擴張된 平均-지니 模型에 關한 實證 硏究

朴 廷 寔*

《目 次》

Ⅰ. 序 論

1952년 Markowitz로부터 제시되어, 오늘날 포트폴리오 이론의 주류라 할 수 있는 CAPM의 초석이 된 平均-分散 模型(Mean-Variance model, MV 모형)은 실제 자료에 대한 분석이 용이하고, 이로부터 발전한 CAPM의 광범위한 이론적 뒷받침에 힘입어 현실적으로도 가장 널리 활용되는 분석 기법이 되고 있다. 그러나, 이 모형이 성립하기 위해서는 투자자의 효용함수가 2次函數이거나, 투자대상의 수익률의 확률분포가 正規分布(normal distribution)이어야 한다는 현실적으로 받아들이기 어려운 가정이 뒤따른다.

이와는 달리 確率的 支配 模型은 보다 일반적인 투자자의 효용함수에 대한 가정을 투자대상 수익률의 累積確率分布의 특성과 결부시킴으로써, MV 모형이 갖는 제한적인 가정으로부터 수반되는 문제점을 크게 완화시킨 모형이다. 즉, 확률적 지배모형은 다른 모형으로부터 나온 결과에 대하여 그 타당성 여부를 평가할 수 있는 일반 모형이라 할 수 있다. 그러나, 假定의 一般化는 결국 분석의 어려움으로 이어져 실제로 이를 투자 의사결정에 적용하기가 어렵다. 또한 확률적 지배 모형을 통하여 效率的 集合은 만들 수 있으나, 이로부터 최적 포트폴리오를 선택하거나 CAPM과 같은 자산 평가 모형으로 이어지는 알고리즘을 만들어 내지는 못하였다.

* 經營大學 敎授

본 논문에서 소개하고자 하는 Mean-Gini 모형은 확률적 지배모형이 갖는 理論的인 一般性을 유지하면서도 MV 모형이 갖는 분석의 편리성과 이론의 확장 가능성을 모두 충족시켜 줄 수 있는 우수한 포트폴리오 평가 모형이다. 이 모형에서는 투자 대상 수익률의 확률 분포가 어떠한가에 전혀 제약을 받지 않으면서도, MV 모형이 가지고 있는 대부분의 특성을 그대로 적용할 수 있음에 따라 旣存 CAPM의 특성을 모두 갖추고 있는 새로운 資產價格評價模型이 성립할 수 있다. 뿐만 아니라 Mean-Gini 모형의 확장 이론인 Extended Mean-Gini 모형은 투자자의 위험에 대한 가치판단을 하나의 변수로서 반영시켜, 투자의 목적물인 투자 대상에 대한 분석에 그치지 않고 투자의 주체인 투자자에 대한 특성 여부까지를 투자 분석에 반영시킨 모형이다.

本 論化은 첫째, Mean-Gini 모형의 槪念과 그 誘導 過程을 설명하고, Extended Mean-Gini 모형 및 이로부터 발전한 EMG-CAPM의 이론 체계를 정리하며, 둘째, Mean-Variance에 입각한 기존의 CAPM과 EMG-CAPM 가운데 어떤 방법이 현실을 보다 충실히 설명해 줄 수 있는가를 實證하는데 목적이 있다.

Ⅱ. 지니계수를 이용한 포트폴리오 評價 模型

1. 旣存 포트폴리오 評價 模型의 問題點

(1) 確率的 支配 模型

확률적 지배 모형(stochastic dominance model)은 투자자의 효용함수에 대한 일반적인 가정을 투자 대상 수익률의 누적확률분포의 특성과 결부시켜서, 이를 만족시키는 포트폴리오를 효율적인 투자 대상으로 구분하는 모형이다. 이때 확률 분포를 대표하는 몇개의 統計量에 기초하는 것이 아니라, 분포와 관련된 모든 정보를 활용하여 투자 대상들 사이의 선호관계를 결정하는 특성을 갖는다. 투자자가 위험 자산들로부터 效率的 集合을 선택하고자 할 때 필요한 基準(efficient criteria)을 제공함에 있어서, 확률적 지배 모형은 단지 효용함수에 대한 일반적인 가정만을 필요로 할 뿐 수익률의 확률분포가 어떤 형태로 나타나는가에 대해서는 아무런 제약도 필요로 하지 않는다. 이와같은 이유로 이 모형은 위험자산들의 수익률의 확률 분포는 알고 있으면서 투자자의 구체적인 효용함수의 형태를 파악할 수 없는 경우에 있어서도, 효용함수에 대한 일반적인 가정만 받아들일 수 있다면 그러한 투자자가 효율적이라고 생각하는 포트폴리오를 완벽하게 선택할 수 있다.

확률적 지배 모형은 투자자의 효용함수에 대한 가정에 따라 여러 段階의 모형으로 구분

된다. 모형의 次數가 높아질수록 가정은 강화되어지고 이에 따라 효율적 집합은 점차 줄어든다. 차수가 높아짐에 따라 축소된 효율적 집합은 이전 차수의 효율적 집합의 部分集合이 된다.

확률적 지배 모형은 효용함수의 구체적인 형태를 요구하지 않고 수익률의 확률분포에 대하여도 아무런 制約을 가하지 않으므로 매우 一般的이고 理論的으로도 타당한 이론이지만, 이를 실제로 적용하는데 있어서는 다음과 같은 問題點을 가지고 있다.

가. 확률적 지배 모형은 전체의 확률 분포를 이용하는 모형이나, 이를 실제로 사용하기 위해서는 標本 確率分布에 의존할 수밖에 없다. 이때, 관측된 표본의 분포가 전체 확률 분포의 특성을 충분히 반영하지 못한다면 이 모형은 의미를 상실한다.

나. 모든 모형이 그러하지만, 대부분의 표본확률분포는 過去의 수익률 자료로부터 얻게 된다. 이를 이용하여 未來의 투자의사결정을 하고자 할 때는 확률 분포의 時間的 安定性이 결여 된다.

다. 수익률 분포의 信賴性을 얻기 위해서는 가능한 한 많은 자료를 사용하는 것이 좋으나, 확률적 지배 모형의 경우는 여타의 다른 모형에 비해 계산 과정이 매우 길고 복잡하므로 자료를 처리하는데 큰 어려움이 따른다.

라. 확률적 지배 모형은 이론적으로 타당성 있는 효율적 집합을 보장하여 주지만, 구해진 효율적 집합으로부터 最適 포트폴리오를 선택한다거나, CAPM과 같은 價格 決定 理論을 제시하여 주지는 못한다.

(2) 平均-分散 模型

평균-분산 모형(mean-variance model, MV model)은 어떤 투자 성과를 요약할 수 있는 통계량을 사용함에 있어서, 가장 발생 확률이 높은 결과를 기술하는데 사용되는 位置 尺度로 平均을 사용하고 투자 성과들의 분산된 정도로부터 투자 대상의 위험을 기술하는데 사용되는 分布 尺度로 分散이란 개념을 사용하는 2母數 모형이다. 즉, 평균-분산 모형에서는 투자 대상의 확률분포를 정규확률분포의 모수인 期待收益率과 수익률의 分散만을 이용하여 정의할 수 있다고 가정하거나, 또는 투자자의 효용함수를 설명함에 있어서 역시 평균과 분산만으로 식의 변환이 가능한 2次 效用函數를 가정하여야만 이로부터 기대효용을 極大化시키는 最適포트폴리오를 구할 수 있는 것이다.

이처럼 수익률의 확률분포가 정규분포이거나 투자자의 효용함수가 2차 함수이어야한다는 기본 가정에서 비롯된 평균-분산 모형은 이들 가정이 현실성을 잃는다면 그 有用性을 상실하게 된다. 투자수익률의 正規性에 대하여 살펴보자. 대부분의 주식 투자자들은 자신들의

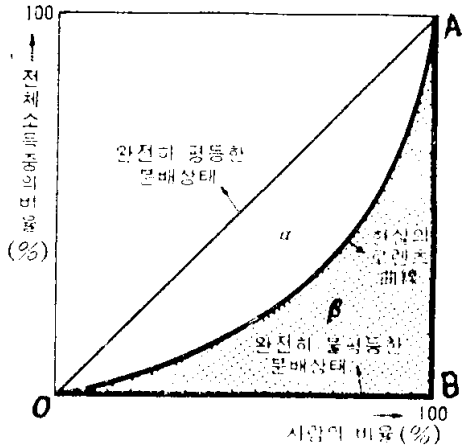
투자 금액 한도내에서 有限責任을 가지므로, 가장 큰 負의 수익률은 −100%이다. 이는 무한대의 負의 투자수익률도 가능한 정규분포의 가정과는 차이가 있다. Fama는 뉴욕증권거래소의 상장증권을 가지고 실증분석한 결과, 對稱分布를 이루기는 하지만 분산을 갖지 않는 經驗分布임을 실증하였으며, 이밖에도 많은 연구들이 정규성에 대하여 많은 의문을 제기하고 있다.[1]

투자자의 2차 효용함수에 대한 가정은 Pratt 등에 의해 제시된 減少하는 絕對 危險回避度(decreasing absolute risk aversion)의 특성을 만족시키지 못하며, 2차 효용함수의 특성상 적용이 가능한 적합 범위에 있어서 제약이 따른다. 이론적으로 타당성을 인정받고 있는 효용함수 모형으로는 3차 함수, 로그함수, 指數함수 등을 열거할 수 있다.[2]

2. 지니 平差(Gini's Mean Difference: GMD)

(1) 지니 係數와 지니 平差

여기에서는 위험을 측정하는 새로운 방법인 지니 平差(GMD)를 설명한다. GMD의 개념은 微視經濟學의 한 분야인 所得分配 理論 중에서 소득의 不平等度를 基數的으로 측정하려는 방법의 일환으로 정립되었다. 〈그림 2-1〉은 소득 정도에 따라 사회구성원을 차례로 배열한다고 할 때 그 累進比率에 따라 전체 소득 중에서 차지하는 점유 비율과의 관계를 나타내는 로렌츠 曲線(Lorenz curve)이다. 만일 完全한 平等 분배라면 그때의 로렌츠 곡선은 직선 OA이며, 極端的으로 모든 소득이 한 사람의 수중에 있다면 OBA가 로렌츠곡선이 된



〈그림 2-1〉 로렌츠 곡선

(1) Blume, M., "Portfolio Theory: A Step toward It's Practical Application", Journal of Business, Sep. 1970, pp. 561-575.

(2) Tehranian, H., "Empirical Studies Using Higher Degree of Stochastic Dominance," Journal of Finaace, 1980, pp. 420-456.

다. 序數的 평가 방법인 로렌츠 곡선은 서로 다른 價値判斷 기준을 만족시키는 보편 타당성을 갖고 있으나, 비교하려는 두 곡선이 교차하는 경우에는 비교할 수 없는 등의 현실 적용상의 문제점을 안고 있다.

지니 계수는 분배 상태를 基數的으로 평가함으로써 어떠한 분배 상태에서라도 비교를 가능하게 하는 불평등도 지수로서 식 (2-1)과 같이 정의된다.

$$G=\frac{\Delta}{2\mu}=\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\ ^{(3)} \tag{2-1}$$

식 2-1에서 μ는 平均 所得이며, Δ가 앞으로 논의될 지니平差(GMD)이다. Δ는 다음과 같이 정의된다.

$$\text{GMD}=\Delta=\iint |x-y|f(x)f(y)\,dx\,dy \tag{2-2}$$

즉, GMD는 가능한 모든 變量(모든 구성원의 소득)들을 순서를 고려하여 둘씩 짝지운 뒤, 이들의 差異의 절대값을 평균한 값이다. 식 2-2를 離散確率變數(discrete random variable)인 경우로 바꾸면 식 2-3과 같다.[4]

$$\Delta=\frac{1}{N(N-1)}\Sigma\Sigma|x_j-x_k|\quad (j\neq k) \tag{2-3-1}$$

$$\Delta=\frac{1}{N^2}\Sigma\Sigma|x_j-x_k|\quad (j\neq k) \tag{2-3-2}$$

Δ가 가질 수 있는 최대값은 $x_1=x_2=\ldots=x_{n-1}=0$이고 $x_n=n\mu$ 일 경우(즉, 극단적인 不均等 分配의 경우)이다. 이 때 식 2-3-1에서

$$\Sigma\Sigma|x_j-x_k|=2N(N-1)\mu$$

이므로 $\Delta=2\mu$이다. 따라서 식 2-1로부터

$$0\leq G\leq 1$$

이며, G의 값이 클수록 不平等한 분배를 의미함을 알 수 있다.

위험 척도로 널리 사용되고 있는 分散은 기대치라고 하는 하나의 기준치로부터의 분산 정도를 측정하는 반면, GMD는 어떠한 기준을 필요로 하는 것이 아니라 모든 변량 자체들 사이의 관계로부터 측정된다. 이러한 GMD의 기본 특성때문에 정규분포가 아닌 다른 어떠한 確率分布 하에서도 의미있는 분산 척도가 될 수 있다.

---

(3) Gastwirth, J.L., "The Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index", *The Review of Economics and statistics*, 1972, pp. 306-316.

(4) 이산확률변수인 경우 두 변량의 순서쌍을 어떻게 해석할 것인가에 따라서 위와 같은 두 가지의 경우가 가능하다. 이에 대해서는 Kendall and Stuart, "The Advanced Theory of Statistics", Vol. 1, 4th Ed. *Griffin* (London), 1977, p. 47. 참조.

(2) 不確實性下의 投資 決定 模型으로서의 지니 平差(GMD)

사무엘슨은 위험 자산에 대한 投資 決定과 벤자민 社會厚生 函數를 극대화하는 개인들 사이의 均等分配 문제는 동일하다는 것을 보인 바 있고,[5] 앳킨슨은 확률적 지배 모형에 따르는 의사 결정 규칙은 그대로 所得不平等度를 측정하는 로렌츠 곡선으로 적용할 수 있음을 증명하였다.[6] 이러한 노력에 힘입어, 소득 불평등도를 측정하기 위한 개념으로부터 출발한 GMD는 불확실성하의 의사 결정 모형의 일환으로 그 자리를 잡아 갔다.

GMD는 식 2-2와 같이 定義되나, 계산상의 어려움이 크다. 따라서, 투자의사결정 모형 내에서 다루기 편리하도록 다음과 같이 새로운 정의를 한다.

(假定) R과 r은 주어진 수익률 확률분포내에서 실현 가능한 모든 순서쌍을 의미하며, $a \geq -\infty$, $b \leq \infty$이고, 누적확률분포가 $F(a)=0$, $F(b)=1$인 a, b가 존재한다.

$$\text{(定義) GMD}=\Gamma=1/2\int_a^b \int_a^b |R-r| \; f(r)f(R)\,dr \cdot dR \tag{2-4}$$

식 2-4는 애초의 지니평차에 1/2를 곱한 것인데, 이는 식 2-4를 다음과 같이 有意味한 식으로 변환하기 위해서이다.

$$\Gamma=\int_a^b [1-F(R)]dR-\int_a^b [1-F(R)]^2 dR$$

$$=\mu-a-\int_a^b [1-F(R)]^2 \; dR \tag{2-5}$$

식 2-5는 특히 앞으로 나올 MG기준과 SD 기준과의 관계를 규명하고자 할 때 유용하게 사용된다.[7] 또한 GMD는 포트폴리오의 분석에도 유용한데, 이때에는 다음과 같이 변형된 관계식이 사용된다.[8]

$$\Gamma=2\int_a^b R[F(R)-1/2]f(R) \; dR \tag{2-6}$$

식 2-6을 보면, Γ는 변수 R과 $F(R)$과의 共分散을 2배한 것임을 알 수 있다.

Γ는 다음과 같은 성질을 갖는다.[9]

가. Γ는 항상 非陰이며, 식 2-5로부터 $\mu-a$의 臨界値를 갖는다. 이때 만일 R이 상수이

(5) Samuelson, P.A., "General Proof that Diversification Pays." *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 2(March 1967), pp. 580-84.

(6) Atkinson, A.B., "On the Measurement of Inequality." *Journal of Economic Theory* 2(Sep. 1970), pp. 244-63.

(7) Dorfman, R., "A Formular for the Gini Coefficient." *Review of Economics and Statistics* 61(Feb. 1979), pp. 146-9.

(8) Kendall and Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, Vol. 1, 4th Ed. London: Griffin, 1977, p. 54 (ex. 2.9)

(9) Yitzhaki, S. and Shalit, H., "Mean-Gini, Portfolio Theory, and Pricing of Risky Assets." *The Journal of Finance* Vol. 39, No. 5(Dec. 1984), p. 1452.

면 $\Gamma=0$이 된다. 즉,

$$0\leq\Gamma\leq\mu-a$$

나. $R_2=aR_1$ (a는 상수)라고 할 때, $\Gamma_2=|a|\Gamma_1$이다.

다. $R_2=R_1+c$ (c는 상수)라고 할 때, $\Gamma_2=\Gamma_1$이다.

라. $R_3=R_1+R_2$ 라고 할 때 $\Gamma_3\leq\Gamma_1+\Gamma_2$이다.

위의 특성들은 標準偏差의 그것과 매우 유사하다. 앞으로 살펴볼 Mean-Gini모형이 기존의 Mean-Variance 모형으로부터 제시, 발전된 이론체계를 모두 소화할 수 있음은 이로부터 비롯된 것이다.

3. 平均-지니 模型(Mean-Gini model: MG model)

앞에서는 확률적 지배 모형(SD모형)과 평균-분산 모형(MV모형)을 설명하고 그 長短點을 살펴보았다. 여기서는 2母數 모형인 MV모형이 갖는 적용상의 편리함을 가지면서, 동시에 이론적으로 우수한 SD모형의 효율적 집합을 보장해 주는 새로운 평가 모형인 평균-지니 모형(MG model)을 소개한다.

(1) MG 模型의 槪念 및 有用性

MG 모형이란 위치척도인 기대수익률과 더불어 앞에서 설명한 GMD(Γ)를 위험척도로 사용하는 2모수 평가모형이다. 즉, 다음의 $M\Gamma$기준을 통하여 效率的인 포트폴리오 集合을 선택하는 것이다.

$M\Gamma$ 基準 : 임의의 두 확률분포 F, G가 있을때

$\mu_F\geq\mu_G$이고, $\Gamma_F\leq\Gamma_G$이면(단, 적어도 하나의 强不等式이 성립하여야 함) F는 G를 지배한다.

MG 모형이 갖는 가장 큰 長點은 두자 대안을 평가함에 있어서 어떠한 확률분포에서도 (즉, MV 모형이 평가에 실패한 경우라도) 의미있는 평가가 이루어 질 수 있다는데 있다. MG 모형과 SD 모형 사이에 성립하는 다음의 명제들로부터 이를 확인하여 본다.

命題 1: 임의의 두 확률분포 F, G가 있을 때, MG기준을 다음과 같이 정의하자.

MG기준 : $\mu_F\geq\mu_G$이고 $\mu_F-\Gamma_F\geq\mu_G-\Gamma_G$

이때, MG 기준은 2차 확률적 지배기준에 의해 F가 G를 지배하기 위한 必要 條件이다.[10]

命題 2: $F(R)$과 $G(R)$이 많아야 1번 교차라는 累積確率分布라고 하면, $M\Gamma$기준은 FD_2G

(10) 이에 대한 증명은 Yitzhaki, S. "Stochastic Dominance, Mean Variance, and Gini's Mean Difference." *American Economic Review* 60(June 1970), pp. 457-59를 참조.

가 되기 위한 充分 條件이 된다.[11]

예컨대 정규분포, 로그노말분포, 一樣분포(uniform distribution), 指數분포, 감마분포 등의 확률분포가 이에 해당되며, 이 경우 $M\Gamma$ 기준은 FD_2G 조건과 정확히 일치한다.

이상의 논의로부터 여러 가지 평가 모형의 효율적 집합들 사이의 관계를 다음과 같이 정리할 수 있다. $S(i)$를 어떤 기준 i에 따른 效率的 集合(efficient set)이라고 정의하자. 즉, $S(\mathrm{MV})$, $S(\mathrm{SD})$, $S(\mathrm{M}\Gamma)$, $S(\mathrm{MG})$는 각각 MV, SD, $\mathrm{M}\Gamma$, MG 기준에 따른 효율적 집합을 나타낸다.

가. 正規確率分布를 가정할 경우, 이들 사이에는 다음 관계가 성립한다.

$$S(\mathrm{MV})=S(\mathrm{SD})=S(\mathrm{M}\Gamma)\supseteq S(\mathrm{MG})$$

나. 명제 1 및 명제 2로부터 정규분포, 로그노말분포, 지수분포, 일양분포, 감마분포 등 많아야 1회 교차하는 누적확률분포를 갖는 경우에는 다음 관계가 성립한다.

$$S(\mathrm{SD})=S(\mathrm{M}\Gamma)\supseteq S(\mathrm{MG})$$

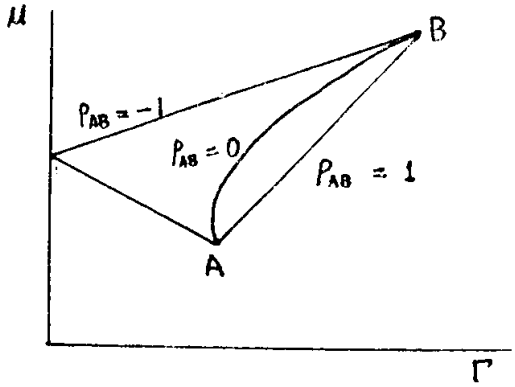
다. 명제 1은 어떠한 분포하에서도 다음 관계를 보장해 준다.

$$S(\mathrm{SD})\supseteq S(\mathrm{MG})$$

즉, MG기준은 어떠한 분포하에서라도 危險을 回避하는 투자자들의 효율적 집합을 보장해 주는 유용한 포트폴리오 평가기준이다.

(2) 포트폴리오 分析 模型[12]

Ⅱ-2에서 MG 모형과 MV 모형의 類似點을 언급한 바 있다. 〈그림 2-2〉는 기대수익률과 GMD를 양 축으로 하여 포트폴리오의 성과를 측정한 그림이다. MG 모형에서도 MV 모형의 경우와 마찬가지로 투자안 A, B 사이의 相關關係에 따라서 각각 〈그림 2-2〉와 같은 포트



〈그림 2-2〉 MG 평면에서의 포트폴리오 結合

(11) 이에 대한 증명은 Ibid., pp. 179-180. 참조.
(12) Yitzhaki, S. and Shalit, H., op. cit., pp. 1455-56.

폴리오 結合을 나타내게 된다.

이제 보다 구체적으로 MV와 MG와의 관계를 살펴 보자. MV 모형에서 어떤 포트폴리오의 수익률의 分散은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\sigma_p^2=\Sigma\omega_i \mathrm{COV}(R_i,\ R_p) \tag{2-7}$$

ω_i : 資産 i에의 投資 比率($\Sigma\omega_i=1$)

식 2-6으로부터 GMD 또한 위의 식과 유사한 형태로 나타낼 수 있다.

$$\Gamma_p=2\int R[F_p(R)-1/2]dF_p(R)$$

$$=2\ \mathrm{COV}[R_p,\ F_p(R_p)] \tag{2-8}$$

이때, $R_p=\Sigma\omega_i R_i$ 이므로

$$\Gamma_p=2\ \Sigma\omega_i\ \mathrm{COV}[R_i,\ F_p(R_p)] \tag{2-9}$$

가 된다. 즉, σ_p^2은 개별 자산의 수익률 R_i와 포트폴리오의 수익률 R_p와의 共分散을, Γ_p는 개별 자산의 수익률 R_i와 포트폴리오의 누적확률분포 $F_p(R_p)$와의 共分散을 投資 比率에 따라 加重平均한 값임을 알 수 있다. 그리고, 식 2-9를 개별 자산의 GMD인 $\Gamma_i=2\ \mathrm{COV}[R_i,\ F_i(R_i)]$로 나누면, 다음과 같은 관계식을 얻을 수 있다.

$$\Gamma_p=\Sigma\omega_i\theta_i\Gamma_i$$

$$\theta_i=\frac{\mathrm{COV}[R_i,\ F_p(R_p)]}{\mathrm{COV}[R_i,\ F_i(R_i)]} \tag{2-10}$$

식 2-10의 의미에 대해서는 이후에 서술하기로 한다.

(3) MG를 利用한 CAPM

MG 모형의 유용성은 기준의 MV-CAPM과 유사한 資産價格決定 模型을 MG 모형으로부터 유도할 수 있음으로 해서 더욱 크다. 우선, MV-CAPM의 가정과 모형을 간략하게 정리하기로 한다.[13]

假定 :

① 투자자들은 危險回避型이고 期待 效用을 極大化하려 한다.

② 투자자들은 예상 수익의 平均과 分散에 기초하여 포트폴리오를 선택한다.

③ 모든 투자자들의 투자 기간은 1기간으로 동일하다.

④ 無危險 利子率로, 아무런 제한 없이 借入 또는 貸出할 수 있다.

⑤ 투자자들의 수익률의 確率分布에 대해 同一한 期待를 한다.

⑥ 세금이 존재하지 않고 거래 비용과 같은 제도적인 장애요인이 없다.

(13) Yitzhaki, S. and Shalit, H., op. cit., pp. 1457-60.

模型 :

$$\mu_i = r_f + [\mu_m - r_f] \frac{\mathrm{COV}(R_i,\ R_m)}{\sigma_m^2} \tag{2-11}$$

MG-CAPM은 기존의 MV-CAPM의 假定을 그대로 따르나, 다만 여기서는 MV 효율적 포트폴리오가 아닌, SD기준에 따른 효율적 집합에 속하는 市場 포트폴리오를 MG기준에 의해 도출하고자 하는 것이다. 그러기 위해서는 투자자의 행동에 대해서 다음과 같은 추가 가정을 필요로 한다.

追加 假定 : (위의 가정에서 ②번 제외됨)

① 투자자들은 주어진 期待收益率에 대하여 GMD에 의해 측정한 分散 정도를 최소화함으로써 자신들의 期待效用을 極大化한다.

② 가정 ①에서부터 얻은 效率的 集合 $S(M\Gamma)$에 앞서 설명한 바 있는 명제 1의 MG 기준을 적용시킴으로써 $S(\mathrm{SD})$의 部分集合인 $S(\mathrm{MG})$를 결정한다.

③ 투자자들은 주어진 기대수익률에 대하여 GMD를 최소화할 수 있는 주식들의 결합을 통해 最適 포트폴리오를 選擇한다.

模型의 導出 :

투자자 j의 포트폴리오의 수익률은

$$R_j = \Sigma\omega_{ij} R_i + (1 - \Sigma\omega_{ij}) r_f \tag{2-12}$$

이다. 따라서 투자자 j의 意思決定 模型은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} &\mathrm{Min}\ \Gamma_j = 2\ \mathrm{COV}[R_j,\ F_j(R_j)] = 2\ \Sigma\omega_{ij}\mathrm{COV}[R_j, F_j(R_j)] \\ &\mathrm{s.t.}\ \ \mu_j = \Sigma\omega_{ij}\mu_i + (1 - \omega_{ij}) r_f \end{aligned} \tag{2-13}$$

라그랑지 乘數 λ_i를 이용하여 식 2-13의 1系 最適化 條作을 구하면 다음과 같다.

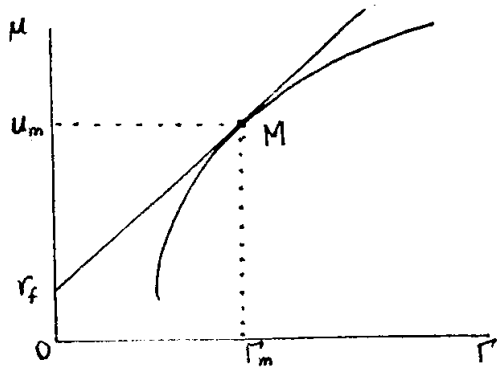
$$\begin{aligned} &2\ \mathrm{COV}[R_i,\ F_j(R_j)] + 2\sum_{k=1}^{n} \omega_{kj} \frac{\partial \mathrm{COV}[R_k,\ F_j(R_j)]}{\partial\ \omega_i} = \lambda_j(\mu_i - r_f) \\ &\qquad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n) \\ &\mu_j = \Sigma\omega_{ij}\mu_i + (1 - \Sigma\omega_{ij}) r_f \end{aligned} \tag{2-14}$$

위의 식 2-14에 ω_{ij}를 곱하고 이를 모든 주식에 대하여 더하면

$$\begin{aligned} \Gamma_j &= \lambda_j\ \Sigma\omega_{ij}(\mu_i - r_f) \\ &= \lambda_j\ [\Sigma\omega_{ij}\mu_i + (1 - \Sigma\omega_{ij}) r_f - r_f] \\ &= \lambda_j\ [\mu_j - r_f] \end{aligned} \tag{2-15}$$

따라서

$$\mu_j = r_f + (1/\lambda_j)\Gamma_j \tag{2-16}$$



〈그림 2-3〉 **MG-CAPM**

를 얻을 수 있다. 식 2-16은 개별 투자자 i에 있어서 期待收益率 (μ_j)과 危險(Γ_j) 사이에 〈그림 2-3〉과 같은 線型 關係가 있음을 나타낸다. 이제 투자자들은 수익률의 확률분포에 대하여 同一한 期待를 한다는 가정을 하면 식 2-16은 모든 투자자들에게 있어서 동일한 관계식이 된다. 따라서, 그림의 M은 투자자들이 위험자산에만 투자를 할 경우 선택하는 시장포트폴리오가 되며 이때의 危險 單位當 價格은

$$1/\lambda=(\mu_m-r_f)/\Gamma_m \tag{2-17}$$

이 된다. 또한, 투자자 j의 $F_j(R_j)$는 무위험 자산의 존재 여부와 상관없이 모든 투자자들에게 있어서 $F_m(R_m)$이므로 투자자 j가 보유하려는 포트폴리오의 GMD는 Γ_m과 같다. 따라서 식 2-14로부터

$$2\sum_{k=1}^{n}\omega_{kj}\frac{\partial\ \mathrm{COV}[R_k,\ F_m(R_m)]}{\partial\ \omega_i}=0 \tag{2-18}$$

이고 식 2-14, 2-17로부터

$$\mu_i=r_f+(\mu_m-r_f)\cdot 2\mathrm{COV}[R_i,\ F_m(R_m)]/\Gamma_m \tag{2-19}$$

라는 均衡方程式을 도출할 수 있다. 이제 식 2-19를 보다 구체적인 體系的 危險과 期待收益率의 관계식으로 유도하려면 식 2-10을 사용한다. 즉,

$$\theta_{im}=\frac{\mathrm{COV}[R_i,\ F_m(R_m)]}{\mathrm{COV}[R_i,\ F_i(R_i)]},\quad \Gamma_i=2\mathrm{COV}[R_i,\ F_i(R_i)]$$

이므로 식 2-19는

$$\mu_i=r_f+(\mu_m-r_f)\cdot\theta_{im}(\Gamma_i/\Gamma_m) \tag{2-20}$$

이다. 이때, θ_{im}은 일종의 相關係數로서, 기대수익률의 변화없이는 市場與件에 의해서 줄일

수 없는 위험과 Γ_i로 표시되는 總危險과의 比率을 의미한다.[14] MV-CAPM에서의 β_i가

$$\beta_i = \rho_{im}(\sigma_i/\sigma_m) \tag{2-21}$$

로 표시되는 것을 상기한다면, 식 2-20의 우변항에 포함되어 있는

$$\beta_i = \theta_{im}(\Gamma_i/\Gamma_m) \tag{2-22}$$

역시 危險 資産 i의 收益率의 市場 變化에 대한 敏感度로 해석할 수 있다.

MG-CAPM의 β는 確率的 支配基準에 따라 效率的인 證券市場이라는 맥락에서 이해되어야 하므로 MV-CAPM의 β와는 일반적으로 다른 개념이다. 그러나, 앞서 논의되었던 MG 및 MV 기준에 따른 효율적 집합이 그러했듯이 만일 정규확률분포하에서라면 식 2-21과 식 2-22의 β_i는 동일한 의미를 갖게 된다. 왜냐하면, 正規分布인 경우 σ_i와 Γ_i 사이에는

$$\Gamma_i = \sigma_i/\Pi^{1/2} \tag{2-23}$$

이라는 관계가 성립하기 때문이다.[15]

4. 확장된 평균-지니 모형(Extended Mean-Gini model)

1970년도 앳킨슨은 그의 논문에서 所得不平等度를 측정하는 새로운 지수를 발표하였다.[16] 이른바 앳킨슨 指數(Atkinson index)라는 것인데, 價値判斷(value judgement)이란 주관적 요인을 객관적인 파라미터(ε)화하여 개개인마다 서로 다른 가치하에서 소득의 불평등도를 측정할 수 있도록 한 것이다. Kakwani(1980), Donaldson(1980), Weymark(1981) 등은 지니계수에 가치 판단이 가미된 새로운 모형을 제시하였으며,[17] Yitzhaki(1982)는 確率的 支配 模型과의 관련성하에 기존의 MG모형에 투자자의 위험에 대한 가치 척도를 반영시킨 擴張된 平均-지니 模型(extended Mean-Gini model: EMG)을 발표하였다.[18] 본 절에서는 EMG 모형의 개념 및 EMG-CAPM의 도출 과정을 살펴 보고자 한다.

(1) 확장된 평균-지니 모형(EMG model)

기존의 CAPM에서는 어떤 투자대상의 확률분포에 대하여 모든 투자자들은 동일한 기대

(14) Schechtman, E. and Yitzhaki, S. "A Measure of Association Based on Gini's Mean Difference." Mimeo, Department of Agricultural Economics, The Hebrew Universicy, Feb. 1984.

(15) Nair, U.S., "The Standard Error of Gini's Mean Difference." *Biometrika* 38(1936), pp. 428-36.

(16) Atkinson, A.B., "On the Measurement of Ineqwuality," *Journal of Economic Theory*, 2(Sep. 1970), pp. 244-63.

(17) Kakwani, N.C., "Application of Lorenz Curves in Eomnomic Analysis." *Journal of Public Economics*, 5(1976), pp. 161-68.
Donaldson, D. and Weymark, J., "Ethically Flexible Gini Indices for Distribution in the Continuum," Discussion Paper, No. 8020, CORE, (Revised March 1981).

(18) Yitzhaki, S. "Stochastic Dominance, Mean Variance, and Gini's Mean Difference," *American Economic Review* 72(March 1982), pp. 178-85.

를 가진다는 가정하에서 모든 투자자들이 분산이란 척도를 통하여 투자대상의 위험을 동일하게 인식하였다. 그러나, EMG 모형에서는 식 2-24에서 보는 바와 같이 자신들이 인식하는 위험에 대한 회피 정도(식에서의 v값)에 따라서 투자자들마다 서로 다른 위험 척도를 가질 수 있다. 확장된 지니平差(extended GMD: $\Gamma(v)$)는 식 2-24와 같이 위험에 대한 선호도 지수(v)를 포함하는, 기존 지니평차의 확장 모형이라 할 수 있다.[19]

$$\Gamma(v)=\int_a^b[1-F(R)]dR-\int_a^b[1-F(R)]^v\,dR$$
$$=\mu-a-\int_a^b[1-F(R)]^v\,dR \qquad (2\text{-}24)$$

$\Gamma(v)$는 기존의 Γ와 유사한 다음과 같은 특성을 갖는다.

1. $\Gamma(v)$는 非陰 非減少 函數이며, $\mu-a$의 上限값을 갖는다.
2. 陽의 정수값 v에 대해서
   $\Gamma(v)=\mu-E[\min(R_1, R_2, \cdots, R_v)]$ 이다.
3. $R_2=aR_1$이라고 할 때, $\Gamma_2(v)=|a|\ \Gamma_1(v)$ 이다.
4. $R_2=R_1+c$라고 할때, $\Gamma_2(v)=\Gamma_1(v)$ 이다.
5. $\mu_1-\Gamma_1(v)=\mu_2-\Gamma_2(v)\geq 0$은 R_1이 R_2를 제1, 2차 확률적 지배를 하기 위한 心要 條件이다. (Ⅱ.3. 명제 1)
6. 많아야 1번 교차하는 누적확률분포를 갖는 R_1, R_2에 대해서
   $[\mu_1-\Gamma_1(v)]-[\mu_2-\Gamma_2(v)]\geq 0$(for all $v\geq 1$)은 R_1이 R_2를 제 2 차 확률적 지배를 하기 위한 充分 條件이다. (Ⅱ.3. 명제 2)

$\Gamma(v)$의 속성을 알아 보기 위하여, 식 2-24를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Gamma(v)=-v\cdot\mathrm{COV}\{R,\ [1-F(R)]^{v-1}\} \qquad (2\text{-}25)$$

식 2-25를 보면, v가 커짐에 따라서 수익률의 실현 결과가 좋지 않은 경우($1-F(R)$이 큰 경우)에 대해 더욱 큰 加重이 부여되고 있다. 즉, 보다 큰 v값을 설정함으로써 위험을 보다 더 싫어하는 투자자들의 심리 상태를 위험척도인 $\Gamma(v)$를 통하여 모형 내에 반영시킬 수 있는 것이다.

v의 개념은 식 2-24로부터도 찾을 수 있다. 식 2-24에서

$$\mu-\Gamma(v)=a+\int_b^b[1-F(R)]^v dR \qquad (2\text{-}26)$$

이므로, v의 값에 따라서

$v=1$ 일때 ; $\mu-\Gamma(1)=u$

(19) Yitzhaki, S. and Shalit, H. (1984), op. cit., p. 1461.

$v=2$ 일때 ; $\mu-\Gamma(2)=\mu-\Gamma$

$v=\infty$일때 ; $\mu-\Gamma(\infty)=a$

가 된다. $\Gamma(v)$는 여러가지 v값에 따라서 기대수익률 μ로부터 차감되어지는 危險 프리미엄이라 할 수 있다. 여기서 $v=1$인 경우는 위험 프리미엄인 $\Gamma(v)$가 0이므로 危險 中立의 경우이며, $v=2$인 경우는 $\Gamma(v)=\Gamma$이므로 확장되기 이전의 평균-지니모형의 경우를 나타낸다. $v=\infty$는 위험을 극도로 싫어하여 기대수익률로부터 위험프리미엄을 차감한 값이 모형의 최소 수익률인 a가 되는 위험 회피자의 경우이다. 또한, $0\leq v\leq 1$은 반대로 위험을 選好하는 경우로 해석할 수 있다.

확장된 지니평차를 포트폴리오에 적용시키면, 기존의 지니평차와 유사한 식 2-27를 얻을 수 있다.

$$\Gamma_p(v)=-v\cdot\Sigma\omega_i\ \mathrm{COV}\{R_i,[1-F_p(R_p)]^{v-1}\} \tag{2-27}$$

證明 : 식 2-24로부터

$$\Gamma_p(v)=\mu_p-a-\int_a^b[1-F_p(R)]^v dR \tag{2-24}$$

이다. 여기서

$$V=[1-F(R)]^v\ ;\ \frac{\partial V}{\partial R}=-v[1-F(R)]^{v-1}f(R)$$

$$U=R\qquad ;\ \frac{\partial U}{\partial R}=1$$

이며, 部分積分法을 적용하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\Gamma_p(v)=\mu_p-v\cdot\int[1-F_p(R)]^{v-1}R\cdot f_p(R)dR$$

그런데,

$$\int[1-F_p(R)]^{v-1}f_p(R)dR=-[1-F_p(R)]^v/v|_a^b=1/v$$

이므로

$$\Gamma_p(v)=\mu_p-v\cdot\int\{[-F_p(R)]^{v-1}-1/v\}R\cdot f_p(R)dR-\int R\cdot f_p(R)dR$$

$$=-v\cdot\int\{[1-F_p(R)]^{v-1}-1/v\}R\cdot f_p(R)dR$$

$$=-v\cdot\mathrm{COV}\{R_p,[1-F_p(R)]^{v-1}\}$$

이다. 여기서, $R_p=\Sigma\omega_i R_i$ 이므로

$$\Gamma_p(v)=-v\cdot\Sigma\omega_i\cdot\mathrm{COV}\{R_i,[1-F_p(R)]^{v-1}\} \tag{2-27}$$

가 성립한다. (증명 끝)

(2) EMG 모형을 이용한 CAPM

이제 $\Gamma(v)$를 이용하여 EMG-CAPM을 도출하기로 한다. 투자자 j의 포트폴리오에 대한 EMG를 식 2-28로 표시하자.

$$\Gamma_j(v) = -v \cdot \Sigma \omega_{ij} \ \mathrm{COV}\{[1-F_j(R_j)]^{v-1}, \ R_i\} \tag{2-28}$$

Ⅱ-3에서 MG-CAPM을 도출할 때와 같은 단계를 거치면 다음 관계식이 성립한다.

$$-v \cdot \mathrm{COV}\{[1-F_j(R_j)]^{v-1}, \ R_i\} = \lambda_j(\mu_i - r_f)$$

$$1/\lambda_j = (\mu_m - r_f)/\Gamma_m(v)$$

그리고, 市場均衡 關係가 다음과 같이 성립한다.

$$\mu_i = r_f - [(\mu_m - r_f)/\Gamma_m(v)] \cdot v \tag{2-29}$$

$$\Gamma^m(v) = \mathrm{COV}\{[1-F_m(R_m)]^{v-1}, \ R_i\}$$

또한,

$$\theta_{im}(v) = \frac{\mathrm{COV}\{1-F_m(R_m)^{v-1}, \ R_i\}}{\mathrm{COV}\{[1-F_i(R_i)^{v-1}, \ R_i\}}$$

이므로,

$$\mu_i = r_f + (\mu_m - r_f)\beta_i(v)$$

$$\beta_i(v) = \theta_{im}(v) \cdot \frac{\Gamma_i(v)}{\Gamma_m(v)} = \frac{\mathrm{COV}\{R_i, \ [1-F(R_m)]^{v-1}\}}{\mathrm{COV}\{R_m, \ [1-F(R_m)]^{v-1}\}} \tag{2-30}$$

가 성립한다.

지금까지 EMG 모형을 이용한 證券市場線의 도출 과정을 설명하였다. EMG-CAPM에 따르면, 기존 CAPM에서와 같이 一括的으로 모든 투자자가 동일한 기대를 하는 것이 아니라 위험에 대한 回避정도(v값)에 따라서 여러 종류의 同質的 投資者 群을 형성할 수가 있다. 이는 곧 v값에 따라서 서로 다른 증권시장선이 도출될 수 있음을 의미하며, 이러한 증권시장선(식 2-38)을 통하여 요구되는 기대수익률 또한 달라질 수 있는 것이다.

위험에 대한 개개인의 특성에 따라서 자신이 요구하는 기대수익률이 다를 수 있다는 내용은 매우 중요한 의미를 갖는다. 이전의 평균-분산에 의한 CAPM에서는 하나의 증권시장에는 단 하나의 증권시장선만이 존재하므로 어떤 개별 자산의 가격은 시장 전체에서 동일한 증권시장선을 통해 결정되는 균형 가격이었으며, 이로부터 차이가 나는 경우 투자자들은 모두가 동일한 방향으로의 재정거래를 통해서 균형 자산가격을 이룰 수 있었다. 그러나, 하나의 증권 시장 내에 위험 특성에 따라서 서로 다른 증권시장선의 존재가 가능하다면 이때의 균형가격이란 개념은 기존의 CAPM과는 그 성격을 달리하게 된다.

Ⅲ. 實證 分析

1. 分析의 內容 및 方法

본 논문에서 實證하고자 하는 바는 다음과 같다.

첫째, EMG-CAPM을 적용함에 있어서 필수적이라 할 수 있는 危險回避度(v)의 시장 상황에 따른 변화 여부를 관찰함으로써 투자자의 心理 狀態가 반영된 새로운 SML의 활용 가능성을 제시하고자 한다.

둘째, MV-CAPM과 EMG-CAPM 가운데 어떤 방법이 현실을 보다 잘 설명해 줄 수 있는가를 양 방법에 의해 도출된 SML의 R^2값을 통해 살펴 본다.

(1) 資料의 選定

본 논문의 개별 주가 자료로는 한국 증권시장 초유의 활황장세가 지속되어 온 84/1부터 89/12까지의 月別 收益率 자료를 사용하였다. 특히 모형의 설명력을 높히고자 87/7을 기준으로 時價 總額 合計가 전체 시장의 시가 총액 합계의 약 70%를 차지하는 Index fund를 구성하였다.[20] 이들의 월별 수익률 자료로는 신평-KAIST 수익률 자료 체계(ver 2.1)를 이용하였다.

(2) 分析 節次

모형의 설명력 검증을 위한 구체적인 절차는 다음과 같다.

가. 84~89년의 Index fund의 월별 자료를 84~85, 85~86, 86~87, 87~88, 88~89로 24개월씩 나누어 각각 다음과 같은 방법으로 분석을 시행하였다.

나. 개별 주식의 체계적 위험 β를 계산하였다. MV-CAPM 및 EMG-CAPM에서의 β는 앞서 설명한 대로 다음과 같은 공식에 따라 계산하였다.

$$\text{MV-CAPM}: \beta_i = \frac{\text{COV}(r_i,\ r_m)}{\text{Var}(r_m)} \tag{3-1}$$

$$\text{EMG-CAPM}: \beta(v)_i = \frac{\text{COV}\{r_i,\ [1-F(r_m)]^{v-1}\}}{\text{COV}\{r_m,\ [1-F(r_m)^{v-1}]\}} \tag{3-2}$$

다. 위험회피도(v)의 분석 범위는 위의 공식에서 보는 바와 같이 누적 확률 분포에 대한 지수 함수임을 감안하여 편의상 〈그림 3-1〉에서와 같은 17개의 수치만을 사용하였다.

라. 개별 주식의 β측정상의 오차를 줄이기 위하여 모든 주식들의 β크기 순서대로 나열한 뒤 상위 10%에 속하는 주식들을 하나의 포트폴리오로 묶고, 다음 10%를 또 하나의 포

(20) 조성수, "인덱스 펀드에 관한 실증 연구", 1990, 서울대학교 석사 학위 논문.

트폴리오로 하여 차례로 10개의 포트폴리오를 구성하였다.

마. 실제 수익률과 β의 회귀 분석은 이들 10개의 포트폴리오를 가지고 다음과 같은 회귀식을 사용하였다.

$$\text{MV-CAPM}: r_i = \gamma_0 + \gamma_1 \beta_i + \mu_i \quad (3\text{-}3)$$

$$\text{EMG-CAPM}: r_i = \gamma_0 + \gamma_1 \beta(v)_i + \mu_i \quad (3\text{-}4)$$

실제 회귀분석을 하여 본 결과 84~85년의 경우는 R^2 값이 10%를 밑돌아 분석에서 제외하였다. 이러한 이유는 분석 대상 자료를 87년을 기준으로 한 Index fund로 잡았기 때문이다. 대체적인 R^2 값을 보더라도 87~88년을 정점으로 하여 그 기간이 떨어져 있을수록 그 값도 떨어지고 있음을 볼 수 있다.

2. 분석 결과

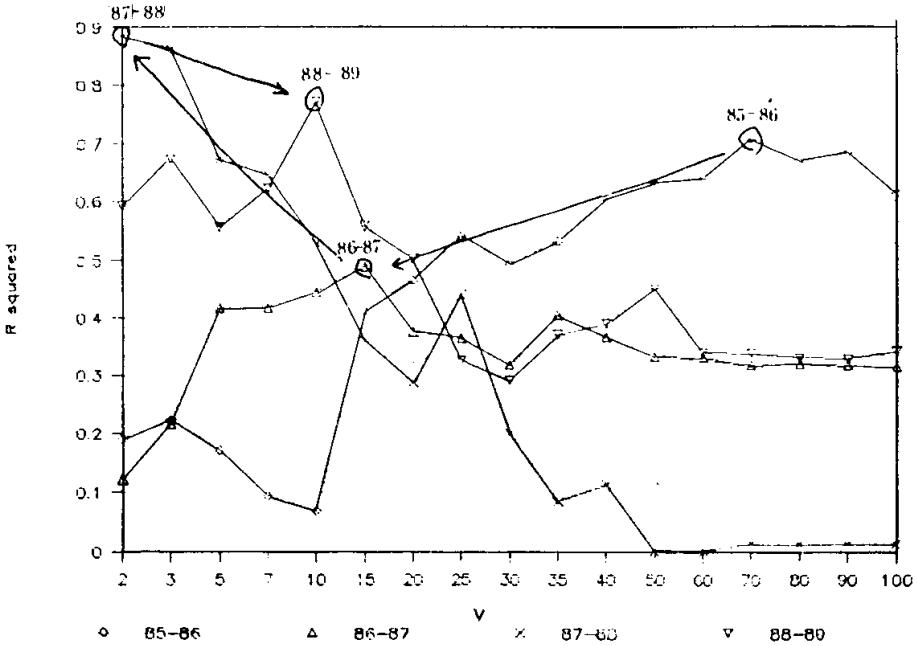
(1) EMG-CAPM의 활용

〈그림 3-1〉은 EMG-CAPM에서 각 연도별로 v값 변화에 따른 R^2의 변화를 그래프로 나타낸 것이다. 우선 각 연도별로 v가 변화함에 따라 R^2 값이 일정한 패턴을 보이면서 최대의 설명력을 갖는 정점을 그리고 있음에 주목할 필요가 있다. R^2 값이 山 모양의 변화 패턴을 보이고 있음은, 일단 각 CAPM 모형의 설명력에 대한 평가 척도인 R^2가 의미를 가지고 있음을 뜻한다.

〈표 3-1〉은 각 연도별 표로부터 R^2 값을 근거로 최대의 설명력을 갖는 EMG-CAPM의 증권시장선을 정리해 본 것이다.

〈그림 3-1〉과 〈표 3-1〉의 분석 결과를 보면, 시장의 平均 收益率 推移와 危險回避度(v) 사이에 깊은 연관성을 발견할 수 있다. 앞서 설명한 바와 같이 v 값이 작다는 것은 그만큼 위험을 덜 싫어한다는 의미이다. 즉, v 값이 떨어지는 것은 시장이 활황임에 힘입어 그만큼 투자 의욕이 강하게 반영되고 있는 상황을 나타내는 것이라고 해석할 수 있는 것이다. 〈표 3-1〉에서 보면, 85-86년 증시가 불붙기 시작하던 당시 최대의 설명력을 보여준 v가 70이던 것이 86~87년과 87~88년 연평균 수익률이 80%를 웃도는 활황장세에서는 위험회피지수라 할 수 있는 v가 각각 15, 2로 급격히 떨어졌다. 당시 대부분의 투자자들이 느끼던 강한 투자의욕에 비추어 이와 같은, v값의 추이는 우연이 아닌 것이다. 장세 활황이 주춤했던 89년도 자료가 반영된 88~89년의 경우의 위험회피지수는 다시 10으로 높아지고 있다.

이는 이전의 MV-CAPM으로는 설명할 수 없는 EMG-CAPM의 중요한 특성이며, 위험회피에 대한 투자자의 심리 특성이 위험회피지수인 v를 통하여 충분히 반영되는 EMG-CAPM의 활용 가능성을 보여 주는 것이라 할 수 있다.



〈그림 3-1〉 v계수 변화에 따른 설명력 추이

〈표 3-1〉 **EMG-CAPM의 증권시장선**

연 도	연 평 균 주가수익률	v	R squared	증 권 시 장 선
85~86	43.8%	70	0.7086	$r_i=0.0261+0.0147\beta_i$ (0.0079)(0.0035)
86~87	83.6%	15	0.4884	$r_i=0.0162+0.0462\beta_i$ (0.0173)(0.0167)
87~88	84.4%	2	0.8844	$r_i=-0.0080+0.0628\beta_i$ (0.0078)(0.0080)
88~89	34.7%	10	0.7712	$r_i=0.0078+0.0232\beta_i$ (0.0043)(0.0045)

(2) MV-CAPM과 EMG-CAPM의 설명력 비교

양자의 설명력에 대한 비교를 위해서는 MV-CAPM과 비교 대상이 될 EMG-CAPM의 v값이 우선 선정되어야 한다. 본 논문에서는 각 연도별로 최대의 설명력을 보여준 v값을 선정하여 그 때의 EMG-CAPM에 의한 증권시장선의 R^2값과 일반적인 MV-CAPM에 따른 증권시장선의 R^2값을 비교하였다. 그 결과는 〈표 3-2〉에 정리하였다. 모든 경우에서 EMG-CAPM의 R^2값이 MV-CAPM의 R^2보다 월등히 높게 나타나 EMG-CAPM의 현실 설명력이 기존의 MV-CAPM보다 우월함을 보여 주고 있다.

〈표 3-2〉 **MV-CAPM의 증권시장선**

연 도		R squared	증 권 시 장 선
85~86	MV-CAPM	0.2097	$r_i=0.0245+0.0031\beta_i$ (0.0110)(0.0083)
	EMG-CAPM	0.7086	$r_i=0.0261+0.0147\beta_i$ (0.0079)(0.0035)
86~87	MV-CAPM	0.3381	$r_i=0.0351+0.0285\beta_i$ (0.0117)(0.0141)
	EMG-CAPM	0.4884	$r_i=0.0162+0.0462\beta_i$ (0.0173)(0.0167)
87~88	MV-CAPM	0.6465	$r_i=-0.0046+0.0594\beta_i$ (0.0054)(0.0052)
	EMG-CAPM	0.8844	$r_i=-0.0080+0.0628\beta_i$ (0.0078)(0.0080)
88~89	MV-CAPM	0.6831	$r_i=0.0132+0.0178\beta_i$ (0.0048)(0.0043)
	EMG-CAPM	0.7712	$r_i=0.0078+0.0232\beta_i$ (0.0043)(0.0045)

Ⅳ. 結　論

소득 불평등도의 基數的 측정 방법의 일환으로 정립된 지니 平差(GMD)는 가능한 모든 변량들 사이의 차이의 絶對 平均값으로 정의된다. 불확실성하의 투자 의사결정을 위하여 위치 척도인 기대수익률과 더불어 GMD를 새로운 위험 척도로 사용한 平均-지니(MG) 모형은, 기존의 2모수 모형인 평균-분산(MV) 모형에서와 같은 적용상의 편리함을 가질 뿐만 아니라 투자 대안을 평가함에 있어서 어떠한 확률 분포라 하더라도 有意味한 성과 평가를 내릴 수 있는 모형이다.

MG 基準이란, 임의의 두 확률 분포 F, G가 있을 때

$\mu_F \geq \mu_G$이고 $\mu_F - \Gamma_F \geq \mu_G - \Gamma_G$

이면 F는 G를 支配함을 뜻한다. 이와 같은 MG 기준은 2차 확률적 지배기준의 必要 條件이 되며, 따라서 MG 기준에 따른 효율적 집합은 SSD에 의한 효율적 집합의 부분집합이 된다. MG 모형은 기존의 MV-CAPM 체계와 유사한 MG-CAPM을 가능하게 함으로써 포트폴리오의 효율적 집합의 구성은 물론, 資産의 價格 決定 및 成果의 順位 評價를 내릴 수 있는 하나의 이론 체계를 구축하게 되었다.

EMG 모형이란, MG 모형에 투자자의 危險에 대한 價値 尺度 지수를 반영시킨 모형을 말한다. 즉, 위의 MG 기준에서 Γ 대신 $\Gamma(v)$를 사용하게 되며, 이 때의 $\Gamma(v)$는

$$\Gamma(v) = -v \cdot \mathrm{COV}\{R_i,\ [1-F(R)]^{v-1}\}$$

의 의미로 해석된다. 이로부터 다음과 같은 EGM-CAPM을 도출할 수 있다.

$$\mu_i = r_f + (\mu_m - r_f) \cdot \beta_i(v)$$

$$\beta_i(v) = \frac{\mathrm{COV}\{R_i, [1-F(R_m)]^{v-1}\}}{\mathrm{COV}\{R_m, [1-F(R_m)]^{v-1}\}}$$

既存의 CAPM에서는 어떤 개별 자산에 대한 β_i가 모든 투자자들에게 있어서 동일한 값으로 인식되었으나, EMG-CAPM에서는 특정 個別 資産 i에 있어서도 개별 투자자들의 危險 回避 정도(v)에 따라서 $\beta_i(v)$값이 달라질 수 있다는 중요한 특성을 갖는다. 이로부터, 어떤 자산의 실제 수익률 결과가 있을 때 投資者들은 자신의 $\beta_i(v)$에 근거하여 資産의 成果評價를 하게되며, 개별 투자자들이 요구하는 期待 收益率이 서로 다르므로 성과 평가의 결과 또한 달라질 수 있는 것이다.

본 논문의 실증분석 결과는 다음과 같이 요약할 수 있다.

1. 설명력 측정 방법인 R squared는 일정한 모양을 이루면서 최대의 설명력을 갖는 정점을 그리고 있는 바, 이는 각 모형의 설명력에 대한 평가척도로서 의미를 갖는다.

2. 대체로 MV-CAPM 보다 EMG-CAPM의 설명력이 우수하게 나타났다.

3. 시장의 평균 수익률 추이와 위험회피도 사이의 연관성이 나타나며, 실제 분석 결과도 시장 상황에 따른 투자의욕을 EMG-CAPM의 의한 v값으로 설명할 수 있었다.

參 考 文 獻

1. Copeland, T.E. and Weston, J.F., Financial Theory and Corporate Policy, 3rd ed., Addison-Wesley, 1988.
2. Haugen, R.A., Modern Investment Theory, Prentice/Hall, 1986.
3. Kendall, M. and Stuart, A., The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1, 4th ed., London; Griffin, 1977.
4. Levy, H. and Sarnat, M., Portfolio and Investments Selection: Theory and Practice, Prentice/Hall, 1984.
5. Atkinson, A.B., "On the Measurement of Inequality." *Journal of Economic Theory* 2, September 1970, pp. 244-63.
6. Bawa, V.S., "Safety First, Stochastic Dominance and Optimal Portfolio Choice", *Journal of Financial and Quantative Analysis* 13, June 1978, pp. 255-271.

7. Blume, M., "Portfolio Theory: A Step toward It's Practical," *Journal of Business*, Sep. 1970, pp. 561-575.

8. Dorfman, R., "A Formula for the Gini Coefficient." *Review of Economics and Ssatistics* 61, Februrary 1979, pp. 146-9.

9. Fama, E.F., "The Behavior of Stock Market Prices." *Journal of Business*, January 1965, pp. 34-105.

10. Gastwirth, J.L., "The Estimation of the Lorenz Curve and Gini Index." *The Review of Economics and Statistics*, 1972, pp. 306-316.

11. Hanoch, G. and Levy, H., "The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk.", *Review of Economic Studies* 36, July 1969, pp. 335-46.

12. Kakwani, N.C., "Applications of Lorenz Curve in Economic Analysis." *Econometrica* 45, April 1977, pp. 719-29.

13. Levy, H. and Hanoch, G. "The Efficiency Analysis of Choices Involving Risk," *Review of Economic Studies*, July 1969.

14. Nair, U.S., "The Standard Error of Gini's Mean Difference." *Biometrika* 38, 1936, pp. 77-91.

15. Samuelson, P.A., "General Proof that Diversification Pays." *Journal of Financial and Quantitive Analysis* 2, March 1967, pp. 580-84.

16. Schechtman, E. and Yitzhaki, S., A measure of Association Based on Gini's Mean Difference." Mimeo, Department of Agricultural Economics, The Hebrew University, Feb. 1984.

17. Shalit, H. and Yitzhaki, S., "Mean-Gini, Portfolio Theory, and the Pricing of Risky Assets," *Journal of Finance* 39, December 1984, pp. 1449-68.

18. Shalit, H. and Yitzhaki, S., "Evaluating the Mean Gini Approach to Portfolio Selection." Mimeo, Department of Agricultural Economics, The Hebrew University, February 1984.

19. Tehranian, H., "Empirical Studies Using Higher Degree of Stochastic Dominance," *Journal of Finance*, 1980.

20. Yitzhaki, S., "Stochastic Dominance, Mean Variance and Gini's Mean Difference." *American Economic Review* 72, March 1982, pp. 178-85.