

탄성과 파동 방정식 모델링에서 중간점 차분 기법을 이용한 지표 경계 조건의 처리

박권규¹⁾ · 서정희¹⁾ · 신창수¹⁾

The Treatment of the Free-surface Boundary Conditions by Finite-Difference Midpoint-Averaging Scheme for Elastic Wave Equation Modeling

Kwon Gyu, Park, Jung Hee, Suh and Changsoo, Shin

요 약 : 지표 경계 조건은 유한 차분법을 이용한 탄성과 파동 방정식 모델링에서 수치해의 정확성을 떨어뜨리는 한편 포아송 비에 따른 해의 안정성을 제한하는 주 요인이 된다. 본 연구에서는 지표 경계 조건과 같은 Neumann 경계 조건의 처리에 효과적인 적분법(integration method)에 기반 하여 차분식을 유도하고, 이로부터 중간점 차분 기법을 제안하였다. 또한, 개발된 알고리즘을 Lamb의 문제에 적용하여 이론해와 비교함으로써 타당성을 검증하였다.

주요어 : 중간점 차분 기법, 지표 경계 조건, 적분법, 가중 평균법

Abstract : The free-surface boundary conditions are persistent problem in elastic wave equation modeling by finite-difference method, which can be summarized with the degradation of the accuracy of the solution and limited stability range in Poisson's ratio. In this paper, we propose the mid-point averaging scheme as an alternative way of implementing the free-surface boundary conditions, and present the solution to Lamb's problem to verify our approach.

Keywords : Midpoint-averaging scheme, Free-surface boundary conditions, Integration method, weighted-averaging

서 론

유한차분법을 이용한 탄성과 파동방정식 모델링 - 특히 변위 접근법(displacement approach)에 기반 한 경우 - 에서 지표 경계 조건의 효과적인 적용은 매우 중요하면서도 어려운 문제이다. 시간 또는 주파수 영역 모델링시 지표 송신원 구현의 어려움, 정확한 레일리파의 구현의 어려움, 포아송 비에 따른 제한된 안정성 등은 대부분 이러한 지표 경계 조건 적용의 어려움에 기인한다. 일반적으로는 Alterman and Karal(1968)에 의해 제안된 일방향 차분 근사(one-sided difference approximation)를 이용하는 것이 보통이나, 이는 지표 근처에서의 해의 정확성을 감소시키고, 결과적으로 전체 영역에 대한 유한 차분 연산자의 정확성을 감소시키게 된다. 더구나 이러한 일방향 차분은 주파수 영역에서 구성되는 행렬의 대칭성을 깨뜨리게 되며, 이 경우 계산상의 효율은 대칭인 경우에 비해 현저히 떨어지게 마련이다.

본 연구에서는 이러한 지표 경계 조건의 적용상 어려움을

극복하는 한 방안으로서, 주파수 영역 탄성과 파동방정식 모델링에서 행렬의 대칭성을 유지시키면서도 지표 경계조건을 효과적으로 처리할 수 있는 새로운 유한 차분 연산자를 제안하였다.

이를 위해, 본 연구에서는 지표 경계 조건과 같은 Neumann 경계 조건의 구현에 효과적인 적분법(Varga, 1962)에 기반 하여 유한 차분식을 도출하고자 하였다. 또한 유한 차분 근사를 위한 계산 격자(computational grid)의 효율을 제고하고 수치적 분산 특성의 향상을 도모하고자, 적분식의 차분 근사 계산을 위해 가중 평균의 개념을 도입하였다.

가중 평균 차분 근사 적분에 의한 유한 차분식의 유도

적분법을 이용한 차분 근사에서는 아래와 같이 탄성과 파동 방정식의 임의 영역에서의 적분을 생각하고, 이 적분을 근사 계산함으로써 질량 항과 공간 미분 항에 대한 차분 근사식을

*2000년 5월 20일 접수

1) 서울대학교 지구환경시스템공학부 (School of Civil, Urban, and Geosystem Eng., Seoul Nat'l Univ.)

구하게 된다.

$$\iint_{\Omega_e} \left\{ \rho \omega^2 u + \frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[\mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right\} dx dz = 0,$$

$$\iint_{\Omega_e} \left\{ \rho \omega^2 w + \frac{\partial}{\partial z} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left[\mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] \right\} dx dz = 0, \quad (1)$$

여기서 Ω_e 는 적분 영역을 나타내며, 편의상 송신원 항은 생략하였다.

Fig. 1은 격자 구조 내 임의의 점 (i, j) 에서의 계산 격자(computational grids)를 나타낸다. 그림에서 회색으로 표현된 영역이 적분 영역 Ω_e 를 나타내며, 본 연구에서는 이를 차분식을 얻고자 하는 배열점(collocation point)을 중앙으로 하는 $\Delta x \times \Delta z$ 사각형 영역으로 정의하였다.

평면에 대한 Green의 정리를 이용하면 식 (1)의 공간에 대한 미분 항들은 아래와 같이 경계면을 따른 선적분으로 표현된다.

$$\iint_{\Omega_e} \rho \omega^2 u dx dz + \oint_{\Gamma_e} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda \frac{\partial w}{\partial z} \right] \hat{n}_x - \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \hat{n}_z dl = 0,$$

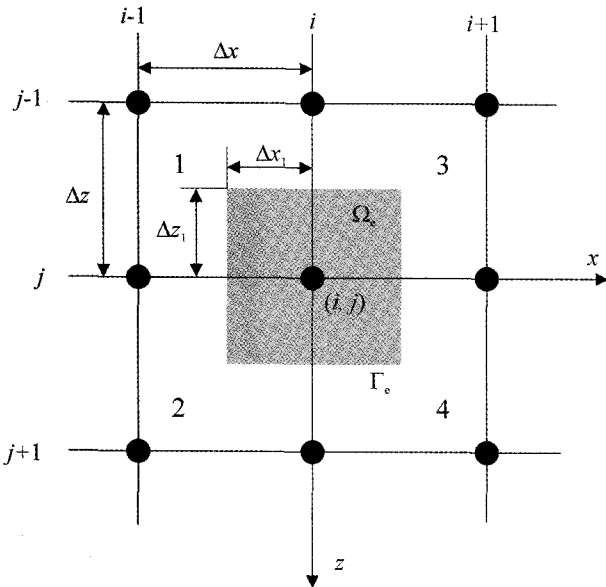


Fig. 1. Computational grids for an arbitrarily chosen grid point (i, j) of computational domain discretized by Δx in horizontal direction and Δz in vertical direction. The Lamé parameters are defined as uniform on each element, numbered by 1, 2, 3 and 4. The shaded area, Ω_e , denotes the area of integration which is closed and bounded by the boundary Γ_e . Δx_i and Δz_i denote line segments of the boundary Γ_e which belong to an element denoted by the subscript.

$$\iint_{\Omega_e} \rho \omega^2 w dx dz + \oint_{\Gamma_e} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial w}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} \right] \hat{n}_z - \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \hat{n}_x dl = 0, \quad (2)$$

여기서 Γ_e 는 적분 영역의 경계를 나타내며 \hat{n}_x, \hat{n}_z 는 각각 수평 및 수직 방향으로의 단위 법선 벡터를 나타낸다.

따라서, 질량 항과 공간 미분 항에 대한 차분식은 식 (2)의 면적분과 선적분을 근사 계산함으로써 얻을 수 있다. 본 연구에서는 이를 위해 공간 미분 항을 혼합형 미분(mixed derivative) 항과 비혼합형 미분(non-mixed derivative) 항으로 구분하고 각각에 해당하는 선적분 표현을 아래와 같은 대표꼴을 설정, 차분 근사에 이용하였다.

(1) 비혼합형 공간 미분 항(non-mixed spatial derivative)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \int_{\Delta z} \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \hat{n}_x dz. \quad (3a)$$

(2) 혼합형 공간 미분 항(mixed spatial derivative)

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial w}{\partial z} \right) \approx \int_{\Delta z} \beta \frac{\partial w}{\partial z} \hat{n}_x dz. \quad (3b)$$

비혼합형 공간 미분항의 차분 근사

식 (3a)의 선적분은 각 요소의 경계를 따른 적분으로 계산될 수 있고, 요소 경계에서는 매질간 경계 조건에 의해 상쇄되어 다음과 같은 형태로 단순화된다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \int_{\Delta z} \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \hat{n}_x dz = \int_{\Delta z_1^- + \Delta z_2^-} \alpha \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{\Delta z_3^+ + \Delta z_4^+} \alpha \frac{\partial u}{\partial x} dz, \quad (4)$$

여기서 Δz_k^\pm k -번째 요소내 적분 경로에 수직인 단위 법선 벡터이다. 이 적분은 중간값 정리를 이용하여 다음과 같이 근사 계산될 수 있다.

$$\begin{aligned} \int_{\Delta z_k^\pm + \Delta z_l^\pm} \alpha \frac{\partial u}{\partial x} dz &\approx \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i \pm \frac{1}{2}, j} \int_{\Delta z_k^\pm + \Delta z_l^\pm} \alpha dz \\ &= \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i \pm \frac{1}{2}, j}^k \int_{\Delta z_k^\pm} \alpha dz + \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i \pm \frac{1}{2}, j}^l \int_{\Delta z_l^\pm} \alpha dz \\ &= \pm \alpha_k \Delta z_k \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i \pm \frac{1}{2}, j}^k \pm \alpha_l \Delta z_l \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right)_{i \pm \frac{1}{2}, j}^l, \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 $(\Delta u / \Delta x)_{m, n}^p$ 는 p -번째 요소의 (m, n) 점에서 정의된 차분 연산자를 의미한다. 이 차분 근사를 위해 요소의 구별 없이 전체 적분 경로상 중앙점을 이용하는 이용하는 전통적인 적분 법과 달리, 본 연구에서는 이 차분 근사를 위해 아래와 같은 가중 평균의 개념을 도입하였다.

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^1 = \frac{1}{3} \left(2 \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i,j-1} - u_{i-1,j-1}}{\Delta x} \right), \quad (6a)$$

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^2 = \frac{1}{3} \left(2 \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i,j+1} - u_{i-1,j+1}}{\Delta x} \right), \quad (6b)$$

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+\frac{1}{2},j}^3 = \frac{1}{3} \left(2 \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j-1} - u_{i,j-1}}{\Delta x} \right), \quad (6c)$$

$$\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)_{i+\frac{1}{2},j}^4 = \frac{1}{3} \left(2 \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x} + \frac{u_{i+1,j+1} - u_{i,j+1}}{\Delta x} \right). \quad (6d)$$

이는 중간값 정리에서 중간값을 취하는 점에서의 차분 근사를 각 요소별로 구분하고, 각 요소별 차분 근사를 위해 해당 요소의 모든 절점을 이용하기 위함이다. 이를 (3a)에 대입하면 최종적인 차분식은 아래와 같이 구해진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) &\approx \frac{\Delta z}{6\Delta x} [\alpha_1 u_{i-1,j-1} - (\alpha_1 + \alpha_3) u_{i,j-1} + \alpha_3 u_{i+1,j-1}] \\ &+ \frac{\Delta z}{3\Delta x} [(\alpha_1 + \alpha_2) u_{i-1,j} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) u_{i,j} + (\alpha_3 + \alpha_4) u_{i+1,j}] \\ &+ \frac{\Delta z}{6\Delta x} [\alpha_2 u_{i-1,j+1} - (\alpha_2 + \alpha_4) u_{i,j+1} + \alpha_4 u_{i+1,j+1}]. \end{aligned} \quad (7)$$

z-방향의 비혼합형 공간 미분항도 유사한 방법으로 아래와 같이

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial z} \right) &\approx \frac{\Delta z}{6\Delta z} [\alpha_1 u_{i-1,j-1} - (\alpha_1 + \alpha_2) u_{i-1,j} + \alpha_2 u_{i-1,j+1}] \\ &+ \frac{\Delta z}{3\Delta x} [(\alpha_1 + \alpha_3) u_{i,j-1} - (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4) u_{i,j} + (\alpha_2 + \alpha_4) u_{i,j+1}] \\ &+ \frac{\Delta z}{6\Delta x} [\alpha_3 u_{i+1,j-1} - (\alpha_3 + \alpha_4) u_{i+1,j} + \alpha_4 u_{i+1,j+1}]. \end{aligned} \quad (8)$$

의 형태로 주어지고, 이를 계산 격자의 형태로 표현한 것이 Fig. 2이다.

혼합형 공간 미분항의 차분 근사

비혼합형 공간 미분 항과 유사하게 혼합형 공간 미분 연산자에 대한 근사도 아래와 같은 선적분의 근사 적분에 의해 구해진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial w}{\partial z} \right) &\approx \int_{\Delta z} \beta \frac{\partial w}{\partial z} \hat{n}_x dz \\ &= \int_{\Delta z_1^- + \Delta z_2^-} \beta \frac{\partial w}{\partial z} dz + \int_{\Delta z_3^+ + \Delta z_4^+} \beta \frac{\partial w}{\partial z} dz, \end{aligned} \quad (9a)$$

여기서

$$\int_{\Delta z_k^+ + \Delta z_l^+} \beta \frac{\partial w}{\partial z} dz \approx \left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{i\pm\frac{1}{2},j}^k \int_{\Delta z_k^+} \beta dz + \left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{i\pm\frac{1}{2},j}^l \int_{\Delta z_l^+} \beta dz$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x} \right] \approx \frac{\Delta z}{6\Delta x}$$

$(\lambda + 2\mu)_1$	$-(\lambda + 2\mu)_1$ $-(\lambda + 2\mu)_3$	$(\lambda + 2\mu)_3$
$2(\lambda + 2\mu)_1$ $2(\lambda + 2\mu)_2$	$-2(\lambda + 2\mu)_1$ $-2(\lambda + 2\mu)_2$ $-2(\lambda + 2\mu)_3$ $-2(\lambda + 2\mu)_4$	$2(\lambda + 2\mu)_3$ $2(\lambda + 2\mu)_4$
$(\lambda + 2\mu)_2$	$-(\lambda + 2\mu)_2$ $-(\lambda + 2\mu)_4$	$(\lambda + 2\mu)_4$

(a)

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{\Delta x}{6\Delta z}$$

μ_1	$2(\mu_1 + \mu_3)$	μ_3
$-\mu_1 - \mu_2$	$-2(\mu_1 + \mu_3)$ $-2(\mu_2 + \mu_4)$	$-\mu_3 - \mu_4$
μ_2	$2(\mu_2 + \mu_4)$	μ_4

(b)

Fig. 2. The finite-difference approximations of non-mixed derivative as computational grids. The subscripts denotes the element index as shown in figure 1: (a) $\frac{\partial}{\partial x} [(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial x}]$ and (b) for $\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial z} \right)$.

$$= \pm \beta_k \Delta z_j \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right)_{i\pm\frac{1}{2},j}^k \pm \beta_l \Delta z_l \left(\frac{\Delta w}{\Delta z} \right)_{i\pm\frac{1}{2},j}^l. \quad (9b)$$

이 때, p-번째 요소 (m, n)점에서의 차분 근사를 나타내는 $(\Delta w / \Delta z)_{m,n}^p$ 는 비혼합형 미분 항의 경우와는 달리, 아래와 같이 근사 계산하였다.

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^1 \equiv \frac{w_{i,j} - w_{i,j-1} + w_{i-1,j} - w_{i-1,j-1}}{2\Delta z}, \quad (10a)$$

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{i-\frac{1}{2},j}^2 \equiv \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j} + w_{i-1,j+1} - w_{i-1,j}}{2\Delta z}, \quad (10b)$$

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{i+\frac{1}{2},j}^3 \equiv \frac{w_{i+1,j} - w_{i+1,j-1} + w_{i,j} - w_{i,j-1}}{2\Delta z}, \quad (10c)$$

$$\left(\frac{\Delta w}{\Delta z}\right)_{i+\frac{1}{2},j}^4 \equiv \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j} + w_{i,j+1} - w_{i,j}}{2\Delta z}. \quad (10d)$$

이를 이용하면, 최종적인 차분식은 아래와 같은 형태로 얻어진다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial w}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{4} [\beta_1 w_{i-1,j-1} + (\beta_1 - \beta_3) w_{i,j-1} - \beta_3 w_{i+1,j-1}]$$

$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial w}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{4}$	λ_1	$\lambda_1 - \lambda_3$	$-\lambda_3$
	$\lambda_2 - \lambda_1$	$\lambda_3 - \lambda_1$ $\lambda_2 - \lambda_4$	$\lambda_3 - \lambda_4$
	$-\lambda_2$	$\lambda_4 - \lambda_2$	λ_4

(a)

$\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{4}$	μ_1	$\mu_3 - \mu_1$	$-\mu_3$
	$\mu_1 - \mu_2$	$\mu_3 - \mu_1$ $\mu_2 - \mu_4$	$\mu_4 - \mu_3$
	$-\mu_2$	$\mu_2 - \mu_4$	μ_4

(b)

Fig. 3. The finite-difference approximations of mixed derivative as computational grids. The subscripts denote the element index as shown in figure 1: (a) for $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial w}{\partial z} \right)$ and (b) for $\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$.

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{4} [(\beta_2 - \beta_1)w_{i-1,j} + (\beta_3 + \beta_1 + \beta_2 + \beta_4)w_{i,j} + (\beta_3 - \beta_4)w_{i+1,j}] \\
 & + \frac{1}{4} [-\beta_2 w_{i-1,j+1} + (\beta_4 + \beta_2)w_{i,j+1} + \beta_4 w_{i+1,j+1}], \quad (11a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial z} \left(\beta \frac{\partial w}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{4} [\beta_1 w_{i-1,j-1} + (\beta_3 - \beta_1)w_{i,j-1} - \beta_3 w_{i+1,j-1}] \\
 & + \frac{1}{4} [(\beta_1 - \beta_2)w_{i-1,j} + (\beta_3 - \beta_1 + \beta_2 - \beta_4)w_{i,j} + (\beta_4 - \beta_3)w_{i+1,j}] \\
 & + \frac{1}{4} [-\beta_2 w_{i-1,j+1} + (\beta_2 - \beta_4)w_{i,j+1} + \beta_4 w_{i+1,j+1}]. \quad (11b)
 \end{aligned}$$

식 (11)의 차분 연산자를 계산 격자의 형태로 표현하면 Fig. 3과 같다.

질량항의 근사

공간 미분 항에 대한 차분식을 얻는 과정에서 도입된 가중 평균 기법을 고려하면 질량항의 근사를 위해서도 적절한 가중 평균의 개념을 도입하는 것이 타당하다. 이러한 관점에서 본 연구에서는 임의의 배열점에서의 질량 항을 주변 9점에 분포된 질량들의 가중 평균으로 아래와 같이 정의하였다.

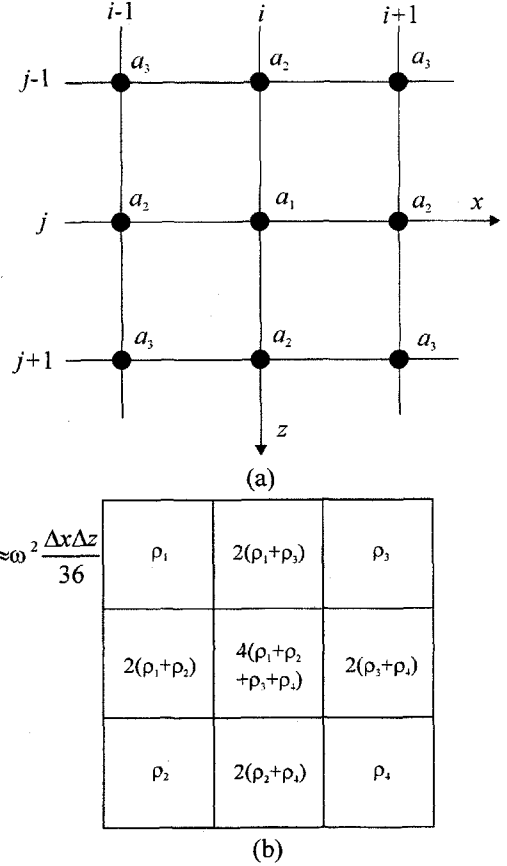


Fig. 4. Computational grids used to approximate the mass acceleration: (a) nine collocation points and their weighting coefficients. (b) The result of approximation as computational grids. ρ_i represents the density of each element within the computational grids.

$$\begin{aligned}
 \rho \omega^2 u & \approx \iint_{\Omega_e} \rho u \, dx dz \\
 & \approx \omega^2 \Delta x \Delta z \{ a_1 \rho_{i,j} u_{i,j} \\
 & + a_2 [\rho_{i,j-1} u_{i,j-1} + \rho_{i,j+1} u_{i,j+1} + \rho_{i-1,j} u_{i-1,j} + \rho_{i+1,j} u_{i+1,j}] \\
 & + a_3 [\rho_{i-1,j-1} u_{i-1,j-1} + \rho_{i-1,j+1} u_{i-1,j+1} \\
 & + \rho_{i+1,j-1} u_{i+1,j-1} + \rho_{i+1,j+1} u_{i+1,j+1}] \}, \quad (12)
 \end{aligned}$$

여기서 a_i 는 가중 평균 계수이며, 배열점으로부터 같은 거리에 있는 절점은 같은 가중 계수를 갖는 것으로 가정하였다 (Fig. 4a). 이와 같은 가중 평균의 개념을 도입할 경우, 가중 계수는 분산식을 이용하여 수치적인 분산과 이방성을 최소화하는 방법으로 구하는 것이 일반적이다. 그러나 이 경우 물리적으로 의미 없는 음의 가중 계수가 나올 수 있어 조심해야 한다. 대신, 본 연구에서는 아래와 같은 직관적인 방법을 이용하였다.

우선, 가중 계수들이 갖는 비를 해당 절점에 인접한 요소의 수로 아래와 같이 정의하고

$$a_1 : a_2 : a_3 = 4 : 2 : 1 \quad (13)$$

이를 전체 가중 계수의 합으로 정규화 하면, 가중 계수들은

$$a_1 = \frac{4}{9}, a_2 = \frac{2}{9}, a_3 = \frac{1}{9} \quad (14)$$

이 된다. 식 (12)에서 각 절점에서의 밀도를 결정하기 위해서 한 요소가 갖는 밀도를 4개의 절점으로 분포시켜야 한다. 따라서 요소별로 정의된 밀도를 이용하면 질량 항은 다음과 같이 근사된다.

$$\begin{aligned} \rho \omega^2 u \approx & \omega^2 \frac{\Delta x \Delta z}{36} [\rho_1 u_{i-1,j-1} + 2(\rho_1 + \rho_3) u_{i,j-1} - \rho_3 u_{i+1,j-1}] \\ & + \omega^2 \frac{\Delta x \Delta z}{18} [(\rho_1 + \rho_2) u_{i-1,j} + 2(\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4) u_{i,j} + (\rho_3 + \rho_4) u_{i+1,j}] \\ & + \omega^2 \frac{\Delta x \Delta z}{36} [\rho_2 u_{i-1,j+1} + 2(\rho_2 + \rho_4) u_{i,j+1} + \rho_4 u_{i+1,j+1}]. \end{aligned} \quad (15)$$

이를 계산 격자의 형태로 표현하면 Fig. 4b와 같다.

중간점 차분 기법

가중 평균 차분 근사와 중간점 차분

가중 평균 개념을 도입한 적분법에 의해 얻어진 차분식은 다음과 같은 형태로 쉽게 전통적인 2차 차분 근사 기법의 관점에서 해석되고, 또 적용될 수 있다.

비혼합형 공간 차분의 경우, 식 (7)과 (8)은 다음과 같은 배열점 자체와 주변 중간점들에서의 2차 중앙 차분 근사들의 평균으로 쉽게 구해질 수 있다.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) \approx \frac{1}{3} \left[\frac{\Delta}{\Delta x} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} + \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} + \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} \right], \quad (16a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{3} \left[\frac{\Delta}{\Delta z} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i-\frac{1}{2},j} + \frac{\Delta}{\Delta z} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i,j} + \frac{\Delta}{\Delta z} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{i+\frac{1}{2},j} \right]. \quad (16b)$$

여기서 $\Delta/\Delta x_p (\alpha \Delta u/\Delta x_p)_{m,n}$ 는 (m, n) 점에서 p 방향으로 전통적인 2차 중앙 차분 연산자

$$\frac{\Delta}{\Delta x} \left(\alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{m,n} = \frac{\alpha_{m-\frac{1}{2},n} u_{m-1,n} - \left(\alpha_{m-\frac{1}{2},n} + \alpha_{m+\frac{1}{2},n} \right) u_{m,n} + \alpha_{m+\frac{1}{2},n} u_{m+1,n}}{\Delta x^2} \quad (17)$$

를 의미한다(Kelly et al., 1976). 이 때, $\alpha_{m,n}$ 으로 표현된 (m, n) 점에서의 물성값이 정의되어야 하고, 본 연구에서는 이를 아래와 같이, 그 절점 주변의 $\Delta x \times \Delta z$ 영역에서의 적분으로 정의

하였다.

$$\alpha_{m,n} \int_{(m-\frac{1}{2})\Delta x}^{(m+\frac{1}{2})\Delta x} \int_{(n-\frac{1}{2})\Delta z}^{(n+\frac{1}{2})\Delta z} \alpha(x, z) dx dz. \quad (18)$$

이 경우, 각 중간 절점에서의 물성값은 요소별로 정의된 물성값으로 쉽게 표현된다. Fig. 5는 이상의 중간점 차분 근사 과정을 모식적으로 나타낸 결과이다.

식 (11)으로 주어진 혼합형 공간 차분의 경우에도 유사하게 다음과 같은 중간점 차분들의 평균으로 구해질 수 있다:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{\partial w}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta}{\Delta x} \left(\beta \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,j+\frac{1}{2}} + \frac{\Delta}{\Delta x} \left(\beta \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i,j-\frac{1}{2}} \right], \quad (19a)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(\beta \frac{\partial w}{\partial z} \right) \approx \frac{1}{2} \left[\frac{\Delta}{\Delta z} \left(\beta \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i+\frac{1}{2},j} + \frac{\Delta}{\Delta z} \left(\beta \frac{\partial w}{\partial z} \right)_{i-\frac{1}{2},j} \right]. \quad (19b)$$

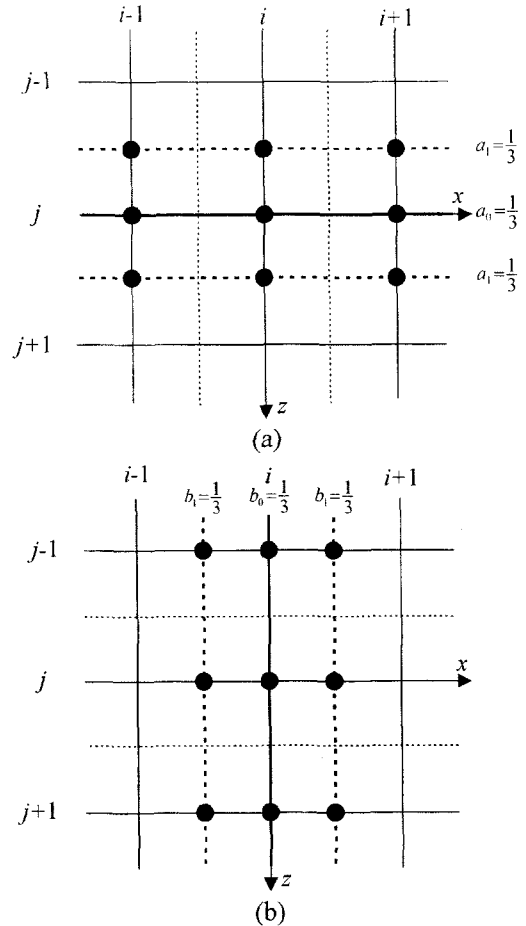


Fig. 5. Grid points and weighting coefficients used in weighted-averaging approximation of non-mixed derivatives: for (a) $\frac{\partial}{\partial x} [(\lambda + 2\mu) \frac{\partial u}{\partial z}]$ and (b) for $\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$. Each finite-difference approximation is obtained by the weighted-average of the approximations at point (i, j) and two nearby midway points $(i \pm 1/2, j)$ or $(i, j \pm 1/2)$, respectively.

여기서 $\Delta/\Delta x(\beta\Delta w/\Delta z)_{m,n}$, $\Delta/\Delta z(\beta\Delta w/\Delta x)_{m,n}$ 은 전통적인 2차 중앙 차분 연산자(Kelly *et al.*, 1976)

$$\frac{\Delta}{\Delta x} \left(\beta \frac{\Delta w}{\Delta z} \right)_{m,n} = \frac{\beta_{m+\frac{1}{2},n} \left(w_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} - w_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \right) - \beta_{m-\frac{1}{2},n} \left(w_{m-\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} - w_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \right)}{\Delta x \Delta z} \quad (20a)$$

$$\frac{\Delta}{\Delta z} \left(\beta \frac{\Delta w}{\Delta x} \right)_{m,n} = \frac{\beta_{m,n+\frac{1}{2}} \left(w_{m+\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} - w_{m-\frac{1}{2},n+\frac{1}{2}} \right) - \beta_{m,n-\frac{1}{2}} \left(w_{m+\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} - w_{m-\frac{1}{2},n-\frac{1}{2}} \right)}{\Delta x \Delta z} \quad (20b)$$

이며, 이때 중간점에서의 물성값은 식 (18)과 같이 정의되고, 중간점에서의 변위들은 주변 절점들에서의 값들의 평균을 이용하였다. Fig. 6는 이상의 혼합형 미분 항에 대한 중간점 차분 근사를 계산 격자를 이용하여 모식적으로 도시한 것이다.

경계조건의 적용

적분법을 이용할 경우 지표 경계조건은 내부 경계조건의 형태로 차분식의 유도과정에서 쉽게 적용될 수 있다. 즉 지표면에서 선적분은 0이 되고 이는 공기중으로의 에너지 전파를 제한한 것과 동일하다(Mufti, 1985).

모형 좌우 및 하부의 인위적 경계면에 대해서는 스폰지 경계조건을 부여하였다(Shin, 1995). 스폰지 경계조건은 인위적 경계 주변에서의 파동장을 효과적으로 감쇄시켜줄 뿐만 아니라, 적용하기 쉽고, 행렬의 대칭성을 깨뜨리지 않는 장점이 있다.

Lamb의 문제에 대한 적용

개발된 알고리즘의 타당성을 검증하기 위하여 Lamb의 문제에 적용하였다. 해의 정확성을 검증하기 위해 그 결과를 이론해와 비교하는 한편 일반적인 일방향 차분 기법을 이용해 지표 경계 조건을 구현하는 유한 차분 기법과의 비교를 위해 25점 가중 평균 기법(민동주, 1999)에 의한 해와 비교하였다. 이론해는 Ewing(1957)에 의해 주어진 식을 푸리에 변환에 의해 수치적으로 구하였다.

Fig. 7은 P-파 및 S-파의 속도가 각각 2000 m/sec, 1500 m/sec이고 밀도가 2.0 g/cm³인 2차원 반무한 공간에 대해 얻어진 탄성과 단면이다. 일반적인 유한 차분해와 달리 오프셋에 따라 감쇠 없이 진행되는 강한 레일리파를 확인할 수 있다.

Fig. 8과 Fig. 9는 보다 정량적인 분석을 위해, 각각 송신원으로부터 500 m와 1000 m 떨어진 곳에서 얻어진 수평 변위와

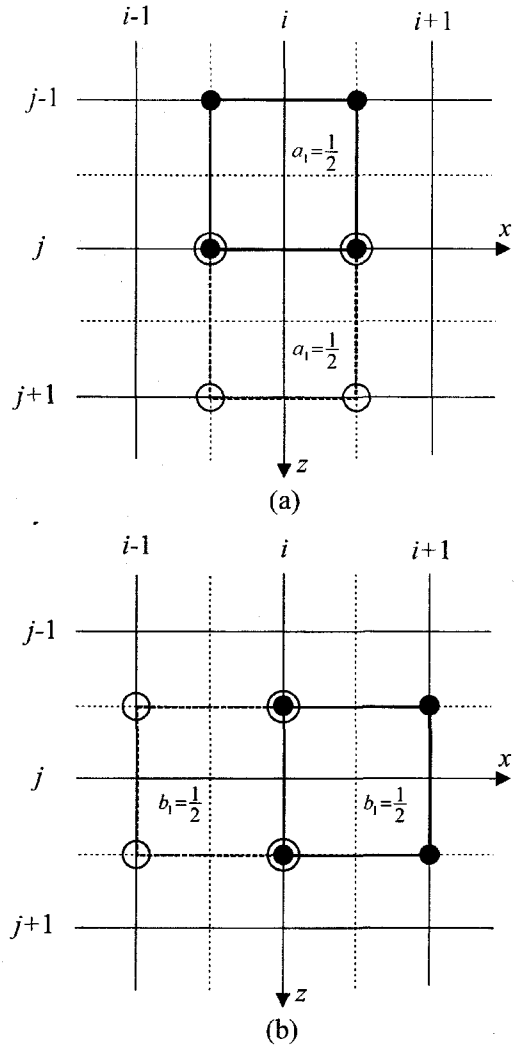


Fig. 6. Grid points and weighting coefficients used in weighted-averaging approximation of mixed derivatives: for (a) $\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda \frac{\partial u}{\partial z} \right)$ and (b) $\frac{\partial}{\partial z} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$. Each finite-difference approximation is obtained by the weighted-average of two approximations at midway point $(i \pm 1/2, j)$ or $(i, j \pm 1/2)$, respectively.

수직 변위를 이론해와 25점 차분 기법에 의해 구해진 해와 비교한 결과이다. 비교 목적상 각 해는 각각의 최대 진폭으로 정규화하였으며, 수치해를 얻기 위한 파장당 격자수로는 중간점 차분의 경우 10개, 25점 차분의 경우 3.3개를 이용하였다.

그림에서 알 수 있는 바와 같이, 중간점 차분 기법의 해는 레일리파의 양의 최대 진폭 부근을 제외하곤 전체적으로 이론해와 잘 일치함을 확인할 수 있으며, 그 정확도도 25점 차분에 의한 해보다 우수한 것을 알 수 있다. 특히 중간점 차분에 의한 해는 레일리파의 도달 시간이 이론해와 정확하게 일치함을 알 수 있으며, 이는 일반적인 유한 차분 해들이 레일리파의 도달 시간을 맞추지 못하는 것에 비해 주목할 만하다. 이론해에서 1.4 sec 주변에서 보이는 이벤트는 푸리에 변환 과정에서

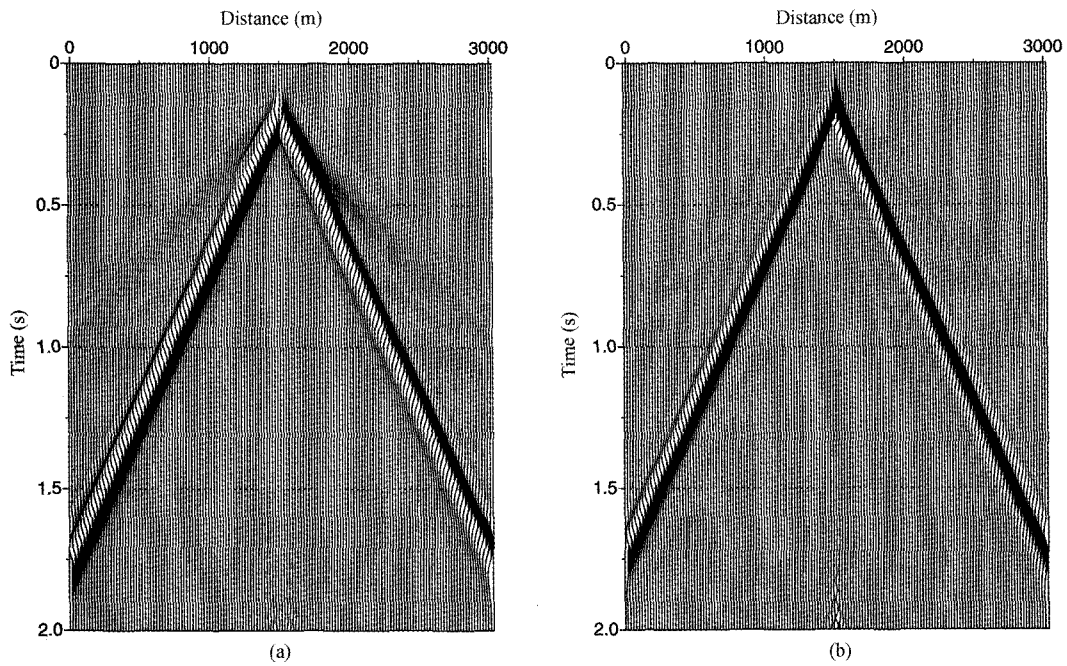


Fig. 7. The synthetic seismogram of (a) horizontal displacement and (b) vertical displacement for 2-dimensional half-space excited by vertical force on the free surface. The velocity of P-wave and S-wave are 2000 m/s and 150 m/s, respectively, and the density of medium is 2.0 g/cm³.

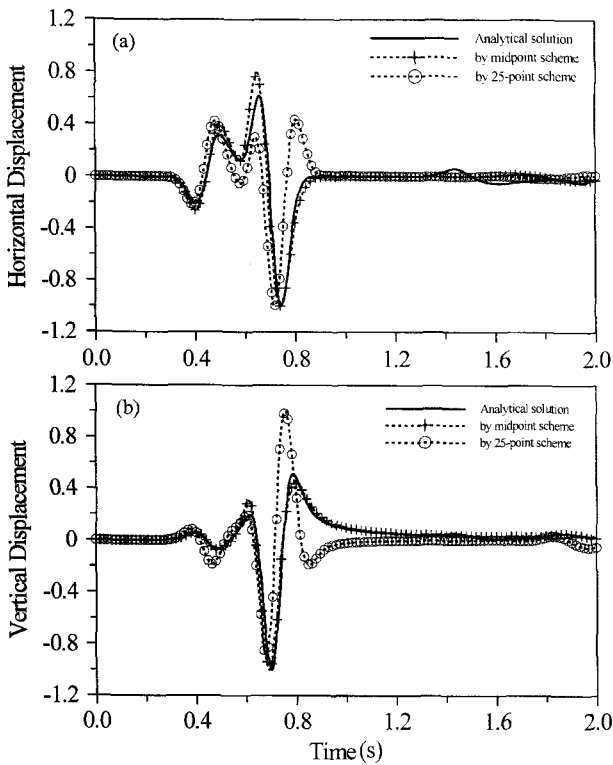


Fig. 8. The comparison of solutions to 2-D Lamb's problem at the location 500 m apart for the source: (a) for horizontal displacement and (b) for vertical displacement. The number of grid points per minimum wavelength used to obtain the solutions is 10 for midpoint-averaging scheme and 3.3 for 25-point weighted averaging scheme, respectively.

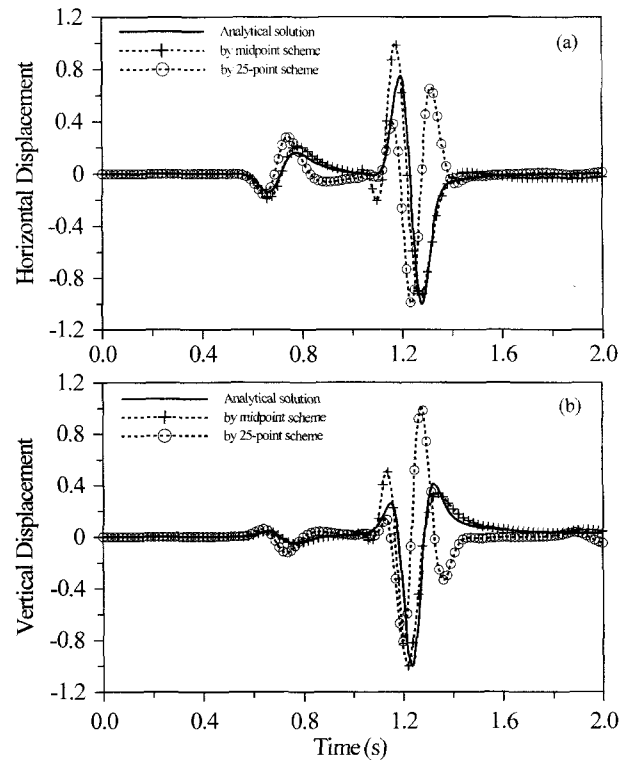


Fig. 9. The comparison of solutions to 2-D Lamb's problem at the location 1000 m apart for the source: (a) for horizontal displacement and (b) for vertical displacement. The number of grid points per minimum wavelength used to obtain the solutions is 10 for midpoint-averaging scheme and 3.3 for 25-point weighted averaging scheme, respectively.

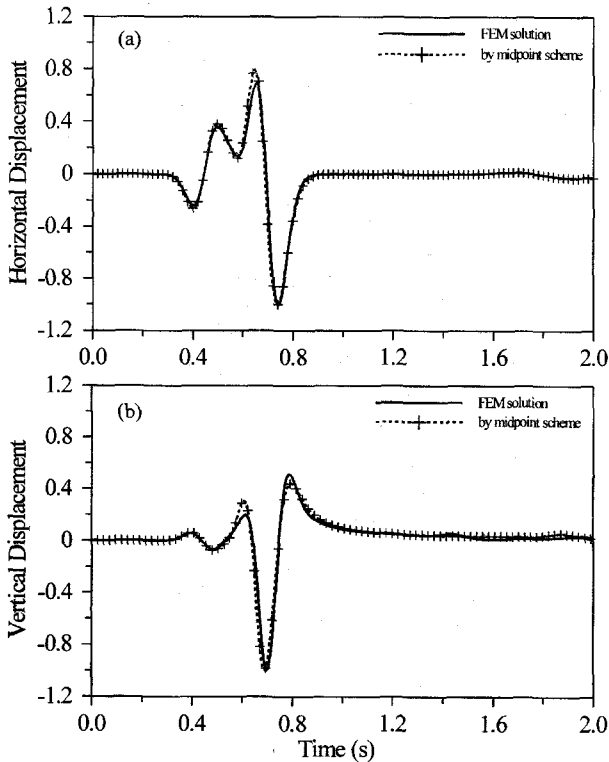


Fig. 10. The comparison of solutions to 2-D Lamb's problem by midpoint weighted-averaging scheme with FEM solutions: (a) for horizontal displacement and (b) for vertical displacement at the location 500m apart from the source. The number of grid points per minimum wavelength used to obtain the solutions is 10 for both schemes. The FEM solutions are obtained using eclectic mixture of 54% consistent mass matrix and 46% lumped mass matrix.

발생하는 잡음이며, 양의 최대 진폭 부근에서 보이는 중간점 차분해와 이론해의 오차는 수치적 분산에 기인하는 것으로 판단된다.

Fig. 10은 앞서의 중간점 차분 해를 유한 요소법에 의한 해와 비교한 결과이다. 유한 요소 해는 54%의 consistent 질량 행렬과 46% lumped 질량 행렬의 혼합 질량 행렬을 이용하여 계산되었으며, 이 때 파장당 격자는 10개를 이용하였다. 그림에서 알 수 있듯이 두 해가 아주 유사한 양상을 띠는 것을 확인할 수 있다.

실제로 유한 요소법에서 얻어진 행렬들을 본 연구에서 얻어진 행렬들을 비교한 결과, 두 방법은 완전히 동일한 행렬식을 도출해 낼 수 있었다. 따라서 본 연구에서 개발된 중간점 차분 기법은 유한요소법과 동일한 수치적 분산 특성을 갖는 '유사-유한 요소법'으로 볼 수 있을 것으로 판단된다.

Fig. 11은 앞서 동일한 모델에 대해 파장당 15개의 격자를 이용하여 계산된 결과를 이론해와 비교한 그림이다. 파장당 10개의 격자를 이용한 경우에 비해 레일리파의 양의 최대 진폭 부근에서도 거의 이론해와 일치하는 결과를 얻을 수 있었다.

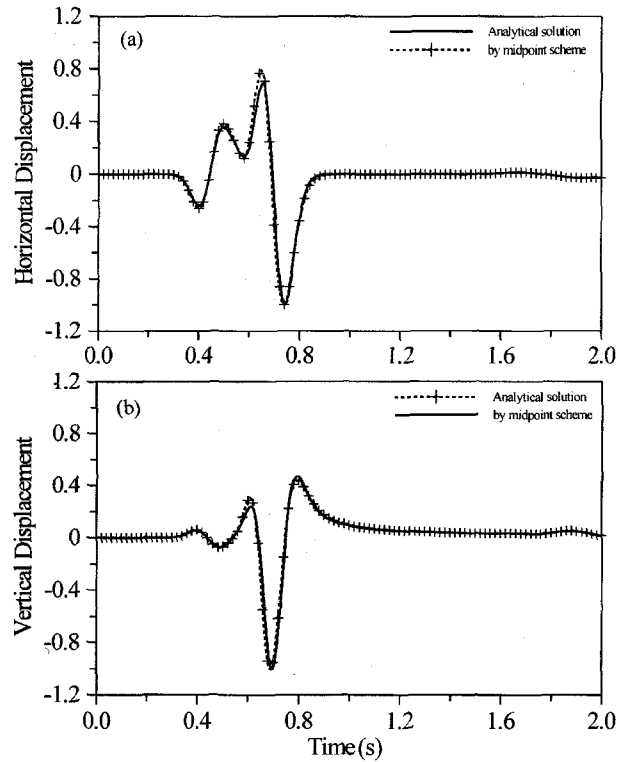


Fig. 11. The comparison of solutions to 2-D Lamb's problem at the location 500m apart from the source: (a) for horizontal displacement and (b) for vertical displacement. The numerical solutions are obtained using 15 grid point per minimum wavelength.

결론

본 연구에서는 유한 차분법을 이용한 탄성과 파동 방정식 모델링에서 해의 정확성 및 안정성을 떨어뜨리는 주 요인이 되는 지표 경계 조건을 효율적으로 적용할 수 있는 중간점 차분 기법을 제안하고 이론해와 비교함으로써 그 타당성을 검증하였으며 그 결과, 다음과 같은 결론을 얻을 수 있었다.

(1) 중간점 차분 기법은 일반적인 유한 차분법을 이용한 탄성과 파동 방정식에서 난제 중의 하나인 Lamb의 문제를 해결함으로써, 지표 경계 조건을 효과적으로 적용할 수 있는 하나의 대안으로서 사용될 수 있을 것으로 판단된다.

(2) 중간점 차분 기법을 이용할 경우, 구해지는 강성 행렬과 질량 행렬은 유한 요소법에 의한 것과 동일함을 확인하였다. 따라서 중간점 차분 기법은 유한 요소법과 동일한 수치적 분산 특성을 갖는, 일종의 '유사-유한 요소법'으로 볼 수 있다. 그러나 본 연구에서 개발된 중간점 차분 기법은 행렬의 조립 과정이나 형상 함수의 사용 및 수치 적분 등과 같은 과정 등이 요구되는 유한 요소법에 비해 적용하기 쉽고, 계산 시간이나 기억 용량에 있어 이점이 있다.

(3) 본 연구에서 사용된 가중 평균 개념을 이용하면 가중 평균점과 계수를 변화시킴에 따라 다른 수치적 분산 특성을 갖는 새로운 차분 연산자를 쉽게 개발할 수 있을 것으로 판단된다.

다. 또한 고차 근사를 얻기 위한 여타의 가중 평균법과도 쉽게 접목 될 수 있을 것으로 판단된다.

참고문헌

- 민동주, 1999, 가중평균 차분연산자를 이용한 주파수 영역 탄성 파 모델링, 서울대학교 교육학 박사학위 논문.
- Alterman, Z., and Karal, F. C., 1968, Propagation of elastic waves in layered media by finite difference methods: *Bull. Seis. Soc. Am.*, **58**, 367-398.
- Ewing, W. M., Jardetzky, W. S., and Press, F., 1957, *Elastic Waves in Layered Media*: McGraw-Hill, NY.
- Kelly, K. R., Ward, R. W., Treitel, S., and Alford, R. M., 1976, Synthetic Seismogram: A Finite-difference Approach: *Geophysics*, **41**, 2-27.
- Mufti, I. R., 1985, Seismic Modeling in the Implicit Mode, *Geophysical Prospecting*: **33**, 619-656.
- Park, K. G., 2000, A Finite-Difference Scheme to Treat the Free-surface Boundary Conditions in Elastic Wave Equation Modeling: Ph.D. thesis, Seoul National University.
- Shin, C. S., 1995, Sponge boundary condition for frequency-domain modeling: *Geophysics*, **60**, 1870-1874.
- Varga, R., 1962, *Matrix Iterative Analysis*: Prentice-Hall, NJ.