이 완벽한 신뢰도를 갖는 공급업자는 찾아보기 힘들다. 오히려 어떤 때는 주문량 전량을 다른 때는 주문량의 일부분만을 정해진 시간에 맞춰 배달하거나, 또는 주문량을 정해진 시간보다 늦게 배달해 주는 공급업자가 일반적이라고 할 수 있다.

본 논문에서는 하나의 소매상으로 이루어진 정기주문시스템이 확률적 조달기간을 갖는 경우를 모형화 한다. 소매상의 기간 당 수요는 정규분포를 따르며 기간 별 수요는 독립적이며 동일한 분포를 따른다고(i.i.d.) 가정한다. 소매상은 매 m 기간 마다 공급업자에게 주문을 하며, 공급업자는 이 주문량을 b의 확률로 즉시, 또는 $(1-\beta)$의 확률로 $b(<m)$ 기간 이후에 소매상에게 배달한다. 소매상이 수요를 충족시킬 수 있는 충분한 재고를 가지고 있지 못하면 다음기의 재고를 사용하여 미 충족 수요를 충족시킨다(backordering). 단위 당 구매가격은 c이고 배달 시점에 지불된다. 논문의 이해가능성을 높이기 위해 주문에 따른 고정비가 발생하지 않는다고 가정하고 모형을 구성하였으며, 고정비가 발생하는 경우의 결과는 단락 6에서 소개된다. 재고유지비용과 주문지연비용(backorder cost)은 기말재고의 크기에 비례하여 발생한다고 가정하며, 비용의 계산 시 시간가치를 고려한다. 즉, 비용의 현가를 구하기 위해 할인율(discounting factor)을 모형에 포함한다.

본 논문의 목적은 무한기간 동안에 발생하는 총비용(구매비용, 재고유지비용, 주문지연비용의 합)의 현가를 최소화하는 최적주문정책의 형태(the form of the optimal replenishment policy)를 도출하는 것이다. 이러한 목적을 달성하기 위해서 무한기간 문제를 직접 모형화 하는 대신 마지막 기간의 기말재고의 처리에 대해 특별한 가정을 하는 유한기간 모형을 분석하고자 한다. 이러한 가정들은 Veinott(1965)에서 사용된 가정으로부터 유추될 수 있으며, 유한기간 문제의 최적해를 무한기간 문제의 그것과 동일하게 만드는 역할을 한다. 이 논문의 주요 결과는 다음과 같이 요약될 수 있다.

(1) 주문에 따른 고정비가 발생하지 않는 경우, 두개의 서로 다른 확률적 조달기간을 갖는 무한기간 문제에서 소매상의 최적 주문정책은 기본재고 정책(base-stock policy)이 된다.

(2) 이러한 결과는 세 개 이상의 서로 다른 확률적(또는 연속확률분포를 따르는) 조달기간을 갖는 문제에서도 똑같이 성립한다.

(3) 주문에 따른 고정비가 있는 경우에도 동일한 분석을 통해 (s, S) 정책이 최적 주문정책이 됨을 쉽게 보일 수 있다.

본 논문은 다음과 같이 구성된다; 단락 2에서는 공급의 불확실성이 존재하는 동적 재고모형에 대한 문헌연구를 수행한다. 단락 3에서는 확률적 조달기간 하에서의 재고조달주기(replenishment cycle)를 정의하고 논문에서 사용되는 용어를 정의한다. 단락 4에서는 Veinott(1965)에서 한 가정과 유사한 마지막 기간의 기말재고에 대한 두 가지 가정을 도입하고 동적계획법을 사용하여 문제를 모형화 한다. 또한, 이 모형으로부터 미시적 정책(myopic policy)이 최적임을 증명한다. 즉, 각 주기의 총비용을 최소화하는 것이 전체 기간의 총비용을 최소화한다는 것을 증명한다. 단락 5에서는 일기간 모형의 최적주문정책이 도출되며, 마지막으로 단락 6에서는 좀더 일반적인 문제의 최적주문정책에 대해 설명한다.

II. 과거의 연구

확률적 조달기간을 갖는 동적재고문제를 다루는 논문들은 여럿 찾아볼 수 있다. Kaplan(1970)은 확률적 조달기간을 갖는 단일소매상 정기주문시스템을 분석한다. 그의 논문에서는 조달기간은 주문주기의 정수 배로 나타낼 수 있다고 가정하였다(주문주기는 1기간이라고 가정하였음). 논문은 두 가지 중요한 가정을 하고 있다. 첫째, 주문은 반드시 행해진 순서에 따라 도착한다(no order-crossing). 즉, 나중에 이루어진 주문이 먼저 도착할 수 없다고 가정한다. 둘째, 조달기간의 확률분포는 주문 중에 있는(주문은 이루어 졌으나 아직 배달되지 않은) 주문의 횟수나 그들의 크기에 영향을 받지 않는다. 이 두 가지 가정하에 조달기간의 확률분포를 유도하고, 이 확률분포를 사용하여 최적 주문 정책을 구한다. 이렇게 구한 최적 정책의 형태는 조달기간이 확정적인 경우의 최적 정책의 형태와 동일함을 보이고, 실제로 최적 정책을 구하는데 있어서의 차이점에 대해 설명한다. Ehrhardt(1984)는 주문의 조달기간에 대해 Kaplan과 동일한 가정을 한다. 그는 기초재고정책(base-stock policy)이 최적이기 위한 조건을 제시하고 있으며, 유한 또는 무한 기간 문제에 있어 (s, S) 정책이 최적임을 증명

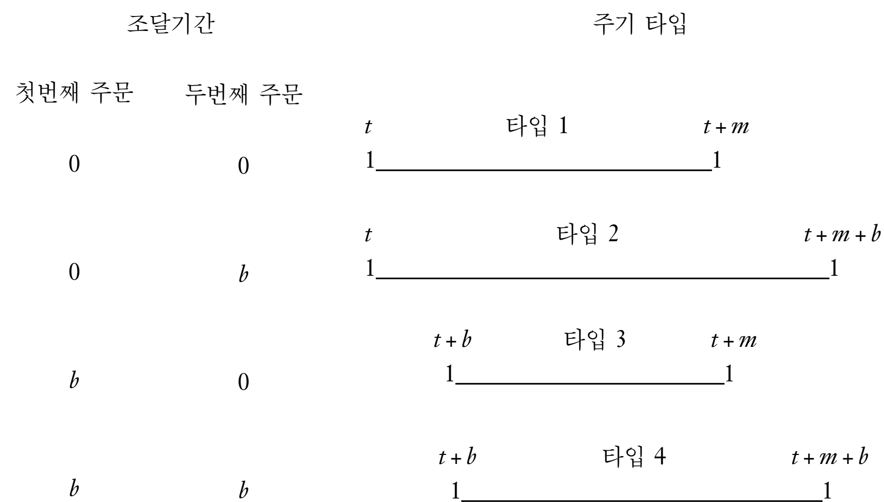
하고 있다. 본 연구는 Kaplan이나 Ehrhardt의 연구와는 달리 주문 조달기간이 주문주기보다 짧은 경우를 분석하여 Kaplan, Ehrhardt와 동일한 결과를 유도한다. Nahimias(1979)는 미 충족 수요가 상실되는 경우(lost sales)를 분석하고 있다.

공급의 불확실성을 모형화 하는 방법에는 확률적 조달기간을 사용하는 것 이외에도 다른 방법이 존재한다. 박상욱(1998)은 공급의 불확실성을 공급량의 불확실성으로 모형화 한다. 즉, 조달기간은 확정적이나 실제 공급량이 주문한 양과 다를 수 있으며 실제 공급량은 확률분포를 따르는 경우를 분석한다. 그는 실제 공급량이 확률분포를 따르는 경우에도 기초재고 정책이 최적주문정책이 됨을 증명한다.

III. 확률적 조달기간을 갖는 단일 소매상 정기주문시스템

1. 재고조달 주기(replenishment cycle)

연속되는 조달시점 사이의 기간을 주기(cycle)라 정의한다. 주문은 매 m 기간마다 한다고 가정하자. 현 주문이 시간 t에 이루어졌다고 하면 다음 번 주문은 $(t+m)$ 시점에 이루어질 것이다. 두개의 서로 다른 확률적 조달기간을 갖는 경우 연속된 두개



〈그림 1〉 재고조달 주기

의 실제 조달기간에 따라 4개의 가능한 재고조달 주기가 가능하다. t시점에 이루어진 주문과 관련된 공급주기는 t시점 또는 $(t+b)$ 시점에 시작되며, 다음 주문의 조달기간에 따라 m 기간 또는 $(m-b)$ 기간 또는 $(m+b)$ 기간일 것이다. 그림 1은 이와 같은 4가지 공급주기를 보여준다. 본 논문에서 사용되는 기호는 다음과 같은 의미를 갖는다.

2. 사용기호

p = 단위당 · 단위시간당 주문지연 비용

h = 단위당 · 단위시간당 재고유지 비용

c = 단위당 구입비용

x = 주문 시 순재고(net inventory)

δ = 기간당 수요를 나타내는 확률변수, $N(\mu,\ \sigma)$를 따르며, pdf는 $\phi(.)$, cdf는 $\Phi(.)$임. 기간별 수요 i.i.d라고 가정

δ^k = k- 기간 수요를 나타내는 확률변수, $N(k\mu,\ \delta\sqrt{k})$를 따름

α = 할인률

$L(y)$ = $-p(y-\mu)+(p+h)\int_{-\infty}^{y}\Phi(\delta)d\delta$, 기초재고가 y일 때 일기간 기대 재고 비용

$L^k(y)$ = $\sum_{i=1}^{k}\alpha^i L(y-\delta^{i-1})$, 기초재고가 y이고 추가적인 배달이 없을 때 k- 기간 중 기대 재고 비용

일 기간 수요가 표준정규분포를 따르고 주문지연비용과 재고유지비용이 각각 p와 h인 소매상을 표준정규소매상(unit-normal retailer)이라 정의하자. 기초재고가 z일 때 표준정규소매상의 일기간 기대재고비용을 $L_u(z)$라 하면 다음의 정리를 증명할 수 있다.

3. 정리(proposition)

(1) $L(y)=\sigma L_u(z)$, 단, $z=\dfrac{y-\mu}{\delta}$.

(2) 주문지연은 마지막 기간에만 일어난다고 가정하면(last-period-backorders assumption),

$$L^k(y) = h\mu \sum_{i=1}^{k-1} \alpha^i (k-i) + \frac{h\alpha(1-\alpha^{k-1}(y-(k-1)\mu)}{1-\alpha} + \alpha^k \sigma \sqrt{kL_u}\left(\frac{y-k\mu}{\sigma\sqrt{k}}\right).$$

Jösson과 Silver(1987)는 서비스율이 높은 시스템에 대해 이러한 가정이 적절하다는 것을 보이고 있다.

(3) $E(L(y-\pi) = \sqrt{\sigma_\pi^2 + 1}L\left(\frac{y-\sigma_\pi}{\sqrt{\sigma_\pi^2+1}}\right)$, where $\pi \sim N(\mu_\pi, \sigma_\pi)$.

IV. 동적계획법을 이용한 모형구성

이 절에서는 T-주기 문제(T번의 주문이 이루어지는 문제)를 동적계획문제로 모형화 한다. 다음과 같은 두 가지 가정하에 문제를 모형화 한다.

(1) 마지막 주기(T번째 주기)말에 남는 재고는 최초의 단위당 구입비용인 c원에 되팔 수 있고, 재고 고갈이 발생하는 경우에는 단위당 c원에 구입하여 수요를 모두 충족시킨다.

(2) 마지막 주문을 할 때, β의 확률로 영업기간이 m 기간 이후에 끝나고 $(1-\beta)$의 확률로 $(m+\beta)$기간 이후에 영업이 끝난다.

위의 가정들은 Veinott(1965)에서 하고 있는 가정과 유사하다. 이러한 가정을 하는 동기는 T-주기 문제의 마지막 주기가 그 전의 $(T-1)$개의 주기와 동일한 성질을 갖도록 하기 위함이다. 무한기간 문제(infinite-horizon problem)에서는 모든 주기가 같은 말기 조건을 갖는 것을 상기할 필요가 있다. 즉, 각 주기 말에 미래를 보면 항상 무한개의 주기가 남아 있다는 사실이다.

$f_t(x_t)$를 t번째 주기부터 T번째 주기까지의 최소 총기대비용이라고 정의하자(단, x_t는 t번째 주문이 이루어질 때의 순재고를 의미한다). T-주기 문제는 다음의 순환방정식(recursive equations)을 이용하여 동적계획문제로 모형화 할 수 있다. $t = 1, \ldots, T-1$에 대해, 다음이 성립한다.

$$f_t(x_t) = \min_{y_t \ge x_t} \begin{Bmatrix} \beta c(y_t - x_t) + \alpha^b (1-\beta) c(y_t - x_t) \\ + \beta^2 L_1^m(y_t) + \beta(1-\beta) L_1^{m+b}(y_t) \\ +(1-\beta)\beta E[L_2^{m-b}(y_t - \delta^b)] + (1-\beta)^2 E[L_2^m(y_t - \delta^b)] \\ + \alpha^m E[f_{t+1}(y_t - \delta^m)] \end{Bmatrix} \tag{1}$$

(단, $L_1^k(y) = L^k$, $L_2^k(y) = \alpha^b L^k(y)$.)

또한, 가정 (1)과 (2)에 의해, $f_{T+1} = -\beta c(y_T - m\mu) - \alpha^b(1-\beta)c(y_T - (m+b)\mu)$.

방정식 (1)의 큰 괄호 안에 있는 첫번째와 두 번째 항목은 구매 비용을 나타내고, 다음 네 개의 항목은 기대 재고유지비용과 주문지연비용을 나타낸다. 즉, 네 개의 항목 중 첫번째는 주기 타입 1, 두 번째는 주기 타입 2, 세 번째는 주기 타입 3, 네 번째는 주기 타입 4의 기대 재고비용을 나타낸다.

이제 식 (1)에 있는 구매비용 항목을 재배열해보자. x_t는 y_t의 함수가 아니고 y_{t-1}의 함수이기 때문에, x_t로 인한 t번째 주기의 구매 비용의 증가 또는 감소는 t번째 주기의 총기대비용에서 빼어서 $(t-1)$ 번째 주기의 그것에 더하더라도 원래 문제의 최적해를 바꾸지 않는다. 이러한 방법을 사용하여 $t = 1, \ldots, T+1$에 대해 구매 비용을 재할당하는 경우, $t = 1, \ldots, T$에 대해 다음이 성립한다.

DP:

$$\tilde{f}_t(x_t) = \min_{y_t \ge x_t} \begin{Bmatrix} c(\beta + \alpha^b (1-\beta)(1-a^m) y_t \\ + \alpha^m \beta c m\mu + \alpha^{m+b}(1-\beta) c(m+b)\mu \\ + \beta^2 L_1^m(y_t) + \beta(1-\beta) L_{\mathrm{T}}^{m+b}(y_t) \\ +(1-\beta)\beta E[L_{2}^{m-b}(y_t - \delta^b)] + (1-\beta)^2 E[L_2^m(y_t - \delta^b)] \\ + \alpha^m E[\tilde{f}_{t+1}(y_t - \delta^m)] \end{Bmatrix} \tag{2}$$

그리고 $\tilde{f}_{T+1} = 0$.

제약식 $y_t \ge x_t$를 무시할 경우, $\tilde{f}_t$는 더 이상 $t = 1, \ldots, T+1$에 대해 x_t의 함수가 아니다. 따라서, 일기간 문제(myopic problem)을 풀어 최적 기초재고 $y_t(=y_t^*)$를 구할 수 있다. 또한, 각 주기에 대응하는 일기간 문제는 동일하므로 다음이 성립한다.

$$y_1^* = y_2^* = \dots = y_T^*. \tag{3}$$

즉, 최적주문정책은 안정적(stationary)이다.

V. 일기간 문제(Single-Cycle Problem)

앞의 절에서는 미시적 정책이 최적정책이며 최적주문정책은 안정적이라는 것을 보였다. 이 절에서는 일기간 모형의 최적정책에 대해 살펴본다. 표현의 단순화를 위해 첨자 t를 생략한다.

주문시의 순재고가 x일 때 일기간 문제는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

MP:

$$\min_{y_t \geq x_t} \left\{ \begin{array}{l} c(\beta + \alpha^b (1-\beta)(1-a^m)y \\ +\alpha^m \beta c m \mu + \alpha^{m+b}(1-\beta)c(m+b)\mu \\ +\beta^2 L_1^m(y) + \beta(1-\beta) L_1^{m+b}(y) \\ +(1-\beta)\beta E[L_2^{m-b}(y-\delta^b)] + (1-\beta)^2 E[L_2^m(y-\delta^b)] \end{array} \right\} \tag{4}$$

$C(y) = \beta^2 L_1^m(y) + \beta(1-\beta)L_1^{m+b}(y) + (1-\beta)\beta E[L_2^{m+b}(y-\delta^b)] + (1-\beta)^2 E[L_2^m(y-\delta^b)$이고, $G(y) = C(y)\ c(\beta + (1-\beta)\alpha^b)(1-\alpha^m)y$이라 하자. $C(y)$는 기대 재고유지비용과 주문지연비용의 합을, $G(y)$는 총비용 중 y에 의해 결정되는 부문을 나타낸다. 식 (4)는 다시 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\min_{y \geq x} \{G(y) + \alpha^m \beta c m \mu + \alpha^{m+b}(1-\beta)c(m+b)\mu\} \tag{5}$$

식 (5)에 있는 상수 합들은 최적 정책에 영향을 미치지 않으므로 $G(y)$를 최소화하는 문제를 풀어 최적 정책을 구할 수 있다. $L^k(.)$이 볼록함수(convex function)이므로 $G(y)$ 또한 볼록함수가 된다. 제약식 $y \geq x$를 무시할 경우 최적 y 값은 $\frac{dG(y)}{dy} = 0$을 만족한다. $\Phi(.)$을 정규분포의 확률분포함수라고 하면, y^*는 다음 조건을 만족한다.

$$\alpha^m \beta \Phi(z_1^*) + \alpha^{m+b}(1-\beta)\Phi(z_2^*) = \frac{(\beta + \alpha^b(1-\beta))[\alpha^m p - (1-\alpha^m)c - \frac{(\alpha - \alpha^m)h}{1-\alpha}]}{p+h} \quad (6)$$

단, $z_1^* = \frac{y^* - m\mu}{\sigma\sqrt{m}}$, $z_2^* = \frac{y^* - (m+b)\mu}{\sigma\sqrt{m+b}}$.

최적주문정책은 다음과 같은 기초재고 정책(base-stock policy)이 된다.

x가 y^*보다 작은 경우, y^*까지 재고 수준을 올리고,

x가 y^*보다 크거나 같은 경우, 주문을 하지 않는다.

따라서, 식 (3)의 결과와 결합해서 생각하면 T-주기 문제의 최적 정책은 안정적 기초재고 정책임을 알 수 있다. 무한기간 문제는 4절에 있는 2개의 가정 하의 유한기간 문제와 동일한 해를 가지므로, 무한기간 문제의 최적정책도 안정적 기초재고 정책임을 알 수 있다(Veinott(1965) 참조).

VI. 결 론

앞에서 도출한 결과가 더 일반적인 문제에 대해서도 성립하는 것을 보이면서 논문을 마치고자 한다.

1. 3개 이상의 서로 다른 조달기간을 갖는 경우

2개의 서로 다른 조달 기간이 있는 경우 안정적 기초재고 정책이 최적임을 앞에서 보였다. 3개 이상의 서로 다른 조달 기간이 있는 경우에도 이러한 결과가 성립함을 쉽게 보일 수 있다. 조달기간이 $b_i (< m, \forall i)$일 확률이 β_i일 경우 (단, $\sum_{i=1}^{k} \beta_1 = 1$), 최적 주문 정책은 다음 조건을 만족한다.

$$\sum_{i=1}^{k} a^{m+ib} \beta_i \Phi(z_i) = \frac{\sum_{i=1}^{k} a^{m+ib} \beta_i [\alpha^m p - (1-\alpha^m)c - \frac{(\alpha - \alpha^m)h}{1-\alpha a}]}{p+h} \quad (7)$$

단, $z_i^* = \dfrac{y^* - (m + jb)\mu}{\sigma\sqrt{m + jb}}$

(7) 식은 임의 k에 대해 성립하므로, 위의 결과는 연속확률분포에 대해서도 성립함을 알 수 있다.

2. 주문 고정비가 있는 경우

본 논문은 표현의 간결성을 위해 주문 고정비가 없는 경우를 분석하고 있지만, 본 논문의 결과는 주문 고정비가 있는 경우로 쉽게 일반화 될 수 있다. 예를 들어, 재고유지 및 주문지연비용이 비감소 볼록함수이며 구매비용이 선형인 경우를 생각해 보자. 몇 가지 추가적인 가정 하에서 $G(.)$가 볼록함수이므로(Veinott(1966)참조), 최적 주문정책은 (s, S)정책임을 보일 수 있다.

참 고 문 헌

박상욱 (1998). 공급불확실성 하에서의 다기간 Newsboy 문제의 최적 주문정책에 관한 연구. *경영논집*, 32(3), 60-68.

Ehrhardt, R. (1984). (s,S) Policies for a Dynamic Inventory Model with Stochastic Lead Times. *Operations Research*, 32, 121-132.

J?sson, H. and E. A. Silver (1987). Stock Allocation among a Central Warehouse and Identical Regional Warehouse in a Particular Push Inventory Control System. *International Journal of Production Research*, 25, 191-205.

J?sson, H. and E. A. Silver (1987). Analysis of a Two-echelon Inventory Control System with Complete Redistribution. *Management Science*, 33, 215-227.

Kaplan, R. S. (1970). A Dynamic Inventory Model with Stochastic Lead Times. *Management Science*, 16, 491-507.

Nahmias, S. (1979). Simple Approximation for a Variety of Dynamic Leadtime Lost-Sales

Inventory Models. *Operations Research*, 27, 904-924.

Veinott, A. F. (1965). Optimal Policy for a Multi-Product, Dynamic Non-Stationary Inventory Problem. *Management Science*, 12, 206-222.

Veinott, A. F. (1966). On the Optimality of (s,S) Inventory Policies: New Conditions and a New Proof. *SIAM J. Appl. Math*., 14, 1067-1083.

Study on The Replenishment Policy of A Single-Retailer Periodic-Review System with Stochastic Lead-times

Sangwook Park*

ABSTRACT

This paper analyzes the replenishment problem of a single-retailer periodic-review system with stochastic leadtimes. The retailer faces normally-distributed period demand and incurs a proportional holding cost and backorder cost on end-of-period net-inventory. The retailer places an order every m periods, which is received immediately with probability β or $\beta(< m)$ periods later with probability $(1 - \beta)$. This paper shows that the form of the optimal replenishment policy does not change when leadtimes become stochastic instead of being fixed. This result still holds both when there are more than two different leadtimes and when positive fixed-ordering cost is charged.

Key Words: Newsboy problem, stochastic lead time, stochastic inventory system.

*Full-time Lecturer, College of Business Administration, Seoul National University.