

## 論文

## Monotonicity Preserving Spectral Volume 기법

김성수\*, 윤성환\*, 김종암\*\*

## Monotonicity Preserving Spectral Volume Method

Sung-Soo Kim\*, Sung-Hwan Yoon\* and Chongam Kim\*\*

## ABSTRACT

Based on the monotonicity preserving concept, a new limiter, which is applicable to an arbitrary grid system, is developed. This new limiter preserves accuracy and monotonicity on an arbitrary grid system and it is also applicable to spectral volume concept. Numerical experiments for 1-D and 2-D flow show the characteristics of the new limiter.

## 초 록

단조성 유지 개념을 기반으로, 임의의 격자계에서 적용할 수 있는 새로운 제한자를 개발하였다. 본 논문에서 개발된 제한자는 임의의 계산 격자계에서 정확성과 단조성을 유지할 수 있는 특성을 가졌으며, 이러한 특성으로 인하여 spectral volume 기법으로의 적용이 가능하다. 또한 이 제한자는 smooth extremum에서 물성치의 변화를 허용하여 내삽된 물성치의 정확도를 향상시켜주는 역할을 한다. 일차원, 이차원 수치 해석의 결과를 통하여 본 논문에서 개발된 제한자의 특성을 검증하였다.

**Key Words** : Monotonicity Preserving(단조성 유지), Limiter(제한자), Spectral Volume Method

## 1. 서 론

유동의 물리적 현상을 모사하는 지배방정식인 Euler, Navier-Stokes 방정식은 비선형 방정식으로, 유동의 완전한 구배가 있는 연속적인 영역과 충격파와 같은 불연속면을 그 해로 갖는다. 따라서 유동 현상을 정확하게 모사하기 위해서는 수치기법이 불연속면을 진동현상 없이 적은 수의 격자에서 포착할 수 있어야 하며, 연속적인 영역에서는 높은 정확도를 보장할 수 있어야 한다.

불연속면에서의 강건성을 보장하기 위하여 TVD

(Total Variation Diminishing) 개념이 도입되었으며, 연속 영역에서 수치해의 정확성을 유지하기 위하여 TVB (Total Variation Bounded), MP (Monotonicity Preserving) 개념이 전산유체역학에 도입되었다. 이러한 개념은 내삽, 혹은 외삽된 유동의 구배를 제한하는 제한자(limiter)의 형식으로 수치기법에 도입되었고, 많은 연구를 통하여 다양한 제한자가 개발되었다.

본 논문은 spectral volume 개념을 이용하여 강건하고 정확하게 유동을 수치 모사하는 것을 목표로 한다. 이를 위하여 MP 개념에 기반을 둔 Huynh의 MP 제한자를 도입하였고, spectral volume 기법에 적용할 수 있도록 일반적인 계산 격자계로 확장하는 연구를 수행하였다.

이러한 일반화 연구는 임의의 control volume 분포를 갖는 spectral volume에서 수치해의 정확성과 강건성을 향상시켜주는 결과를 가져올 것

† 2004년 10월 1일 접수 ~ 2005년 9월 13일 심사완료

\* 정희원, 서울대학교 항공우주공학과 대학원  
연락처, E-mail : foucault30@hanmail.net

서울시 관악구 신림동 산 56-1

\*\* 정희원, 서울대학교 항공우주공학과

이며, 이로 인해 다양한 control volume의 구성이 가능하게 될 것이다.

## II. 본 론

### 2.1 지배방정식

비정상 2차원 유동의 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E(Q)}{\partial x} + \frac{\partial F(Q)}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

Euler 방정식의 경우, 위의 방정식은 vector 방정식이 되며, 보존 변수  $Q$ 와 비점성 플럭스  $E, F$ 는 다음과 같다.

$$Q = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho e_t \end{Bmatrix}, E = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho u e_t + up \end{Bmatrix}, F = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ \rho v e_t + vp \end{Bmatrix} \quad (2)$$

위의 식에서  $\rho, u, v, e_t, p$ 는 각각, 밀도, x-방향 속도, y-방향 속도, 단위 질량당 총에너지, 압력을 나타낸다. 압력은 상태방정식을 통하여 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$p = \frac{\rho}{\gamma - 1} \left( e_t - \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \quad (3)$$

위의 식에서  $\gamma$ 는 비열비를 나타내며 1.4의 값을 갖는다.

해석의 편의성을 위하여 계산격자는 x, y표축에 정렬된 직사각형 격자를 고려하기로 한다. 지배방정식을 유한체적법(FVM; Finite Volume Method)을 이용하여 공간에 대하여 적분하면 다음과 같은 식을 얻는다.

$$\int_{A_{i,j}} \frac{\partial Q}{\partial t} dA + \oint_{\partial A_{i,j}} f(Q) \cdot \hat{n} dl = 0 \quad (4)$$

$$f = E\hat{i} + F\hat{j} \quad (5)$$

위의 식은 계산격자 (i,j)에 저장된 평균값을 이용하여 다음과 같은 식으로 표현할 수 있다.

$$\bar{Q}_{i,j} = \frac{1}{A_{i,j}} \int_{A_{i,j}} Q dA \quad (6)$$

$$\frac{d\bar{Q}_{i,j}}{dt} + \frac{1}{A_{i,j}} \sum_{m=1}^4 \int_{l_m} f(Q) \cdot \hat{n} dl \quad (7)$$

위의 식 (7)에서  $m$ 은 직사각형 계산격자의 각 면을 나타낸다. 위의 식을 직사각형 계산 격자에

적용하면 다음과 같은 식으로 각 방향에 대하여 분리하여 전개할 수 있다.

$$A_{i,j} \frac{d\bar{Q}_{i,j}}{dt} + \int E(Q(x_{i+1/2}, y)) dy - \int E(Q(x_{i-1/2}, y)) dy + \int F(Q(x, y_{j+1/2})) dx - \int F(Q(x, y_{j-1/2})) dx = 0 \quad (8)$$

### 2.2 고차 정확도 수치기법

식 (8)에 나타나는 적분식은 Gauss 구적법(quadrature) 공식을 이용하여 임의의 정확도를 얻을 수 있으며, k차의 정확도를 갖는 Gauss 구적법 공식을 사용하면 다음과 같은 공간정확도를 얻을 수 있다.

$$\int f(Q) \cdot \hat{n} dl = \sum_r w_r f(x_r, y_r) \cdot \hat{n} l + O(lh^k) \quad (9)$$

위의 식에서  $l$ 은 계산 격자면의 길이를,  $h$ 는 계산 격자면의 최대 길이를 나타낸다.  $(x_r, y_r)$ 은 적분점인 Gauss 구적법 point를 나타낸다.  $Q$ 가 일정한 값을 갖는 경우, 다음의 식이 성립한다.

$$\int f(Q) \cdot \hat{n} dl = 0 \quad (10)$$

따라서 적분을 계산 격자의 네 면을 따라서 모두 수행하면 다음과 같은 공간정확도를 얻을 수 있다.

$$\sum_{m=1}^4 \int_{l_m} f(Q) \cdot \hat{n} dl = \sum_{m=1}^4 \sum_r w_r f(x_r, y_r) \cdot \hat{n} l + O(lh^{k+1}) \quad (11)$$

따라서 식(7)에 대입하고  $O(A_{i,j}) = O(lh)$ 임을 이용하면 다음과 같이 공간정확도 k차의 해를 얻을 수 있다.

$$\frac{d\bar{Q}_{i,j}}{dt} + \frac{1}{A_{i,j}} \sum_{m=1}^4 \sum_r w_r f(x_r, y_r) \cdot \hat{n} l + O(h^k) = 0 \quad (12)$$

플럭스 함수  $f$ 는 보존변수  $Q$ 의 함수이므로, 구적법 point에서의 보존변수의 값을 k차의 정확도로 구할 수 있다면, 식 (12)의 k차 공간정확도를 구현할 수 있다.

x-축에 수직인 제어면, 즉  $i+1/2$ 면에서의 보존변수의 분포를 구하는 방식은 다음과 같다. 보존변수  $Q$ 는 공간좌표  $x$ 와  $y$ 의 함수로, k차 정확도를 갖는 공간분포를 얻기 위해서는  $x$ 와  $y$ 의 k-1차 다항식을 필요로 한다.

$$Q(x, y) = \sum_{m=0}^{k-1} \sum_{n=0}^{k-1-m} c_{m,n} x^m y^n + O(\Delta x^k, \Delta y^k) \quad (13)$$

위의 식을 보존변수  $Q$ 의 분포를 이용하여 구

하면  $(i, j)$  계산격자에서의 임의의 점에서 정확도  $k$ 차의 해를 얻을 수 있으나, 이를 위해서는  $k(k+1)/2$ 개의 계수  $c$ 를 모두 구해야 한다. 플릭스 함수의 적분을 위해 필요한 값은 구적법 point에서의 보존변수이므로, 다음에 기술하는 방법과 같이  $x, y$ 방향으로 분해하여 다항식을 구성하여도  $k$ 차의 공간정확도를 갖는 변수의 분포를 구할 수 있다.

계산격자  $(i, j)$ 에서의 평균값,  $\bar{Q}_{i,j}$ 을 이용하여 격자 경계면  $(i+1/2, j)$ 에서의 평균값  $Q_{i+1/2,j}^*$ 을 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\bar{Q}_{i,j} = \frac{1}{A_{i,j}} \int \int Q(x,y) dy dx \quad (14)$$

$$\frac{1}{\Delta y} \int Q(x,y) dy = Q^*(x) = p(x) + O(\Delta x^k) \quad (15)$$

위의 다항식  $p(x)$ 는 식(16)으로 표현되는  $k-1$ 차의 다항식으로 아래의 식(17)의 보존특성을 만족시키도록 계수  $a_n$ 을 결정한다.

$$p(x) = \sum_{n=0}^{k-1} a_n x^n \quad (16)$$

$$\int \int Q(x,y) dy dx = \Delta y \int p(x) dx \quad (17)$$

식(16)과 식(17)을 통하여 다항식  $p(x)$ 를 구한 후, 격자 경계면  $(i+1/2, j)$ 의  $x$  좌표값을 대입하면 식(18)과 같이 경계면에서의 물성치 평균값을 얻을 수 있다.

$$Q_{i+1/2,j}^* = p(x_{i+1/2,j}) + O(\Delta x^k) \quad (18)$$

$(i+1/2, j)$  경계면에서  $y$ 방향의 변화를 정확하게 묘사할 수 있다면  $p$ 는 식(19)와 같은 정확도를 갖는다.

$$Q(x_{i+1/2}, y) = p(x_{i+1/2}, y) + O(\Delta x^k) \quad (19)$$

물성치의  $y$ 방향의 분포는  $p(x_{i+1/2}, y)$ 의  $y$ 방향 분포인  $\dots, Q_{i+1/2,j-1}^*, Q_{i+1/2,j}^*, Q_{i+1/2,j+1}^*, \dots$ 을 이용하여 식(21)의 보존특성을 만족시키도록 함으로써 식(20)의  $k-1$ 차 다항식을 구할 수 있다.

$$p(x_{i+1/2}, y) = q(x_{i+1/2}, y) + O(\Delta y^k) \quad (20)$$

$$\int p(x_{i+1/2}, y) dy = \int q(x_{i+1/2}, y) dy \quad (21)$$

따라서 식(20)을 식(19)에 대입하면  $(i+1/2, j)$  경계면에서  $k$ 차 공간정확도를 갖는 물성치 분포를 얻을 수 있다.

$$Q(x_{i+1/2}, y) = q(x_{i+1/2}, y) + O(\Delta x^k, \Delta y^k) \quad (22)$$

이렇게 얻은 물성치 분포는 식 (12)에서 필요한 Gauss 구적법 point에서의 물성치를 얻는데 활용할 수 있다.  $y$ -축에 수직인 경계면에서의 물성치 분포도 위에 기술한 방식과 같이 얻을 수 있다.

식 (16)에서 필요한  $k-1$ 차의 다항식의 계수는 원시함수(primitive function)와 Lagrange 다항식을 이용하여 구할 수 있다[2].

### 2.3 Spectral Volume 기법

Spectral volume 기법[1]은 계산 격자를 spectral volume과 control volume으로 나눠서 생각한다. Fig. 1은 1차원에서 spectral volume과 control volume을 도시한 것이다. Fig. 1에 나타난 것과 같이 spectral volume 기법에서는 전체 계산영역을 spectral volume이라 불리는 계산 격자로 구성하고 각각의 spectral volume을 control volume으로 다시 나눈다. 이때 각각의 spectral volume을 구성하는 control volume의 수는 원하는 공간차분의 정확도에 따른다. 예를 들어 공간정확도 3차의 경우, 각각의 spectral volume은 3개의 control volume으로 구성되고 공간정확도 5차의 경우, 각각의 spectral volume은 5개의 control volume으로 구성된다. 이와 같이 계산격자를 구성하는 이유는 각각의 spectral volume 안에 분포된 control volume의 물성치를 이용하여 하나의 다항식을 구성하고 이 다항식을 이용하여 spectral volume 안에서의 물성치 분포와 격자 경계에서의 물성치 값을 예측하기 때문이다.  $i$ 번째 spectral volume의  $j$ 번째 control volume을  $(i, j)$ 로, 물성치를  $\bar{Q}_{i,j}$ 로 표기하고 spectral volume 기법을 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\bar{Q}_{i,j} = \frac{1}{\Delta x_{i,j}} \int_{i,j} Q(x) dx \quad (23)$$

$$p_i(x) = \sum_{r=0}^{k-1} a_r x^r \quad (24)$$

$$\bar{Q}_{i,j} = \int_{x_{i,j-1/2}}^{x_{i,j+1/2}} p_i(x) dx \quad (25)$$

식 (24)에서  $k$ 는 control volume의 수, 혹은 공간정확도를 나타낸다.  $k-1$ 차 다항식  $p_i(x)$ 는 원시함수(primitive function)를 이용하여 식(25)가 만족되도록 결정할 수 있다[2]. 이러한 spectral

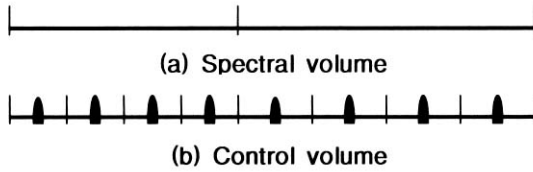


Fig. 1. Spectral volume and control volume

volume 기법은 하나의 다항식으로 spectral volume 전체의 물성치 분포를 얻을 수 있다는 장점이 있는 반면, 불연속적인 물성치 분포를 고차의 다항식으로 근사함에 따라 발생하는 진동현상(Runge 현상)이 spectral volume의 경계에서 일어난다는 단점이 있다. 이에 Wang[1]은 Runge 현상을 최소화하기 위하여 control volume의 분포를 다음과 같은 Gauss-Lobatto 분포를 이용하여 나누었다. Spectral volume의 경계 좌표가 식 (26)과 같을 때, control volume 경계 좌표는 식 (27)과 같이 결정된다.

$$x_{i,1/2} = -1, \quad x_{i,k+1/2} = 1 \quad (26)$$

$$x_{i,j+1/2} = -\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right), \quad j=0, \dots, k \quad (27)$$

따라서 각각의 spectral volume의 크기는 다를 수 있지만, spectral volume안에서의 control volume의 분포는 식 (27)로 결정되어 동일한 분포를 갖게 된다.

## 2.4 MP 제한자

Spectral volume 기법은 control volume의 수에 따라 임의의 k차 정확도를 유지할 수 있다는 장점이 있으나, 충격파와 같은 불연속면이 있을 경우 발생하는 진동 현상을 억제하기 위해 제한자(limiter)의 도입이 필수적이라 할 수 있다. 일반적으로 사용되는 TVD(Total Variation Diminishing) 제한자는 충격파 영역에서 수치기법, 혹은 내삽된 물성치를 1차로 유지함으로써 수치해의 진동을 억제하는 방식을 취하고 있다. 일반적으로 사용되는 대부분의 수치기법이 충격파를 1차 정확도에서도 하나의 경계면에서 포착할 수 있는 능력이 있으므로 이러한 TVD 제한자는 안정적이고 정확한 충격파 포착능력을 보장한다. 그러나 TVD 제한자는 불연속면과 smooth extremum을 구별하지 못하는 단점이 있다. 이로 인하여 smooth extremum에서 공간정확도 역시 1차로 낮아지게 된다. 불연속면과 달리, smooth extremum에서의 1차 정확도, 혹은 수치점성의 증가는 extremum 진폭(amplitude)의 감쇄로 이

어지고, 결국 정확한 유동 모사를 위하여 많은 수의 격자를 요구한다.

Huynh[3]은 이와 같은 TVD 제한자의 단점을 극복하기 위하여 불연속면과 smooth extremum을 구별하여 불연속면에서는 TVD 성질을 만족하고 smooth extremum에서는 수치해의 정확성을 유지할 수 있는 MP(Monotonicity Preserving) 제한자를 제안하였고 등간격의 격자계에서 뛰어난 성능을 보임을 제시하였다.

그러나 spectral volume 기법은 앞에서 기술한 바와 같이 Runge 현상을 최소화하기 위하여 등간격이 아닌, Gauss-Lobatto 분포를 취하고 있어 Huynh의 MP 제한자를 그대로 적용하는 것만으로는 정확도 향상에 한계가 있다. 이에 본 논문에서는 MP 제한자를 임의의 격자 간격에서 성립하도록 일반화하는 연구를 수행하였다.

TVD 제한자는 Fig. 2의 Sweby[4]의 TVD 조건을 이용하면 식 (28)과 같이 표현할 수 있다.

$$Q_{\max} = \min(\max(\bar{Q}_j, \bar{Q}_{j+1}), \max(\bar{Q}_j, Q_{UL})) \quad (28a)$$

$$Q_{\min} = \max(\min(\bar{Q}_j, \bar{Q}_{j+1}), \min(\bar{Q}_j, Q_{UL})) \quad (28b)$$

$$\bar{Q}_{j+1/2} = \text{median}(\bar{Q}_{j+1/2}, Q_{\min}, Q_{\max}) \quad (28c)$$

$$\text{median}(x, y, z) = x + \min(\max(y-x, z-x), 0) \quad (28d)$$

$$Q_{UL} = 2\bar{Q}_j - \bar{Q}_{j-1} \quad (28e)$$

식(28)에서 아래첨자는 격자의 순차적인 순서를 나타내며,  $\bar{Q}_{j+1/2}$ 은 격자 경계면에서 k차 정확도로 내삽한 물성치이다. 위의 식은 내삽한 값  $\bar{Q}_{j+1/2}$ 이 구간  $[\bar{Q}_j, \bar{Q}_{j+1}]$ 와 구간  $[\bar{Q}_j, Q_{UL}]$ 의 교집합 속에 포함되도록 하는 역할을 한다.

MP 제한자는 smooth extremum에서  $O(\Delta x)$ ,

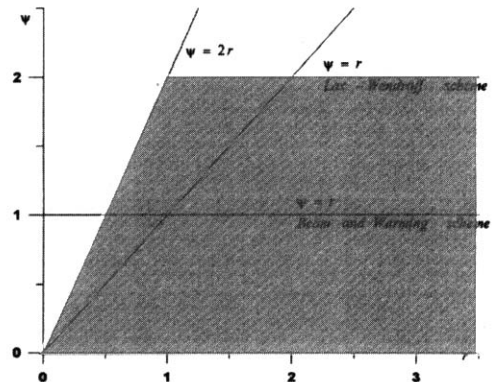


Fig. 2. TVD region

혹은  $O(\Delta x^2)$ 의 변화량(variation)을 허용함으로써, extremum 영역에서 내삽된 물성치의 정확도를 보존하는 방식을 취하고 있다. Control volume에 저장되는 평균값을 이용하면 격자 경계면에서  $O(\Delta x)$ 의 변화량은 다음과 같이 표현된다.

$$Q_{FL} = \bar{Q}_j + \frac{\Delta x_j}{\Delta x_j + \Delta x_{j-1}} (\bar{Q}_j - \bar{Q}_{j-1}) \quad (29)$$

$$Q_{FR} = \bar{Q}_{j+1} + \frac{\Delta x_{j+1}}{\Delta x_{j+1} + \Delta x_{j+2}} (\bar{Q}_{j+1} - \bar{Q}_{j+2}) \quad (30)$$

$Q_{FL}$ 은  $j$ 와  $j-1$ 의 평균값을,  $Q_{FR}$ 은  $j+1$ 과  $j+2$ 에 저장되는 평균값을 이용하여, 유동 변수의 선형 분포를 가정하여 격자 경계면,  $j+1/2$ 에서의 값을 외삽한 결과식이다. 이 값은 단조 영역에서  $j$ 와  $j+1$ 의 유동 변수 사이에 위치하도록 다음과 같은 제한 과정을 거친다.

$$Q_{AB} = \frac{1}{\Delta x_j + \Delta x_{j+1}} (\Delta x_{j-1} \bar{Q}_j + \Delta x_j \bar{Q}_{j+1}) \quad (31)$$

$$Q_{MD} = Q_{AB} + \min\{Q_{AB} - Q_{FL}, Q_{AB} - Q_{FR}\} \quad (32)$$

식(32)의  $Q_{MD}$ 는 local extremum에서  $O(\Delta x)$ 의 변화를 허용하고, 단조구간에서는 내삽한 값이 단조적으로 변화하도록 한다. 단조영역에서  $Q_{AB} - Q_{FL}$ 와  $Q_{AB} - Q_{FR}$ 의 부호가 다를 경우,  $Q_{MD}$ 는  $Q_{AB}$ 가 되고, 부호가 같을 경우, 변화량이 작은 것을 택하므로  $Q_{MD}$ 는  $j$ 와  $j+1$ 의 유동 변수 사이의 값을 취한다. 따라서 식(28a)와 (28b)의 첫 번째 구간을 식(33)과 같이 변화시키면 단조구간에서는 그 영역이 변화하지 않으면서 local extremum에서  $O(\Delta x)$ 의 변화량을 허용하게 된다.

$$I[\bar{Q}_j, \bar{Q}_{j+1}, Q_{MD}] \quad (33)$$

Control volume ( $j, j-1, j-2$ ), ( $j+1, j, j-1$ )에 저장되는 평균값을 이용하여  $j+1/2$ 에서의 유동 변수를 내삽하면  $O(\Delta x^2)$ 의 변화량, 즉 3차 정확도의 유동 변수는 다음과 같이 표현된다.

$$Q_{LC} = Q_{FL} + \frac{D}{3} \Delta x_j (\Delta x_{j-1} + \Delta x_j) \quad (34)$$

이제 미분치인  $D$ 는 다음과 같이 결정한다.

$$D_1 = \frac{3d_1}{(\Delta x_{j-2} + \Delta x_{j-1})(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j)(\Delta x_{j-2} + \Delta x_{j-1} + \Delta x_j)} \quad (35a)$$

$$d_1 = \frac{\bar{Q}_{j-2}(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j) - \bar{Q}_{j-1}(\Delta x_{j-2} + 2\Delta x_{j-1} + \Delta x_j) + \bar{Q}_j(\Delta x_{j-2} + \Delta x_{j-1})}{(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j)(\Delta x_j + \Delta x_{j+1})(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j + \Delta x_{j+1})} \quad (35b)$$

$$D_2 = \frac{3d_2}{(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j)(\Delta x_j + \Delta x_{j+1})(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j + \Delta x_{j+1})} \quad (35c)$$

$$d_2 = \frac{\bar{Q}_{j-1}(\Delta x_j + \Delta x_{j+1}) - \bar{Q}_j(\Delta x_{j-1} + 2\Delta x_j + \Delta x_{j+1}) + \bar{Q}_{j+1}(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j)}{(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j)(\Delta x_j + \Delta x_{j+1})(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j + \Delta x_{j+1})} \quad (35d)$$

$$D = \min\{D_1, D_2\} \quad (35e)$$

식(28a)과 (28b)의 두 번째 구간은 다음과 같이 변화시킨다.

$$I[\bar{Q}_j, Q_{UL}, Q_{LC}] \quad (36)$$

유동의 분포에 변곡(inflexion)이 생기는 경우,  $D$ 는 0이 되고  $Q_{FL} \in I[\bar{Q}_j, Q_{UL}]$ 이 성립되므로 구간의 변화는 생기지 않는다. 단조증가구간에서 변곡이 발생하지 않는 경우,  $Q_{LC}$ 가  $Q_{UL}$ 보다 작으면 역시 구간에 변화가 생기지 않는다. 이를 확인하기 위해  $Q_{LC}$ 와  $Q_{UL}$ 을 다시 써보면 다음과 같다.

$$Q_{UL} = Q_{FL} + \frac{\Delta x_j + 2\Delta x_{j-1}}{\Delta x_j + \Delta x_{j-1}} (\bar{Q}_j - \bar{Q}_{j-1}) \quad (37a)$$

$$Q_{LC} = Q_{FL} + \frac{D}{3} \Delta x_j (\Delta x_{j-1} + \Delta x_j) \quad (37b)$$

이제 미분인  $D$ 는  $D_1$ 과  $D_2$  중에 절대 값이 작은 것을 취하고 변곡이 없으므로  $D_1$ 과  $D_2$ 의 부호가 같다는 것을 고려했을 때,  $D_1$ 에 대하여  $Q_{LC} \leq Q_{UL}$ 이 성립하면  $D$ 에 대하여 항상  $Q_{LC} \leq Q_{UL}$ 이 성립한다.  $Q_{LC} \leq Q_{UL}$ 이 성립하려면 다음의 식 (38)이 성립하여야 한다.

$$\frac{D_1}{3} \Delta x_j (\Delta x_{j-1} + \Delta x_j) \leq \frac{\Delta x_j + 2\Delta x_{j-1}}{\Delta x_j + \Delta x_{j-1}} (\bar{Q}_j - \bar{Q}_{j-1}) \quad (38)$$

식 (38)을 정리하면 식 (39)와 같다.

$$(\bar{Q}_j - \bar{Q}_{j-1}) \geq \frac{\Delta x_j (\Delta x_j + \Delta x_{j-1}) \times d_1}{(\Delta x_{j-2} + \Delta x_{j-1})(\Delta x_j + 2\Delta x_{j-1})(\Delta x_{j-2} + \Delta x_{j-1} + \Delta x_j)} \quad (39a)$$

$$d_1 = \frac{\bar{Q}_{j-2}(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j) - \bar{Q}_{j-1}(\Delta x_{j-2} + 2\Delta x_{j-1} + \Delta x_j) + \bar{Q}_j(\Delta x_{j-2} + \Delta x_{j-1})}{(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j)(\Delta x_j + \Delta x_{j+1})(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j + \Delta x_{j+1})} \quad (39b)$$

식 (39)에서 단조증가구간임을 이용하여 정규화 과정(normalization)을 거치면,  $\bar{Q}_j = 1, \bar{Q}_{j-1} = 0$ 으로 놓을 수 있다. 따라서 식 (39)는 다음과 같이 된다.

$$1 \geq \frac{\Delta x_j (\Delta x_j + \Delta x_{j-1}) \times d_1}{(\Delta x_{j-2} + \Delta x_{j-1})(\Delta x_j + 2\Delta x_{j-1})(\Delta x_{j-2} + \Delta x_{j-1} + \Delta x_j)} \quad (40a)$$

$$d_1 = \bar{Q}_{j-2}(\Delta x_{j-1} + \Delta x_j) + (\Delta x_{j-2} + \Delta x_{j-1}) \quad (40b)$$

식 (40)에서 단조 증가 구간임을 이용하면,  $\bar{Q}_{j-2} \leq 0$ 이고, 따라서  $\bar{Q}_{j-2} = 0$ 인 경우에 성립하면 항상 성립하게 된다. 즉,

$$1 \geq \frac{\Delta x_j (\Delta x_j + \Delta x_{j-1})}{(\Delta x_j + 2\Delta x_{j-1})(\Delta x_{j-2} + \Delta x_{j-1} + \Delta x_j)} \quad (41)$$

식 (41)에서 우변은 항상 1보다 작으므로  $Q_{LC} \leq Q_{UL}$ 이 항상 성립하는 것을 확인할 수 있다.

식 (41)을 이용하여, 식 (34)의  $O(\Delta x^2)$  변화량을 다음과 같이 최대화할 수 있다.

$$Q_{LC} = Q_{FL} + \alpha \frac{D}{3} \Delta x_j (\Delta x_{j-1} + \Delta x_j) \quad (42a)$$

$$\alpha = \frac{(\Delta x_j + 2\Delta x_{j-1})(\Delta x_{j-2} + \Delta x_{j-1} + \Delta x_j)}{\Delta x_j (\Delta x_j + \Delta x_{j-1})} \quad (42b)$$

최종적인 MP 제한자는 다음과 같은 형식을 취한다.

$$Q_{\max} = \min(\max(Q_j, Q_{j+1}, Q_{MD}), \max(Q_j, Q_{UL}, Q_{LC})) \quad (43a)$$

$$Q_{\min} = \max(\min(Q_j, Q_{j+1}, Q_{MD}), \min(Q_j, Q_{UL}, Q_{LC})) \quad (43b)$$

$$\bar{Q}_{j+1/2} = \text{median}(\bar{Q}_{j+1/2}, Q_{\min}, Q_{\max}) \quad (43c)$$

$Q_{UL}$ 은 식 (28)을,  $Q_{MD}$ 는 식 (32)를,  $Q_{LC}$ 는 식 (42)를 사용한다.

## 2.5 시간 적분법

시간적분법은 외재적 기법인 3차 TVD(Total Variation Diminishing) Runge-Kutta 기법[5]을 사용하였으며 다음과 같다.

$$\bar{Q}^{(1)} = \bar{Q}^n + \Delta t R(\bar{Q}^n)$$

$$\bar{Q}^{(2)} = \frac{3}{4} \bar{Q}^n + \frac{1}{4} [\bar{Q}^{(1)} + \Delta t R(\bar{Q}^{(1)})] \quad (44)$$

$$\bar{Q}^{n+1} = \frac{1}{3} \bar{Q}^n + \frac{2}{3} [\bar{Q}^{(2)} + \Delta t R(\bar{Q}^{(2)})]$$

## III. 수치 해석 결과

### 3.1 Shock/acoustic wave interaction

본 테스트 문제는 Shu와 Osher[6]에 의해 제안된 문제로, 마하수 3의 충격파가 사인(sine) 함

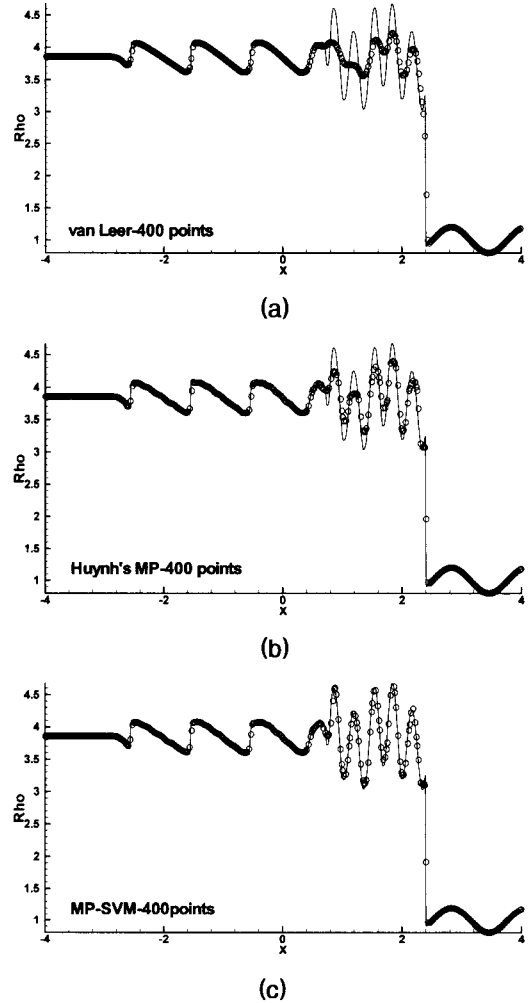


Fig. 3. Density distribution for the first Shu-Osher test case

수의 밀도 교란 영역과 상호작용하는 유동으로 불연속면인 충격파와 smooth extremum인 밀도 교란이 같이 존재하는 문제이다. 따라서 본 유동 현상을 정확히 묘사하기 위해서는 진동 현상 없이 강건하게 충격파를 포착할 수 있는 능력과 smooth extremum에서 정확도를 유지할 수 있는 능력이 동시에 요구된다. 계산 영역과 유동의 초기 조건은 다음과 같다.

$$Q(x, 0) = \begin{cases} Q_L, & x \leq -4, \\ Q_R, & x > -4, \end{cases}$$

$$\{\rho, u, p\}_L = \{3.857143, 2.629369, 10.333333\} \quad (45)$$

$$\{\rho, u, p\}_R = \{1 + 0.2\sin(5x), 0, 1\}$$

$$-5 \leq x \leq 5$$

유동의 계산은 시간이 1.8초가 될 때까지 수행하였으며, 격자수는 400개이다. Fig. 3은 단조 영역에서 2차 정확도를 보이는 van Leer TVD 제한자를 이용한 결과와 5차 spectral volume 기법과 MP 제한자를 이용하여 얻은 결과를 도시한 것이다. 2차 정확도 수치 해석은 등간격의 격자를 사용한 것이고, 5차 정확도의 spectral volume 기법은 등간격의 spectral volume과 Gauss-Lobatto 분포의 control volume을 사용한 결과이다. 따라서 spectral volume은 등간격일지라도 control volume의 크기는 상이하다. Fig. 3에서 실선으로 표시된 결과는 3200개의 격자에서 van Leer 제한자를 이용하여 얻은 결과이다. 그림에서 확인할 수 있듯이 TVD 제한자를 이용한 결과는 충격파 뒤의 유동 구조를 전혀 반영하지 못 하고 있으며, 이는 smooth extremum을 인식하지 못 하는 TVD 제한자가 정확도를 1차로 떨어뜨리기 때문이다. Fig. 3(b)는 5차 정확도의 spectral volume 기법과 Huynh의 MP 제한자를 이용한 결과로, 격자 간격의 변화를 고려하지 않았기 때문에 smooth extremum에서 오차가 보이는 것을 확인할 수 있다. 반면, 2.4절에서 제안한 MP 제한자를 사용한 5차 정확도의 spectral volume 기법의 결과, Fig. 3(c)는 불연속면과 smooth extremum의 분해 능력이 3200개의 격자를 이용한 van Leer 제한자의 결과와 거의 일치하는 것을 확인할 수 있다. 불연속면에서의 정확도와 강건성은 세 기법이 모두 동일한 것을 확인할 수 있다.

Fig. 4의 결과는 다음과 같은 초기 조건을 갖는 문제로 앞의 문제와 함께 수치기법의 특성을 파악하기 위하여 많이 수행되는 문제 중 하나다.

$$Q(x,0) = \begin{cases} Q_L, & x \leq -0.8, \\ Q_R, & x > -0.8, \end{cases}$$

$$\{\rho, u, p\}_L = \{3.857143, 2.629369, 10.333333\} \quad (46)$$

$$\{\rho, u, p\}_R = \{1 + 0.2\sin(5\pi x), 0, 1\}$$

$$-1 \leq x \leq 1$$

유동의 계산은 시간이 0.47초가 될 때까지 수행하였으며, 200개의 격자를 이용하여 계산을 수행하였다. 앞의 경우와 같이 van Leer 제한자를 이용한 결과는 등간격의 격자계이며, 5차 정확도의 spectral volume 기법은 40개의 등간격의 spectral volume을 사용하였으며, 각 spectral volume은 Gauss-Lobatto 분포의 5개의 control volume으로 구성되어있다. Fig. 4에서 실선은 3200개의 등간격 격자계에서 van Leer 제한자를

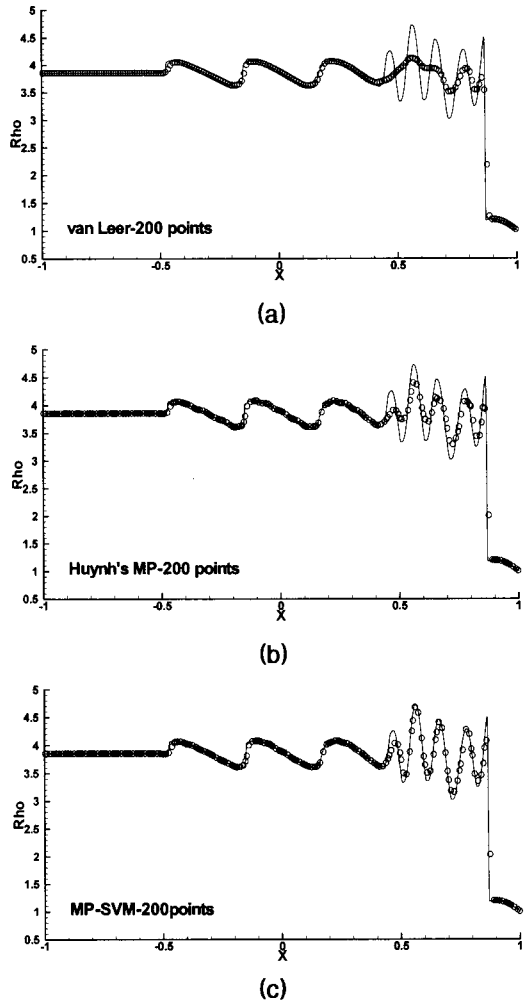


Fig. 4. Density distribution for the second Shu-Osher test case

이용하여 얻은 결과이다. 앞의 결과와 같이 TVD 제한자의 경우, Fig. 4(a)에서 확인할 수 있듯이 충격파 뒤의 유동 구조를 모사하는데 한계를 보이고, Fig. 4(b)의 Huynh의 MP 제한자는 TVD 제한자와는 달리 smooth extremum을 모사하고 있지만 진폭의 감쇄 현상이 발생하는 것을 볼 수 있다. Fig. 4(c)의 결과는 앞의 (a), (b)와 달리 200개의 적은 격자로도 유동을 정확히 모사할 수 있음을 보이고 있다.

### 3.2 점성 충격파 관 (viscous shock tube)

2차원 점성 문제로 점성 충격파 관 유동을 모사하였다[7]. 단위 길이를 갖는 정사각형의 상에서 유동의 초기 조건은 다음과 같다.

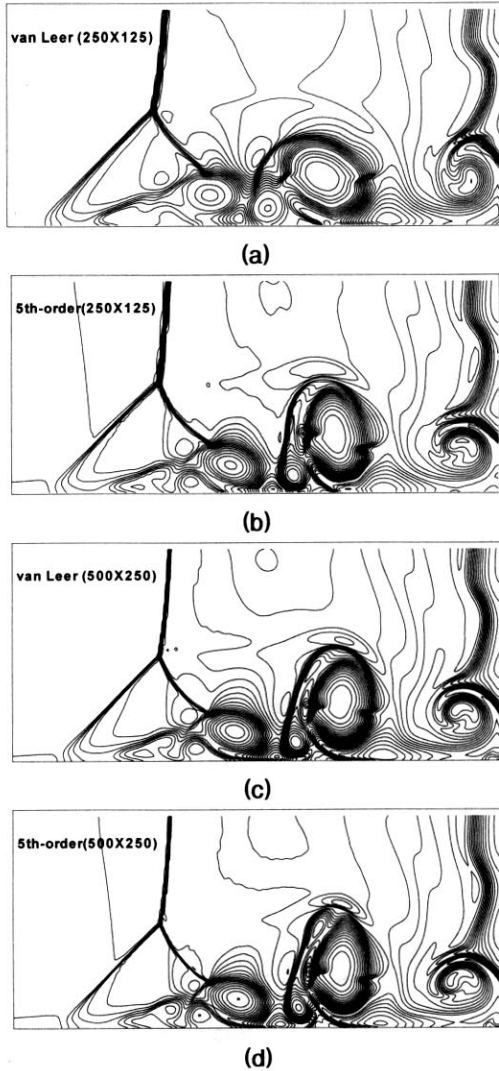


Fig. 5. Density distribution for the viscous shock tube test

$$Q(x,0) = \begin{cases} Q_L, & x \leq 0.5, \\ Q_R, & x > 0.5, \end{cases}$$

$$\{\rho, u, v, p\}_L = \{120, 0, 0, \rho/\gamma\} \quad (47)$$

$$\{\rho, u, v, p\}_R = \{1.2, 0, 0, \rho/\gamma\}$$

$$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

유동의 Reynolds 수는 200이며, 벽면 경계조건은 단일 벽면 조건을 사용하여 무차원 시간 1이 될 때까지 유동의 계산을 수행하였다. 유동은 상하가 대칭이므로 윗면의 경계조건을 대칭 조건을 활용하여 정사각형 상자의 아래 영역만을 계산하였다.

1차원에서 적용한 spectral volume 기법을  $x, y$ 방향으로 각각 적용하는 방식으로 2차원 유동의 계산을 수행하였다. 각 방향으로 5차 정확도의 spectral volume 기법을 사용하더라도 계산 격자의 경계면에서의 플럭스 계산은 평균값을 사용하므로 플럭스의 공간 정확도는 2차로 떨어질 수밖에 없지만, 오차는 2차 정확도의 수치기법에 비하여 작아 유동 모사의 정확성은 증대된다. 점성 플럭스는 2차 정확도의 중심차분 기법을 사용하였다.

Fig. 5(a)와 5(b)는  $250 \times 125$ 의 격자계에서 계산한 등밀도선도이며, Fig. 5(c)와 5(d)는 네 배인  $500 \times 250$ 의 격자계에서 계산한 등밀도선도이다. Fig. 5를 보면 충격파와 경계층의 상호작용으로  $\lambda$ 형상의 충격파가 형성된 것을 확인할 수 있으나, 경계층에서 형성되는 separation bubble과 와류의 형태가 각기 다를 수 있고, Fig. 5(a)의 경우에는 모사 능력이 현저히 떨어지는 것을 확인할 수 있다. 반면,  $250 \times 125$  격자계에서 5차 spectral volume 기법에 MP 제한자를 사용한 결과는  $500 \times 250$  격자계의 van Leer 제한자 결과에 근접함을 확인할 수 있고, 2배 내지 3배의 격자 감소 효과가 있음을 알 수 있다.

Fig. 6은  $y = x - 0.5$ 인 선을 따라서 밀도의 분포를 비교한 것이며, 등밀도선도에서 확인하였듯이  $250 \times 125$  격자계의 van Leer 제한자 결과는 같은 격자계에서 5차 spectral volume 기법에 MP 제한자를 사용한 결과에 비해 정확도가 현저히 떨어짐을 알 수 있다.

한편, 1차원 문제와 비교하여 격자 감소 효과가 다소 떨어지는 것을 확인할 수 있는데, 이는 1차원에 적용한 기법을 2차원에 바로 적용하여 격자경계면에서의 비점성 플럭스가 2차 정확도로 떨어졌기 때문으로 판단된다. 비록 5차 spectral volume 기법을 사용하였으나 기본적으로 2차 정확도를 갖기 때문에, 2차 정확도에서의 오차 감

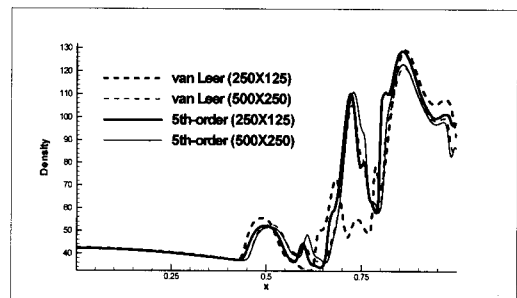


Fig. 6. Comparison of density distribution



소 효과만을 얻을 수 있는 것으로 보인다. 수치 기법의 정확도(formal order of accuracy)를 2차원, 혹은 3차원에서 유지시킬 수 있는 연구가 요구되며 이러한 연구가 이루어질 경우, 격자의 감소 효과는 더욱 증대될 것으로 예상된다.

#### IV. 결 론

본 논문에서는 MP 제한자를 임의의 격자 크기를 갖는 일반적인 계산 격자 영역으로 확장하는 연구를 수행하였다. 본 논문에서 개발된 MP 제한자는 물성치가 단조적으로 변화하는 영역에서는 TVD 특성을 만족하고, smooth extremum에서는 물성치의  $O(\Delta x)$ , 혹은  $O(\Delta x^2)$  변화를 허용하는 특성을 갖는다. Smooth extremum에서의 이러한 특성은 기존의 TVD 제한자가 물성치의 정확도를 1차로 떨어뜨리는 것과는 달리 내삽된 물성치의 정확도를 유지시켜주는 역할을 하여 smooth extremum의 모사 능력을 향상시켜준다. 또한, 등간격의 계산 격자에서 유도된 Huynh의 MP 제한자와 달리 계산 격자 크기의 구배를 고려하여 임의의 control volume의 분포에서 정확도 향상에 도움을 준다.

이와 같은 특성은 수치 실험을 통하여 확인할 수 있었으며, 불연속면에서는 TVD 제한자와 같은 안정성을 보이면서도, smooth extremum에서는 정확도가 유지되어 적은 수의 계산 격자라도 정확하고 안정적인 유동 모사가 가능하였다.

#### 후 기

본 연구는 국방과학연구소의 장기기초연구 사업과 2004년도 두뇌한국21사업, 그리고 한국과학

재단의 특정기초연구(R01-2002-000-00329-0)의 지원으로 수행되었습니다.

#### 참고문헌

- 1) Z. J. Wang, "Spectral (Finite) Volume Method for Conservation Laws on Unstructured Grids", *Journal of Computational Physics*, Vol. 178, 2002, pp. 210~251.
- 2) A. Harten, B. Engquist, S. Osher, and S. R. Chakravarthy, "Uniformly High Order Accurate Essentially Non-oscillatory Schemes, III", *Journal of Computational Physics*, Vol. 131, 1997, pp. 3~47.
- 3) A. Suresh, and H. T. Huynh, "Accurate Monotonicity-Preserving Schemes with Runge-Kutta Stepping", *Journal of Computational Physics*, Vol. 136, 1997, pp. 83~99.
- 4) P. K. Sweby, "High Resolution Schemes Using Flux Limiters for Hyperbolic Conservation Laws", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, Vol. 21, 1984, pp. 995~1011.
- 5) C. W. Shu, "Total Variation Diminishing Time Discretizations", *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, Vol.9, 1988, pp. 1073~1084.
- 6) C. W. Shu, and S. Osher, "Efficient Implementation of Essentially Non-oscillatory Shock-capturing Schemes, II", *Journal of Computational Physics*, Vol. 83, 1989, pp. 32~79
- 7) V. Daru, and C. Tenaud, "Evaluation of TVD High Resolution Schemes for Unsteady Viscous Shocked Flows", *Computers & Fluids*, Vol. 30, 2001, pp. 89~113.