수리계획모형의 간결성과 중복성에 관한 연구*

안 상 형**

《目 次》

요 약

주어진 문제를 해결하기 위해 수리적 접근법을 사용할 경우 수리모형의 간결성이 요구되는 경우가 많다. 모형을 이해 시켜야할 경우 간결성은 중요해진다. 실제 많은 수리모형의 해법의 효율성은 모형을 구성하는 제약식의 수와 직접적인 연관성을 가지고 있기 때문에 가능한 제약식의 수가 적도록 모형을 구성하는 것이 요청된다.

그러나 모형이 정수계획법으로 정형화되면 선형계획법과는 달리 모형의 해를 구하는 방법으로 선형계획법의 심플렉스 해법과 같은 일반적인 해법이 존재하지 않기 때문에 해법의 효율성을 위해 제약식의 중복성(redundancy)이 필요한 경우가 있을 수 있다. 본 논문에서는 모형을 구성하는 제약식의 중복성을 활용하여 해를 효율적으로 도출하는 방법을 모색해보도록 한다.

I. 서 론

주어진 문제를 해결하기 위해 수리적 접근법을 사용할 경우 수리모형의 간결성이 요구되는

* 본 연구는 서울대학교 경영대학 경영연구소의 연구비 지원에 의해 수행되었음

** 서울대학교 경영대학 교수

경우가 많다. 특히 제약식의 중복성은 되도록 회피되어 모형이 간결해지는 것이 바람직하다. 본 논문에서는 모형을 구성하는 제약식의 중복성을 활용하여 해를 효율적으로 도출하는 방법을 모색해보도록 한다.

본 절에서는 수리모형 중에서 많이 알려진 문제인 Traveling Salesman Problem, Simple Plant Location Problem, Capacitated Plant Location Problem에 대한 다양한 형태의 수리모형을 제시한다.

1. Traveling Salesman Problem

(TSP1)

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} \qquad (1)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad i = 1,\ldots,n \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \qquad j = 1,\ldots,n \qquad (3)$$

no sub-tours allowed (4)

$$x_{ij} = 0,1 \qquad (5)$$

제약식 (2)와 (3)은 각각의 도시는 단 한번씩만 방문되도록 해주는 역할을 한다. sub-tour를 금지하는 제약식 (4)를 수리적으로 표현하는 방법은 여러 가지가 있을 수 있다. 예를 들면 제약식 (4)는 다음 식으로 대체 될 수 있다.

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} \leq |S| - 1 \qquad \forall\ S \in N \qquad (4a)$$

또는

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} \geq 1 \qquad \forall\ S \in N \qquad (4b)$$

Traveling Salesman Problem을 (4a)나 (4b)의 제약식을 사용하여 integer program으로 정형화하면 다음과 같다.

(TSP2)

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

s.t. (2), (3), (4a), (5)

또는

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

s.t. (2), (3), (4b), (5)

이 경우 (4a)나 (4b)는 2^n-2개의 제약식을 갖게된다.

sub-tour를 금지하는 제약식 (4)를 아래와 같이 표현하면 Traveling Salesman Problem을 간결한 모형으로 표현할 수 있다.

$$u_i - u_j + nx_{ij} \leq n - 1 \qquad i, j = 2, \ldots, n \qquad (4c)$$

Traveling Salesman Problem을 (4c)의 제약식을 사용하여 mixed integer program으로 정형화하면 다음과 같다.

(TSP3)

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

s.t. (2), (3), (4c), (5)

이 경우 (4c)는 $(n-1)^2$개의 제약식을 갖게되므로 (4a)나 (4b)에 비할 수 없을 정도로 간결하게 된다.

2. Simple Plant Location Problem

Location 문제에서 가장 잘 알려진 문제 중의 하나는 Simple Plant Location Problem이다. 이 모수와 변수를 다음과 같이 정의하면

$I = \{1, 2, \ldots, m\}$: *a set of clients*

$J = \{1, 2, \ldots, n\}$: *a set of potential locations* for *establishing facilities*

f_j : *location j*에 *facility*를 *establish* 하는 비용

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{if } \textit{a facility is establised at location } j \\ 0, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ if } \textit{customer } i \textit{ is served by a facility established at location } j \\ 0, \textit{ otherwise} \end{cases}$$

Simple Plant Location Problem은 다음과 같이 정형화된다.

(SPLP1)

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j\, y_j \qquad (6)$$

$$\begin{array}{llllll} \text{s.t.} & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} & & = 1 & i \in I & (7) \\ & -x_{ij} & + & y_j \ \geq 0 & i \in I,\ j \in J & (8) \\ & x_{ij} & & \geq 0 & i \in I,\ j \in J & (9) \\ & & & y_j \in \{0, 1\} & j \in J & (10) \end{array}$$

제약식 (7)은 모든 customer의 수요는 반드시 충족되도록 해주는 역할을 하며, 제약식 (8)은 facility가 설립되지 않은 location으로부터는 고객이 서비스를 받지 못하도록 해주는 역할을 한다. 제약식 (8)은 n · m개의 제약식을 갖는다. 제약식 (8)을 고객의 집합에 대해 aggregate하면 아래의 제약식 (8b)와 같은 형태로 표시된다.

$$-\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \quad + \quad m\, y_j \ \geq 0 \qquad j \in J \qquad (8b)$$

Simple Plant Location problem을 제약식 (8b)로 정형화하면 다음과 같이 된다.

(SPLP2)

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j\, y_j$$

s.t. (7), (8b), (9), (10)

제약식 (8b)는 n개의 제약식을 가지므로 (6), (7), (8), (9), (10)으로 정형화한 경우 보다 훨씬 간결한 형태로 표시된다.

3. Capacitated Plant Location Problem

Simple Plant Location Problem에서 각 plant의 공급량에 제한이 있으면 Capacitated Plant Location Problem이 된다. 모형에 사용될 모수와 변수를 다음과 같이 정의하면

$I = \{1, 2, \ldots, m\}$: *a set of customers*

$J = \{1, 2, \ldots, n\}$: *a set of potential locations* for *establishing facilities*

d_i : *customer* i의 수요, s_j: *location* j의 공급 가능량

f_j : *location* j에 *facility*를 설립하는 비용

x_{ij} : *volume shipped from location* j *to customer* i

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{if } \textit{a facility is established at location } j \\ 0, & \textit{otherwise} \end{cases}$$

Capacitated Plant Location Problem은 다음과 같이 Mixed Integer Program으로 정형화된다.

(CPLP1)

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j y_j \qquad (11)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = d_i \qquad i \in I \qquad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{m} -x_{ij} + s_j y_j \geq 0 \qquad j \in j \qquad (13)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i \in I,\ j \in J \qquad (14)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \qquad j \in J \qquad (15)$$

제약식 (12)는 수요제약식으로 각 facility에서 고객 i에 수송되는 수송량의 합계가 수요 d_i와 같을 것을 요구하는 것이며, 제약식 (13)은 공급 제약식으로 facility j에서 각 고객에게 수송되는 수송량의 합계는 facility j의 공급을 초과하지 않도록 해준다.

위의 모형에 제약식 (16)을 추가해보자.

$$-x_{ij} + d_i y_j \geq 0 \qquad i \in I,\ j \in J \qquad (16)$$

(CPLP2)

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j y_j$$

s.t. (11), (12), (13), (14), (15), (16)

제약식 (16)은 제약식 (12), (13), (15)에 의해 이미 표현되어 있기 때문에 중복 제약식

이 된다.

(CPLP1)에 제약식 (17)을 추가한 것을 (CPLP3)으로 놓도록 하자.

$$\sum_{j=1}^{n} s_j y_j \geq \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = D(= \text{총수요}) \quad (17)$$

(CPLP3)

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j\, y_j$$

s.t. (11), (12), (13), (14), (15), (17)

제약식 (17)은 제약식 (12), (13), (15)에 의해 이미 표현되어 있기 때문에 중복제약식이 된다.

고객 i의 수요 전체가 어느 한 location에 의해서 공급되어야 한다면 single source Capacitated Plant Location Problem이 된다. Single source Capacitated Plant Location Problem은 다음과 같이 정형화된다.

(Single Source CPLP)

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j\, y_j \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t.} \quad & \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1 && i \in I && (18)\\
& -x_{ij} + y_j \geq 0 && i \in I,\ j \in J && (19)\\
& \sum_{i=1}^{m} d_i\, x_{ij} \leq s_j && j \in J && (20)\\
& x_{ij} \in \{0, 1\} && i \in I,\ j \in J && (21)\\
& y_j \in \{0, 1\} && j \in J && (22)
\end{aligned}$$

Ⅱ. 중복성과 해법의 효율성

1. Travelling Salesman Problem

앞 절에서 정형화한 Traveling Salesman problem을 정리하면 다음과 같다.

(TSP2)

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

s.t. (2), (3), (4a), (5)

또는

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

s.t. (2), (3), (4b), (5)

(TSP3)

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij}$$

s.t. (2), (3), (4c), (5)

(TSP2)와 (TSP3)은 모두 정수계획모형이므로 Branch and Bound 기법을 사용하여 해를 구하게된다. 이 경우 정수제약식인 (5)을 이완시켜 선형계획모형으로 하한을 구한다. 또한 sub-tour 금지 제약식을 모형에 직접 포함시키지 않고 문제를 푼 후 sub-tour가 발생하는 경우 그 sub-tour를 금지하는 제약식을 하나씩 추가하는 형식으로 Branch and Bound를 구성하는 것이 보통이다. 이 경우 제약식 (4c)는 앞 절에서 밝힌 바와 같이 제약식 (4a), (4b)에 비해 훨씬 간결하나 실제 해를 구하는 과정에서 효율성 면에서는 아무런 의미를 갖지 못하게 된다.

2. Simple Plant Location Problem

Simple Plant Location Problem의 모형은 앞 절에서 밝힌 바와 같이 disaggregate version인 (SPLP1)과 aggregate version인 (SPLP2)로 나누어진다.

(SPLP1)

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j\, y_j$$

s.t. (7), (8), (9), (10)

(SPLP2)

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j\, y_j$$

s.t. (7), (8b), (9), (10)

(SPLP1)과 (SPLP2) 모두 정수계획법이므로 최적해를 구하기 위해서는 궁극적으로 Branch and Bound 기법을 사용해야 된다. 이 경우 정수 제약식인 (10)을 이완시켜 선형계획법으로 구한 하한을 Branch and Bound 에 포함시켜야 한다. 제약식 (8b)는 m개의 제약식을 가지므로 n · m개의 제약식을 가지는 제약식 (8)에 비해 훨씬 간결하나 정수제약식을 이완시켰을 경우 제약식 (8b)는 (8)에 비해 훨씬 loose 해져서 disaggregate version 보다 훨씬 약한 하한을 제공하게 된다. 따라서 Branch and Bound 기법에서는 disaggregate version이 aggregate version에 비해 훨씬 효율적으로 작용을 한다.

3. Capacitated Plant Location Problem

Mixed Integer Program으로 정형화된 Capacitated Plant Location의 두 번째 모형인 (CPLP2)는 앞 절에서 밝힌 대로 중복 제약식인 (16)을 포함하고 있다. 제약식 (16)은 제약식 (12)와 (13)에 의해 이미 표현되어 있기 때문에 중복 제약식이다. 따라서 Mixed Integer Program에서는 아무런 의미를 갖지 못한다.

(CPLP1)의 최적해를 구하기 위한 Branch and Bound 기법에서 하한을 얻는 방법은 정수제약식인 (15)를 이완시킨 뒤 선형모형을 푸는 것과 (CPLP1)의 수요제약식 (12)를 승수(multiplier) ui로 곱한 후 이완시킨 Lagrangean Relaxation이 있다.

LP yj의 정수제약식을 이완시킨 LP Relaxation은 다음과 같다.

(CPLP1)의 LP relaxation

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j\, y_j \qquad (11)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = d_i \qquad i \in I \qquad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{m} - x_{ij} + s_j y_j \geq 0 \qquad j \in J \qquad (13)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i \in I,\ j \in J \qquad (14)$$

$$y_j \geq 0 \qquad j \in J \qquad (15L)$$

(CPLP2)의 LP relaxation

$$\text{Min } z = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j\, y_j$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = d_i \qquad i \in I \qquad (12)$$

$$\sum_{i=1}^{m} - x_{ij} \quad + \quad s_j y_j \geq 0 \qquad j \in J \qquad (13)$$

$$- x_{ij} \quad + \quad d_i y_j \geq 0 \qquad i \in I,\ j \in J \quad (16)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i \in I,\ j \in J \quad (14)$$

$$y_j \geq 0 \qquad j \in J \qquad (15L)$$

LP 모형을 풀어 하한을 구하는 경우에는, Mixed Integer Program 모형인 (CPLP1)에서는 (12), (13), (15) 때문에 아무런 역할을 하지 못하던 제약식 (16)이 (CPLP2)의 LP relaxation에서는 역할을 하게되어 (16)이 없을 때 보다 강력한 LP 하한을 제공하게 된다. 따라서 Branch and Bound 기법을 사용하여 최적 정수해를 구할 때에는 (CPLP2)가 보다 효율적이다.

(CPLP1)의 Lagrangean relaxation을 구하기 위해 수요제약식 (12)를 승수(multiplier) u_i로 곱한 후 이완시키면 다음과 같이 된다.

LR(u)

$$\text{Min } z(u) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j\, y_j + \sum_{i=1}^{m} u_i (d_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij})$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} - u_i)\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j\, y_j + \sum_{i=1}^{m} d_i u_i \qquad (23)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} - x_{ij} \quad + \quad s_j y_j \geq 0 \qquad j \in J \qquad (13)$$

$$x_{ij} \geq 0 \qquad i \in I,\ j \in J \quad (14)$$

$$y_j \in \{0, 1\} \ j \in J \qquad (15)$$

주어진 Lagrangean Multiplier u_i = (u_1', u_2',...u_n')에 대해 $\sum_{i=1}^{m} d_i u_i$ 는 상수이므로 $L(u_i)$ = $z(u_i)$ - $\sum_{i=1}^{m} d_i u_i$ 이라 두면 LR(u_i)는 다음과 같이 정리된다.

LR(u_i)

$$\text{Min } L(u_i) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} - u_i)\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j\, y_j \qquad (23)$$

s.t. (13), (14), (15)

LR(u_i)의 해는 다음과 같이 구해진다.

$V_j(u) = \min_{i\in I} (c_{ij} - u_i)$ $\quad j\in J$라 두면

1) $If\ V_j(u) > 0,\quad then\ set\ y_j = 0\ j\in J$ and $x_{ij} = 0 \quad i\in I,\ j\in J$

2) $If\ V_j(u) < 0,$

$Let\ I_j(u) = \{\ i \mid V_j(u) \le c_{ij} - u_i \le 0\ \} \quad \forall j$

(1) $If \sum_{i\in I_j(u)} (c_{ij} - u_i) \le f_j,$

$then\ set\ y_j = 1 \quad \forall j\in V_j(u), \quad x_{ij} = 1 \quad \forall i\in I_j(u), j\in V_j(u)$

$set\ y_j = 1 \quad \forall j\notin V_j(u), \quad x_{ij} = 1 \quad \forall i\in I,\ j\notin V_j(u)$

(2) $If \sum_{i\in I_j(u)} (c_{ij} - u_i) > f_j,$

$then\ set\ y_j = 0\ j\in J$ and $x_{ij} = 0 \quad i\in I,\ j\in J$

(CPLP3)의 Lagrangean relaxation을 구하기 위해 수요제약식 (12)를 승수(multiplier) u_i로 곱한 후 이완시킨 후 (CPLP1)과 같은 절차를 거치면 다음과 같이 된다.

LR(u_i)

$$\text{Min } L(ui) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (c_{ij} - u_i)\, x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} f_j\, y_j \qquad (23)$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{m} - x_{ij} + s_j y_j \ge 0 \qquad j\in J \qquad (13)$$

$$\sum_{j=1}^{n} s_j y_j \ge D \qquad (17)$$

$$x_{ij} \ge 0 \qquad i\in I,\ j\in J \qquad (14)$$

$$y_j \in \{0,1\}\ j\in J \qquad (15)$$

Mixed Integer Program에서 중복제약식이던 (17)이 Lagrangean Relaxation에서는 역할을 하게 된다. 따라서 LR(u_i)의 해를 구하는 절차가 (CPLP1)의 경우와 비슷하게되나 $V_j(u)$의 값에 상관없이 제약식 (17)을 만족할 때까지 강제적으로 y_j를 1로 만들어야 하므로 (CPLP1)의 Lagrangean Relaxation 보다 훨씬 강력한 하한을 Branch and Bound 기법 아래서 제공하게 된다.

Ⅲ. 결 론

주어진 문제를 해결하기 위해 수리적 접근법을 사용할 경우 수리모형의 간결성은 당연한 것으로 요구되고 있다. 그러나 많은 문제의 경우 정수계획법으로 정형화되는데, 정수계획 모형의 경우 최적해를 구하는 일반적인 방법이 존재하지 않기 때문에 최적해를 구하기 위해 Branch and Bound 기법을 사용하는 것이 일반적이다. Branch and Bound 기법의 효율성은 최소화의 경우 강력한 하한을 효율적으로 구하는 것과 직접적으로 관련을 가지고 있다. 하한을 구하는 일반적인 방법으로 LP relaxation과 Lagrangean relaxation이 많이 사용되고 있다.

본 연구에서는 정수계획법에서는 아무런 역할을 못하는 중복제약식을 이완 모형에서 활용하는 방안을 모색하였다. 정수제약을 이완시킨 LP relaxation이나, 모형의 구조를 복잡하게 만드는 제약식을 이완시킨 Lagrangean relaxation에 정수계획모형에서는 중복되는 제약식을 추가함으로써 보다 강력한 하한을 도출하는 방안을 모색하였다.

특히 수리계획 모형의 대표적인 Traveling Salesman Problem 및 Location Problem의 대표적 형태인 Simple Plant Location Problem과 Capacitated Plant Location Problem의 다양한 formulation을 제시했다. 또한 각 모형의 formulation을 LP로 이완시켰을 경우와 Lagrangean Relaxation을 했을 경우에 보다 강력한 하한을 제공해 주는 중복제약식을 제시하였다.

참 고 문 헌

Akinc. U., and Khumawala. M. "An Efficient Branch and Bound Algorithm for the Capacitated Warehouse Location Problem." Mgt. Sc. 23. 6 (1977). 585-94.

Attains. R. J., and Shriver R H. "New Approach to Facilities Location." Harvard Bus. Rev. 46 (May-June 1968). 10-79.

Baker. 3. M. "Linear relaxations of the capacitated warehouse location problem." Jour. of Opnl. Rec. Soc. 33 (1982). 475-479.

Bartezzaghi E., A. Colorni. F. C Palermo. "A search tree algorithm (or plant location problems." Euro. J. of Opnl. Res. 7 (1981),371-379.

Bitran, G. R, Chandru Vijaya, Sempolenski, D. 2., and Shapiro, J. p. "Inverse Optimisation: An Application to the Capacitated Plant Location Problem." Mgt. Sc. 27, 10 (Oct 1981), .

Christofides N., and Beasley J. 2. "An algorithm for the capacitated warehouse location problem." European J. Oper. Res. 12, 1 (1983), 19-28.

Cooper, L. "Location-Allocation Problems." Opns. Res. 11 (1963), 331-343.

Cornuejols G., Fisher, M. L., and Nemhauser, G. L. "Location of Ban Accounts to Optimize Float An Analytic Study of Exact and Approximate Algorithms." Mgt. Sc. 13 (1977), 789-810.

Coruejols G., Nemhauser G. L., and Wolsey L 4. The uncapacitated Facility Location Problem. Tech. Rept MSRR 493, Grad. Sch. of Ind Admn., CMU, 1983.

Davis p. A, and Ray 1. L "A branch and bound algorithm for the capacitated plant facilities location problem." Naval Res. Log. Ouart. 16 (1969), .

Ellwein, k B. and Gray, p. "Solving Fixed Charge Location-Allocation Problem with Capacity and Configuration Constraints." AIIE Trans. 3, 4 (Dec. 1971), 290-98.

Eschenbach T. G., and Carlson, t C. The Capacitated Multi-period Location-Allocation Problem. Tech. Rept. 75-27, System Opt.L Lab., Stanford Univ., Oct, 1975.

Feldman, E., Lehrer, F. A., and Ray, 1. L. "Warehouse Locations Under Continuous Economies of Scale." Mgt. Sc. 2 (May 1966), .

Fisher, M. L. "The Lagrangean Relaxation Method for Solving Integer Programming Problems." Mgt. Sc. 27, 1 (1981), 1-18.

Geoffrion, A. M., and McBride, R "Lagrangean relaxation applied location problems." AIIW Trans. 10 (1978), 40-47.

Khumawala, B. M. "An efficient branch and bound algorithm for the capacitated warehouse location problem.", fr. fr. .f3, 6 (1977), 585-596.

Krarup J. and Pruzan, p. M. "The simple plant location problem: Survey and synthesis." Euro. J. of Opnl. Res. 12 (1983), 36-81

Nagelhout R. V. A Study of Total Cost and Bottleneck Single Source Transportation and Location problems with Applications. Ph.D. Th., Grad. Sch. of Ind. Admn., CMU, 1980.

Nauss, A M. "An improved algorithm for the capacitated facility location problem." J. of Opnl. Res. Soc. 29 (1978),1195-1201.

Sa, G. "Branch and Bound and Approximate Solutions to the Capacitated Plant Location Problem." Oper. Res. 17, 6 (Nov.-Dec. 1969), 1005-1016.