차익거래와 재무이론

조 재 호*

〈目 次〉

Ⅰ. 서 언

대체적 투자자산 A와 B가 시장에서 서로 다른 가격에 거래될 경우 과대 평가된 자산을 공매하고 과소 평가된 자산을 매입함으로써 자체자금과 위험을 전혀 부담하지 않고 이익을 실현하는 투자전략을 차익거래(arbitrage)라 한다. 여기서 대체적 자산이라 함은 두 자산으로부터 발생되는 미래수익의 크기와 위험정도가 동일함을 의미한다. 따라서 차익거래는 어떤 비용도 치르지 않고 '무'에서 '유'를 창조해 내는 과정으로 이해될 수 있다. 그리고 거래의 규모를 증가시키면 이익의 규모도 무한하게 크게 만들 수 있어 차익기회를 'money pump'란 말로 표현하기도 한다. 그런데 시장이 매우 경쟁적이고 효율적이어서 많은 투자자들이 기회가 오면 즉시 차익거래를 이행할 수 있다고 하자. 이 경우, 과대 평가된 자산은 공급증가로 가격이 하락하고 과소 평가된 자산은 수요증가로 가격이 상승하여 차익거래의 기회는 오래 지속되지 않게 될 것이다. 결국 대체적 자산 A와 B가 동일한 가격에 거래될 때 시장은 균형상태에 도달하게 된다. 이러한 원리를 '무차익 원리(no arbitrage principle)' 혹은 '일물일가의 법칙(law of one price)'이라 하며, 이 간단한 원리가 다수의 주요 경제이론을 탄생시키는데 있어 핵심적인 역할을 담당하여 왔다.

'무차익 원리'는 규모수익 불변(constant returns to scale)의 생산기술을 가진 기업의 경제적 이익은 0이 되어야 한다는 논리와 매우 유사하다. 만약 그러한 기업들이 양(+)의 이익

* 서울대학교 경영대학 교수. 본 논문은 서울대학교 경영대학 경영연구소의 연구비 지원에 의해 작성되었음. 동대학 박사과정에서 재무관리를 전공하는 조규성씨의 조언에 감사한다.

을 실현할 수 있다면 생산규모를 무제한으로 확대하려 할 것이고 이 경우 최적생산은 존재하지 않게 될 것이다.

경제학에서는 여러 가지 다른 형태의 균형개념이 다루어진다. 전통적으로 흔히 사용되어온 Walras의 일반균형 모형에서는 경제주체의 효용 혹은 기대효용 극대화로부터 의사결정이 이루어지고 개별 의사결정들이 취합되어 경제의 균형점이 결정된다. 이러한 균형개념 이외에도 합리적 기대모형, 게임이론 등에서 많은 정교한 균형개념들이 정립되어 있다. 앞에서 언급한 무차익 균형은 이들 균형에 비해 단순하고 본원적인 개념이라 할 수 있다. 무차익 균형에 도달하였다고 해서 반드시 다른 정교한 개념의 균형에 도달하는 것은 아니다. 하지만 다른 정교한 개념의 균형에서는 반드시 '무차익 원리'가 충족되어야 한다. 즉, 무차익 균형은 정교한 개념의 균형에 도달하기 위한 (충분조건은 아니지만) 필요조건으로 이해될 수 있다.

'무차익 원리'를 이용한 여러 모형들의 특징은 경제주체의 효용함수에 큰 제약이 없다는 점이다. 많은 경제모형들이 증가효용함수($u'>0$)와 한계효용체감($u''<0$)을 가정하는데 비해 무차익 원리에 근거한 모형은 전자의 가정만을 필요로 한다. u''의 부호에 제약이 필요 없다는 사실은 경제주체의 위험에 대한 태도가 전혀 중요하지 않음을 의미하며, 이러한 의미는 'risk neutrality valuation'이란 중요한 자산평가기법의 개발을 가능하게 하였다.

본 논문은 무차익 원리의 적용에 초점을 맞추어 근대의 주요 재무이론을 종합·정리·재해석함으로써, 이 원리의 유용성 및 중요성을 다시 한번 강조함과 아울러 주요 재무이론의 본질에 대한 이해를 증진시키고자 한다. 논문의 구성은 다음과 같다. Ⅱ장에서는 차익거래를 공식적으로 정의하고 이와 관련된 주요 명제와 정리를 소개한다. 차익거래에 근거한 기업재무이론은 Ⅲ장에서, 자산가격결정이론은 Ⅳ장에서 다룬다. Ⅴ장에서는 끝을 맺는다.

Ⅱ. 차익거래의 정의

아래에서는 앞에서 소개된 차익거래의 내용을 정식으로 정의하고, 또 무차익 원리와 가격체계와의 관계를 소개한다. 우선 투자자의 효용함수는 재화나 부(wealth)의 증가함수라고 가정하자. 그리고 미래상태 s가 발생할 때 증권 j의 수익(payoff)을 y_{sj}로 표시하고 상태와 자산의 수를 각각 S와 J라고 하자. 이 경우 모든 증권의 미래수익은 다음과 같은 매트릭스로 표현되며,

$$y \equiv \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1J} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{s1} & \cdots & y_{sJ} \end{vmatrix}$$

이러한 매트릭스를 '시장구조'(market structure)라고도 한다.

한편 투자자가 보유하고 있는 자산 j의 수량을 z_j라고 하면 투자자의 포트폴리오는 $\mathbf{z} \equiv (z_1, \cdots, z_J)'$로 표시된다. z_j가 양(+)이면 증권을 매입함을 가리키며 미래상황에 따라 적절한 수익을 지급 받을 권리가 있음을 의미한다. z_j가 음(-)이면 증권을 공매함을 가리키며 미래에 그 자산을 매입하여 갚을 의무가 있음을 의미한다. 포트폴리오 **z**를 보유할 경우 미래상태 s에서의 부(wealth)는 다음과 같이 구해진다.

$$\mathbf{W} = \begin{vmatrix} y_{11} & \cdots & y_{1J} \\ \vdots & & \vdots \\ y_{s1} & \cdots & y_{sJ} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_J \end{vmatrix}$$

이는 간단히 $\mathbf{W} = \mathbf{yz}$로 표현된다.

다음으로 증권 j의 가격을 $P_j(>0)$, $\mathbf{P} \equiv (P_1, \cdots, P_J)'$라고 하면 다음과 같은 정의를 내릴 수 있다:

정의 1: 어떤 포트폴리오 **z**가 $\mathbf{z}' \cdot \mathbf{P} \leq 0$, $\mathbf{yz} \geq \mathbf{0}$를 만족시키되 두 번째 부등호에서 적어도 하나의 구성요소가 양(>0)일 때, *유형1 차익기회*(arbitrage opportunity of type 1)가 존재한다.

정의 2: 어떤 포트폴리오 **z**가 $\mathbf{z}' \cdot \mathbf{P} < 0$, $\mathbf{yz} \geq \mathbf{0}$을 만족시키면 (두 번째 부등호에서 모든 구성요소가 0일 수 있음), *유형2 차익기회*(arbitrage opportunity of type 2)가 존재한다.

바꿔 말하면 정의 1이나 2의 조건들을 만족시키는 포트폴리오 **z**가 존재하지 않는 경우 차익거래의 기회가 없다(no-arbitrage opportunities). 그렇다면 차익기회를 배제하는 증권가격 P가 존재할 것인가? 존재한다면 어떠한 원리에 의해 결정될 것인가? 이 질문들에 대해서는 다음의 명제가 대답을 준다.

명제 1: 시장구조 $(\mathbf{y}, \mathbf{P})$가 *유형1 및 2의 차익기회*를 배제하기 위한 필요·충분조건은 $\mathbf{P} = \mathbf{y}'\mathbf{q}$의 관계를 만족시키는 가격결정 벡터 $\mathbf{q} > 0$가 존재하는 것이다.

명제 1의 증명은 여러 논문이나 책에서 다루어지므로 생략하고, 대신 예를 들어보기로 하자. $\mathbf{y}_1 = (5, 4)'$, $\mathbf{y}_2 = (6, 2)'$, $P_1=23$, $P_2=29$인 경제를 고려하자. $z_1=29$, $z_2=-23$이라면 포트폴리오 구성비용은 0이고 미래수익은 $(7, 70)'$가 되어 유형1 차익기회가 존재하며, $z_1=6$, $z_2=-5$이면 포트폴리오 구성비용은 -7인 반면 미래수익은 $(0, 14)'$가 되어 *유형2* 차익기회가 존재한다. 이 경우 $\mathbf{P} = \mathbf{y}'\mathbf{q}$의 관계를 만족시키는 유일한 해는 $\mathbf{q} = (5, -1/2)'$이 되어 $\mathbf{q} > 0$의 조건이 위배됨을 볼 수 있다. $\mathbf{y}_1 = (2, 4, 4)'$, $\mathbf{y}_2 = (0, 4, 6)'$, $P_1=3$, $P_2=2.5$인 경제를 고려하여 보자. $\mathbf{q} = (1/2, 1/4, 1/4)'$인 경우 $\mathbf{P} = \mathbf{y}'\mathbf{q}$의 관계를 만족시키므로 차익기회가 존재하지 않게 된다. 하지만 증권의 수가 미래상태의 수 보다 적을 경우 q의 해(solution)가 유일할 필요는 없다. $\mathbf{q} = (5/8, 1/16, 3/8)'$인 경우에도 위 조건이 만족됨을 볼 수 있다.

그렇다면 q_s는 무엇을 의미하는가? 어떤 증권이 상태 s가 발생하면 화폐 1 단위를 지급하고 나머지 상태가 발생하면 아무 것도 지급하지 않는다고 하자. 이 증권의 가격은 $1 \cdot q_s$가 됨을 쉽게 보일 수 있다. 따라서 q_s는 상태 s가 발생할 경우에만 화폐 1 단위를 지급하는 증권의 현재가격을 나타낸다. 이러한 증권을 상태증권(state security) 혹은 Arrow-Debreu 증권이라 부르며, q_s를 상태가격이라 한다.

명제 1을 이용하면 금융시장이론에서 또 하나의 중요한 역할을 수행하는 '가치 가산성(value-additivity)의 원리'를 증명할 수 있다. 두 증권 1, 2의 미래수익을 각각 y_1, y_2라고 하자. 이들의 가격은 P_1과 P_2로서 명제 1에서와 같이 결정된다. 한편 증권 3의 미래수익은 증권 1과 2 미래수익의 선형결합으로 표시된다고 하자: $y_{s3} = w_1 \cdot y_{s1} + w_2 \cdot y_{s2}$. 이 때 증권 3의 가격은 다음과 같이 결정된다:

$$
\begin{aligned}
P_3 &= \sum_{s=1}^{S} y_{s3}\, q_s \\
&= \sum_{s=1}^{S} (w_1 \cdot y_{s1} + w_2 \cdot y_{s2})\, q_s \\
&= w_1 \cdot \sum_{s=1}^{S} y_{s1}\, q_s + w_2 \cdot \sum_{s=1}^{S} y_{s2}\, q_s \\
&= w_1 \cdot P_1 + w_2 \cdot P_2
\end{aligned}
$$

이러한 결과는 다음의 정리로 일반화된다.

정리 1: 시장에서 차익기회가 존재하지 않는다고 가정하자. 어떤 자산의 미래 수익이 다른 자산들 수익의 선형결합으로 이루어진다면, 그 자산가격은 같은 방법에 의한 다른 자산들 가격의 선형결합이 되어야 한다.

정리 1은 단순하면서도 매우 강력한 결과이지만 다음과 같은 제약성을 가진다. 첫째, 시장에 새로운 증권이 등장하면 정리 1이 적용될 수 없다. 새로운 증권이란 기존에 존재하는 증권들과 성격이 달라 그 미래수익의 형태를 기존 증권의 결합으로 생성해 낼 수 없는 증권을 말한다. 이러한 증권은 시장구조 즉 미래수익 매트릭스에 변화를 가져와 상태가격(q_s)을 변화시키기 때문에 가산성 원리의 적용이 적절하지 않다. 둘째, 위 정리는 선형결합의 경우에만 적용될 따름이며 비선형 결합의 경우 일반적으로 적용되지 않는다. 다만 비선형 연산자가 선형 연산자로 분해될 경우에는 적용이 허용된다.

Ⅲ. 기업재무이론과 차익거래

■ NPV 기법

기업의 자본예산 의사결정에서 가장 과학적이고 흔히 사용되는 기법이 순현가법(Net Present Value: NPV)이다. 단기간하의 위험이 없는 세계에서 어떤 투자안의 NPV는 다음과 같이 표현된다:

$$\text{NPV} = \frac{\text{미래현금흐름}}{1+r} - \text{현재비용}$$

투자안으로부터 얻는 이득을 나타내는 우변의 첫 항목이 현재비용보다 크면 투자안을 수용하고 그렇지 않으면 기각하는 것이 NPV 의사결정원리이다.

여기서 양(+)의 NPV는 차익거래에서 발생하는 일종의 차익(arbitrage profit)으로 해석될 수 있다. 아래의 두 전략을 고려하여 보자:

전략 A: 투자안 A 선택.

전략 B: 투자안 A와 동일한 미래현금을 가지는 금융자산 포트폴리오 구성.

전략 B를 공매하고 투자안 A를 수용할 경우 B로부터 발생하는 현금흐름이 A로부터 발생하는 현금흐름을 정확히 상쇄시키므로, 두 거래의 현재 현금흐름을 비교하면 차익기회의 존재

여부를 판단할 수 있다. 위험이 없는 세계에서 포트폴리오 구성비용은 [미래현금흐름/(1+r)]로 표현되므로, 공매대금으로 유입되는 이 금액이 투자안의 현재비용으로 지출되는 금액보다 크면 그 차이는 결국 차익이 된다. 따라서 NPV 원리는 차익기회가 존재하느냐 아니냐의 문제로 귀착된다. 이러한 해석은 위험이 존재하는 세계에서도 유사하게 적용될 수 있다. 회사의 주주들이 잘 분산된(well-diversified) 포트폴리오를 보유하고만 있다면 비체계적 위험은 중요하지 않게 되고, 체계적 위험에 대한 위험프리미엄의 요구로 무위험 이자율과는 다른 적정할인율이 사용되어야 할 것이다.

위의 논리에 따르면, 양(+)의 NPV를 가진 투자안들이 세상에 많이 존재한다는 사실이 앞에서 언급한 '무차익 원리'에 위배되는 것처럼 보일 지 모른다. 하지만 이는 기업들이 가치창조를 위하여 실물자산시장과 금융자산시장 사이에서 차익기회 자체를 만들어 내는 과정으로 이해되어야 할 것이다. 실물시장을 이용한 차익거래는 기업의 특수한 능력이나 환경요인 등에 의하여 결정되므로 아무나 쉽게 만들어 낼 수 없는 특성을 지닌다.

■ Modigliani-Miller(MM) 이론

Modigliani and Miller(1958: 이하 MM)는 기업의 최적 재무구조에 관한 체계적 이론을 처음으로 제시하여 그 이후 이 분야의 수많은 연구에 초석을 마련하였다. MM 명제1에 의하면, 세금이나 거래비용이 없는 완전자본시장(perfect capital markets)하에서 한 기업의 가치는 그 기업이 사용하는 부채의 정도에 영향을 받지 않는다. 즉 재무구조와 기업가치는 무관하다는 것이다. 이 결과는 아래와 같은 차익거래 논리에 의하여 도출된다.

우선 이자지급 이전의 영업이익(EBI)이 같은 두 기업 U와 L을 상정하자. U는 부채가 없는 기업, L은 부채를 사용하는 기업을 나타내며, 각 기업(i=U,L)의 총 자산가치를 V_i, 자기자본을 E_i, 부채는 D_i로 표시하자. 그리고 다음의 두 투자전략을 고려하자:

전략 A: U 주식 1% 매입.

전략 B: L 주식 1% 매입 + L의 부채 1%에 해당하는 금액 대여.

두 전략으로부터 발생하는 미래수익이 같음을 쉽게 보일 수 있어 전략 A와 B는 '대체적 관계'($A \equiv B$)에 있다는 결론을 내릴 수 있다. 이는 투자자가 개인적인 대여를 통하여 기업의 부채이용을 무효화시킬 수 있음을 의미한다. 위의 관계를 약간 변형하면 다음의 관계가 성립된다:

L 주식 1% 매입 ≡ U 주식 1% 매입 + L의 부채 1%에 해당하는 금액 차입.

이는 투자자가 개인적으로 차입을 통하여 기업의 부채사용 효과를 창출해 낼 수 있음을 의미한다. A와 B가 대체적 전략이라면 '무차익 원리'에 의하여 두 전략의 가격, 다시 말해 두 전략을 구사하기 위한 비용이 같아야 한다. 즉, $.01V_U = .01(E_L + D_L)$의 관계가 성립되어야 하며 정의상 $E_L + D_L = V_L$이므로 $V_U = V_L$의 결론이 따른다. 만약 U 기업의 가치가 L 기업의 가치 보다 크다면 ($V_U > V_L$) 다음과 같은 차익거래가 가능하다.

	현금흐름	
거 래	t=0	t=1
·U주식 1% 공매	.01Vu	-.01EBI
·L주식 1% 매입	$-.01E_L$	.01(EBI - 이자)
·L의 부채 1%에 해당하는 금액 대여	$-0.1D_L$	.01 × 이자
	$.01(V_U-V_L)>0$	0

만약 L 기업의 가치가 U 기업의 가치 보다 크다면 ($V_U < V_L$) 위 거래들의 반대 포지션을 통해 차익을 얻는다.

Ⅳ. 자산가격결정과 차익거래

■ 채권가격결정

매기의 표면이자가 C, 원금이 FV, 만기까지의 기간이 T인 채권의 공정가치는 일반적으로 다음과 같은 현금할인(discounted cash flow)에 의하여 결정된다:

$$P = \sum_{t=1}^{T} \frac{C}{(1+r_t)^t} + \frac{FV}{(1+r_T)^T}. \tag{1}$$

여기서 r_t는 t 기간의 연간 현물이자율을 나타낸다. 채권가격은 미래 현금흐름의 현가(present value)와 같아야 한다는 것인데, 이 논리의 근거는 역시 '무차익 원리'이다. 예를 들어 1년 이자율이 8%, 2년 이자율은 10%로 주어졌을 경우, 만기가 2년, 원금 1,000원, 표면이자율이 8%인 이표채의 이론가격은 다음과 같다:

$$P = \frac{80}{1.08} + \frac{1080}{(1.1)^2} = 74.07 + 892.56 = 966.63.$$

이 식은 채권을 매입하는 전략이 1년간 74.07원 그리고 2년간 892.56원을 대여하는 전략과 동일하므로 채권가격이 대여전략의 비용과 같아야 함을 말해준다.

만약 시장에서 이 채권이 950원에 거래된다면 다음과 같은 차익거래가 가능하다.

거 래	현금흐름 t=0	t=1	t=2
· 채권 1단위 매입	-950	80	1,080
· 1년간 74.07원 차입	+74.07	-80	
· 2년간 892.56원 차입	+892.56	0	-1,080
	+16.63	0	0

■ 자본자산가격결정모형 (Capital Asset Pricing Model: CAPM)

Sharpe, Lintner, Mossin 등에 의해 소개된 CAPM은 Markowitz에 의해 개발된 평균-분산 포트폴리오 이론에 바탕을 두고있다. 이들 이론의 내용은 다음과 같이 요약된다. 첫째, 투자자들은 위험회피형으로서 평균-분산 효용함수를 갖는다. 둘째, 여러 증권들을 결합하여 포트폴리오를 구성할 경우 위험이 어느 정도 제거되는 분산효과를 거둘 수 있다. 그 결과 분산위험 보다는 베타(β)로 측정되는 체계적 위험만이 중요하다. 셋째, 동질적 기대 하에서 모든 투자자들의 최적 포트폴리오는 시장포트폴리오와 무위험자산으로 구성된다 (분리정리). 이러한 최적 포트폴리오들을 취합하면 균형에서는 다음과 같은 위험-기대수익률의 관계, 즉 CAPM이 얻어진다:

$$E[r_i] = r_f + \{E[r_m] - r_f\} \cdot \beta_i . \qquad (2)$$

이 모형은 투자자의 기대효용함수에 바탕을 둔 균형모형으로서 수학적으로 유도되었지만, 단순히 아래와 같은 논리에 의해서도 얻어질 수 있다. 다음의 두 투자전략을 고려하자.

전략 A: 투자액의 100%를 체계적 위험이 β_i인 자산(혹은 포트폴리오)에 투자.

전략 B: 투자액의 $\beta_i \times 100\%$를 시장포트폴리오에 투자하고 $(1-\beta_i)\times 100\%$를 무위험자산에 투자.

시장포트폴리오의 베타는 1이고 무위험자산의 베타는 0이므로, 전략 B의 베타는 베타의

가산성(value-additivity)에 의하여 $\beta_i \cdot 1 + (1-\beta_i) \cdot 0 = \beta_i$가 되어 전략 A의 베타와 같게 된다. CAPM 세계에서는 베타만이 기대수익률을 설명하는 유일한 변수이므로 두 전략의 베타가 같으면 '무차익 원리'에 의하여 두 전략의 기대수익률도 같아야 한다. 즉,

$$E[r_i] = (1-\beta_i)r_f + \beta_i \cdot E[r_m]. \tag{3}$$

위 식을 정돈하면 앞에서 보여준 CAPM 모형이 얻어진다. 만약 자산 i에 대한 기대수익률이 CAPM이 예측하는 수준 보다 높다면, 이는 자산 i가 과소평가 되고 전략 B의 포트폴리오가 과대 평가되었음을 의미하므로 차입을 통하여 자산 i를 매입하고 시장포트폴리오를 공매함으로써 차익을 얻을 수 있다.

■ 차익거래가격결정이론 (Arbitrage Pricing Theory: APT)

APT는 시장 베타만이 기대수익률을 결정하는 CAPM의 현실설명력에 대한 불만과 시장포트폴리오를 정확히 측정하지 못 할 경우 CAPM의 실증분석은 무의미하다는 Roll의 주장에 기인하여 Ross(1975)에 의해 처음 개발되었다. 이는 모형의 명칭이 말해주듯 기대효용 극대화에서 출발하는 CAPM과는 달리 순수 차익거래 논리에 근거하고 있다. 아래에서는 모형의 직관적 측면을 부각시키고자 원래의 APT 모형을 단순화하여 소개한다.

우선 증권 i의 수익률이 다음과 같은 선형관계에 의하여 생성된다고 하자:

$$\tilde{r}_i = a_i + b_i \cdot \tilde{f}. \tag{4}$$

여기서 f는 모든 증권에 공통적으로 영향을 미치는 경제변수이며 $E[f]=0$이다. b_i는 i증권 수익률의 f에 대한 민감도를 나타내며 a_i는 i의 기대수익률, $E[R_i]$가 된다. 전체 투자액 중에서 w를 증권 i에, (1-w)를 증권 j에 투자하여 포트폴리오를 구성하고, $w=-b_j/(b_i-b_j)$의 값을 선택하여 보자. 이 포트폴리오의 수익률은 아래와 같이 계산된다:

$$r_p = \frac{-b_j(a_i - a_j)}{b_i - b_j} + a_j. \tag{5}$$

위의 수익률은 위험요소를 전혀 내포하지 않으므로 차익기회가 존재하지 않기 위해서는 무위험 이자율과 같아야 한다. 따라서 다음의 관계가 성립되어야 한다:

$$\frac{-b_j(a_i - a_j)}{b_i - b_j} + a_j = r_f. \qquad (6)$$

위 식을 개별증권에 대한 초과수익률과 위험의 관계로 정리하면 아래와 같다:

$$\frac{a_j - r_f}{b_j} = \frac{a_i - r_f}{b_i}. \qquad (7)$$

위의 관계는 성격이 다른 어떤 두 증권에 대해서도 성립되므로 결국 모든 증권에 대해 위험에 대한 초과수익률의 비율, [$(a-r_f)/b$]이 같아야 한다. 이 비율을 λ라 하면 $a_i = r_f + \lambda \cdot b_i$로 나타낼 수 있고, $a_i = E[R_i]$이므로 다음의 식이 얻어진다:

$$E[r_i] = r_f + \lambda \cdot b_i. \qquad (8)$$

여기서 λ는 b=1인 자산의 초과 기대수익률로서 경제변수 f에 대한 위험프리미엄이며 식 (8)이 바로 단일요인 APT 모형을 나타낸다. 지금까지의 유도과정에서 보듯이 APT의 핵심 내용은 (i) 증권수익률이 선형 요인모형에 의해 생성된다는 가정과 (ii) 두 증권으로 무위험 포트폴리오를 구성할 수 있으며 이 포트폴리오에 대한 기대수익률은 '무차익 원리'에 의하여 무위험 이자율과 같아야 한다는 점이다. 위에서 APT 모형을 얻기 위해 필요한 자산의 수는 2임을 지적해 둔다.

Ross(1975)가 당초 개발한 APT 모형은 경제요인이 다수(k)이고 비체계적 위험이 존재하는 경우를 가정한다. 그럼에도 불구하고 논리적 전개는 위의 단순한 경우와 큰 차이가 없다. 다만 요인의 수가 증가하면 무위험 포트폴리오 구성에 필요한 개별 증권의 수도 증가하여야 한다. 비체계적 위험이 없을 때, 2 요인의 경우 증권의 수는 3, 3 요인의 경우 4 등으로 증가된다. 비체계적 위험이 존재하는 경우, 포트폴리오 구성을 통해 이를 분산 또는 제거하려면 요인의 수보다는 훨씬 많은 수의 증권이 필요하다. 이들 비체계적 위험이 완전히 제거되지 않는 한 APT 모형은 가격결정오류를 피할 수 없게 된다. 요약하면 APT 모형은 linear k-factor model, law of large numbers 및 no-arbitrage principle의 결합으로 특징 지워 진다.

■ **효율시장가설** (Efficient Market Hypothesis: EMH)

증권시장에서 거래되는 모든 증권가격이 이론적 가치와 항상 일치할 때 시장을 효율적(efficient)이라 한다. 증권의 이론적 가치란 숙련된 전문가에 의해 추정된 미래수익 기대치의 현가를 의미한다. 효율적 시장에서는 모든 중요한 정보가 충분히 그리고 즉시 가격에 반영된다. 그렇지 못할 경우 과소 평가된 증권을 매입하고 과대 평가된 자산을 매각하여 초과수익을 달성할 수 있는 기회가 생기기 때문이다. 결국 효율적 시장에서는 새로운 정보가 유입되더라도 거래자들의 치열한 경쟁으로 인하여 그 정보를 이용한 양(+)의 NPV 거래가 불가능하다. 이는 곧 차익거래의 기회가 없음을 뜻한다.

이러한 시장에서는 새로운 정보가 도달하고 이 정보가 충분히 반영될 때에만 증권가격이 변화한다. 새로운 정보란 정의상 예측불가능 하므로 이를 반영하는 증권가격의 변화는 예측불가능할 수밖에 없고 이는 가격이 일정한 패턴을 따르지 않고 무작위로 움직임을 의미한다. 다시 말해 가격변화간에 자기상관관계(autocorrelation)가 존재하지 않는다는 것이다.

이상의 논리를 모형화 하여 보자. t 시점에서의 주어지 정보를 I_t, 증권가격을 P_t, t+1 시점에서의 가격을 P_{t+1}, t와 t+1사이의 적정할인율을 k_t라고 하면, 효율적 시장에서 증권거래의 NPV는 0이므로 아래의 관계가 성립된다:

$$\frac{1}{1+k_t}\cdot E[\,P_{t+1} \mid I_t] = P_t. \tag{9}$$

여기서 E[·|·]는 조건부 기대치를 나타낸다. 위의 식에 의하면 할인된 증권가격은 'martingale'이라 불려지는 확률과정을 따르게 된다.[1] 배당이 없는 경우 증권수익률은 $R_t = P_{t+1}/P_t$이므로 식 (9)는 $E[R_t \mid I_t] = 1+k_t$로 다시 쓸 수 있고 이를 이용하면 $Cov(R_{t+1}, R_t)=0$가 됨을 보일 수 있다. 즉 증권가격이 martingale을 따르면 가격변화는 자기상관계수가 0이 되어 시계열상으로 독립적인 움직임을 보이게 된다.

위의 내용은 가격결정모형이 달라질 경우 약간의 수정이 필요하다. 현가(present value) 모형 대신 Lucas(1978)가 제시한 다기간 일반균형모형에서 유도되는 Euler 가격결정식을 살펴보자:

$$P_t = E[\frac{u'(y_{t+1})}{u'(y_t)}\cdot(P_{t+1}+y_{t+1}) \mid I_t]. \tag{10}$$

---

1) 확률과정 $X=\{X(t):\ t=0,1,\dots,T\}$가 $E[X(\tau) \mid I_t] = X_t\ \forall\ \tau\geq t$를 만족시키면 martingale이라 한다.

여기서 u는 효용함수, y는 배당을 나타낸다. 식 (10)은 소비자의 기대효용 극대화를 충족시키는 균형조건이며, 이 조건이 만족되면 차익거래가 불가능함을 보여줄 수 있으나 식 (9)에서와는 달리 증권가격이 martingale을 따르지 않음을 알 수 있다. 그렇지만 다음과 같이 가격체계를 변형시킬 경우 변형된 증권가격은 martingale을 따름을 보여줄 수 있다. 우선 T 시점에서 화폐 1 단위를 지급하는 할인채의 (배당락)가격을 B_t($B_T=0$)라 하고 다음을 정의하자:

$$P_t^* \equiv P_t / B_t \text{ if } t \neq T, \quad 0 \text{ if } t = T$$

$$B_t^* \equiv 1 \text{ if } t \neq T, \quad 0 \text{ if } t = T$$

$$D_t^* \equiv \sum_{\tau=0}^{t} y_t^*; \qquad y_t^* \equiv y_t / B_t \text{ if } t \neq T, \quad y_t \text{ if } t = T \tag{11}$$

이들 정의를 이용하면 식 (10)은 아래와 같이 표현되며

$$P_t^* = E^*[p_{t+1}^* + y_{t+1}^* \mid I_t]. \tag{12}$$

이는 다시 다음과 같은 형태로 변환된다:

$$P_t^* + D_t^* = E^*[p_\tau^* + D_\tau^* \mid I_t], \quad \forall \tau \geq t. \tag{13}$$

여기서 E^*는 아래와 같이 정의되는 확률을 적용하여 계산되는 기대치를 나타낸다:

$$\pi_s^* \equiv \frac{u'(y_{s,T})}{u'(y_0)} \cdot \frac{\pi_s}{B_0}. \tag{14}$$

π_s는 원래의 기대치 E에 적용되는 미래상태 s가 발생할 확률이다. $\pi_s^* \geq 0$이고, $\sum \pi_s^* = 1$임이 쉽게 입증되므로 π_s^*는 확률로서의 성질을 충족시킨다. 이렇게 정의된 확률을 사용할 경우 식 (13)에서 보듯이 가격체계는 martingale 성질을 만족시킴을 볼 수 있다. 이러한 이유로 π_s^*를 'equivalent martingale measure' 혹은 'risk neutral probability'라 부른다. 이상의 결과는 아래의 정리에서 요약된다:

정리 2: 증권시장에서 차익거래가 존재하지 않기 위한 필요·충분조건은 가격결정을 위한 equivalent martingale measure가 존재하는 것이며, 이는 가격체계가 martingale 성질을 만족시켜 시장이 효율적임을 의미한다.

결론적으로 시장효율성이 의미하는 바는 'no free lunch'란 말로 압축된다.

■ 옵션이론

특정자산(기초자산)을 미래의 특정시점(만기)에 미리 약정한 가격(행사가격)에 살 수 있는 권리를 콜옵션(call option), 팔 수 있는 권리를 풋옵션(put option)이라 한다. 그리고 권리행사가 만기시점에서만 허용되는 옵션을 유럽식(European) 옵션, 만기전 아무 시점에서나 허용되는 옵션을 미국식(American) 옵션이라 한다. 미래시점에서 옵션 매입자는 권리를 가지고 매도자는 권리행사에 응해 주어야 할 의무가 있으므로, 계약시점에서는 매입자가 매도자에게 옵션가격 혹은 옵션프리미엄이라는 대가를 지불하여야 한다. 이는 매입·매도자 모두가 계약이행의 의무를 가지게 되어 계약비용이 0인 선물거래의 경우와 대조를 이룬다. 아마도 옵션가격결정이야 말로 '무차익 원리'가 가장 다양하고 폭넓게 적용되는 분야가 아닌가 생각된다. 아래에서는 콜옵션과 풋옵션의 관계, 옵션가격결정, 옵션가격과 상태가격, 미국식 및 유럽식 옵션의 관계 등을 '무차익 원리'를 이용하여 설명한다.

· 가격결정

현재 S인 주식가격이 1 기간 후에는 π의 확률로 uS,$(1-\pi)$의 확률로 dS가 되며, 무위험(총)이자율 r이 $d<r<u$의 범위에 있다고 가정하자. 이 경우 1 기간 후 만기가 도래하고 행사가격이 K인 콜옵션과 풋옵션의 현재가치를 각각 C와 P라 하면 이들의 미래가치는 다음과 같다:

$$
\begin{aligned}
C_j &= \text{Max}\,[jS-K,\ 0], \\
P_j &= \text{Max}\,[K-jS,\ 0],\quad j=u,d.
\end{aligned}
\tag{15}
$$

다음으로 아래의 두 전략을 고려하자:

전략 A: 풋옵션 1 단위 매입.

전략 B: 콜옵션 1 단위 매입 + 주식 1 단위 공매 + PV(K) 대여.

A 전략의 미래수익은 P_j $(j=u,d)$가 될 것이며, B 전략의 미래수익은

$$
\begin{aligned}
C_j - jS + K &= \mathrm{Max}\,[jS-K,\ 0] - jS + K \\
&= \mathrm{Max}\,[0,\ K-jS] \\
&= P_j \ (j=u,d) \qquad (16)
\end{aligned}
$$

가 되어, A와 B는 서로 '대체적 전략'이 됨을 알 수 있으며 $A \equiv B$의 관계를 '옵션 전환식(option conversion)'이라고 부른다. '무차익 원리'에 의하여 두 전략을 구사하기 위한 비용도 같아야 하므로 다음의 관계가 성립된다:

$$P = C - S + PV(K). \qquad (17)$$

이를 '풋-콜 등가식'이라 하며 이 식이 성립되지 않을 경우 항상 차익거래가 가능하다. 예를 들어 시장에서 풋옵션이 $[C - S + PV(K)]$보다 낮게 거래되면 풋 매입, 콜 매도, 주식 매입, $PV(K)$ 차입을 통하여 차익을 얻을 수 있으며, $[C - S + PV(K)]$보다 높게 거래될 경우 풋 매도, 콜 매입, 주식 공매, $PV(K)$ 대여의 차익거래를 할 수 있다.

다음으로 콜옵션의 현재가치를 구하기 위하여 다음의 두 전략을 고려하자:

전략 A: 콜옵션 1 단위 매입.

전략 B: 주식 $[(C_u-C_d)/(u-d)S]$ 단위 매입 + $[(dC_u-uC_d)/(u-d)r]$ 차입.

적절한 계산을 거쳐 두 전략의 미래수익 벡터 모두가 $(C_u,\ C_d)'$임을 어렵지 않게 보일 수 있으므로 A와 B는 서로 대체적 전략이 된다. 즉 콜옵션은 주식과 채권 거래에 의해 복제가 가능하다. 이 관계를 약간 변형하면

주식 $[(C_u-C_d)/(u-d)S]$ 단위 매입 + 콜옵션 1 단위 매도 $\equiv$ $[(dC_u-uC_d)/(u-d)r]$ 대여

가 된다. 좌변의 전략이 무위험자산에 투자하는 것과 동일하므로 이를 '헤지(hedge) 포트폴리오'라 부르며 $h \equiv [(C_u-C_d)/(u-d)S]$를 '헤지비율'이라 한다. 콜옵션과 주가는 같은 방향으로 움직이므로 헤지 포트폴리오를 구성하려면 두 자산에 반대 포지션을 취해야 하며, 헤지비율 즉 콜 1 단위당 주식의 수는 주가변화에 대한 콜 가격변화의 비율과 일치하여야 할 것이

다. 당초의 A ≡B의 관계로 돌아가서 '무차익 원리'에 의해 두 전략의 비용을 같게 두면 아래의 결과를 얻게 된다:

$$
\begin{aligned}
C &= \frac{C_u - C_d}{(u-d)S} \cdot S - \frac{d C_u - u C_d}{(u-d)r} \\
&= \frac{r-d}{(u-d)r} \cdot C_u + \frac{u-r}{(u-d)r} \cdot C_d \\
&= [\frac{r-d}{u-d} \cdot C_u + \frac{u-r}{u-d} \cdot C_d] / r \\
&= [\pi^* \cdot C_u + (1-\pi^*) \cdot C_d] / r. \qquad (18)
\end{aligned}
$$

여기서 $\pi^* \equiv (r-d)/(u-d)$이며 확률의 성질을 충족시켜, $C^* \equiv rC$라고 정의하면 식 (18)은 아래와 같이 표현된다:

$$C^* = E^*[C_j]. \qquad (19)$$

이는 식 (13)과 같은 형태로 π^*의 확률이 적용될 경우 옵션가격이 'martingale' 확률과정을 따르게 됨을 보여준다. 따라서 π^*는 'equivalent martingale measure'로 해석된다. 한편 식 (18)을 아래와 같이 표시하면,

$$C = | C_u, C_d | \cdot \begin{vmatrix} \pi^*/r \\ (1-\pi^*)/r \end{vmatrix} \qquad (20)$$

이는 명제 1의 조건을 만족시키게 되어 $q_u \equiv \pi^*/r$와 $q_d \equiv (1-\pi^*)/r$는 각각 주가가 오를 경우와 내릴 경우의 상태가격이 된다. 풋옵션의 가치는 이들 상태가격을 이용하거나 앞에서 소개된 '풋-콜 등가식'을 이용하면 쉽게 구해질 수 있다.

옵션이론의 대표적 모형인 Black-Scholes 모형은 이상에서 소개된 1단계 2항모형을 다단계 2항모형으로 확장한 후 시간의 간격을 무한히 작게 하여 얻어진 결과라고 할 수 있다. 그렇지만 가격 결정원리는 위에서 소개된 것과 다를 바 없다. 즉 연속시점 하에서 투자자들은 매 순간 주식과 채권으로 옵션을 복제할 수 있으며, '무차익 원리'에 의하여 두 전략의 비용이 같아야 한다는 점을 이용하면 Black-Scholes 모형의 결과를 얻는다. 다만 위의 1단계 2항모형과의 차이는 주가가 변화함에 따라 매 순간 헤지비율을 수정하여야 한다는 점이다.

· 옵션가격과 상태가격

앞에서 식 (20)은 상태가격이 옵션가격을 결정함을 보여준다. 그렇다면 옵션가가격으로부터 상태가격을 유도할 수 있을까? 이 질문에 대답하기 위해서 다음과 같은 증권들의 미래수익을 가정하자:

S_j	$C_{j,\Delta}$	$C_{j,2\Delta}$	$C_{j,3\Delta}$
Δ	0	0	0
2Δ	Δ	0	0
3Δ	2Δ	Δ	0
4Δ	3Δ	2Δ	Δ

S_j는 미래상태 j에서의 주가를, $C_{j,K}$ (K= Δ, 2Δ, 3Δ)는 상태 j에서 행사가격이 K인 콜옵션의 가치를 나타낸다. 여기서 K= Δ, K= 3Δ인 콜옵션을 각각 $1/\Delta$ 단위 매입하고, K= 2Δ인 콜옵션을 $2/\Delta$ 단위 매도하면 이 포트폴리오 수익은 (0,1,0,0)'가 되어 상태증권 2를 한 단위 매입하는 것과 동일한 효과를 가진다. 따라서 상태증권 2의 가격은 '무차익 원리'에 의하여 이 포트폴리오 구입비용과 같아야 한다. 즉 행사가격이 K인 옵션의 현재가치를 C(K)로 표시하면,

$$q_2 = \frac{C(\Delta) - 2C(2\Delta) + C(3\Delta)}{\Delta}$$
$$= \frac{C(3\Delta) - C(2\Delta)}{\Delta} - \frac{C(2\Delta) - C(\Delta)}{\Delta}. \qquad (21)$$

위의 결과를 일반화하면,

$$q_K = \frac{C(K+\Delta) - C(K)}{\Delta} - \frac{C(K) - C(K-\Delta)}{\Delta} \qquad (22)$$

가 되며 미래상태가 연속적일 경우 양변을 Δ로 나눈 후 $\lim_{\Delta \to 0}$을 취하면 다음의 결과가 얻어진다:

$$\frac{d\,q_K}{dK} = \frac{\partial^2 C(K)}{\partial K^2}. \qquad (23)$$

• 유럽식과 미국식 옵션

아래에서는 유럽식과 미국식 옵션가격의 관계를 보여주는 한 예로서 배당이 없는 주식의 경우 유럽식 콜옵션과 미국식 콜옵션의 가격을 비교하여 보자. 옵션의 만기를 T, 만기 이전의 시점을 t로 표시하면, 만기전 유럽식 콜옵션 가격은 다음의 하한범위조건을 만족시켜야 한다:

$$Ct > \text{Max } [S_t - PV_t(K), 0]. \tag{24}$$

이렇지 못할 경우 콜옵션 매입, 주식 공매, $PV_t(K)$ 대여를 통하여 아래와 같이 차익을 얻을 수 있다:

	현금흐름		
	시점 t	시점 T	
		$S_T < K$	$S_T > K$
콜 매입	$-C_t$	0	S_T-K
주식 공매	S_t	$-S_T$	$-S_T$
$PV_t(K)$ 대여	$-PV_t(K)$	K	K
	$S_t-PV_t(K)-C_t \geq 0$	$K-S_T>0$	0

한편 유럽식에 비해 미국식 콜옵션은 만기전에 권리를 행사할 수 있는 또 하나의 옵션을 내포하고 있으므로 그 가격은 적어도 유럽식의 가격보다 높아야 하고 식 (24)를 만족시켜야 한다. 하지만 옵션을 만기전에 행사할 경우 얻게되는 수익은 S_t-K이고 시장에서 매도할 경우 받게되는 대금은 적어도 S_t - $PV_t(K)$가 되어 권리를 조기행사 하는 것이 결코 바람직하지 않다. 즉 미국식 콜옵션을 보유하더라도 권리를 만기에 행사하는 것이 최적전략이므로, 그 가치는 유럽식의 가치와 동일하여야 한다.

■ 선물이론

선물거래란 특정자산(기초자산)을 미래의 특정시점(만기)에 특정가격(선물가격)으로 거래할 것을 현 시점에서 약정하는 계약이다. 선물거래 두 당사자는 미래에 어떤 상황이 발생하더라도 거래를 이행해야 할 의무가 있으므로 옵션거래와는 달리 계약자체에 대하여 대가를 치를 필요는 없다. 거래비용, 세금, 배당 등이 없는 완전시장에서 선물은 현물(기초자산)과 채권매입 혹은 매도로 복제될 수 있다. 다음의 두 전략을 고려하자:

전략 A: 선물계약 1 단위 매입.

전략 B: 차입 + 현물 1 단위 매입.

두 경우 모두 투자자가 선물만기에서 현물 1 단위를 보유하게 되므로 A ≡ B의 대체적 전략관계가 성립된다. 이를 변형하면 아래의 관계들도 얻게된다:

현물 1 단위 매입 ≡ 선물 1 단위 매입 + 대여.

대여 (채권매입) ≡ 현물 1 단위 매입 + 선물 1 단위 매도.

이는 각각 선물계약이 현물의 대용으로 사용될 수 있음을, 그리고 현물과 선물을 결합하여 헤지전략을 구사할 수 있음을 말해 준다. 헤지포트폴리오 구성시 선물 1 단위에 대하여 현물 1 단위가 필요하므로 옵션의 경우와는 달리 헤지비율이 1임을 알 수 있다.

선물만기까지의 기간을 T, 현물가격을 S, 선물가격을 F, 이자율을 r이라 하고 '무차익 원리'에 의해 A ≡B의 전략관계를 비용측면에서 나타내면 아래의 식을 얻을 수 있다.

$$F = S \cdot (1+r)^T \tag{25}$$

이를 '현물-선물 등가식'이라 부르며 선물가격결정의 기본식이 된다. 만약 시장에서 선물가격이 $S \cdot (1+r)^T$보다 낮을 경우 선물매입, 현물공매, 대여를 통하여, $S \cdot (1+r)^T$보다 높을 경우 선물매도, 현물매입, 차입을 통하여 차익거래가 가능하다.

식 (25)는 여러 시장마찰 요소가 있는 경우에도 어렵지 않게 변형이 가능하다. 현물보유시 이자비용뿐 아니라 보관비용(u)과 convenience yield(y)가 수반될 경우 식 (25)에서 r은 이들을 고려한 순비용 r+u-y로 대치된다. 한편 거래비용이 존재할 경우, 공매에 제약이 따를 경우, 차입과 대여시 차등 이자율이 적용될 경우 등에는 등가식 대신 '차익거래 불가능범위(no-arbitrage bounds)'를 유도해 낼 수 있다.

국제재무에서 잘 알려진 두 국가간의 이자율 등가식(Interest Rate Parity Theorem: IRPT)도 결국은 식 (25)의 응용이다. IRPT는 아래와 같이 표현된다:

$$F = E \cdot \{(1+r_d) \,/\, (1+r_f)\}^T \approx E \cdot (1+r_d - r_f)^T \tag{26}$$

여기서 E는 외국화폐 1 단위당 국내화폐의 단위수로 표현되는 현물환율, F는 선물환율, r_d는 국내 이자율, r_f는 상대국 이자율을 나타낸다. r_f는 일종의 convenience yield로 간주되며 식 (26)은 결국 아래 관계식의 결과로 나타난다:

외환선물 $(1+r_f)$ 단위 매입 ≡ 국내화폐 차입 + 상대국 화폐 1 단위 매입 + 상대국에 예치.

따라서 외환선물이 시장에서 식 (26)에 의해 계산된 값 보다 낮은 환율에 거래될 때, *외환선물 $(1+r_f)$ 단위 매입, 상대국 화폐 1 단위 차입, 국내 화폐 매입*, 국내에 예치의 거래를 통하여 차익을 얻을 수 있다.

환율과 관련하여 국제재무에서 흔히 이용되는 구매력 등가식(Purchasing Power Parity: PPP)도 무차익 논리의 결과이다. 절대적 PPP는 아래와 같이 표현된다:

$$P_d = E \cdot P_f \tag{27}$$

여기서 E는 식 (26)에서와 같이 정의되고, P_f와 P_d는 각각 특정상품의 상대국 및 국내에서의 가격을 나타낸다. 위 등가식은 다음의 단순한 관계를 비용측면에서 표현한 것이다:

국내에서 A 상품 구입 ≡ 상대국 화폐 구입 + 상대국에서 A 상품 구입.

따라서 국내의 상품가격이 식 (27)에 의해 계산된 값보다 높다면, 국내에서 상품을 공매하여 그 대금으로 상대국 화폐를 구입한 후 상대국에서 물건을 수입하여 상환하면 차익을 얻을 수 있다.

V. 맺음말

Ross(1989)는 근대 재무이론을 다음과 같은 네 개의 주요 영역으로 구분하였다: (i) MM 이론을 출발점으로 한 기업재무이론 (ii) 포트폴리오 이론 및 위험-기대수익률의 관계에 관한 이론 (iii) 효율시장가설 (iv) 옵션평가모형을 중심으로 하는 파생자산평가 이론. 이 중 (iii)을 제외한 영역의 주요 이론을 개발한 학자들이 그 공로를 인정받아 이미 노벨 경제학상을 수상하였다. Modigliani, Markowitz, Sharpe, Miller, Merton, Scholes가 바로 그들이

며, 이 사실은 이 이론들의 학문적인 가치나 현실문제 해결에 대한 공헌도를 잘 말해 준다. 재무학에서 (iii)의 주제에 관한 연구들이 차지하는 비중을 고려하면 이 분야에서도 머지않아 노벨상 수상자가 탄생하리라 예상된다. 그런데 우리가 이 논문에서 살펴 보았듯이 이 이론들 대부분의 전개과정에서 '무차익 원리'가 핵심적인 역할을 담당하고 있다. '무차익 원리'란 결국 우리가 일상생활에서 흔히 사용하는 '공짜 없다'라는 말로 귀착된다. 이렇게 단순하고 상식적인 원리가 엄청나게 넓은 분야에서 강력한 영향력을 발휘하였다는 사실은 오직 놀라울 따름이다.

아직도 여러 경제현상을 설명하는데 이 원리가 적용될 여지는 적지 않으리라 추측되며, 앞으로도 많은 새로운 발견을 기대한다. 한 가지 명백한 사실은, 이 원리 자체는 쉽지만 원리의 새로운 적용은 쉽지 않을 것이란 점이다. 이러한 사실이 바로 '무차익 원리'가 전달하는 내용이기도 하다.

참 고 문 헌

Arrow, K., 1964, "The Role of Securities in the Optimal Allocation of Risk-Bearing", Review of Economic Studies 31, 91-96.

Black, F. and M. Scholes, 1973, "The Pricing Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy 81, 637-54.

Brealey, R. A. and S. C. Myers, 1991, Principles of Corporate Finance, 4th edition, McGraw-Hill, New York.

Breeden, D. and R. Litzenberger, 1978, "Prices of State-Contingent Claims Implicit in Option Prices", Journal of Business 51, 621-51.

Cox, J, S. Ross, and M. Rubinstein, 1979, "Option Pricing: A Simplified Approach", Journal of Financial Economics 7, 229-63.

Duffie, D., 1987, Futures Markets, Prentice-Hall, New Jersey.

Dybvig, P., 1983, "An Explicit Bound on Individual Assets' Deviations from APT Pricing in a Finite Economy", Journal of Financial Economics 12, 483-96.

Harrison, M and D. Kreps, 1979, "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", Journal of Economic Theory 20, 381-408.

Huang, C. and R. H. Litzenberger, 1988, Foundations for Financial Economics, North-Holland, New York.

Ingersoll, J. E., 1987, Theory of Financial Decision Making, Rowman & Littlefield, New Jersey.

Lintner, J., 1965, "The Valuation of Risk Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets", Review of Economics and Statistics 47, 13-37.

Lucas, R. E., 1978, "Asset Prices in an Exchange Economy", Econometrica 46, 14-45.

Markowitz, H., 1952, "Portfolio Selection", Journal of Finance 7, 77-91.

Merton, R., 1973, "Theory of Rational Option Pricing", Bell Journal of Economics and Management Science 4, 141-83.

Modigliani, F. and M. H. Miller, 1958, "The Cost of Capital, Corporation Finance and the Theory of Investment", American Economic Review 48, 261-97.

Mossin, J., 1966, "Equilibrium in a Capital Asset Market", Econometrica 34, 261-76.

Neftci, S. N., 1996, An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Academic Press, San Diego.

Ohlson, J. A., 1987, The Theory of Financial Markets and Information, North-Holland, New York.

Ross, S. A., 1975, "Return, Risk and Arbitrage", In I. Friend and J. Bicksler, eds., Studies in Risk and Return, Ballinger Publishing Co., Massachusetts.

________, 1976, "The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing", Journal of Economic Theory 13, 341-60.

________, 1989, "Finance", In J. Eatwell, M. Milgate and P. Newman, eds., The New Palgrave: A Dictionary of Economics, W.W. Norton & Company, New York.

Sharpe, W. F., 1964, "Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk", Journal of Finance 19, 425-42.

Varian, H. R., 1987, "The Arbitrage Principle in Financial Economics", Journal of Economic Perspectives 1, 55-72.