병렬처리기계상에서 작업의 상호교환에 의한 휴리스틱 해법의 효율성 개선에 관한 연구*

安 相 炯** · 이 송 근*** · 송 호 석****

《目 次》

Ⅰ. 서 언

1회 가공(single operation)을 요하는 다수의 작업들이 다수의 기계 중 어느 기계를 통해서도 처리될 수 있는 상황에서 일정한 작업배정을 통하여 특정 성과척도(measure of performance)를 최소화하거나 최대화하는 경우의 문제를 일정계획(scheduling)이라 한다. 일정계획분야에서 주요한 문제중의 하나는 서로 다른 납기(due date)를 가지는 일련의 독립된 작업들(a set of independent jobs)을 일련의 병렬기계(a set of parallel processors)상에서 처리할 때 최대납기지연시간(the maximum lateness)을 최소화하는 작업할당과 처리순서를 구하는 문제이다.

일반적으로 납기가 주어진 문제에서의 목표는 납기이내에 작업을 마치는 것이다. 만약 납기이내에 작업을 마치지 못하여 납기지연(lateness)이 일어나면 필연적으로 이에 따른 비용(penalty cost)을 지불하기 마련이다. 즉 계약위반에 따른 벌과금이나 반품 등의 비용은 납

* 본 연구는 서울대학교 경영대학 경영연구소의 연구비지원에 의하여 수행되었음.
** 서울대학교 경영대학 교수
*** 대구대학교 경영학과
**** 한솔 PCS

기지연이 허용한도의 범위 내에서 발생하도록 통제할 필요가 있으므로 최대납기지연의 최소화는 이러한 경우에 적절한 목적함수가 되는 것이다.

본 연구에서는 최대납기지연시간 최소화 문제를 위해 지금까지 개발된 휴리스틱 해법의 성능을 비교하고 기계간 작업교환에 의한 휴리스틱 해의 개선 방안에 대해서 초점을 맞추고자 한다. 그리고 이러한 방법과 기존의 휴리스틱 해법의 성능을 비교하고 최적해와의 평균적인 격차를 파악하기 위하여 실용적인 크기의 문제에 효율적인 최적해법을 구하고자 한다. 최적해법을 원문제에 대한 라그랑지안 이완문제를 구성하고 서브그래디언트기법을 적용하여 최선의 쌍대 최적해를 구하고 이것을 원문제에 대한 하한가(lower bound)로 삼아 새로운 휴리스틱이 제공하는 상한가(upper bound)와 비교하여 '상한가 = 하한가'인 경우에 최적해를 구하는 방법을 사용하여 작업교환에 의한 휴리스틱 해법의 효율성 개선이 어느정도 효과를 갖는지를 연구하고자 한다.

Ⅱ. 모형의 구성

1. 문제의 개요

병렬처리기계에서 최대납기지연시간(maximum lateness)의 최소화 문제는 다음과 같은 기준에 의해 다양하게 구분된다.

1) 작업착수시점에 모든 작업의 시스템 도착여부
2) 작업준비시간(set-up time)의 존재여부
3) 단위작업의 분할가공의 가능성 여부
4) 기계의 유형
5) 작업들 간의 선행구조의 존재여부
6) 납기의 고정여부

본 연구에서는 위의 유형 중에서 다음과 같은 문제로 그 범위를 한정시키기로 한다.

기계의 유형	이속기계
작업의 선행구조 여부	독립작업
분할가공의 가능여부	분할 불가능
작업의 시스템 도착	작업착수시점에 모든 작업은 도착 완료
작업의 준비시간	가공시간에 포함
납기	작업착수시점에 미리 정해져 있음

2. 모형의 정립

작업과 기계들의 집합과 모수를 다음과 같이 정의하면 본 연구에서 다룰 문제는 다음과 같

은 정수계획문제로 정립된다.

i = $\{1, 2, \cdots, n\}$ 작업(job)들의 집합

j = $\{1, 2, \cdots, m\}$ 기계(processor)들의 집합

d_i = 작업 i 의 납기,

t_{ij} = 작업 i의 기계j에서 가공시간

$$(\mathrm{P}) \quad Min \quad L \tag{1}$$

$$s.\ t. \quad \sum_{i=1}^{I} t_{ij} x_{ij} - d_I \le L \quad \text{for} \quad I = 1, 2, \cdots, n \quad j = 1, 2, \cdots, m \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1 \quad \text{for} \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{3}$$

$$x_{ij} = 0 \ or \ 1 \tag{4}$$

여기서 변수들은 다음의 의미를 갖고 있다.

L = 최대납기지연시간

$$x_{il} = \begin{cases} 1 \text{ 만약 작업 } i\text{가 기계 } j\text{에서 가공된다면} \\ 0 \text{ 그렇지 않으면} \end{cases} \begin{matrix} i = 1, 2 \ldots m \\ j = 1, 2 \ldots n \end{matrix}$$

모형의 목적함수 (1)는 각 작업의 처리완료시간의 납기를 초과한 납기지연시간 중에서 최대치를 최소화하는 것을 나타낸다. 제약조건식 (2)은 모든 작업의 처리완료시간과 납기와의 차이가 최대납기지연시간(L)보다는 적거나 같다는 것을 나타낸다. 제약조건식 (3), (4)은 하나의 개별작업은 반드시 어느 한 대의 기계를 통해서만 처리되어야 함을 의미한다. 이 모형에서 모든 작업은 납기가 적은 순서로 정렬이 되어 있다고 가정한다. (즉 $i < i' \Rightarrow d_i < d_i'$)

만약 마지막 $x_{Ij} = 1$ 이면 제약조건식 (2)의 왼쪽 항목은 작업 I 의 납기지연시간을 나타낸다. 만약 $x_{Ij} = 0$ 이고 $x_{I'j}$ 가 마지막 非陰項이면 ($I' < I$). $\sum_{i=1}^{I} t_{ij} x_{ij} - d_{I'}$ 는 작업 I'의 납기지연시간을 나타낸다. 그러나 $d_{I'} \le d_I$ 로 가정했으므로 중복제약조건식(redundant)이 된다. 실제로 제약조건식 (2)의 $n \times m$ 가 제약조건식 중에서 n개의 식을 제외한 나머지 $n \times (m-1)$ 개의 제약조건식은 중복제약식(redundant constraints)이 된다.

Ⅲ. 최대납기지연시간의 최소화문제의 휴리스틱 해법

1. EDD 해법

단일기계문제(single processor)에 최대납기지연시간은 납기가 적은 순서로 작업을 배정함으로서 최소화되며 이를 EDD(the Earliest Due Date) 순서라고 한다.

병렬처리기계문제에 이 순서를 적용하기 위해서 우선 모형에서 가정한대로 작업을 납기가 적은 순으로 정렬시킨 다음 하나씩 기계간 부하(load)를 균등화(load equalization)시키는 방향으로 작업을 배정하는 것이다. 이것을 휴리스틱 EDD라 하며 그절차는 다음과 같다.

S_j를 기계 j에 대한 현재까지 누적된 작업시간, 즉 부분작업완료시간(partial makespan)이라 하자.

(1 단계) 모든 $j = 1, 2, \cdots, m$에 대하여 $S_j \leftarrow 0$으로 초기화시킨다.

(2 단계) 각 작업의 납기 d_i 를 오름차순으로 정돈하여 납기가 빠른 작업부터

$1, 2, \cdots, n$ 으로 순번을 부여한다.

(3 단계) i = 1부터 n 까지 다음과정을 반복한다.

(a) $\min\ (S_j + t_{ij})$ 에 해당하는 기계 j 를 찾아 해당기계를 j(i) 로 규정한다.

만약 동률이 발생하면 j 의 작은 값을 취한다.

(b) 작업 i를 기계 j(i) 에 배정하고 부분작업완료시간 $S_{j(i)}$를 다음과 같이 갱신한다.

$$S_{j(i)} \leftarrow S_{j(i)} + t_{ij(i)}$$

2. LPT 해법

EDD 순으로 작업을 배정할 경우 상대적으로 작업시간이 긴 작업이 너무 늦게 배정되어 이 작업 때문에 최대납기지연시간이 크게 될 가능성이 있다. 이것을 피하기 위해서 최장작업시간의 작업(Longest Processing Time Job)부터 우선적으로 배정할 수도 있다.

이때 등속기계(equal processor)에서는 LPT를 결정하기 쉬우나 이속기계(unequal-processor)에서는 동일한 작업의 기계간 작업시간이 다르기 때문에 평균작업시간 즉 $\overline{t_i} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} t_{ij}$를 이용하기로 한다.

LPT 순으로 배정하는 경우에 어느 하나의 기계에서 보면 납기가 늦은 작업이 납기가 빠른 작업보다 먼저 배정될 수도 있기 때문에 최종배정이 끝난 뒤 각 기계별로 EDD 순서로 다시 정돈해야 한다.

(1 단계) 모든 $j = 1, 2, \cdots, m$에 대해서 $S_j \leftarrow 0$으로 초기화시킨다.

(2 단계) $\overline{t_i} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} t_{ij}$를 계산하면 $\overline{t_i}$는 작업 i 의 각 기계에서의 작업시간의 평균치가 된다. 이 $\overline{t_i}$를 내림차순으로 정돈하여 각 작업에 1, 2, …, n의 순번을 부여한다.

(3 단계) i = 1부터 n 까지 다음과정을 반복한다.

(a) min $(S_j + t_{ij})$ 에 해당하는 기계 j를 찾아 해당기계를 j(i)로 규정한다.

만약 동률이 발생하면 j 의 작은 값을 취한다.

(b) 작업 i를 기계 j(i) 에 배정한다.

부분작업완료시간 $S_{j(i)}$를 다음과 같이 갱신한다.

$$S_{j(i)} \leftarrow S_{j(i)} + t_{ij(i)}$$

(4 단계) 각 기계별로 EDD 순으로 재정돈한다.

3. De and Morton 의 해법

병렬처리기계의 문제에 대한 기존의 연구에는 준최적해(near-optimal solution)를 구하는 휴리스틱해법의 개발과 이 해법의 성과분석을 통해서 해의 질을 높이고자 한 De와 Morton(1978) 연구가 있다. De와 Morton은 A, B, C 의 3가지 휴리스틱을 제시하고 각 휴리스틱의 성과를 비교 분석하였다.

EDD와 LPT는 작업시간과 납기의 성격에 따라 그 결과가 다르게 나타나기 때문에 우열을 비교하기가 힘들다. 그러므로 양자를 보다 조화롭게 절충할 필요가 있다.

일반적으로 최대납기지연시간의 발생을 피하기 위해서는 다음 3 가지 노력이 필요하다.

첫째, 각 기계에서 작업을 EDD 순으로 배열한다.

둘째, 납기가 빠른 작업부터 각 기계에 균등하게 배정한다.

셋째, 작업시간이 긴 작업이 너무 늦게 배정되는 것을 피한다.

첫 번째 목표는 쉽게 달성될 수 있으나 두 번째의 EDD 순서와 세 번째의 LPT 순서는 서로 상치될 가능성이 있다. 그러므로 납기와 작업시간의 상대적인 중요성을 반영하는 EDD와 LPT의 최적조합(optimal combination)을 구할 수 있다면 좋을 것이다. 최적조합을 찾기 위하여 De와 Morton은 각 작업에 대해서 다음 수식을 계산하였다.

$$p_i = rd_i - (1-r)\overline{t_i}$$

여기서 $\overline{t_i} = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} t_{ij}$이며, r 은 $0 \le r \le 1$의 임의의 수를 이용하여 작업의 배

정순서를 납기와 평균작업시간을 절충한 p_i 의 오름차순으로 한다는 것으로, 서로 다른 r 값을 시도하여 최선의 결과를 취한다. 이때 r = 1 이면 P_i 의 순서는 EDD 순서와 일치하고 r = 0 이면 LPT 순서와 같다. P_i 의 계산에 기초하여 De와 Morton은 휴리스틱 A 와 휴리스틱 B를 제시하였다.

휴리스틱 A는 p_i 의 순서에 따라서 기계간 부하를 균등히 한다는 것으로 EDD 와 LPT 의 절충이라고 볼 수 있다.

(1) 휴리스틱 A

(0 단계) 서로 다른 r 값을 적용하면서 1 단계에서 4 단계까지를 반복 계산하여 최상의 해를 구한다.

(1 단계) 모든 기계 j = 1, 2, ,⋯, m 에 대하여 $S_j \leftarrow 0$으로 초기화시킨다.

(2 단계) $p_i = rd_i - (1-r)\overline{t_i}$ 의 오름차순으로 작업순서를 재정돈하고, 재정돈 된 작업에 1, 2, ,⋯, n 의 일련번호를 부여한다.

(3 단계) EDD의 3단계와 동일함

(4 단계) LPT의 4단계와 동일함

만약 k개의 r값을 적용했다면 이 휴리스틱의 계산복잡도(computational complexity)는 $O(k(n \log n + nm))$이다.

(2) 휴리스틱 B

휴리스틱 B 는 기계간 부하의 균등화는 무시하고 전적으로 납기지연(lateness)의 최소화에만 중점을 둔다. 즉 p_i 의 순서에 따라 작업을 배정하되 매 단계마다 최대납기지연시간을 최소화시키는 기계를 찾아 작업을 배정하는 방법이다.

L_j 를 j 기계에 대한 현재까지의 최대납기지연시간 이라고 하면

(0 단계) 서로 다른 r 값을 적용하면서 1 단계에서 4 단계까지를 반복계산하여 최상의 해를 구한다.

(1 단계) 모든 기계 j = 1, 2, ,⋯, m 에 대해서 $L_j \leftarrow 0$으로 초기화시킨다.

(2 단계) $p_i = rd_i - (1-r)\overline{t_i}$의 오름차순으로 작업순서를 재정돈하고, 재정돈된 작업에 1, 2, ,⋯, n 의 일련번호를 부여한다.

(3 단계) i = 1 부터 n 까지의 다음과정을 반복한다.

(a) j = 1 부터 m 까지의 다음과정을 반복한다.

(i) EDD 순서를 유지하면서 작업 i를 기계 j 에 배정할 때 점하게 될 위치를 k(j)라 한다. 납기가 동율인 작업에 대해서는 k의 적은 값을 선택한다.

(ii) 기계 j 상의 새로운 최대납기지연시간을 계산하여 이를 L'_j라 한다.

(b) $\min_j \{L'_j\}$에 해당하는 기계 j를 구한다. 이 기계를 j(i)라 한다.

만약 동율이 발생하면 j가 적은 값을 취한다.

(c) 작업 i를 기계 j(i)의 k(j(i))번째 위치에 배정한다.

$L_{j(i)} \leftarrow L'_{j(i)}$ 로 갱신한다.

휴리스틱 B 에서는 각 기계 상에서 EDD 순서가 항상 유지되므로 마지막에 별도의 순서 재배열이 필요 없다. k개의 r 값을 적용할 때 휴리스틱 B의 계산복잡도는 $O(k(n^2 + nm))$이다.

(3) 휴리스틱 C

일단 양질의 휴리스틱해가 구해진 뒤에도 적정규모이내의 문제에 대해서는 기계간 작업교환을 통해서 해의 개선을 도모할 수 있다. 휴리스틱에 의한 최대납기지연시간이 $Lmax$라고 하고 이것이 $j_{\max}$ 기계상의 $i_{\max}$ 위치에서 발생한다고 가정하자. ($1 \le i_{\max} \le n_{j_{\max}}$. 여기서 n_j는 j 기계에 이미 배정된 작업의 개수를 의미한다.) 그러면 $j_{\max}$ 기계상의 $i_{\max}$ 위치 앞의 어떤 작업을 제거한다던가 다른 작업과 위치를 상호교환함으로서 $L_{\max}$값의 개선을 도모할 수 있다.

p를 $j_{\max}$ 기계의 i 번째 위치에 있는 작업이라고 가정한다. 즉 $i \le i_{\max}$. p를 $j_{\max}$ 기계로부터 어떤 다른 기계 j 로 옮긴다고 생각해 보자.

EDD 순서를 유지하기 위해서 p는 기계 j에서 r-1 과 r번째 위치 사이에 놓여지게 된다. (즉 기계 j 에 할당된다면 p의 위치는 r 이 된다.) 그러면 기계 j상에서 r보다 크거나 같은 위치의 모든 작업들은 우측으로 이동하게 되며 따라서 L_j의 증가를 가져온다. 마찬가지로 $j_{\max}$ 기계상의 i 보다 우측위치에 있는 모든 작업들은 좌측으로 이동하게 되어 $L_{j_{\max}}$의 감소를 가져올 것이다. 이것은 $j_{\max}$ 기계에서 작업 p를 다른 작업과 상호교환 없이 다른 기계를 옮기는 것이다.

다른 작업과의 교환도 물론 가능하다. j 기계에서 k번째 위치의 작업을 q라고 하고, 이 작업과 p를 상호 교환한다고 가정하자. EDD 순서를 유지하기 위해서 q는 $j_{\max}$기계상의 s번째 위치에 삽입된다. 이 경우에도 두 기계 상에서 기존 작업들의 위치가 변동하게 된다.

이 원리에 기초해서 어떤 주어진 $j_{\max}$에 있어서 모든 작업 $i \le i_{\max}$에 대해서 모든 $j \ne j_{\max}$ 기계위의 작업과 상호교환을 시도해 본다. 한 번의 교환이 한 번의 반복계산으로 수행되며, 전체 반복계산과정에서 개선이 이루어지지 않으면, 휴리스틱해의 개선은 없다고 본다.

개선이 있는 경우에는 새로운 $j_{\max}$ 기계와 $i_{\max}$ 작업을 가지고 새로운 반복계산이 수행된다. 이 과정은 한 번에 두 개씩의 작업교환이 이루어지기 때문에 , 해의 최적성을 보장해 주지는 못하지만 상당한 개선효과가 있을 것으로 추정된다.

n_j, $L_{\max}$, $i_{\max}$ $j_{\max}$가 위에서 설명한 것을 의미하는 기호라고 하면 휴리스틱 C는 다음과 같다.

휴리스틱 C

(1 단계) $j \leftarrow 0$

(2 단계) $j \leftarrow j+1$, 만약 $j = j_{\max}$이면 $j \leftarrow j+1$, 만약 $j > m$이면 중지한다.

(3 단계) $i \leftarrow 0$

(4 단계) $i \leftarrow i+1$, 만약 $i = i_{\max}$이면 2 단계로 돌아간다.

(5 단계) p가 $j_{\max}$ 기계상의 i 위치에 있는 작업이라면 잠정적으로 p를 $j_{\max}$

$j_{\max}$기계 상에서 제거한다. $n'_{j_{\max}} \leftarrow n_{j_{\max}} - 1$

기계상의 작업들에 대한 새로운 최대납기지연시간 $L'_{j_{\max}}$를 계산한다.

(6 단계) $k \leftarrow 0$ 10 단계로 간다.

(7 단계) $k \leftarrow k+1$, 만약 $k > n_j$이면 4단계로 간다.

(8 단계) q를 기계 j의 k번째 위치에 있는 작업이라고 하면 잠정적으로 q를 기계 j 상에서 제거한다.

(9 단계) (a) EDD 순서에 의거해서 $j_{\max}$ 기계 상에 q를 삽입할 위치 i를 찾는다.

(b) 점증적으로 작업 q를 $j_{\max}$ 기계상의 i번째 위치에 할당한다.

$j_{\max}$기계상의 새로운 최대납기지연시간을 계산 하여 이를 $L'_{j_{\max}}$라 한다.

(10 단계) (a) EDD 순서에 의거해서 기계 j 상에 작업 p를 삽입할 위치를 찾는다.

이 위치를 r이라 한다.

(b) 잠정적으로 p를 기계 j 상의 r 번째에 할당한다.

기계 j상의 새로운 최대납기지연시간을 계산하여 이를 L'_j 라 한다.

(11 단계) $L' \leftarrow \max \{ L'_j, \ L'_{j_{\max}} \}$ 만약 $L' \geq L_{\max}$ 이면 7단계로 간다.

(12 단계) 작업 p를 기계 j상의 r 번째 위치에 할당한다.

$L_j \leftarrow L_j'$; $n_j \leftarrow n_j + 1$ 로 갱신한다.

(13 단계) 만약 k = 0이면 $n_{j_{\max}} \leftarrow n'_{j_{\max}}$ 로 갱신하고 15 단계로 간다.

(14 단계) 작업 q를 $j_{\max}$ 기계상의 s번째 위치에 할당한다.

$L_{j_{\max}} \leftarrow L'_{j_{\max}}$; $n_{j_{\max}} \leftarrow n_{j_{\max}} + 1$로 갱신한다.

(15 단계) (a) $L \leftarrow \max\{L_j\}$ 라면 해당 기계 j를 j^*라고 하고 기계 j^* 상에서 최대납기지연이 발생하는 위치를 i^*라 한다.

(b) $L_{\max} \leftarrow L$; $j_{\max} \leftarrow j^*$; $i_{\max} \leftarrow i^*$로 갱신한다.

1 단계로 되돌아간다.

k를 반복계산회수의 상한치라면 휴리스틱C의 계산복잡도는 $O(k \cdot \frac{n^2}{m^2}(n+m))$ 이 된다.

Ⅳ. 기회비용과 기계간 작업교환을 고려한 휴리스틱

1. 휴리스틱 I

여기서는 앞에서 설명한 De 와 Morton의 휴리스틱과는 별도로 기계간 작업부하의 균등화에 초점을 두는 새로운 휴리스틱을 제시한다.

안과 이의 선행연구(1991)에서 총작업완료시간의 최소화에 가장 강력한 휴리스틱으로서 휴리스틱 S 를 제시한 바 있다. 휴리스틱 S는 기계간의 부하를 최대한 균등화시킴으로써 총작업완료시간의 최소화를 도모하였다. 또한 안 및 이와 심의 선행연구(1997)에서는 최대납기지연시간 최소화 문제에 이 개념을 도입하였다. 일단 납기를 무시하고 총작업완료시간을 최소화시키는 작업배정(또는 기계간 부하를 최대한 균등화시키는 작업배정) 을 한 다음, 각 기계별로 EDD 순서로 재배열하면 기계 수에 비해서 작업수가 많은 경우에 효과가 컸었다.

여기에서 설명하는 휴리스틱 I는 기회비용의 도입과 함께 기계간 작업교환에 의한 해의 개선을 함께 도모하고자 한다. 따라서 휴리스틱 I는 안 및 이와 심의 선행연구(1997)에서 효율성이 입증된 기회비용을 활용한 1단계와 De와 Morton의 휴리스틱 C부분의 2 단계로 구성된다.

휴리스틱 비용의 개념에 기초하여 작업처리의 우선 순위를 결정한I의 1단계는 기회다. 이때 기회비용은 어떤 미배정 작업 i 에 대해서 현재까지의 각 기계별 부분작업완료시간 S_j와의 합 즉 $S_j + t_{ij}$ 가 가장 적은 기계(최선의 기계)와 그 다음 적은 기계(차선의 기계)와의 차이를 의미하며, 이 차이가 큰 작업부터 최선의 기계에 우선 배정시켜 나감으로서 기회비용을 최소화하는 것이 기계부하의 균등화를 가져오고 나아가서 총작업완료시간의 최소화에 기여하게 한다. 그리고 이 해법의 후반부에는 또한 LPT 에 의한 작업 배분도 도모한다.

(휴리스틱 I)

1단계

(0 단계) 여러 가지 다른 β 값에 대해서 제 1 단계부터 제 5 단계까지 반복 적용하여 최상의 결과를 선택한다. ($o < \beta \le 1$)

(1 단계) 모든 기계 j 에 대해서 부분작업완료시간 $S_j \leftarrow 0$ 으로 초기화시킨다.

(2 단계) 모든 미배정작업 i, $i \in T$ 에 대해서

$$K1_{ij*} = \min_{j} \{s_j + t_{ij}\}$$

$$K2_{ij**} = \min_{j \neq j^*} \{s_j + t_{ij}\}$$

$K_i = K2_{ij**} - K1_{ij*}$를 구한다.

각 작업 i 에 대해서 해당하는 j^*를 j(i)로 규정한다

(3 단계) (a) $K = \max_{i \in T} \{K_i\}$를 발견한다.

해당 i 를 $\bar{i}$ 로 정의한다.

만약 max K_i 가 둘 이상의 작업에서 동률이 발생하면 $K1_{ij*}$가 작은 작업 i 부터 배정한다.

(b) 작업 $\bar{i}$ 를 기계 $j_{(\bar{i})}$ 에 배정한다.

$S_{j(\bar{i})} \leftarrow S_{j(\bar{i})} + t_{ij(\bar{i})}$, $T \leftarrow T - \{\bar{i}\}$ 로 갱신한다.

(c) 만약 $|T| > \beta \cdot n$ 이면 제 2단계로 돌아간다.

아니면 제 4단계로 간다.

(4 단계) 미배정된 모든 작업 i, $i \in T$ 에 대해서 $K_i = \frac{1}{m} \cdot \sum_{j=1}^{m} t_{ij}$ 를 계산하여,

K_i를 내림차순으로 정렬하여, 각 작업에 새로운 순위를 부여한다.

(5 단계) 모든 미배정작업 $i \in T$ 에 대해서

(a) $\min_{j} \{S_j + T_{ij}\}$를 발견하여 해당기계 j 를 $j_{(i)}$으로 규정한다.

(b) 작업 i 를 기계 $j_{(i)}$ 에 배정한다.

$S_{j(i)} \leftarrow S_{j(i)} + t_{ij(i)}$ 로 갱신한다.

(c) 미배정작업집합 T 가 공집합이 되면 ($T = \emptyset$) 해법진행이 종료됨.

아니면 제 5단계로 되돌아감.

(6 단계) 각 기계별로 EDD 순으로 재정돈한다.

2 단계

1단계에서 구해진 해에 휴리스틱 C를 적용한다.

휴리스틱 I의 1단계의 계산복잡도는 다음과 같다.

(1 단계) : $O(m)$

(2, 3 단계) : $O(mn_1^2)$, 여기서 n_1은 $n_1 \leq \beta n$ 을 만족시키는 최대정수

(4, 5 단계) : $n_2 = n - n_1$이라면 $O(n_2 \log n_2 + n_2 m)$

따라서 1회 반복시의 계산의 복잡도는

$$O(mn_1^2 + n_2 \log n_2 + n_2 m) \leq O(mn^2 + nlogn)$$

(여기서 n_1, $n_2 < n$)

k 회 반복계산이 있었다면 계산복잡도는 $O(kmn^2 + nlogn)$이 된다.

2. 휴리스틱 I의 효율성 평가

앞에서 제시한 휴리스틱기법들과 최적해법의 성능을 평가하기 위하여 30개씩의 실험문제를 만들었다. 각 실험문제의 작업시간행렬 t_{ij} 는 $0 \leq t_{ij} \leq 50$ 의 정수를 이산적 일양분포

〈표 1〉 異速機械問題

실험문제		EDD	LPT	A	B	I	IA	IAC	LB	최적해 확인여부
기계대수	작업개수									
2	10	55	65	49	49	64	49	48	48	○
	20	108	109	108	104	100	100	99	99	○
	30	230	257	219	223	226	219	218	218	○
	40	321	287	280	282	251	251	250	250	○
	50	419	358	359	349	334	334	334	334	○
3	10	12	17	12	12	17	12	12	12	○
	20	62	57	48	48	57	48	48	48	○
	30	83	87	71	74	84	71	62	62	○
	40	130	127	119	116	96	96	93	93	○
	50	189	162	154	151	153	153	140	140	○
4	10	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	○
	20	13	26	13	13	26	13	13	13	○
	30	21	37	14	21	16	14	14	14	○
	40	37	68	31	37	46	31	25	25	○
	50	82	77	71	68	55	55	52	52	○
5	20	11	13	7	7	11	7	7	5.47	×
	30	17	29	15	15	29	15	13	13	○
	40	37	37	37	30	33	33	33	30.09	×
	50	33	59	28	29	25	25	25	25	○
6	20	5	5	5	5	5	5	5	5	○
	30	13	20	13	13	18	13	13	12.05	×
	40	8	8	8	8	8	8	8	8	○
	50	11	23	11	13	21	11	11	11	○
8	30	22	22	22	22	26	22	22	22	○
	40	-9	5	-9	-9	-5	-9	-9	-9	○
	50	14	22	13	13	21	13	13	12.01	×
10	20	5	5	5	5	5	5	5	5	○
	30	14	14	14	14	14	14	14	14	○
	40	18	21	18	18	18	18	18	18	○
	50	13	9	9	9	9	9	9	7.98	×

(discrete uniform distribution)에 의거하여 난수(random number)로 구성하였다. 또한 납기 d_i 는 $0 \le d_i \le 100$ 의 정수를 동일한 방법으로 구하였다. 문제의 규모는 기계대수를 2대에서 10대까지, 작업개수는 10개에서 50개까지 차례로 증가시켜 가면서 양자를 적당히 조합하여 구성하였다. 이속기계에서의 성과비교를 위해서 실험결과를 <표 1>에 정리하였다.

<표 1>의 실험결과에 의하면 우선 휴리스틱 EDD, LPT, A, B, I의 1단계을 비교한 결과 5개의 휴리스틱 중에서 A 〉 B 〉 I의 1단계 〉 EDD 〉 LPT 순으로 성과가 나타났다. I의 1단계는 기계대수에 비해서 작업수가 많은 경우에 성과가 상당히 좋게 나타나는 경향이기 때문에 휴리스틱 I와 A를 결합한 휴리스틱 IA 를 구성해 본 결과 30 문제 중 28문제에서 최상의 결과를 실현하였다. 여기에 휴리스틱 IA를 기초로하여 작업의 상호교환에 의한 해의 개선을 도모하는 휴리스틱 C를 결합하여 휴리스틱 IAC를 구성하여 본 결과 휴리스틱 IA보다 10개의 문제에서 해의 개선이 이루어졌다.

휴리스틱 IAC의 결과를 상한가로 하여 라그랑지안 이완 문제 (LR I)[1]에 대한 서브그래디언트기법을 적용한 결과 30문제중 모두 25개의 문제에서 상한가와 일치하는 강력한 하한가가 도출됨을 발견하였다. 따라서 83% 정도의 문제에서 분단탐색법에 의존하지 않고도 최적해가 발견되었다. 최적해가 발견되지 않은 문제에 있어서도 이 하한가가 대단히 엄밀하므로 하한가 부근에 최적해가 존재할 것이라는 추측이 가능하다.

동일한 실험문제에 대한 등속기계 경우의 실험결과는 <표 2>에 정리하였다. 등속기계에서는 이속기계와 달리 5개의 휴리스틱 중 B가 가장 우수한 성과를 나타내어 30문제중 29문제에서 최상의 결과를 실현하였다. 따라서 휴리스틱 B를 기초로 하여 작업의 상호교환에 의한 해의 개선을 도모하는 2단계 휴리스틱 C를 결합하여 휴리스틱 BC를 구성하였다. 휴리스틱 BC는 휴리스틱 B보다 모두 11개의 문제에서 해를 개선시켰다.

또한 휴리스틱 BC의 결과를 상한가로하여 라그랑지안 이완문제(LR I)에 대한 서브그래디언트 기법을 적용한 결과, 30개 문제 중 28개의 문제에서 상한가와 일치하는 강력한 하한가가 도출됨을 발견하였다. 따라서 93% 정도의 문제에서 분단탐색법에 의존하지 않고도 최적해가 발견되었다.

이 결과는 De 와 Morton 이 기계대수 4 × 작업개수 10개 정도의 문제까지 최적해를 구할 수 있었던 것과 비교하면, 최적해를 발견할 수 있는 문제의 규모를 상당히 확장시켰다고 볼 수 있다. 이 실험에 이용한 컴퓨터는 486DX-80 PC 를 사용하였는 바 대형기종을 통해 실험한다면 보다 큰 규모의 문제도 해결할 수 있으리라고 추정된다.

---

1) 라그랑지안 이완문제는 안, 이 및 심의 연구를 참조

〈표 2〉 等速機械問題

실 험 문 제		EDD	LPT	A	B	I	BC	LB	최적해 확인여부
기계대수	작업개수								
2	10	52	59	33	33	55	33	33	○
	20	225	225	224	224	225	224	224	○
	30	326	325	322	322	327	322	322	○
	40	4373	428	425	426	435	425	425	○
	50	602	595	594	593	595	593	593	○
3	10	14	23	4	4	13	4	4	○
	20	138	131	129	127	133	125	125	○
	30	187	189	184	184	203	184	185	○
	40	260	263	254	254	254	254	254	○
	50	383	375	367	365	370	365	365	○
4	10	4	15	4	4	15	4	4	○
	20	95	90	80	80	86	79	79	○
	30	131	127	118	117	137	116	116	○
	40	173	174	168	168	174	166	166	○
	50	275	262	257	252	256	252	-	×
5	20	67	74	58	57	66	55	55	○
	30	85	91	81	81	94	78	78	○
	40	125	62	121	117	36	117	117	○
	50	209	193	190	186	199	184	-	×
6	20	50	68	41	41	46	41	41	○
	30	60	71	56	55	73	55	55	○
	40	97	111	87	86	107	85	85	○
	50	165	176	145	141	148	141	141	○
8	30	33	50	26	23	44	22	22	○
	40	58	73	47	46	58	46	46	○
	50	110	115	89	87	112	86	86	○
10	20	28	28	28	28	28	28	28	○
	30	19	44	19	19	19	19	19	○
	40	38	75	30	30	55	30	30	○
	50	75	87	59	57	75	57	57	○

각 휴리스틱 해법의 성과를 보다 정밀하게 비교하기 위하여 추가적으로 이속기계와 등속기계에 대한 실험문제 120개씩을 생성시켰다. 기계대수는 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10으로 다양화하고 작업개수도 5, 10, 15, ……, 100까지 다양화하였으며 작업시간 tij는 $1 \leq t_{ij} \leq 100$의 정수를, 납기 di는 $1 \leq d_i \leq 200$의 정수를 이산적 일양분포에 의거하

〈표 3〉 휴리스틱해와 최적해의 비율격차평균

	EDD	LPT	A	B	I	IA	IAC
이속기계	25.5	84.6	5.4	6.1	29.9	3.1	1.9%
등속기계	22.6	59.5	2.0	0.7	36.6		

여 난수를 발생시켜 실험문제를 구성하였다.

아래 〈표 3〉은 실험문제에서 각 휴리스틱 해의 최적해와의 비율격차(percentage deviation)를 나타낸다.

비율격차 $Z = \dfrac{Z_1 - Z_2}{Z_2} \times 100$ (Z_1 : 휴리스틱해의 값, Z_2 ; 最適解의 값[2])

이속기계의 경우 120개의 실험문제 중에서 98개의 문제에서 휴리스틱 IAC의 결과가 하한가와 일치하여 약 82%의 최적해 탐색율을 보였으며, 등속기계의 경우 109개의 문제에서 휴리스틱 BC의 결과가 하한가와 일치하여 91%의 최적해 탐색율을 보여 주었다.

이것은 예비실험의 경우와 거의 일치하며, 작업의 상호교환 단계를 거 친 2단계 휴리스틱 C는 계산시간이 다소 긴 반면에 거의 최적해에 근접하는 양질의 실행가능해를 산출하는 것으로 입증되었다.

De와 Morton의 실험결과와 비교하면 De와 Morton은 이속기계에서 A의 경우 7.2%, B의 경우 7.1%의 비율격차가 생긴다고 보았으나 본 연구에서의 실험결과에 의하면 A는 5.4%, B는 6.1%로 나타났다. 이 차이는 비교기준이 되는 최적해가 De와 Morton의 경우 기계대수 4 × 작업개수 20개 이하의 문제였으나 본 연구에서는 기계대수 10 × 작업개수 100개의 수준으로 확장되었기 때문이라고 생각한다. 그리고 휴리스틱 A와 I를 결합한 휴리스틱 IA는 비율격차가 3.1% 수준으로 더욱 개선되었으며, 여기에 2단계 휴리스틱 C를 가미한 휴리스틱 IAC는 80% 이상 최적해와 일치하며 하한가와 일치하지 않는 경우에도 그 비율격차가 대단히 작을 것으로 추정된다.

등속기계의 경우에는 이속기계와는 달리 휴리스틱 B의 결과가 가장 우수함이 입증되었고 비율격차도 0.7% 수준으로서 거의 최적해에 근접해 있다. 여기에 휴리스틱 C를 가미한 휴리스틱 BC는 90%이상 최적해와 일치함을 확인하였다.

2) 최적해의 값은 〈표 -1〉을 이용해서 구할 수 있는 값만을 포함시켰다.

V. 결 론

본 연구는 병렬처리기계상에서 최대납기지연시간(maximum lateness)을 최소화하는 휴리스틱해법과 최적해법을 알아보고 이의 효율성 개선을 위해 기계간 작업교환 방법을 적용하였다.

최대납기지연최소화문제는 총작업완료시간문제보다 납기(due date)라는 요소가 추가되므로 보다 복잡한 문제가 되며, 분할가공이 허용되지 않는 경우 이 문제도 당연히 난해성 조합적 최적화문제(NP-complete)가 된다. 그러므로 다항시간이내에 수렴하는 최적해법을 구하기는 사실상 불가능하기 때문에 우선 최적해에 최대한 근접하는 준최적해를 산출하는 휴리스틱해법을 개발했다. 다음으로 개발된 휴리스틱법의 성능을 평가하기 위하여 비교기준으로 필요한 최적해를 구하고자 라그랑지안 이완과 서브그래디언트법에 의한 효율적인 유사다항시간 최적해법(pseudo-polynomial time algorithms)을 구성하여 실용적인 범위이내의 문제에 대한 최적해의 모색을 시도하였다. 이 시도를 통해서 다음과 같은 연구성과를 거두었다.

첫째, 선납기우선(EDD), 최장시간작업우선(LPT)의 조화에 비중을 두는 휴리스틱 해법과 기회비용(opportunity cost)의 개념에 입각한 기계간 부하균등화(load equalization)를 최대한 실현한 다음, 이를 다시 EDD 순으로 재배열하는 해법(휴리스틱 I)에 대해서 고찰하고 이를 기존의 휴리스틱 A 와 결합시킨 후 나아가서 이것을 기초로 기계간 작업의 상호교환과정을 추가시키면 계산시간은 다소 늘어나지만 80% 이상의 문제에서 최적해와 일치하는 강력한 휴리스틱 해법이 됨을 확인하였다.

둘째, 위에서 구한 휴리스틱 IAC의 해(상한가)와 라그랑지안 이완문제의 쌍대최적해(하한가)값이 많은 문제에서 원문제의 최적해와 일치하여 막대한 계산시간이 소요되는 분단탐색의 절차를 거치지 않고도 최적해를 확인할 수 있었다.

셋째, 이러한 해법의 개발로 인하여 개인 컴퓨터 (486DX-80 PC) 수준으로 최적해를 구할 수 있는 문제의 규모와 비율이 크게 향상되었다.

넷째, 본 연구에서 시도한 작업교환에 의한 휴리스틱 해법이나 최적해법은 병렬처리 컴퓨터 상에서의 작업 스케줄링 문제나 생산현장의 실제 문제에 응용되어 시스템의 성과를 제고시키는 데 크게 기여할 수 있을 것이다.

參考文獻

1. 論文

안상형, 이송근, "병렬처리기계상에서 총작업완료시간의 최소화해법에 관한 연구, 한국경영과학회지, 제16권 제2호, 1991.

안상형, 이송근, 심인섭, 병렬처리기계에서 최대납기지연시간의 최소화에 관한 연구, 경영정보논총 제6권, 1997

Coffman, E., M.R. Garey and D.S. Johnson, "*An Application of Bin to Packing Multiprocessor Scheduling,*" SIAM J. Comput., 7, 1987, pp. 1-17.

P. De, T.E. Morton, "*Scheduling to Minimize Makespan on Unequal Parallel Processors*", J. ACM, 26, 1979.

McNaughton, R., "Scheduling with Deadlines and Loss Functions," Management Science, Vol.6, No.1, 1959

Geoffrion, A., "Lagrangean Relaxation and its Uses in Integer Programming," Math programming Study, Vol. 2, 1974, pp. 82-114.

Ibarra, O. and C.E.Kim, "Heuristic Algorithms for Scheduling Independent Tasks on Nonidentical Processors," J. of ACM, V.24, 1979, pp. 280-289.

Gonzales, T. and S. Sahni, "Preemptive Scheduling of Uniform Processor," J. of ACM, Vol.25, No.1, Jan., 1978, pp. 82-114.

2. 書籍

Baker, K., *Introduction to Sequencing and Scheduling, NewYork,* John Wiley and Sons, 1974.

C. H. Papadimitriou, K. steiglitz, Combinatorial Optimization, Prentice-Hall, 1982

Garey, M. and David S. Johnson, *Computers and Intractability,* W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1979.

H. T. Lewis, C. H. Papadimitriou, Element of the theory of computation, Prentice-Hall, 1981.

T. C. Hu, Combinatorial Algorithm, Addison_Welsley, 1982.