최적 좌석할당 모형*

南 益 鉉**

《目 次》

Ⅰ. 서 론

고객에게 판매가능한 좌석 수가 고정되어 있는 재화 내지는 서비스가 있고, 이를 구매하려는 여러 계층 혹은 범주(class)의 고객이 있는 경우를 주위에서 많이 살펴 볼 수 있다. 각 범주에 속한 고객들은 일반적으로 서로 다른 특성들을 지닌다. 이는 그 계층들이 여러 가지 수준의 공헌이익(contribution margin)을 제공하며, 다른 형태의 수요함수를 지닌다는 것을 의미한다. 가령 영화, 연극, 연주회 등의 공연의 좌석 예약시 할인가격이 적용되는 단체석과, 할인이 이루어지지 않는 개인석으로 구분되는 경우를 예로 들 수 있다. 또다른 예로서, 두 가지 범주의 고객에 대하여 서비스를 제공하는 항공업체를 생각해 보자. 그 중 한 범주는 사업 목적으로 항공편을 이용하는 고객들, 즉 업무차 항공기를 이용하는 고객을 대상으로 하고, 다른 범주는 여행 목적으로 항공서비스를 이용한다. 항공업체의 입장에서, 업무 목적 고객은 할인하지 않은(undiscounted) 가격으로도 탑승권(ticket)을 구입한다는 점에서 보다 높은 이익을 제공한다. 이 유형의 고객은 특정한 여객기편에 반드시 탑승할 수 있게 되는 것에 최우선 순위를 두며, 출발일자와 가까운 시기에 와서야 탑승하려는 여객기편을 결정하는 경향이 있다. 그러므로 이 유형의 수요는 어떠한 여객기편의 출발스케쥴 바로 직전에 갑자기 발생한다. 한편, 여행 목적 고객은 가장 저렴한 가격으로 항공서비스를 이용하려는 것에 초

* 본 연구는 서울대학교 경영대학 경영연구소의 연구비 지원에 의하여 수행되었음.
** 서울대학교 경영대학 조교수

점을 두기 때문에, 비용을 절약하기 위하여 어떤 여객기편의 스케쥴보다 훨씬 앞서 수요가 발생하는 경우가 대부분이다. 이러한 항공업체의 경우, 특정 여객기편에서 제공가능한 좌석의 수는 확정적(determninstic)이며 제한된 용량과 일치한다. 이러한 두 가지 범주의 고객에게 탑승권을 판매함에 있어서, 항공업체는 다음과 같은 문제에 직면한다. 어떤 여객기편의 출발시점 전에 여행목적 고객을 위한 할인된 탑승권에 대한 요구가 있을 경우, 요구에 맞춰 탑승좌석을 할당해야 할 것인가? 이러한 요구들을 모두 수용할 경우, 후에 발생할 업무목적 고객들을 수용하지 못함으로써 기회비용이 발생할 수 있다. 업무목적 고객들에 대한 공헌이익이 여행목적 고객들의 것보다 높기 때문에, 그러한 기회비용은 간과할 수 없을 것이다. 그러므로 기대 이익을 최대화시키기 위하여, 각 시점별로 여행목적 고객들에 대한 예약 수준의 한계수치를 결정해야만 한다.

이 글에서는, 항공업체의 수익관리(yield management)에서 매우 중요한 부분을 차지하는, 위에서 언급된 문제의 해를 찾아 보고자 한다.

Ⅱ. 모형의 가정

먼저 모형의 설정을 위하여 아래와 같은 정의를 받아들이기로 한다.

- D_{1t}와 D_{2t}는 각기 업무목적을 위한 수요와 여행목적의 수요를 표시한다. 이들은 두 개의 서로 다른 분포함수를 따르는 확률변수이며 상호독립적이다.
- u_t는 시점 t에서 범주 2에 대한 한계수치를 표현하는 결정변수이다. 시점 t에서 범주 2의 고객에게 u_t까지 탑승권을 판매할 수 있다.
- α는 할인요소로서 $\alpha = 1/(1+i)$로 나타나며, i는 단위시간당 이자율을 표시한다.
- p_t는 범주 2에 대한 탑승권 가격이며, 비행편 스케쥴에서 t단위시간 이전에 범주 2의 할인된 가격을 표현한다. 일반적으로 p_t는 t에 대한 감소함수이다.
- p는 범주 1의 고객에 대한 할인되지 않은 가격이며 모든 $t = 1, 2, \cdots, n$에서 p_t보다 크다고 가정한다.
- 예약하는 고객들은 예약시점에 탑승권에 대한 금액을 지불해야만 한다고 가정한다.
- S는 특정한 비행편에 대해, 예약을 받을 수 있는 탑승권의 수이다.
- s_t는 비행편 스케쥴에서 t단위시간 이전에 판매가능한 좌석의 수이다.

편의상 1일(day)을 시간단위로 사용하기로 한다. 그리고 어떤 비행편에 대한 탑승권의 예약과 판매는 비행일 n일 전에 시작하여 1일 전에 끝나는 것으로 가정하다.

Ⅲ. 모형의 설정

$p \geq p_t$ 이므로 t일에 있어서 좌석이 남아 있는 한, 범주 1 고객의 예약을 접수하는 것이 유리하다. 범주 2에 해당하는 고객수요에 대해서는, 일단 대기자명단(waiting list)에 남겨두었다가 t일이 끝날 시점에 u_t 내의 범위에서 그들을 수용하는 것으로 가정한다. 이는 t일의 종료시점에서 모든 예약이 확정되기 전까지는 범주 2 고객의 예약을 대기자 명단에 올려놓는다는 것을 의미하기 때문에 설득력이 있다.

이러한 상황 설정 하에 동적 계획법(dynamic programming)을 적용하여 해를 구한다. 순환식(recursive equation)을 구하기에 앞서, 상태변환(state transition)을 고려한다. 본 모형에서, 출발하기 t일 전에 확보 가능한 좌석 수를 표시하는 s_t는 상태변수(state variable)의 역할을 한다.

3.1 상태 변환

본 모형에서는 s_t를 이용하여 상태변환을 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$s_{t-1} = [\, s_t - d_{1t}]^+ - D_{2t} \wedge u_t$$

여기서 d_{1t}는 스케쥴 상의 여객기 출발일 t일 전의 범주 1 고객의 인식된 수요이다. $x > 0$일 때 $[x]^+ = x$를 의미하는데, $x \leq 0$이면 $[x]^+ = 0$으로 나타나며, $a \wedge b = \min\{a, b\}$이다.

여객기 출발일 t일 전에 s_t만큼의 좌석이 예약되지 않은 상태로 남아 있다면, 보다 높은 공헌이익을 보장하는 범주 1 고객에게 먼저 좌석을 제공하는 것이 유리하다. 이러한 상황은 s_t의 수 만큼의 좌석이 모두 예약될 때까지 계속될 수 있기 때문에 이러한 양은 $s_t \wedge d_{1t}$로 나타난다. 범주 2의 고객에게 예약되는 좌석의 수는 $D_{2t} \wedge u_t$로 나타난다. 따라서, $u_t \leq [s_t - d_{1t}]^+$ 인한 여객기 출발일로부터 $t-1$일전에 남아있는 좌석의 수는 아래와 같게 된다.

$$\begin{aligned} s_{t-1} &= s_t - s_t \wedge d_{1t} - D_{2t} \wedge u_t \\ &= [\, s_t - d_{1t}]^+ - D_{2t} \wedge u_t. \end{aligned}$$

또한, $u_t \leq [s_t - d_{1t}]^+$ 가 성립되는 경우, $s_{t-1} \geq 0$ 임을 알 수 있다.

3.2 순환식

이 부분에서는 최적해를 도출하기 위한 순환식을 구한다. 여기서 *는 최적임을 표시하며, u_t^* 는 s_t 로부터, 0을 포함하는 자연수로의 함수이다.

동적계획법의 첫 번째 단계에서, 구하고자 하는 문제는 아래와 같이 나타난다.

$$\Pi_1^*(s_1) = \max_{0 \le u_1 \le [s_1 - d_{11}]^+} \Pi_1(u_1 \mid s_1)$$
$$= p[d_{11} \wedge s_1] + E_{D_{21}}\{p_1[D_{21} \wedge u_1]\}.$$

u_1 의 실행가능영역(feasible region)은 범주 1에 할당한 후의 남은 좌석 수에 포함된다.

t 단계에서의 순환식은 다음과 같다.

$$\Pi_t^*(s_t) = \max_{0 \le u_t \le [s_t - d_{1t}]^+} \Pi_t$$

위의 목적함수식은 다음과 같이 Π_{t-1}^*를 포함하는 순환식으로 표시할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Pi_t(u_t \mid s_t) &= p[d_{1t} \wedge s_t] + E_{D_{2t}}\{p_t[D_{2t} \wedge u_t]\} \\ &\quad + \alpha E_{D_{2t}} \Pi_{t-1}^*([s_t - d_{1t}]^+ - D_{2t} \wedge u_t) \\ &= p[d_{1t} \wedge s_t] + E_{D_{2t}}\{p_t[D_{2t} \wedge u_t] + \alpha \Pi_{t-1}^*([s_t - d_{1t}]^+ - D_{2t} \wedge u_t)\}.\end{aligned}$$

여기에서 $p[d_{1t} \wedge s_t] + E_{D_{2t}}\{p_t[D_{2t} \wedge u_t]\}$는 출발 t일 전의 탑승권 판매로 인한 기대수익이다. 그리고 $E_{D_{2t}} \Pi_{t-1}^*([s_t - d_{1t}]^+ - D_{2t} \wedge u_t)$는 s_t가 주어지고 u_t를 택할 때 출발 $t-1$일부터 발생하는 최적 기대수익이다. 이는 Π_t^* 을 구함에 있어서 $s_{t-1} = [s_t - d_{1t}]^+ - D_{2t} \wedge u_t$ 일 때 $t-1$로부터의 최적목적함수값 Π_{t-1}^* 을 목적함수에 포함시키는 것을 의미한다.

후방순환(backward recursion)을 n번 적용하면, $\Pi_n^*(S)$를 통해 최적 기대 목적함수값을 찾아낼 수 있다.

Ⅳ. 예 제

이 부분에서는 모형의 간단한 예제가 제시될 것이다. 기대값(expectation)을 구하는 부담을 줄이기 위해, 수요는 확정적이라고 가정한다. 예제의 데이터는 다음과 같다.

t	D_1	D_2
3	2	7
2	4	5
1	8	3

사업목적 고객에 대한 탑승권의 가격은 $p = 1$로, 여행목적 고객에 대한 할인된 가격은 $p_t = 0.9^t$로 나타낸다. 할인율(discount factor)은이다. $\alpha = 0.8$이를 기준으로 하여 여기에서는 $S = 20$인 경우와 $S = 15$인 경우를 계산해 본다.

단계 1:

$$\max \quad \Pi_1(u_1 \mid s_1) = 8 \wedge s_1 + 0.9[3 \wedge u_1]$$

$$\text{subject to} \leq u_1 \leq [s_1 - 8]^+$$

위에서 다음과 같은 값들을 얻을 수 있다.

$$\Pi_1^* = 10.7 \qquad u_1^*(s_1) = s_1 - 8 \qquad \text{if } s_1 \geq 11$$

$$\Pi_1^* = 0.8 + 0.9 s_1 \qquad u_1^*(s_1) = s_1 - 8 \qquad \text{if } 8 \leq s_1 < 11$$

$$\Pi_1^* = s_1 \qquad u_1^*(s_1) = 0 \qquad \text{if } s_1 < 8.$$

단계 2:

$$\max \quad \Pi_2(u_2 \mid s_2) = 4 \wedge s_2 + 0.9^2[5 \wedge u_2] + 0.8 \quad \Pi_1^*([s_2 - 4]^+ - 5 \wedge u_2)$$

$$\text{subject to } 0 \leq u_2 \leq [s_2 - 4]^+$$

이 문제를 풀려면 (u_2, s_2) 공간을 적절하게 나누어 목적함수 값을 계산해야만 한다.

범위	Π_2와 u_2^*
$s_2 \le 4$	$u_2^* = 0$, $\Pi_2(s_2) = s_2$
$u_2+4 \le s_2 \le 9$	$u_2^* = s_2-4$, $\Pi_2^*(s_2) = 0.81s_2+0.76$
$9 \le s_2 \le u_2+12$, $u_2 \le 5$	$u_2^* = 5$, $\Pi_2^*(s_2)=0.8s_2+0.85$
$u_2+12 \le s_2 \le u_2+15$, $s_2 \le 17$, $u_2 \le 5$	$u_2^* = s_2-12$, $\Pi_2^*(s_2)=0.81s_2-0.68$
$17 \le s_2 \le u_2+15$, $u_2 \le 5$	$u_2^*=5$, $\Pi_2^*(s_2)=0.72s_2+2.21$
$u_2+15 \le s_2 \le 20$, $u_2 \le 5$	$u_2^*=s_2-15$, $\Pi_2^*(s_2)=0.81s_2+0.41$
$20 \le s_2$, $u_2 \le 5$	$u_2^*=5$, $\Pi_2^*(s_2)=16.61$
$u_2+4 \le s_2 \le 17$, $u_2 \ge 5$	u_2^*=실행가능한 모든 값, $\Pi_2^*(s_2)=0.8s_2+1.3$
$u_2+4 \le s_2 \le 20$, $u_2 \ge 5$	u_2^*=실행가능한 모든 값, $\Pi_2^*(s_2)=0.72s_2+2.66$
$u_2+4 \le s_2$, $u_2 \ge 5$	u_2^*=실행가능한 모든 값, $\Pi_2^*(s_2)=17.06$

위 표의 결과를 이용하여, s_2의 값에 따라 $\Pi_2^*(s_2)$을 도출할 수 있다.

s_2의 범위	u_2^*	Π_2^*
$s_2 \le 4$	0	s_2
$4 \le s_2 \le 9$	s_2-4	$0.81s_2+0.76$
$9 \le s_2 \le 17$	$5 \le u_2^* \le s_2-4$	$0.8s_2+1.3$
$17 \le s_2 \le 20$	$5 \le u_2^* \le s_2-4$	$0.72s_2+2.66$
$20 \le s_2$	$5 \le u_2^* \le s_2-4$	17.06

단계 3:

$$\max \quad \Pi_3(u_3 \mid s_3) = 2 \wedge s_3 + 0.9^3[7 \wedge u_3] + 0.8 \quad \Pi_2^*([s_3-2]^+ - 7 \wedge u_3)$$

subject to $0 \leq u_3 \leq [\, s_3 - 2]^+$.

Case 1: $S = 20$ 일 때

$$u_3^* = 7, \quad 5 \leq u_2^* \leq 7, \quad u_1^* = 0, \quad \Pi_3^* = 15.183$$

여객기 출발일 t 일 전에 범주 i 의 고객에게 판매할 탑승권(좌석)의 수는 b_{it} 로 표시하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$b_{13} = 2, \quad b_{23} = 7, \quad b_{12} = 4, \quad b_{22} = 5, \quad b_{11} = 2, \quad b_{21} = 0.$$

Case 2: $S = 15$ 일 때

$$u_3^* = 4, \quad u_2^* = 5, \quad u_1^* = 0, \quad \Pi_3^* = 11.716$$

$$b_{13} = 2, \quad b_{23} = 4, \quad b_{12} = 4, \quad b_{22} = 5, \quad b_{11} = 0, \quad b_{21} = 0.$$

결과를 해석해 보면, Case 2의 경우, 구한 해(solution)에 따르면 시점 3에서 수요가 7이더라도 범주 2의 고객에 대해서는 탑승권을 4까지만 판매해야 한다.

V. 모형의 확장

지금까지는 S가 예약가능한 좌석 수로 표시되었다. 하지만 여객기 편의 탑승권의 수는 일반적으로 실제 좌석 수보다 많다. 이러한 이유로, 비행 당일에 탑승하지 않는 고객(no show)에 대비하여 최적의 초과예약(over booking)의 수를 결정하는 것이 필요하게 된다. 다른 한편으로는, 예약을 거절당한 고객에 대한 신용(good will)의 상실을 비용으로 고려하여 본 논문의 모형에 포함시킴으로써 모형을 보다 일반화시키는 방향도 생각할 수 있다. 범주 i의 거절된 고객에 대한 신용상실 비용(penalty cost)을 l_i로 표시하면, 아래와 같이 순환식을 수정할 수 있다.

$$\begin{aligned}\Pi_t(\, u_t \mid s_t) \;&= p[d_{1t} \wedge s_t] - l_1[d_{1t} - s_t]^+ + E_{D_{2t}}\{p_t[D_{2t} \wedge u_t] - l_2[D_{2t} - u_t]^+\} \\ &+ \alpha E_{D_{2t}} \;\; \Pi_{t-1}^*([s_t - d_{1t}]^+ - D_{2t} \wedge u_t).\end{aligned}$$

모델에 있어서, 매일 두 개의 확률변수(D_{1t}과 D_{2t})를 갖게 된다. 하지만 순환식에는 D_{2t}만이 포함되었음을 볼 수 있다. 이것은 $p \geq p_t$이기 때문인데, 이는 범주 1의 고객이 범주 2 보다 더 많은 이익을 제공함에서 기인한다. 모든 t에 대해서 $p \geq p_t$가 만족되지 못하면, 순환식에서 두 개의 상태변수, 두 개의 의사결정 변수, 두 개의 기대치(expectation)를 취하는 등으로 모형을 수정해야만 한다.

이러한 두 개의 아이디어를 통합시키면 본 모형을 아래와 같이 확장시킬 수 있다. 확장된 모형을 제시하기에 앞서, 몇 개의 정의를 추가한다.

- 연구 대상인 비행편의 실제 좌석 수를 $\overline{S}$로 정의한다.
- 판매된 탑승권의 총 수는 $S-s_1+d_{11}\wedge s_1+D_{21}\wedge u_1$이며, 이를 X로 표시한다.
- 총 X만큼의 탑승권이 판매되었다고 가정할 때 비행스케쥴 당일에 실제로 표를 가지고 공항에 나온 고객의 수는 $Y(X)$라고 표시한다.
- 초과예약(overbooking)으로 인하여 탑승권을 가지고 있음에도 당일 비행편에 탑승하지 못하게 되는 한 명의 고객에 대한 비용(penalty cost)을 l로 표시하며, l은 l_1이나 l_2보다 훨씬 크게 나타난다.

편의상, 표를 가지고도 당일 공항에 나오지 않는 것(no show)는 고객의 범주(class)와는 무관하다고 가정한다.

확장된 모형에서, 단계 1의 목적함수는 아래와 같다.

$$\Pi_1(u_1 \mid s_1) = E_{D_{21}}E_{Y(X)}[p[d_{11}\wedge s_1]+p_1[D_{21}\wedge u_1]-\alpha l\,[Y(X)-\overline{S}]^+].$$

단계 n에서, $\Pi_n^*(S)$의 목적함수값을 찾을 수 있다. S가 상수인 전형적인 동적계획법과는 달리, 이 모형에서, 판매가능한 탑승권의 수인 S는 u와 마찬가지로 의사결정변수임에 유의해야 한다. 그러므로, 이 모형에서는 S를 구하기 위해 일반적인 경우보다 하나 더 많은 단계(단계 $n+1$)를 추가한다. 단계 $n+1$은 아래와 같다.

$$\max_{S} \quad \Pi_n^*(S)$$

$\Pi_n^*(S)$를 최대화시키는 S의 값은 초과예약을 포함하는 탑승권의 최적 숫자를 의미한다. 이는 최적의 초과예약(overbooking) 숫자를 구하는 과정으로, 기존 연구(남익현, 1996)을 응용한 것이라 할 수 있다.

VI. 결 론

본 논문에서는 공헌이익의 정도가 상이하고 수요형태가 서로 다른 복수의 고객 범주가 있을 때 이들로부터의 판매수익을 어떻게 최대화할 것인지를 다루었다. 특별히, 비행이 예약을 상정하고 업무목적 고객과 여행목적 고객의 경우에 대해 시간의 흐름에 따라 두 가지 범주의 고객에 대한 동적계획법을 이용한 할당을 구하는 방법을 살펴 보았다. 각 범주는 다른 수준의 공헌이익을 제공하며, 각기 다른 수요함수를 갖는다. 이러한 특성을 고려하여, 각 범주별로 최적 용량을 결정함으로써 기대수익을 최대화시키고자 하였다. 각 시간 단위별로 최적의 사결정 규칙을 도출함에 있어서는 동적계획법을 사용하였다. 이 모형의 확장된 형태로서, 비행당일에 고객이 탑승하지 않은 경우(no show)를 고려하는 초과예약 모형도 논의해 보았다.

이 연구의 후속 연구방향으로는, 이 모형에 기초하여 항공업체에서 이용될 수 있는 알고리즘(algorithm)을 개발하는 것을 생각할 수 있다. 또한 현재 사용되고 있는 수익관리시스템(YMS: Yield Management System)과의 비교연구도 필요하리라 본다.

참 고 문 헌

Dimitri P. Bertsekas, *Dynamic Programming and Stochastic Control*, Academic Press, 1976.

Steven Nahmias, *Production and Operation Analysis*, 2nd ed., Irwin, 1993.

Sheldon M. Ross, *Introduction to Probability Models*, Academic Press, 1985.

Elizabeth L. Williamson, *Airline Network Seat Inventory Control*, Flight Transportation Labaratory, 1992.

남익현, "최적 Over-booking 모형," 「경영논집」 제30권 3,4호, 서울대학교 경영대학 경영연구소, 1996, pp. 138-147.