資本資產價格決定模型의 理論 : 理論의 展開 및 擴張

朴 廷 寔

《目 次》

Ⅰ. 研究目的

現代的 學問으로서의 財務管理는 마아코위츠(H. Markowitz)가 1952年에 발표한 「포오트폴리오 選擇」이란 논문에서 비롯되었다고 볼 수 있다.[1] 이 후에 밀러와 모디글리아니(Miller and Modigliani)는 企業財務의 핵심적인 부분인 資本費用, 資本構造, 資本豫算에 커다란 공헌을 하였다.

그러나 現代 財務管理 分野에서 가장 획기적이고 보편타당하게 활용되고 있는 이론은 1964~1965년에 걸쳐 Sharpe, Mossin, Lintner 등이 독자적으로 발전시킨 資本資產價格決定模型(Capital Asset Pricing Model, CAPM)이다.[2] 이 모형은 마아코위츠에 의한 포오트

筆者 : 서울大學校 經營大學 經營研究所 研究員, 서울大學校 經營大學 副敎授

(1) H. Markowitz, "Portfolio Selection," *Journal of Finance*, Vol. 8, No. 1. (March 1952), pp. 71~91.

(2) W. Sharpe, "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk," *Journal of Finance* (September 1964), pp. 425~442; J. Lintner, "Security Prices, Risk, and the Maximal Gains from Diversification," *Journal of Finance* (December 1965), pp. 587-615; J. Mossin, "Optimal Multiperiod Portfolio Policies," *Econometrica* (October 1966), pp. 215~218.

폴리오이론을 발전시킨 것으로서 1970년대 이후에는 이 모형의 應用, 實證的인 分析, 이 이론의 批判이 재무관리의 主流를 형성하고 있다. CAPM의 이론적인 모형은 그 分析의 대상을 株式이나 債券으로 대표되는 資本資產(capital assets)으로 하였으나, 이의 응용은 단순히 증권시장에서 去來되는 資產들 뿐만아니라 企業財務에서 커다란 비중을 차지하고 있는 資本構造에 관한 이론, 資本豫算에 관한 이론은 물론 配當과 合併에 관한 이론에도 援用되고 있다.

우리나라에서는 CAPM의 假定條件을 비롯한 증권시장의 不完全性 때문에 CAPM에 대한 충분한 이해 이전에 이의 有用性을 부정하는 경향이 보이고 있다. 그러나 1980年代에 접어들면서 CAPM의 이론은 더욱 그 활용범위가 커지면서 財務管理 기본 교과서에서 다루는 기초적인 財務理論의 설명에 있어서도 CAPM은 대단히 중요한 역할을 하고 있다. 이러한 세계적인 학문추세를 볼 때, CAPM에 대한 철저한 이해와 模型의 한계점을 이해하지 못하고는 高次元的인 理論의 이해가 어려운 현실이므로 財務管理를 공부하는 學徒들에게는 이에 대한 철저한 이해가 요구된다.

本稿는 재무관리를 연구하는 學徒들에게 조금이라도 보탬이 될 것을 기대하며 CAPM과 관련된 여러 이론을 정리한 것이다.

本硏究에서 CAPM과 관련된 이론적인 발전을 모두 설명할 수는 없으므로, 本人이 資本資產價格決定模型과 관련하여 핵심적이라고 생각되는 부분을 정리하였다. 그 내용은 첫째 전통적인 CAPM이론전개, 둘째 CAPM이론의 확장이론, 세째 CAPM의 현실적 利用에서 가장 자주 사용되는 β의 安定性 및 미래 예측되는 β의 調整問題로 구성되어 있다.

II. 傳統的 CAPM의 展開

1. 資本市場線

1) 資本市場線의 導出

資本資產價格決定模型이란 한마디로 證券市場이 균형상태를 이룰 때 資本資產의 가격이 어떻게 결정되는가를 설명하는 모형이다. 均衡狀態라는 것은 증권시장에서 거래되는 모든 증권의 수요와 공급이 일치되도록 價格이 형성된 상태를 말한다. 그러므로 資本資產價格決定模型은 마아코위츠의 이론대로 투자자들이 투자활동을 하여 시장 전체가 균형상태에 있을 때, 株式을 위시한 資本資產의 均衡價格이 어떻게 결정되는가에 관한 모형이라고 할 수 있다.

먼저 이 모형을 도출하기 위해 설정한 가정을 이해하는 것이 중요하다. 그 중요한 가정은 다음과 같다.

① 모든 투자자들은 마아코위츠의 이론대로 자본자산의 기대수익률과 표준편차(또는 分散)에 따라 투자를 결정하며, 위험있는 자산에 투자할 때에는 마아코위츠의 效率的 프론티어(efficient frontier)상에 있는 포오트폴리오를 택한다.

② 無危險資産이 존재하며 모든 投資者들은 危險全無利子率로써 언제나 얼마든지 投資資金을 빌리거나 빌려 줄 수 있다.

③ 모든 投資者는 각 자본자산의 未來 收益率과 危險에 대하여 동일한 예측을 하고 있다.

④ 증권시장의 모든 制度的인 요소에 대한 고려는 무시한다. 즉 증권시장은 完全市場(perfect market)이며 소득세·거래비용 등이 없고, 이자율의 상승과 물가상승 등도 고려하지 않는다.

⑤ 증권시장은 均衡狀態이다.

위의 다섯 가지 가정이 현실적이라고 할 수는 없다. 그러나 이 假定들은 모형도출을 위한 시작단계에서 필요한 것이며, 이 假定이 달라짐에 따라 모형이 약간씩 달라진다. 전통적으로 경제학에서는 많은 가정을 하여 현상을 설명할 수 있는 간략한 모형을 설계하고, 이들 假定을 현실화하여 模型을 수정함으로써 經濟現象을 연구하여 왔다.

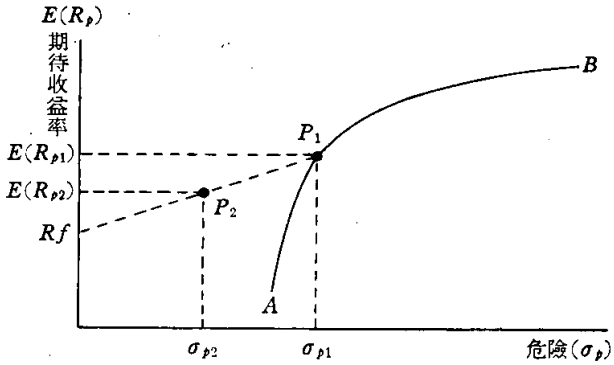
위와 같은 假定下에서 資本市場理論은 두 부분으로 발전되었다. 하나는 資本市場線(capital market line)이며, 다른 하나는 證券市場線(security market line)이다. 먼저 資本市場線에 대하여 알아보자.

마아코위츠의 모형은 일정한 假定下에서 株式만을 投資對象으로 한다면 이론적으로 거의 완전하다고 볼 수 있다. 위험을 計量化한 것이나, 期待收益率과 危險의 組合을 고려하여 効率的 投資線을 찾아내고, 最適포오트폴리오를 선택하기 위하여 無差別曲線을 이용한 것은 財務管理에 공헌을 한 점이다.[3]

그러나 마아코위츠가 발전시킨 效率的 프론티어는 위험이 내포되어 있는 資産에 投資할 때만 그 의미가 있는 것이다. 無危險資産을 고려했을 경우 效率的 프론티어가 어떻게 되는가를 〈圖 1〉에 나타내었다. 여기에서 AB는 마아코위츠의 效率的 프론티어이다.

위험없는 자산에 投資했을 때는 위험이 0이며, 이 때의 收益率은 Rf로 표시하였다. 이 Rf를 危險全無利子率이라고 하며, 현실사회에서는 定期預金이나 國債 등에 투자할 때 받는 確定的인 利子率이다. 危險이 없는 자산과 위험이 내포된 자산을 結合하여 投資할 때

(3) H. Markowitz, *op. cit.*, pp. 71~91.



〈圖 1〉 効率的 프론티어와 無危險資產의 結合

위험이 내포된 投資對象은 효율적 프론티어 AB上에 있는 한 포오트폴리오를 택하여야 한다. 임의로 마아코위츠의 효율적인 포오트폴리오인 P_1과 무위험자산을 결합하여 보자. 이는 어떤 투자자가 無危險資產에 일부 투자하고 일부는 포오트폴리오 P_1에 적절히 배분하여 투자하는 경우이다. 두 資產에 대한 투자비율이 변화함에 따라 새로이 구성된 포오트폴리오의 期待收益率과 危險이 어떻게 될 것인가를 살펴보자.

위험없는 자산에 투자할 때의 收益率을 Rf라 하고, 효율적 포오트폴리오 P_1의 기대수익률을 $E(R_{P1})$이라 하자. 총투자자금 중에서 無危險資產에 투자한 비율을 w라 하면 포오트폴리오 P_1에 투자한 비율은 $1-w$이다. 포오트폴리오 P_1과 無危險資產에 투자한 새로운 포오트폴리오의 기대수익률을 $E(R_P)$, 표준편차를 σ_P라고 하면, 이들은 다음과 같이 계산된다.

$$E(R_P)=w\cdot Rf+(1-w)E(R_{P1}) \tag{1}$$

$$\sigma_P=\sqrt{w^2\sigma^2{}_{Rf}+(1-w)^2\sigma_{p1}{}^2+2w(1-w)\mathrm{cov}[Rf,E(R_{P1})]} \tag{2}$$

σ_{Rf} : 無危險資產의 期待收益率의 표준편차

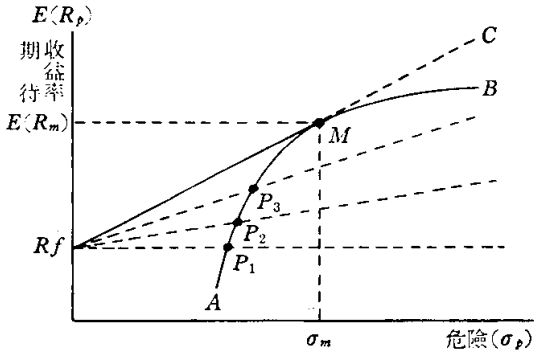
σ_{P1} : 포오트폴리오 P_1의 期待收益率의 표준편차

위의 식에서 $\sigma_{Rf}=0$이며, $\mathrm{Cov}[Rf,E(R_{P1})]=0$이므로 〈式 3〉이 성립된다.

$$\sigma_P=\sqrt{(1-w)^2\sigma_{P1}{}^2}=(1-w)\sigma_{P1} \tag{3}$$

〈式 1〉과 〈式 2〉를 보면, 투자자금의 일부를 無危險資產에 투자하고 일부는 危險있는 資產(또는 포오트폴리오)에 분산투자한 포오트폴리오에 있어서는 그 포오트폴리오의 期待收益率과 표준편차의 관계가 직선식을 이룬다. 즉 〈圖 1〉에서 無危險資產과 마아코위츠의 효율적 포오트폴리오 P_1을 결합한 새로운 포오트폴리오의 한 점은 RfP_1의 선상에 있게 된다.

RfP_1선상의 포오트폴리오들은 AP_1곡선상의 포오트폴리오들보다 유리하다. 즉 支配原理(dominance principle)를 적용하면, RfP_1線上의 投資案이 마아코위츠의 효율적 투자선의



〈圖 2〉 資本市場線의 導出

일부인 AP_1線上의 투자안들보다 같은 위험수준에서는 期待收益率이 더욱 높으며, 같은 期待收益率 水準에서는 위험이 적기 때문이다. 그러므로 새로운 효율적인 投資線은 AB가 아니라 RfP_1B가 된다.

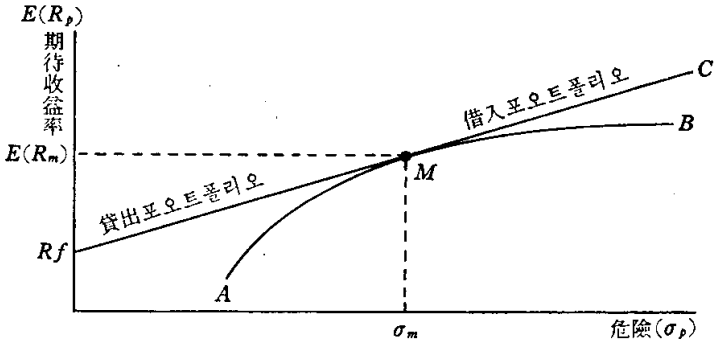
앞에서 설명한 방법대로 P_2, P_3, M이라는 임의의 포오트폴리오들을 선택하여 효율적 投資線을 찾아보면, 〈圖 2〉와 같은 새로운 효율적 포오트폴리오를 발견하게 된다.

위험이 內包된 效率的 포오트폴리오 P_2를 선택하여 無危險資產과 결합하여 투자할 때에는 RfP_2의 직선이 효율적인 投資線이 되나, 포오트폴리오 P_3를 선택하여 無危險資產과 결합한 RfP_3에 의하여 支配를 당하게 된다. RfP_3上의 모든 포오트폴리오는 RfP_2上의 같은 위험을 갖는 모든 포오트폴리오보다 期待收益率이 높기 때문이다. 이와 똑같은 이치로 M이라는 포오트폴리오를 선택하여 위험없는 자산과 결합한 포오트폴리오는 모든 것을 지배하게 된다. 이 M을 市場포오트폴리오(market portfolio)라고 하며, 마아코위츠가 개발한 效率的 投資線 AB에서 가장 최적의 포오트폴리오가 되는 것이다. 그러므로 일반 투자자들은 Rf와 결합하여 새로운 포오트폴리오의 효율적인 직선 RfM線上에서 새로운 포오트폴리오를 구성하게 된다. 이때 $RfMC$를 資本市場線(capital market line: CML)이라고 한다.

2) 貸出포오트폴리오와 借入포오트폴리오

無危險資產과 위험있는 자산에 투자하였을 때의 효율적인 投資線이 資本市場線이며, 이를 그림으로 그려 보면 〈圖 3〉과 같다.

자본시장선의 RfM은 무엇을 뜻하는가? 이는 위험있는 자산으로 결합된 가장 理想的인 포오트폴리오 M(시장포오트폴리오)과 無危險資產에 투자할 경우 생길 수 있는 포오트폴리오이다. 無危險資產에 투자한다는 것은 國債, 定期預金 등을 통하여 자금을 빌려주는 것이며, 모든 자금을 위험없는 機關에 Rf의 이자율로써 빌려줄 때는 RfM직선상의 Rf의 포오트폴리오, 즉 위험은 0이며 수익은 Rf인 포오트폴리오를 갖게 된다. 만일 모든 자금을 위



〈圖 3〉 貸出포오트폴리오와 借入포오트폴리오

험있는 자산의 이상적인 포오트폴리오인 M에 투자한다면 그 포오트폴리오는 기대수익률 $E(R_m)$과 위험 σ_m을 갖는 포오트폴리오가 된다. 일부를 위험없는 자산을 통하여 빌려주고, 일부는 주식시장에서 위험있는 자산 M에 투자할 때 그 포오트폴리오는 RfM上의 한 점이 된다. 이 선상에 있는 포오트폴리오는 투자자금의 일부는 빌려주고 일부는 위험있는 자산에 투자하였다고 하여 貸出포오트폴리오(lending portfolio)라고 한다.

반면에 남의 돈을 Rf의 이자율로 빌려서 투자하는 수도 하다. Rf의 이자율에 자금을 빌려서 투자자가 가지고 있는 금액과 합하여 시장포오트폴리오 M에 투자할 때는 MC上의 한 점의 포오트폴리오로 표시된다. 이 MC上의 포오트폴리오를 借入포오트폴리오(borrowing portfolio)라고 한다.

資本資產價格決定模型의 가정에서 투자자는 Rf의 이자율로 얼마든지 빌리고 빌려줄 수 있다고 하였으므로 效率的 投資線은 貸出포오트폴리오와 借入포오트폴리오를 모두 포함하는 資本市場線이며, 〈圖 3〉이 이를 보여 주고 있다.

2. 市場포오트폴리오와 β危險

이성적인 투자자들은 分散投資가 완전한 市場포오트폴리오를 가져야 하나, 현실적으로 市場포오트폴리오를 갖지 않는 投資者가 대부분이다. 이러한 상황에서도 個別株式의 評價는 市場포오트폴리오의 일원으로서 이루어져야 한다. 個別株式의 평가가 시장포오트폴리오의 일원으로 이루어지지 않으면 裁定去來가 일어날 수 있기 때문이다. 주식의 위험 중에서 관심의 대상이 되는 것은 市場포오트폴리오의 위험에 개별주식의 위험이 얼마나 공헌하느냐하는 점이다. 個別株式의 위험 중에서 分散投資로 제거되지 않고 市場포오트폴리오의 위험에 공헌하는 위험만이 관심의 대상이 된다. 먼저 市場포오트폴리오의 위험을 分散 σ_m^2로 나타내면 다음과 같다.

$$\sigma_m^2=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}w_iw_j\sigma_{ij} \qquad (4)$$

w_i; i주식에 투자한 비율
w_j; j주식에 투자한 비율
σ_{ij}; i주식과 j주식의 수익률의 共分散

$\sigma_m{}^2$은 완전히 분산된 시장포오트폴리오의 收益率 $E(R_m)$의 分散이다. 이 중에서 개별주식이 미치는 영향은 〈式 5〉에서 찾아 볼 수 있다. 즉, 株式(1)의 영향은 다음 식으로 나타낼 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{n} w_1 w_j \sigma_{1j} \tag{5}$$

w_1: 株式(1)의 구성비율
σ_{1j}: 株式(1)과 株式 j와의 共分散

$$\sum_{i=1}^{n} w_1 w_j \sigma_{1j} = w_1 \sum_{j=1}^{n} w_j \sigma_{1j}$$

$$= w_1 \sigma_{1m} \tag{6}$$

〈式 6〉은 매우 중요한 의미를 갖는다. 이는 시장포오트폴리오의 위험 중에서 개별주식의 영향을 나타내는 식이다. 즉 개별주식 i의 영향은 다음과 같이 표시된다.

株式 i가 포오트폴리오에 미치는 위험의 영향$=w_i\sigma_{im}$

즉. (개별주식의 투자비율)×(개별주식 i와 시장포오트폴리오의 共分散)이다. 그러므로 시장포오트폴리오 위험 $\sigma_m{}^2$ 중에서 개별주식 i가 미치는 위험의 비율은 〈式 7〉로 나타낸다.

株式 i가 시장포오트폴리오에 미치는 위험의 비율$=w_i\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m{}^2}$ (7)

σ_{im}의 의미는 무엇인가? 이는 市場포오트폴리오가 움직이는 양상과 개별주식이 움직이는 양상의 공분산으로서, 市場포오트폴리오의 수익률변화에 개별주식의 수익성이 얼마나 밀접한 정도로 관계되어 움직이는가를 나타내는 측정치이다. 시장포오트폴리오는 株式市場에서 거래되는 모든 株式을 포함하므로 綜合株價指數의 움직임과 같다. 그러므로 시장 포오트폴리오의 동향은 결국 주식시장 전체의 동향과 같다. σ_{im}은 주식시장전체의 움직임과 개별주식간의 수익률의 共分散이라고 하여, 시장 전체 변화에 대한 개별주식의 민감도를 나타낸다. 〈式 7〉에서 보면 시장의 움직임에 대하여 민감한 반응을 보이는 주식은 시장포오트폴리오의 위험을 증가시키고, 민감하지 않은 주식은 포오트폴리오의 위험에 미치는 영향이 적은 것을 알 수 있다.

〈式 7〉에서 $\sigma_{im}/\sigma_m{}^2$을 주식 i의 체계적인 위험이라 하여 β_i로 나타낸다.

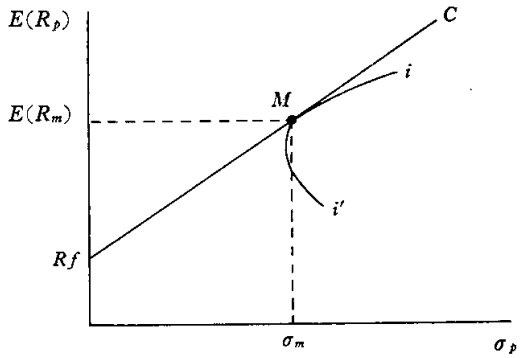
$$\sigma_{im}/\sigma_m{}^2 = \beta_i \tag{8}$$

體系的 危險을 베타(β)로 나타내기 때문에 이를 베타危險(β-risk)이라고도 한다. β라고 하게 된 이유는 시장포오트폴리오의 收益率 $E(R_m)$과 개별주식의 收益率 $E(R_i)$의 상관관

계를 보기 위하여 $E(R_i)=a+b\cdot E(R_m)$의 一次回歸式을 구할 때 $b=\sigma_{im}/\sigma_m^2$으로 계산되기 때문이다.

3. 證券市場線의 導出

資本市場線은 完全 分散投資된 투자대상들의 위험과 기대수익률을 나타내는 선이다. 資本市場線이 존재한다면 個別株式 또는 포오트폴리오의 위험과 수익률의 관계는 어떻게 될 것인가를 보여 주는 것이 證券市場線이다. 이를 도출하기 위하여 다음 〈圖 4〉를 살펴보자. 〈圖 4〉에서 $RfMC$는 앞에서 설명한 資本市場線이며, M은 市場포오트폴리오를 나타낸다. 市場포오트폴리오 M과 i 株式이 결합될 때, i 株式의 투자비율을 w라 하고, M의 투자구성비율을 $(1-w)$라고 하면, M과 i로 구성된 포오트폴리오의 收益率 $E(R_P)$와 σ_P는 다음과 같다.



〈圖 4〉 i株式과 시장포오트폴리오의 結合投資

$$E(R_P)=wE(R_i)+(1-w)E(R_m) \tag{9}$$

$$\sigma_P=[w^2\cdot\sigma_i^2+(1-w)^2\sigma_m^2+2w(1-w)\sigma_{im}]^{1/2} \tag{10}$$

$E(R_i)$: i株式의 기대수익률

σ_i: i주식의 기대수익률의 표준편차

σ_{im}: i주식과 시장포오트폴리오의 수익률의 共分散

〈式 9〉와 〈式 10〉에 따라, i 株式과 M이 결합할 때의 포오트폴리오의 기대수익률과 위험의 가능한 모든 조합을 나타낸 것이 〈圖 4〉에서 iMi'이다. w가 변화함에 따라 포오트폴리오의 期待收益率과 危險은 다음과 같이 변화한다.

$$\frac{dE(R_P)}{dw}=E(R_i)-E(R_m) \tag{11}$$

$$\frac{d\sigma_P}{dw}=\frac{1}{2}[w^2\sigma_i^2+(1-w)^2\sigma_m^2+2w(1-w)\sigma_{im}]^{-\frac{1}{2}}$$
$$\times[2w\sigma_i^2-2\sigma_m^2+2w\sigma_m^2+2\sigma_{im}-4w\sigma_{im}] \tag{12}$$

〈式 11〉과 〈式 12〉에서 증권시장이 均衡狀態가 되면 w는 0이 된다. 시장이 균형을 이루면

시장포오트폴리오 M속에 i 株式이 포함되어 있으며, 구성비는 (i 株式의 총시장가치/총주식의 총시장가치)가 된다. 그러므로 M에 투자했다는 것은 이미 i에 적절히 투자한 것을 의미하며, i에 또다시 w만큼 투자한다면, w는 i주식에 대한 초과수요를 나타내는 것으로 해석할 수 있다. 따라서 증권시장이 균형을 이루면 w는 0이 되며, w가 0이라면 〈式 11〉과 〈式 12〉는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$w=0$인 점에서,

$$\frac{dE(R_P)}{dw}=E(R_i)-E(R_m) \tag{13}$$

$$\frac{d\sigma_P}{dw}=\frac{1}{2}[\sigma_m^2]^{-\frac{1}{2}}\cdot[-2\sigma_m^2+2\sigma_{im}]=\frac{\sigma_{im}-\sigma_m^2}{\sigma_m} \tag{14}$$

그러므로 균형상태인 市場포오트폴리오 M에서, 危險과 收益率의 트레이드 어프(trade-off) 關係는 다음과 같다.

$$\frac{dE(R_P)/dw}{d\sigma_p/dw}=\frac{E(R_i)-E(R_m)}{(\sigma_{im}-\sigma_m^2)/\sigma_m} \tag{15}$$

〈式 15〉는 앞에서 설명한 資本市場線의 기울기 $\{E(R_m)-Rf\}/\sigma_m$과 동일하므로 M에 있어서의 개별주식 i의 期待收益率과 危險의 關係는 다음과 같이 導出할 수 있다.

$$\frac{E(R_m)-Rf}{\sigma_m}=\frac{E(R_i)-E(R_m)}{(\sigma_{im}-\sigma_m^2)/\sigma_m} \tag{16}$$

$$E(R_i)=Rf+[E(R_m)-Rf]\frac{\sigma_{im}}{\sigma_m^2} \tag{17}$$

〈式 17〉이 個別株式의 收益率과 危險의 관계를 나타낸 것으로서, 이를 證券市場線이라 한다. 이 증권시장선에서 σ_{im}/σ_m^2을 β_i라고 하여 〈式 18〉과 같이 나타내고 있다.

$$E(R_i)=Rf+[E(R_m)-Rf]\cdot\beta_i \tag{18}$$

III. 資本資產價格決定模型의 擴張

傳統的 CAPM의 理論을 전개하는 데 있어서는 여러 가지 現實과 부합되지 않는 假定을 前提로 하고 있다. 그러나 CAPM의 假定이 현실과 一致하지 않는다는 사실이 곧 CAPM이 無用하다는 것을 意味하지는 않는다. 理論에서의 假定과 現實世界와의 差異가 模型의 說明力에 중대하게 영향을 미칠 만큼 重要하지 않을 수 있으며, 非現實的인 假定下에서 발전된 모형이라 할지라도 假定을 완화하여 현실적인 變數를 고려함으로써 이론적인 모형의 思考의 틀을 이용할 수 있기 때문이다. 그러나 傳統的인 CAPM理論으로서는 현실의 證券市場

의 價格調整이 충분하게 설명이 되지 않는 경우가 있으므로 현실적인 假定을 도입하여 CAPM理論을 보다 확장하여 분석하는 것이 바람직하다. 보다 구체적으로 CAPM의 擴張은 다음과 같은 의미를 갖는다.[4]

첫째, 傳統的 CAPM은 증권시장이 均衡狀態라는 巨視的 水準에서 주식가격결정의 메카니즘을 설명할 수는 있으나, 微視的인 個別投資者의 投資行態를 설명할 수는 없다. 보다 現實的인 假定下에서 전개된 模型이라야 개별투자자의 投資行爲에 대해 더 나은 分析方法을 제시해 줄 수 있을 것이다.

둘째, 均衡收益率에 관하여 전통적인 모형은 균형상태만을 강조하고 있으나, 擴張된 모형은 균형상태의 代替的 狀況에서의 균형수익률에 대해 說明을 公式化하고, 檢證을 할 수 있게 해 준다. 즉, 傳統的 CAPM보다 均衡收益率을 더 잘 설명해 주거나 균형수익률과 傳統的 CAPM과의 不一致를 설명해 줄 수 있다는 點이다.

마지막으로, 傳統的 CAPM은 現實世界에 존재하는 몇 가지의 重要變數를 고려하지 않았기 때문에 이러한 重要變數가 資本市場의 均衡 또는 個人의 意思決定에 미치는 영향을 硏究할 수 있는 메카니즘을 제공해 주지 못한다. 그러므로 投資決定과 價格決定에 중요한 역할을 하는 變數가 포함된 CAPM의 擴張模型을 고려함으로써 보다 진보된 投資分析을 할 수 있다.

本章에서는 CAPM의 擴張으로서 ① 無危險利子率로의 借入 및 貸與에 대한 制限이 있는 경우, ② 個人所得稅가 고려되는 경우, ③ 異質的 期待가 고려되는 경우, ④ 連續的 時間模型(continuous time model)을 고려한 경우, ⑤ 非市場性資產(nonmarketable asset)이 고려되는 경우, ⑥ 인플레이션이 고려되는 경우에 대해 차례로 살펴볼 것이다. 이 외에도 다른 요인을 고려하여 CAPM을 확장할 수 있으나, 여기에서는 위의 여섯 가지를 설명하였으며, 本稿의 性格上 諸模型을 導出하기 보다는 導出된 모형이 가지는 意味를 설명하는 데 중점을 두었다.

1. 無危險利子率로의 借入 및 貸與에 대한 制限

傳統的 CAPM에 대해서는 다음과 같은 두 가지가 가장 批判의 對象이 되고 있다.[5] 하나는 전통적인 CAPM에서는 모든 投資者가 동일한 性格의 借入 또는 貸與額을 가지고 이와 結合된 市場포오트폴리오를 소유해야 함을 제시하고 있으나 실제로 모든 投資者가 전통적인 CAPM理論에서 제시하는 바와 같이 市場포오트폴리오를 소유하고 있지는 않다는 것이다.

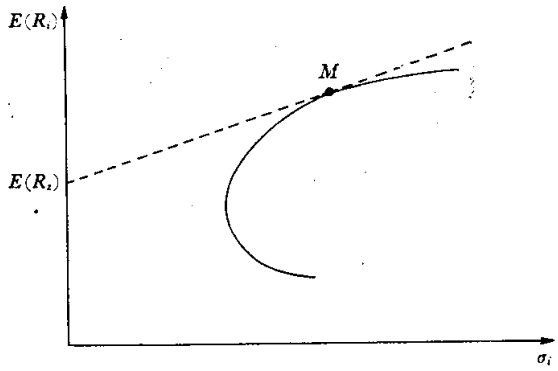
(4) E.J. Elton & M.J. Gruber, *Modern Portfolio Theory and Investment Analysis*, John Wiley & Sons Inc., 1981, pp. 294~295.

(5) E.F. Fama, *Foundations of Finance*, Basil Blackwell, Oxford, 1976, p. 277.

다른 하나는 전통적인 CAPM에서는 借入과 貸與가 無危險利子率로 무제한 가능하다고 가정하고 있으나, 실제로는 借入 또는 貸與가 完全히 無危險利子率로 가능한 것이 아니라는 것이다. 현실적으로는 物價水準의 不確實 등으로 인하여 無危險利子率이 존재할 수 없기 때문이다. 뿐만 아니라 借入에 대한 利子率과 貸與로 인한 利子率은 同一하지 않으며 또한 投資者가 無危險利子率로 無限한 金額을 借入하기란 不可能하다.

Black은 無危險利子率로의 借入 및 貸與의 機會가 존재하지 않으나 空賣(short selling)를 무제한 할 수 있다는 가정하에서 모든 資產에 대한 危險과 收益率間의 均衡關係를 導出하였다. 그는 균형상태에서 모든 투자자의 포오트폴리오는 두 개의 기본적 포오트폴리오 즉, 市場포오트폴리오와 體系的 危險, 즉 베타가 0인 포오트폴리오인 제로-베타 포오트폴리오(zero-beta portfolio)의 線型結合으로 이루어짐을 보였다.[6] 이 경우에 危險-期待收益率空間上의 機會集合(opportunity set)은 〈圖 5〉에서와 같이 나타난다. 均衡狀態下에서의 資產 i에 대한 期待收益率은 다음과 같다.

$$E(R_i)=E(R_z)+\beta_i\cdot[E(R_m)-E(R_z)] \tag{19}$$

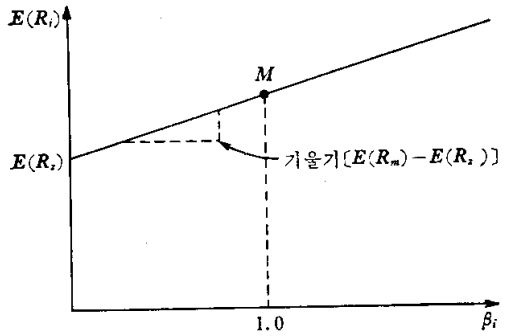


〈圖 5〉 제로-베타模型에서의 投資機會集合

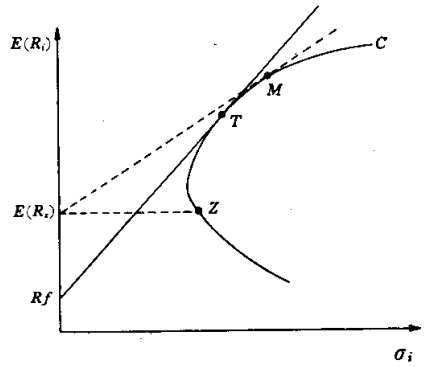
여기서 $E(R_z)$는 제로-베타 포오트폴리오에 대한 期待收益率을 나타낸다. 〈式 19〉를 흔히 제로-베타模型(zero-beta model), 또는 二要素模型(two-factor model)이라 부르는데〈式 18〉의 전통적인 CAPM에서 無危險資產에 대한 收益率(Rf)이 제로-베타 포오트폴리오에 대한 期待收益率 $E(R_z)$로 代替된 점 외에는 차이가 없다. 따라서 베타는 여전히 資產의 體系的 危險에 대한 적절한 代表値로 남으며 資產의 期待收益率과 體系的 危險間에는 線型關係가 성립한다.

이제 보다 一般的인 상황인 無危險利子率로의 貸與는 가능하나 借入은 不可能한 경우에

(6) F. Black, "Capital Market Equilibrium with Restricted Borrowing," *Journal of Business* (July 1972), pp. 444~455.



〈圖 6〉 제로—베타模型

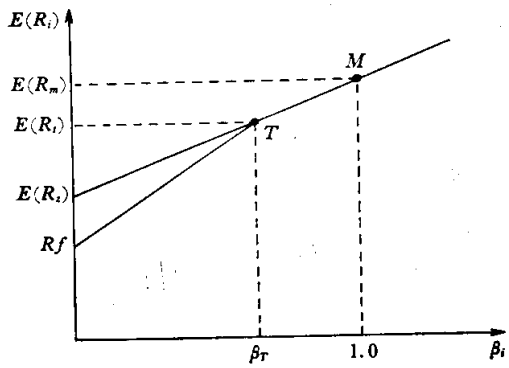


〈圖 7〉 無危險利子率로의 貸與가 허용되는 경우의 投資機會集合

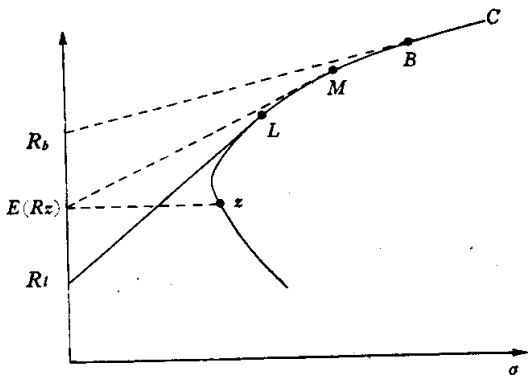
대해 살펴보자. 無危險利子率로 貸與가 허용될 때 투자자는 無危險資產에 대한 期待收益率에서 출발하여 效率的 投資線(efficient frontier)과 接點을 이루는 直線上에서 투자를 하려 할 것이다. 이것이 바로 〈圖 7〉에서의 直線 RfT이다. T는 市場포오트폴리오 M의 왼쪽에 위치하며 따라서 $E(R_z)>Rf$의 關係가 성립한다. 포오트폴리오 T는 最小分散 제로-베타 포오트폴리오(minimum variance zero-beta portfolio)인 Z와 M의 組合에 의해 구해질 수 있다. 따라서 모든 투자자는 市場포오트폴리오, 最小分散 제로-베타 포오트폴리오, 無危險資產의 組合을 가지게 될 것이다. 이를 期待收益率-베타空間上에 표시해 보면 〈圖 8〉과 같이 된다.

直線 $E(R_z)M$은 모든 危險資產과, 危險資產만으로 구성되는 모든 포오트폴리오에 대해서는 證券市場線으로 간주될 수 있다. 따라서 이 경우에는 〈式 19〉가 그대로 적용된다. 그러나 無危險資產을 포함하는 포오트폴리오에 대한 期待收益率을 나타내 주지는 못한다.

借入에 대한 利子率과 貸與에 대한 利子率이 相異한 경우의 效率的 投資線은〈圖 9〉와 같이 나타난다.



〈圖 8〉



〈圖 9〉

投資者에 의해 소유되는 포오트폴리오는 L과 B, 그리고 LB 사이의 中間領域에 있는 포오트폴리오이다. 市場포오트폴리오는 투자자에 의해 소유되는 모든 포오트폴리오의 加重平均이다. 이 경우에도 〈式 19〉는 無危險資產이 포함되지 않는 포오트폴리오에 대해서만 성립된다.

2. 個人所得稅의 差異

傳統的 CAPM은 均衡價格決定에 이르는 과정에서 稅金의 存在를 무시하였다. 이 假定의 의미는 투자자가 資本利得의 형태로나 또는 配當의 형태로 收益을 얻는데, 이러한 所得이 所得稅로 인하여도 實質所得에 영향을 주지 않는다는 것이다. 그러나 稅金을 인식하고 특히 일반적으로 資本利得이 配當보다 더 낮은 稅率로 과세된다는 점을 고려한다면 均衡價格은 달라지게 될 것이다.

아직까지 法人稅뿐만 아니라, 個人所得稅를 현실적으로 완전하게 고려한 均衡模型이 개발된 것은 없으나, Brennan은 資本利得과 配當에 대한 상이한 稅率이 고려되는 경우에 配當收益이 확실하게 알려져 있으며 利子支給額은 課稅對象이 되지 않는다고 가정할 때 資產의 均衡價格은 여전히 그의 體系的 危險의 線型關係로 표시될 수 있음을 보였다.[7]

$$E(R_i)=T_2Rf+[E(R_m)-T_1\delta_m-T_2Rf]\beta_i+T_1\delta_i \qquad (20)$$

여기서 δ_i는 i번째 자산에 대한 配當收益率, δ_m은 市場포오트폴리오에 대한 配當收益率이다. 그리고 $T_1=\frac{T_d-T_g}{1-T_g}$이며, $T_2=\frac{1-T_d}{1-T_g}=1-T_1$이다. T_d와 T_g는 각각 配當과 資本利得에 대한 투자자의 限界稅率의 加重平均이다. 배당에 대한 세율이 자본이득에 대한 세율보다 더 높은 경우에 T_1과 T_2는 둘 다 陽(+)의 값을 갖게 된다. 따라서 稅金이 고려될 때 危險-收益率間의 절편과 기울기가 변하게 되며 配當收益率이 期待收益率의 결정에 있어 새로운 變數로 나타나게 된다. 그러나 體系的 危險이나 危險-收益率關係의 線型性은 변하지 않음을 알 수 있다.

收益率이 〈式 20〉과 같은 均衡模型에 의해 결정된다면 資本利得과 配當에 대해 부과되는 稅率의 函數로서 특정투자자에 대한 最適포오트폴리오를 도출하는 것이 가능해진다. 이에 대한 經濟的 意味는 모든 투자자들이 市場포오트폴리오와 유사한 광범위하게 分散된 포오트폴리오를 소유하겠지만 아무래도 투자자는 相對的 優位를 가지는 證券을 選好하게 될 것이라는 것이다.[8]

3. 異質的 期待

(7) M.J. Brennan, "Taxes, Market Valuation and Corporate Financial Policy," *National Tax Journal* (December 1970), pp. 417~427.

(8) E.J. Elton and M.J. Gruber, *op. cit.*, p. 310.

모든 투자자가 未來 收益率의 分布에 대해 同一한 期待를 가지고 있다는 것이 전통적인 CAPM의 가정이다. 그러나 투자자들이 투자자산에 대하여 未來 收益率의 確率分布에 대하여 동일한 기대를 가지지 않는다면 투자자에 따라 상이한 投資機會集合을 인식하게 될 것이고, 따라서 투자자들은 서로 다른 포오트폴리오를 선택하게 될 것이다. 미래수익률의 확률분포에 대한 투자자들간의 異質的 期待를 고려할 때 均衡狀態는 여전히 期待收益率, 分散, 共分散을 통해 표시될 수 있으나 이러한 期待收益率, 分散, 共分散은 個個의 投資者에 따라서 서로 다른 推定値의 複合加重平均이 될 것이다. 그러나 현실적으로 期待收益率, 分散, 共分散을 구하기 위한 加重節次는 투자자의 效用函數에 대한 情報를 고려해야 하기 때문에 이를 직접 계산하여 均衡狀態를 나타내는 것은 거의 不可能하다.

4. 連續的 時間模型

전통적인 CAPM은 한 투자기간에 대한 모형이나, 투자는 일반적으로 연속적인 기간에 걸쳐 이루어지는 것이 현실이다. Merton은 去來가 시간에 걸쳐 연속적으로 발생하며 收益率이 극히 짧은 시간간격동안에 걸쳐 定義될 수 있다고 가정되는 連續的 時間模型(continuous time model)을 사용하여 CAPM을 도출하였다.[9] 만일 無危險利子率이 시간에 걸쳐 非確率的(nonstochastic)이라면 均衡收益率은 다음과 같이 定義된다.

$$E(R_i)=Rf+\beta_i[E(R_m)-Rf] \tag{21}$$

〈式 21〉은 CAPM의 連續的 時間形態이다. 이는 瞬間收益率(instantaneous rate of return)이 離散的 시간간격동안의 收益率을 代替한 점을 제외하고는 전통적 CAPM과 同一하다.

만일 無危險利子率이 시간에 따라 일정하지 않다면 투자자는 또다른 種類의 危險 즉, 投資機會集合에 있어서의 불리한 변동이라는 危險에 당면하게 될 것이다. Merton은 투자자들이 無危險資產, 市場포오트폴리오, 無危險資產과 完全히 陰(−)의 相關關係를 가지도록 선택된 포오트폴리오로 구성된 포오트폴리오를 택할 것임을 보였다. 이 경우에 i번째 자산에 대한 必須收益率은 다음과 같다.

$$E(R_i)=Rf+r_1[E(R_m)-Rf]+r_2[E(R_N)-Rf] \tag{22}$$

R_N : 無危險資產과 완전한 음(−)의 相關關係를 가지는 포오트폴리오에 대한 瞬間收益率

$$r_1=\frac{\beta_{im}-\beta_{iN}\beta_{Nm}}{1-\rho_{Nm}^2},\quad r_2=\frac{\beta_{iN}-\beta_{im}\beta_{Nm}}{1-\rho_{Nm}^2}$$

ρ_{Nm} : 포오트폴리오 N과 市場포오트폴리오 M과의 相關係數

(9) R.C. Merton, "An Intertemporal Capital Asset Pricing Model," *Econometrica* (September 1973), pp. 869~874.

$$\beta_{ik}=\frac{\mathrm{cov}(R_i, R_k)}{\sigma_k^2}$$

Merton은 r_2의 부호가 높은 베타값을 가지는 資產에 대해서는 陰(−), 낮은 베타값을 가지는 資產에 대해서는 陽(+)이 된다고 주장하였는데, 實證的인 검증결과도 이와 일치하는 것으로 나타나고 있다.[10]

5. 非市場性資產의 存在

전통적 CAPM에서는 모든 자산이 完全流動的이며 그 去來費用은 없다고 假定하였다. 그러나 現實的으로 투자자는 그 외에도 市場性이 없는 資產의 포오트폴리오를 갖는다. 人的資本(human capital)은 그러한 것 중에서 가장 중요한 것으로 볼 수 있다. 非市場性資產의 다른 예로는 政府移轉支出에 대한 請求權, 年金 등이 있다. 투자자의 포오트폴리오에 非市場性資產(nonmarketable asset)이 포함된다면 비록 모든 투자자가 市場性資產의 동일한 포오트폴리오를 보유하더라도 全體富(total wealth)에 대해서는 相異한 確率分布를 가지게 될 것이다.

Mayers는 모든 자산이 완전유동적인 자산과 완전비유동적인 자산으로 구분될 수 있다고 假定되는 경우에 다음과 같은 危險資產에 대한 危險-收益率關係가 도출될 수 있음을 보였다.[11]

$$E(\rho_i)=e+\left[\frac{E(\rho_m)-e}{P_m\sigma^2(\rho_m)+\mathrm{cov}(\rho_m, I_H)}\right]\cdot[P_m\cdot\mathrm{cov}(\rho_i, \rho_m)+\mathrm{cov}(\rho_i, I_H)] \quad (23)$$

ρ_i: 1+(위험자산 i에 대한 一期間收益率)

ρ_m: 1+(一期間市場收益率)

e: $1+Rf$

P_m: 市場性資產의 總價値

I_H: $\sum_{k=1}^{n} I_k^H$, I_k^H는 투자자 k가 期末에 얻게 될 非市場性資產에 의한 一期間確率的 貨幣收益

〈式 23〉으로부터 非市場性資產의 존재가 고려될 때의 資產 i에 대한 均衡期待收益率이 도출될 수 있다.

$$E(R_i)=Rf+\frac{E(R_m)-Rf}{\sigma_m^2+\{P_H/P_m\cdot\mathrm{cov}(R_m, R_h)\}}\times\left[\mathrm{cov}(R_i, R_m)+\frac{P_H}{P_m}\mathrm{cov}(R_i, R_h)\right] \quad (24)$$

(10) T.E. Copeland and J.F. Weston, *Financial Theory and Corporate Policy*, Addison-Wesley Publishing Company, 1979, pp. 177~178.

(11) D. Mayers, "Nonmarketable Assets and Capital Market Equilibrium under Uncertainty," in M.C. Jensen (ed.) *Studies in the Theory of Capital Markets*, New York, 1972, pp. 223-230.

R_h: 非市場性資產에 대한 一期間收益率
P_H: 非市場性資產의 總價値

〈式 24〉는 세 가지 중요한 의미를 내포하고 있다. 첫째, 個人은 相異한 危險資產의 포오트폴리오를 보유하게 될 것이다. 즉, 현실적으로 투자자는 그의 非市場性資產과 낮은 相關關係를 가지는 그러한 株式에 더 많은 비중을 두게 된다. 둘째로 危險資產의 市場均衡價格은 여전히 개별투자자의 效用函數의 형태와는 독립적으로 결정된다는 것이다. 세째, 적절한 危險尺度는 여전히 共分散이다. 그러나 市場포오트폴리오와의 共分散뿐만 아니라 非市場性資產과의 共分散이 또한 고려되어야만 한다.

그러나 非市場性資產이 고려될 때에도 전통적 CAPM에서와 마찬가지로 分離理論이 성립될 수 있는지에 대해서는 많은 疑問의 여지가 있다. 非市場性資產이 도입될 때 非市場性資產은 個別 投資者에 따라 고유한 특성을 가지기 때문에 일반적으로 투자자는 더 이상 동일한 포오트폴리오機會에 직면하지 않을 것이기 때문이다.[12]

6. 인플레이션

지금까지의 諸模型들은 인플레이션에 대한 명확한 고려없이 도출되었다는 점에서 불완전하다고 할 수 있다. Chen과 Boness는 不確實한 인플레이션下에서의 資本資產價格決定模型을 도출하여 불확실한 인플레이션이 기업의 投資 및 資金調達決定에 미치는 영향에 대해 연구한 바 있다.[13] 그러나 그들의 결과에 대한 解釋이 적절하지 못했기 때문에[14] 여기서는 E.T. Chen에 의해 도출된 CAPMUI (Capital Asset Pricing Model under Uncertain Inflation)에 대해 살펴보기로 한다.[15]

$$E(R_i)=Rf+\left[\frac{E(R_m)-Rf}{\sigma_m{}^2-\sigma_{m\pi}}\right](\sigma_{im}-\sigma_{i\pi}) \tag{25}$$

$\sigma_{m\pi}$: $\mathrm{cov}(R_m, R_\pi)$, R_π는 인플레이션率
$\sigma_{i\pi}$: $\mathrm{cov}(R_i, R_\pi)$

〈式 25〉에서 볼 때 總市場危險은 $\sigma_m{}^2$이 아닌 $\sigma_m{}^2-\sigma_{m\pi}$로 나타난다. 따라서 $\sigma_{m\pi}<0$이라면 E.T. Chen에 의한 CAPMUI에서의 總市場危險은 전통적 CAPM에서보다 더 커질 것이다. 반면 $\sigma_{m\pi}>0$이면 CAPMUI에서의 總市場危險은 보다 적어질 것이다. 이러한 結論은 危險에

(12) Y. Landskroner, "Nonmarketable Asset and the Determinant of the Market Price of Risk," *Review of Economics and Statistics* (November 1977), pp. 482~492.
(13) A.H. Chen & A.J. Boness, "Effects of Uncertain Inflation on the Investment and Financing Decisions of a Firm," *Journal of Finance* (May 1975), pp. 469~483.
(14) I. Friend, L. Landskroner & E. Losq, "The Demand for Risky Assets under Uncertain Inflation," *Journal of Finance* (December 1976), pp. 1287~1297.
(15) E.T. Chen, "Uncertain Inflation and Capital Asset Prices," *Southern Economic Journal* (January 1980), pp. 763~776.

대한 一般的 通念과 일치한다. 市場收益率이 인플레이션과 (+)의 相關關係를 가진다면 투자자는 보다 더 위험한 것으로 간주할 것이기 때문이다.

危險의 市場價格(market price of risk)은 $[E(R_m)-Rf]/\sigma_m^2$에서 $[E(R_m)-Rf]/(\sigma_m^2-\sigma_{m\pi})$으로 바뀐다. 따라서 市場포오트폴리오에 대한 收益率과 인플레이션率이 (+)의 相關關係를 가진다면 傳統的 CAPM은 위험의 시장가격을 과소표시하게 된다. 반면 (−)의 相關關係를 가진다면 전통적 CAPM은 危險의 市場價格을 과대표시하게 된다.

體系的 危險에 대한 代表値인 베타(β)에 대한 정의도 σ_{im}/σ_m^2에서 $(\sigma_{im}-\sigma_{i\pi})/(\sigma_m^2-\sigma_{m\pi})$로 바뀐다. 전통적 CAPM에서의 體系的 危險(β_i)과 E.T. Chen에 의한 CAPMUI에서의 體系的 危險(β_i')과의 관계는 〈表 1〉로써 要約될 수 있다.

〈表 1〉

$\mathrm{cov}(R_i, R_\pi)$	$\mathrm{cov}(R_m, R_\pi)$	$\beta_i \& \beta_i'$
0	>0	$\beta_i<\beta_i'$
	$=0$	$\beta_i=\beta_i'$
	<0	$\beta_i>\beta_i'$
>0	>0	不確定
	$=0$	$\beta_i>\beta_i'$
	<0	$\beta_i>\beta_i'$
<0	>0	$\beta_i<\beta_i'$
	$=0$	$\beta_i<\beta_i'$
	<0	不確定

IV. β의 豫測誤差와 그 調整方法

1. 豫測誤差의 定義

未來 個別株式이나 포오트폴리오의 危險을 평가하기 위해 과거 實績値로부터 推定된 事後베타係數(ex-post betas)를 사용하는데, 이 베타係數의 有用性은 體系的 危險인 베타의 安定性을 전제로 하고 있다. 그러나 事前베타(ex-ante betas)의 推定値와 事後베타(ex-post betas)의 測定値와는 어느 정도 차이가 발생하게 된다. 이때 예측된 베타와 실제로 계산된 베타와의 차이를 豫測誤差(forecasting error)라 한다.

이하에서는 이 예측오차의 측정수단인 平均平方誤差(mean square error: MSE) 및 이 평균평방오차의 구성요소 및 베타의 豫測力을 증가시키기 위해 이 예측오차를 조정하는 방법

(16) Robert C. Klemkosky & John D. Martin, "The Adjustment of Beta Forecast," *Journal of Finance*, Vol. 30, No. 4 (September 1975), pp. 1123~1128.

등을 Klemkosky, Martin의[16] 論文 및 Eubank, Zumalt의[17] 論文을 중심으로 하여 설명하기로 한다.

豫測誤差의 測定手段으로 平均平方誤差를 사용하게 되는 바, 이 MSE의 定義는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\mathrm{MSE}=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\hat{\beta}_{it+1}-\hat{\beta}_{it}) \tag{26}$$

$\hat{\beta}_{it+1}$: i증권이나 포오트폴리오의 예측된 기간에 실현된 β係數
$\hat{\beta}_{it}$: i증권이나 포오트폴리오의 測定期間에 계산된 베타係數

여기에서 豫測誤差의 測定手段인 MSE는 統計的인 취급과 처리가 간편하여 사용되었다.

만약 모든 證券 i와 t時點에서 $\hat{\beta}_{it+1}$과 $\hat{\beta}_{it}$가 완전 동일한 값이면 MSE는 0이 될 것이다. 이는 모든 증권이나 포오트폴리오에서 t기간에 推定된 베타係數가 다음 期의 베타계수를 정확하게 예측하는 것을 의미한다. 그러나 MSE가 0이 아니라면 이것은 t기간에 推定된 베타係數가 다음 期의 베타係數로 정확하게 예측되지 못하고 어느 정도의 誤差가 발생함을 의미한다.

2. 豫測誤差의 構成要素

豫測誤差의 測定手段으로 사용되는 MSE는 다음과 같이 세 가지 構成要素로 나누어 분석할 수 있다. 그 구성요소는 첫째 偏倚部分(bias), 둘째 非效率部分(inefficiency), 세째로 確率誤差 部分(randon error)이다. 즉, 이는 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$\mathrm{MSE}=\underbrace{(\bar{\beta}_{it+1}-\bar{\beta}_{it})^2}_{\text{偏倚要素}}+\underbrace{(1-b_i)^2S_{\beta t}{}^2}_{\text{非效率要素}}+\underbrace{(1-R^2{}_{\beta_t,\beta_{t+1}})S^2{}_{\beta_{t+1}}}_{\text{確率誤差要素}} \tag{27}$$

$\bar{\beta}_{it+1}$: $t+1$期의 모든 증권의 횡단면 베타係數의 平均値
$\bar{\beta}_{it}$: t期의 모든 증권의 횡단면 베타係數의 平均値
b_i: $\hat{\beta}_t$에 대한 $\hat{\beta}_{t+1}$의 回歸線의 기울기의 係數
$R^2{}_{\beta_t,\beta_{t+1}}$: $\hat{\beta}_t$와 $\hat{\beta}_{t+1}$에 대한 決定係數
$S^2{}_{\beta_{t+1}}$, $S^2{}_{\beta_t}$: β_{t+1}, β_t의 標本分散

Mincer와 Zarnowitz가 지적한 바와 같이[18] 모든 개별증권이나 포오트폴리오의 경우 t期의 베타 $\hat{\beta}_t$가 정확하게 다음 期의 베타 $\hat{\beta}_{t+1}$을 예측한다면 〈式 27〉의 回歸線의 기울기 베타係數 b_i는 1이 될 것이고 決定係數 $R^2{}_{\beta_t,\beta_{t+1}}$도 1이 될 것이다. 또한 各期의 베타의 平均値 $\bar{\beta}_{t+1}$와 $\bar{\beta}_t$도 동일한 값을 갖게 되어 MSE가 0이 될 것이다. 그러나 일반적으로 어느 정도의

(17) Arthur A. Eubank Jr. and J. Kenton Zumalt, "An Analysis of the Forecast Error Impact of Alternative Beta Adjustment Technique and Risk Class," *Journal of Finance*, Vol 34. No. 3(June 1979), pp. 761~776.

(18) J. Mincer & V. Zarnowitz, "The Evaluation of Economic Forecasts," *Economic Forecasts and Expectations*, edited by Mincer (New York Columbia University 1969).

예측오차는 발생하게 되는데 먼저 설명한 豫測誤差의 세 가지 구성요소를 자세히 분석하면 다음과 같다.

1) 偏倚要素

$(\bar{\beta}_{it+1}-\bar{\beta}_{it})$는 어떤 한 期의 베타값의 平均豫測値(average prediction)가 다음 期의 平均實現値(average realization)에 비해 과소평가되거나 과대평가되는 결과로 나타나게 된다.

體系的 危險인 베타가 장기적으로 1에 回歸한다고 하는 Blume 등의 연구결과와 같이 예측기간의 베타와 측정기간의 베타의 평균치가 1에 가까운 값이면 偏倚部分(bias)은 세 가지 구성요소로 구성된 MSE의 적은 부분을 차지하게 되며 이는 豫測力이 높다는 의미가 된다.

그리고 이 偏倚要素는 危險等級(risk class)에 따른 體系的 危險 베타의 安定性과의 관련하에서 분석해 볼 필요가 있다. 베타의 크기에 따라 위험이 높은 등급(higher risk class), 중간 등급(middle class), 그리고 위험이 낮은 등급(lower risk class)으로 구분할 경우 위험이 높은 등급과 낮은 등급의 경우는 일반적으로 體系的 危險 베타가 不安定하며 MSE가 크게 나타나고, 위험이 중간인 등급은 베타가 비교적 安定的이며 MSE가 작게 나타나는 경우가 많으며, 이 때 偏倚部分은 兩極端의 위험등급의 경우가 중간 등급의 경우보다 더 큰 값을 가지게 된다. 이것은 개별주식이나 포오트폴리오의 베타가 1에로 回歸하는 경향이 있고 베타가 1주위의 값을 가질 경우 兩極端의 베타보다 더 정확하게 예측될 수 있음을 의미하는 것이다.

2) 非效率構成要素

$(1-b_i)^2S_{\beta t}^2$은 豫測誤差의 경향이 낮은 예측치에 대해서는 陽(+)의 값을 가지고, 높은 예측치에 대해서는 陰(−)의 값을 가지게 된다. 즉, 예측베타係數 $\hat{\beta}_{it}$에 대해서 실현베타係數 $\hat{\beta}_{it+1}$의 回歸線의 回歸係數 b_i가 1에 가까와 질수록 非效率構成要素는 작아지고 回歸係數 β_i가 1에서 먼 값을 가질 경우 非效率構成要素는 커지게 된다. 또한 推定期間의 개별주식이나 포오트폴리오의 베타係數의 分布가 모든 베타係數의 平均値에 접근되어 있으면 추정기간의 모든 횡단면베타(crosssectional beta)의 分散이 작아지게 되어 非效率部分은 작아지게 되며, 베타係數의 分布가 평균치에서 먼 값을 가질 때에는 횡단면베타의 分散이 커지게 되어 非效率要素가 증가하게 된다.

3) 確率誤差要素

確率誤差要素는 예측기간의 베타係數의 豫測値와 次期에 실현된 베타係數의 實現値와는 관련이 없는 예측오차를 구성한다.

Blume 등의 연구결과에서와 같이 포오트폴리오에 포함된 株式의 數를 증가시킴에 따라

베타係數의 安定性이 증가하며, 이 確率誤差要素도 감소하게 된다. 그리고 개별주식의 경우에는 豫測誤差의 구성요소의 대부분이 이 確率誤差이다. 그리하여 포오트폴리오의 構成株式數가 늘어남에 따라 MSE가 줄어드는데 偏倚部分이나 非效率部分은 크게 줄어들지 않지만 이 確率誤差는 크게 줄어들게 된다.

3. 豫測誤差의 調整方法

次期의 豫測베타로서 과거의 實現値로부터 추정된 事後베타를 조정하여 예측오차를 줄이고 베타예측의 正確度를 높히려는 시도가 여러 學者의 연구논문에서 이루어졌다.

Klemkosky와 Martin[19], Eubank, Zumalt[20] 등은 Blume, Vasciek, MLPFS 등이 제시한 代表的인 調整方法을 실증분석하여 이 技法의 有用性과 그 相對的인 有用性을 비교·연구하였고, 또한 Elton, Gruber 등도 여러 기법에 의한 次期 豫測베타의 예측의 정확도를 過去全型 模型(full historical model), 單一指數模型(single index model), 그리고 一定相關模型(constant correlation model)의 세 가지 그룹으로 나누어, 각 기법의 相對的인 有用性을 비교·검토하였다. 여기에서 單一指數模型(single index model)에 조정되지 않은 베타와 조정된 베타로서 Blume, Vasciek, MLPFS들이 제시한 세 가지 방법을 비교하여 연구하였다.

대표적인 세 가지 調整方法인 Blume의 方法과 Vasciek의 方法, 그리고 MLPFS의 방법을 검토해 보면 다음과 같다.

1) Blume의 調整方法

Blume은 개별증권이나 포오트폴리오의 體系的 危險 베타가 장기적으로 '1'에 회귀하는 경향이 있음을 발견하고, 다음期의 예측베타로서 事後베타를 調整하기 위해 이 베타의 회귀경향을 이용하여 조정하려고 시도하였다.

즉, 이것은 次期베타의 예측을 위해 前期의 베타와 그 다음 期의 베타와의 회귀경향을 이용하여 베타를 조정하는 방법이다. 그 베타의 調整節次를 기술하면 다음과 같다.

調整節次에 필요한 分析期間을 $t-1$期, t期, $t+1$期의 세 가지 非重複期間(nonoverlapping period)으로 나누고, 첫째로 $t-1$期의 베타들에 대하여 t期의 베타들을 單純回歸線으로 추정하여, $t-1$期와 t期 사이의 각 개별증권이나 포오트폴리오의 베타係數의 回歸傾向을 추정한다. 즉, 위의 回歸線에서 回歸係數 b_i와 回歸線의 절편 a를 구하면 다음과 같은 回歸式이 만들어진다.

---

(19) Klemkosky, Martin, *op. cit.*, pp. 1123~1128.
Eubank, Zumalt, *op. cit.*, pp. 761~776.

(20) Edwin J. Elton, Martin J. Gruber and Tomas J. Urich, "Are Beta Best", *Journal of Finance* Vol. 33, No. 5(December 1978), pp. 1375~1387.

$$\hat{\beta}_{it}=a+b\cdot\hat{\beta}_{it-1} \tag{28}$$

위의 回歸係數 a, b를 $t+1$期, 즉, 예측기간의 베타를 예측하는데 이용한다. 이 때는 각 증권이나 포오트폴리오가 $t+1$期와 t期 사이의 회귀경향이 t期와 $t-1$期 사이에서의 回歸傾向과 비슷하게 나타날 것이라는 점이 前提되어야 한다. 즉 次期의 豫測베타는 다음과 같다.

$$\hat{\beta}_{it+1}=a+b\cdot\hat{\beta}_{it} \tag{29}$$

2) Vasciek의 調整方法

Vasciek의 調整方法은 베타係數의 과거 實現値의 分布에 의한 Baysian 推定節次를 이용하여 次期의 예측베타를 예측하기 위해 베타係數를 조정하는 것이다.[21]

즉, 期待損失을 최소화하기 위해 과거베타係數의 橫斷面分布를 이용하는데, 次期 베타係數의 추정을 위해 前期의 最良의 推定値(the best prior estimator)인 횡단면 베타係數의 平均値($\bar{\beta}_t$)에 개별주식이나 포오트폴리오의 베타係數를 접근시켜 최소의 豫測誤差만 발생하도록 조정하는 방법이다.

調整베타는 다음과 같이 계산된다. 非重複期間인 t期와 $t+1$期로 구분하여 t期에서 $t+1$期의 豫測베타를 推定할 때

$$\hat{\beta}_{it+1}=\frac{\bar{\beta}/S^2{}_{\bar{\beta}t}+\hat{\beta}_{it}/S^2{}_{\beta t}}{1/S^2{}_{\bar{\beta}t}+1/S^2{}_{\beta t}} \tag{30}$$

$\hat{\beta}_{it+1}$: 개별주식 또는 포오트폴리오 i의 t期 베타分布의 平均値, 즉 次期 예측베타로서 Vasciek의 조정된 베타.

$\hat{\beta}_{it}$: 개별주식 또는 포오트폴리오 i의 t期 베타의 推定値

$\bar{\beta}_t$: t期 베타의 횡단면분포의 평균치 즉, $\sum\hat{\beta}_{it}/n$

$S^2\beta_t$: t期 횡단면 분포 베타의 分散 즉, $\sum(\hat{\beta}_{it}-\beta_{it})^2/n$

$S^2{}_{\beta t}$: t期의 베타 $\frac{\sum\hat{\beta}_{it}}{n}$의 推定値의 分散, 즉 $\hat{\beta}_{it}$의 표준오차

Vasciek의 調整方法은 〈式 30〉의 $1/S^2{}_{\bar{\beta}t}$과 $1/S^2{}_{\beta t}$의 比率에 따라 베타 係數를 조정하는 방법이다.

美國의 NYSE(New York Stock Exchange)의 경우 앞식에서 베타의 平均値 $\bar{\beta}_t$가 거의 1에 접근하고, 횡단면 베타의 分散 $S^2{}_{\bar{\beta}t}$는 0.5에 거의 접근하는 경향이 있었다. 이 때는 베타係數를 '1'에 線型的으로 접근시키게 된다. 이 경우에는 다음의 MLPFS의 베타係數 調整方法과 비슷한 결과를 가져오게 된다.

3) MLPFS(Merril, Lynch, Pierce, Fenner & Smith)調整方法

(21) Ordrich Vasciek, "A Note on Using Crosssectional Information in Baysian Estimation of Security Betas," *Journal of Finance* (December 1973), pp. 1233~1239.

이것은 Blume의 방법과 같이 前期의 非重複連續期間 사이의 事後베타係數(ex post betas)들 사이의 回歸傾向의 회귀계수를 이용하고, 베타係數를 '1'에 접근시켜 조정하는 방법이다.

$\hat{\beta}_{it}$를 t期의 事後베타라 할 때 次期의 調整豫測베타는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\hat{\beta}_{it+1}=1.0+k(\hat{\beta}_{it}-1.0) \tag{31}$$

여기서 k는 모든 株式에 동일한 常數이고, Blume의 조정방법에서와 같이 回歸係數로부터 推定된다. 그리고 $\hat{\beta}_{it+1}$은 이 방법에 의하여 조정된 예측베타이다.

Klemkosky와 Martin의 實證硏究에 의하면 Blume의 조정방법과 MLPFS의 調整方法은 거의 비슷한 結果를 가져오는 것으로 나타났다.