Dedekind環의 이데알 類群에 관하여

金 應 泰

1. 序 言

Dedekind群 R의 商體 K에 있어서의 R의 0이 아닌 分數이데알(Fractional ideal) 全體의 集合을 $I(R)$이라 하면, $I(R)$은 이데알곱에 관하여 R의 素이데알(Prime ideal) 全體의 集合으로 生成되는 自由可換群(Free abelian group)을 이룬다. 이 群을 R의 **이데알群**(Ideal group)이라고 한다. 지금 $I(R)$ 中의 主이데알(Principal ideal) 全體의 集合을 $P(R)$로 나타내면 $P(R)$은 $I(R)$의 部分群이다. 이때 商群 $C(R)=I(R)/P(R)$을 R의 **이데알類群**(Ideal class group)이라고 한다. 特히 K가 有理數體 Q의 有限擴大體인 경우, 그 中 代數的 整數全體를 R이라고 할 때 R은 한 Dedekind環을 이루며, 이 R의 이데알類群은 有限位數를 가짐이 證明되었다. (Lang. 1970). 그러나 일반으로 Dedekind環 R에 대하여 그 이데알類群이 반드시 有限群은 아니다.

지금 Dedekind群 R의 任意의 0이 아닌 眞인 이데알(Proper ideal) $A=P_1^{n_1}P_2^{n_2}\dots P_k^{n_k}$ (P_1, $\dots, P_k$는 서로 다른 素이데알, $n_1,\dots,n_k$는 自然數)에 대하여 I^A를 A와 서로 素(Relatively prime)인 R의 分數이데알 全體의 群이라고 하고,

$$K_A=\{a/b\,|\,a,\ b\epsilon R,\ aR,\ bR\text{은 }A\text{와 서로 素}\}$$

$$K_{A,1}=\{\alpha\,|\,\alpha\epsilon K_A,\ \alpha\epsilon R_{P_i},\ \alpha-1\epsilon P_i^{n_i}(i=1,2,\dots,k)\}$$

라고 한다. 지금 $K^*=K-\{0\}$라 하고

$$i: K^*\to I(R),\ i(\alpha)=\alpha R$$

과 같이 정의하면 i는 群準同型(Group homomorphism)이 된다. 이때 $i(K_{A,1})$은 I^A의 部分群으로 되는데 商群 $I^A/i(K_{A,1})$을 **射類群**(Ray class group)이라고 한다. K가 有理數體 Q의 有限擴大體이고 R이 그 代數的整數環인 경우에 이 射類群의 位數가 有限임이 밝혀져 있다 (Janusz 1973).

다음 2에서 付値論에 관한 Eicheler의 近似定理에서 誘導되는 結果로서의 $K_{A,1}$의 한 性質을 誘導하고, 이 結果를 利用하여 3에서 이 射類群의 位數를 考察하기로 한다.

이 後에 위에서의 여러가지 記號를 但書없이 그대로 사용한다.

2. 非아르키메데스 付値와 乘法合同關係

Dedekind環 R의 0이 아닌 眞인 이데알 $A=P_1^{n_1}\cdots P_k^{n_k}$ 에대하여, 그 素因數 $P_1,\cdots,P_k$에 대한 R의 商體 K의 P_i 進付値(P_i adic valuation)를 각각 $|\ |_{P_1},\cdots,|\ |_{P_k}$로 나타낸다. 이들 $P_1,\cdots,P_k$가 서로 다른 素이데알일 때 그에 대한 付値는 서로 同値가 아니다.

補助定理 1. dedekind環 R의 서로 다른 0이 아닌 素이데알 $P_1,P_2,\ldots,P_k$에 대한 P_i進付値 $|\ |_{P_i}$에 대하여

$$|y_i|_{P_i}>1,\quad |y_i|_{P_j}<1\quad (i\neq j)$$

인 元素 $y_1,y_2,\ldots,y_k\in K$가 있다.

證 明 y_1을 정하기 위하여 k에 관한 歸納法을 利用한다. $k=2$일 때, P_1,P_2는 서로 다른 素이데알이므로 $|\ |_{P_1}$, $|\ |_{P_2}$는 同値가 아니다. 따라서,

$$|w|_{P_1}>1,\quad |w|_{P_2}\leqq 1$$

$$|z|_{P_1}\leqq 1,\quad |z|_{P_2}>1$$

인 $w,z\in K$가 있다. $y=w/z$라 하면,

$$|y|_{P_1}>1,\quad |y|_{P_2}<1$$

이다.

다음에 $|y|_{P_1}>1$, $|y|_{P_j}<1$ $(j=2,3,\ldots,k-1)$인 $y\in K$가 있다고 하자. 이때 $k=2$인 경우의 證明에서와 같이 $|t|_{P_1}>1$이고 $|t|_{P_k}<1$인 $t\in K$가 있다.

(i) $|y|_{P_k}<1$인 경우 :

$y_1=y$라 하면, $|y_1|_{P_1}>1$이고 $j=2,3,\ldots,k$에 대하여 $|y_1|_{P_j}<1$이다.

(ii) $|y|_{P_k}=1$인 경우 :

$j=2,3,\ldots,k-1$의 각 j에 대하여 $|y|_{P_j}<1$이므로,

$$\lim_{n\to\infty}|y^n t|_{P_j}=\lim_{n\to\infty}|y|_{P_j}^n|t|_{P_j}=0$$

따라서 $n\geqq r_j$일 때 $|y^n t|_{P_j}<1$인 自然數 r_i가 있다. 지금 $r=\max\{r_2,r_3,\ldots,r_{k-1}\}$이라 할 때 $y_1=y^r t$라고 하면, $|y_1|_{P_1}>1$이고 $2\leqq j\leqq k$에 대하여 $|y_1|_{P_j}<1$이다.

(iii) $|y|_{P_k}>1$인 경우 :

$2\leqq j\leqq k-1$인 自然數 j와 임의의 自然數 n에 대하여,

$$\frac{|y^n t|_{P_j}}{|1+y^n|_{P_j}}<\frac{|t|_{P_j}}{|y^{-n}|_{P_j}-1}$$

이고 $\lim_{n\to\infty}\frac{|t|_{P_j}}{|y^{-n}|_{P_j}-1}=0$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{|y^n t|_{P_j}}{|1+y^n|_{P_j}}=0$, 따라서 $n\geqq r_j$일 때 $\frac{|y^n t|_{P_j}}{|1+y^n|_{P_j}}<1$인 自然數 r_j가 있다. 또,

$$\frac{|y^n t|_{P1}}{|1+y^n|_{P1}}=\frac{|t|_{P1}}{|1+y^{-n}|_{P1}}\geqq\frac{|t|_{P1}}{1+|y|^{-n}_{P1}}$$

에서 $|y|_{P1}>1$이므로 $\lim_{n\to\infty}\frac{|t|_{P1}}{1+|y|^{-n}_{P1}}=|t|_{P1}>1$, 따라서

$n\geqq r_1$일 때 $\frac{|t|_{P1}}{1+|y|^{-n}_{P1}}>1$인 自然數 r_1이 있다. 마찬가지로 $|y|_{P_k}>1$이므로,

$$\frac{|y^n t|_{P_k}}{|1+y^n|_{P_k}}=\frac{|t|_{P_k}}{|1+y^{-n}|_{P_k}}\leqq\frac{|t|_{P_k}}{1-|y|^{-n}_{P_k}}$$

에서 $\lim_{n\to\infty}\frac{|t|_{P_k}}{1-|y|^{-n}_{P_k}}=|t|_{P_k}<1$로 되어, $n\geqq r_k$일 때 $\frac{|t|_{P_k}}{1-|y|^{-n}_{P_k}}<1$인 自然數 r_k가 있다. 지금

$r=\max\{r_1,r_2,\ldots,r_k\}$라 하고 $y_1=\frac{y^r t}{1+y^r}$라 하면, $|y|_{P1}>1$이고 $j=2,3,\ldots,k$에 대하여 $|y_1|_{P_j}<1$이다.

위의 (i), (ii), (iii)의 경우와 마찬가지 方法으로 $|y_i|_{P_i}>1$이고 $j\neq i$에 대하여 $|y_i|_{P_j}<1$인 $y_1,y_2,\ldots,y_k\in K$를 구할 수 있다.

定 理 1. $P_1,P_2,\ldots,P_k$는 Dedekind環 R의 0이 아닌 서로 다른 素이데알이다. $\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_k$가 R의 商體 K의 任意의 k個의 元素일 때, 任意의 $\varepsilon>0$에 대하여 $|\alpha-\beta_i|_{P_i}<\varepsilon$, $(i=1,2,\ldots,k)$인 $\alpha\in K$가 있다.

證 明 앞의 補助定理에 의하여,

$|y_i|_{P_i}>1$이고 $|y_i|_{P_j}<1$ $(i\neq j)$

인 $y_1,y_2,\ldots,y_k\in K$가 있다. 이때,

$$\left|\frac{\beta_i}{1+y_i^n}\right|_{P_i}\leqq\frac{|\beta_i|_{P_i}}{|y_i|^n_{P_i}-1}$$

에서 右邊이 0에 收斂하므로 左邊도 0에 收斂한다. 따라서 $n\geqq N_{ii}$일 때 $\left|\frac{\beta_i}{1+y_i^n}\right|_{P_i}<\frac{\varepsilon}{k}$인 自然數 N_{ii}가 存在한다. 또, $j\neq i$에 대하여

$$\left|\frac{y_j^n\beta_j}{1+y_j^n}\right|_{P_i}=\frac{|\beta_j|_{P_i}}{|1+y_j^{-n}|_{P_i}}\leqq\frac{|\beta_j|_{P_i}}{|y_j|^{-n}_{P_i}-1}$$

에서 右邊이 0에 收斂하므로 左邊도 0에 收斂한다. 따라서 $n\geqq N_{ij}$일 때 $\left|\frac{y_j^n\beta_j}{1+y_j^n}\right|_{P_i}<\frac{\varepsilon}{k}$인 自然數 N_{ij}가 있다. 지금 $\max\{N_{ij}|i,j=1,2,\ldots,k\}=N$이라고 하고, $\alpha=\sum_{i=1}^{k}\frac{y_i^N\beta_i}{1+y_i^N}$라고 정하면 모든 $i(1\leqq i\leqq k)$에 대하여,

$$|\alpha-\beta_i|_{P_i} \leqq \left|\frac{\beta_i}{1+y_i^N}\right|_{P_i} + \sum_{j \neq i} \left|\frac{y_j^N \beta_j}{1+y_j^N}\right|_{P_i} < \varepsilon$$

이 成立한다.

다음에 Dedekind環 R의 商體 K의 0이 아닌 元素 全體의 集合 K^*에서의 한 合同關係를 定義하고 이 合同關係에 관한 한 性質을 調査한다.

定 義 1. R의 0이 아닌 한 素이데알 P와 $\alpha,\beta \epsilon K^*$에 대하여 α/β가 P의 付値環(Valuation ring) R_P의 元素이고 $\alpha/\beta-1 \epsilon P^n$($n$은 自然數)일 때 α는 P^n을 法으로 하여 β에 **乘法合同**이라고 하고 $\alpha \equiv \beta \bmod P^n$과 같이 나타낸다.

定 理 2. R의 서로 다른 0이 아닌 素이데알 $P_1, P_2, \ldots, P_k$와 自然數 $n_1, n_2, \ldots, n_k$ 및 $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k \epsilon K^*$에 대하여

$$\alpha \equiv \beta_i \bmod P_i^{n_i},\ i=1,2,\ldots,k$$

인 $\alpha \epsilon K^*$가 있다.

證 明 일반으로 $x \epsilon K^*$에 대한 P_i進付値 $|x|_{P_i}$는 xR을 素이데알의 곱으로 나타낼 때 P_i의 거듭제곱의 指數인 $v(x)$와 $0<c_i<1$인 한 c_i에 대한 $c_i^{v(x)}$와 같다.

지금 $0<\varepsilon_i'<c_i^{n_i}$인 한 ε_i'에 대하여 $\varepsilon_i=|\beta_i|_{P_i}\varepsilon_i'$이라 하고, $\varepsilon=\min\{\varepsilon_1,\varepsilon_2,\ldots,\varepsilon_k\}$라고 정하면, 앞의 定理 1에 의하여, 모든 $i=1,2,\ldots,k$에 대하여 $|\alpha-\beta_i|_{P_i}<\varepsilon$인 $\alpha \epsilon K^*$가 存在한다. 이때,

$$|\alpha/\beta_i-1|_{P_i}<\varepsilon/|\beta_i|_{P_i} \leqq \varepsilon_i/|\beta_i|_{P_i}=\varepsilon_i'<c_i^{n_i}<1.$$

따라서 α/β_i-1은 付値環 R_{P_i}에 속한다.

한편 $|\alpha/\beta_i-1|_{P_i}=c_i^{v(\alpha/\beta_i-1)}<c_i^{n_i}$이고 $0<c_i<1$이므로, $v(\alpha/\beta_i-1)>n_i>0$, 따라서 $\alpha/\beta_i-1 \epsilon P_i^{n_i}$이다. 곧,

$$\alpha \equiv \beta_i \bmod P_i^{n_i},\quad i=1,2,\ldots,k.$$

3. 射類群의 位數

Dedekind環 R의 商體 K에 있어서, R의 0이 아닌 한 眞이데알 $A=P_1^{n_1}P_2^{n_2}\ldots P_k^{n_k}$에 대하여 $K_A=\{a/b \mid a,b \epsilon R,\ aR, bR$은 A와 서로 素$\}$, $K_{A,1}=\{\alpha \mid \alpha \epsilon K_A,\ \alpha \equiv 1 \bmod P_i^{n_i},\ \ i=1,2,\ldots,k\}$라 할 때, 射類群 $I^A/i(K_{A,1})$의 位數에 관하여 考察하고 아울러 R의 이데알類群 $C(R)$과 K_A 사이의 關係를 調査하기로 한다.

補助定理 2. R의 0이 아닌 素이데알 P에 대하여 環 R_P/P^nR_P (n : 自然數)의 單位元들의 乘法群을 U라 할 때,

$$K_{P^n}/K_{P^n,1} \cong U$$

證 明 K_{P^n}은 R_P의 單位元 全體의 乘法群과 같다. K_{P^n}의 임의의 두 元素 α,β에 대하여,

$\alpha K_{P^n,1}=\beta K_{P^n,1}$이면 $\alpha\beta^{-1}\epsilon K_{P^n,1}$, 따라서 $\alpha\beta^{-1}\equiv 1 \bmod P^n$이다. 즉 $\alpha\beta^{-1}-1=a\epsilon P^n$인 a가 있다. 이때, $\alpha=\beta+a\beta$, 즉 $\alpha+P^nR_P=\beta+P^nR_P$이다. 따라서 $\varphi(\alpha K_{P^n,1})=\alpha+P^nR_P$로 定義되는 全寫(Surjection)인 群準同型

$$\varphi: K_{P^n}/K_{P^n,1}\rightarrow U$$

가 定義된다. 다음에 이 φ가 單寫(Injective)임을 證明하자.

$$\alpha+P^nR_P=1+P^nR_P$$

일 때 $s,t\epsilon R-P$에 대하여 $\alpha=\frac{s}{t}$와 같이 나타내진다. 이때 P가 極大이데알(Maximal ideal)이므로 $tR+P=R$이다. 여기에서 自然數 n에 대하여 $tR+R^n=R$임을 歸納法으로 다음과 같이 證明할 수 있다.

$tR+P^{n-1}=R$이라 가정하자. 이때 $P^{n-1}=P^{n-1}R=P^{n-1}(tR+P)\subset tR+P^n$, 따라서, $R=tR+P^{n-1}\subset tR+(tR+P^n)=tR+P^n$ 즉 $R=tR+P^n$이다.

따라서 $tc+q=1$인 $c\epsilon R$, $q\epsilon P^n$가 있다. 이 때

$$sc+P^nR_P=s\left(\frac{1}{t}-\frac{q}{t}\right)+P^nR_P=\frac{s}{t}+P^nR_P=1+P^nR.$$

또, $sc-1\ \epsilon P^nR_P\cap R$이고 P가 R의 極大이데알이므로 $sc-1\epsilon P^n$, 즉 $scK_{P^n,1}=K_{P^n,1}$이다. 한편 $sc\left(\frac{s}{t}\right)^{-1}=ct=1-q\equiv 1 \bmod P^n$이므로 $sc\equiv\frac{s}{t} \bmod P^n$, 따라서 $\alpha K_{P^n,1}=scK_{P^n}=K_{P^n,1}$이다. 즉 $\varphi(\alpha K_{P^n,1})=1+P^nR_P$일 때 $\alpha K_{P^n,1}=K_{P^n,1}$이므로 φ는 單寫이고 따라서 $K_{P^n}/K_{P^n,1}\cong U$이다.

補助定理 3. R의 0이 아닌 眞이데알 $A=P_1^{n_1}P_2^{n_2}\dots P_k^{n_k}$에 대하여 $R/P_i(i=1,2,\dots,k)$가 有限일 때, $K_A/K_{A,1}$은 有限이다.

證 明 $\alpha,\beta\epsilon K_A$에 대하여 $\alpha,\beta\epsilon K_{P_i^{n_i}}(i=1,2,\dots,k)$이다. $\alpha K_{A,1}=\beta K_{A,1}$이면 $\alpha\beta^{-1}\epsilon K_{A,1}$, 따라서 모든 $i=1,2,\dots,k$에 대하여 $\alpha\beta^{-1}\epsilon K_{P_i^{n_i},1}$, 즉 $\alpha K_{P_i^{n_i}}=\beta K_{P_i^{n_i},1}$이다. 따라서 群準同型

$\varphi: K_A/K_{A,1}\rightarrow\Pi_{i=1}^k K_{P_i^{n_i}}/K_{P_i^{n_i},1}$, $\varphi(\alpha K_{A,1})=(\alpha K_{P_1^{n_1},1},\dots,\alpha K_{P_k^{n_k},1})$가 定義된다. $\alpha K_{A,1}\epsilon\ker\varphi$이면 모든 $i=1,2,\dots,k$에 대하여 $\alpha\epsilon K_{P_i^{n_i},1}$, 즉 $\alpha\equiv 1 \bmod P_i^{n_i}$이므로 $\alpha\epsilon K_{A,1}$이다. 따라서 φ는 單寫이다.

다음에 φ가 全寫임을 밝히자 $\Pi K_{P_i^{n_i}}/K_{P_i^{n_i},1}$의 임의의 元素 $(\beta_1K_{P_1^{n_1},1},\dots,\beta_kK_{P_k^{n_k},1})$에 대하여 定理 2에 의하여 $\alpha\equiv\beta_i \bmod P_i^{n_i}$인 $\alpha\epsilon K_A$가 있다. 이때 $\alpha/\beta_i\equiv 1 \bmod P_i^{n_i}$이므로 $\alpha/\beta_i\epsilon K_{P_i^{n_i},1}$, 즉 $\alpha K_{P_i^{n_i},1}=\beta_iK_{P_i^{n_i},1}$이다. 따라서 $\varphi(\alpha K_{A,1})=(\beta_1K_{P_1^{n_1},1},\dots,\beta_kK_{P_k^{n_k},1})$로 되어 φ는 全寫임을 알 수 있다. 따라서 $K_A/K_{A,1}\cong\Pi_{i=1}^k K_{P_i^{n_i}}/K_{P_i^{n_i},1}$이다.

한편 R/P_i가 有限이므로 $R/P_i\cong R_{P_i}/P_iR_{P_i}$에서 $R_{P_i}/P_iR_{P_i}$도 有限이며, 결국 $R_{P_i}/P_{n_i}R_{P_i}$도 有限으로 된다. 따라서 補助定理 2에 의하여 $K_{P_i^{n_i}}/K_{P_i^{n_i},1}$은 有限이며, $K_A/K_{A,1}\cong\Pi_{i=1}^k K_{P_i^{n_i}}/K_{P_i^{n_i},1}$이므로 $K_A/K_{A,1}$은 有限이다.

定 理 3. Dedekind環 R의 한 0이 아닌 眞이데알 A가 있어서, $I^A/i(K_A)$가 有限일 때,

(1) R의 이데알類群 $C(R)$은 有限이고 R의 모든 0이 아닌 眞이데알 B에 대하여 $I^B/i(K_B)$

는 有限이다.

(2) 특히 A의 모든 素因數 P에 대하여 R/P가 有限일 때, $I^A/i(K_{A,1})$도 有限이며, 그 位數는 $C(R)$의 位數의 培數이다.

證 明 (1) R의 이데알類群 $C(R)$은 R의 商體 K에 있어서의 分數이데알群 $I(R)$에 대하여 $I(R)/i(K^*)$와 같다. 지금 寫像

$$\varphi: I^A/I^A \cap i(K^*) \to C(R) = I(R)/i(K^*)$$

를 $\varphi(B(I^A \cap i(K^*))) = Bi(K^*)$와 같이 定義할 때 φ는 分明히 單寫이다.

지금 φ가 全寫임을 밝히기 위하여 A를 素因數分解하여 $A = P_1^{n_1} P_2^{n_2} \dots P_k^{n_k}$와 같이 나타내진다고 하자.

$I(R)$의 任意의 元素 B는 A와 서로 素인 分數이데알 B_1과, A의 素因數 $P_1, \dots, P_k$에 대하여 $B_2 = \Pi_{i=1}^{k} P_i^{n(P_i)}$ ($n(P_i)$는 整數)의 꼴로 나타내지는 分數이데알 B_2와의 곱으로 $B = B_1 B_2$와 같이 나타내진다. 지금 $\pi'_{P_i} \epsilon P_i$를 R_{P_i}의 素이데알 $P_i R_{P_i}$의 生成元素(Generator)라고 할 때,

$$R/P_1 P_2 \dots P_k \cong R/P_1 \oplus R/P_2 \oplus \dots \oplus R/P_k$$

이므로 右邊의 元素$(\overline{1}, \dots \overline{\pi'_{P_i}}, \dots, \overline{1})$에 對應하는 左邊의 元素 $\pi_{P_i} (\pi_{P_i} \epsilon P_i)$가 있다. 이때 π_{P_i}는 또 R_{P_i}에서 $P_i R_{P_i}$를 生成하고 모든 $j \neq i$에 대하여 $\pi_{P_i} \equiv 1 \bmod P_j$이다. 지금

$$\alpha = \Pi_{i=1}^{k} \pi_{P_i}^{n(P_i)}$$

라고 하면 α로 生成되는 主이데알 αR은

$$\alpha R = P_1^{n(P_1)} \dots P_k^{n(P_k)} Q_1^{n(Q_1)} \dots Q_h^{n(Q_h)}$$

와 같이 因數分解된다. 단 $Q_1^{n(Q_1)} \dots Q_h^{n(Q_h)}$는 A와 서로 素이다. 이때 分數이데알 $B\alpha^{-1}$는 A와 서로 素이며 B를 包含하는 이데알類와 같은 類에 속하게 된다. 즉

$$B\alpha^{-1} i(K^*) \epsilon I^A / I^A \cap i(K^*)$$

이고

$$\varphi(B\alpha^{-1}(I^A \cap i(K^*))) = B\alpha^{-1} i(K^*) = Bi(K^*)$$

이다. 즉 φ는 全寫이며 따라서 同型이다.

한편 $I^A \cap i(K^*) = i(K_A)$이므로 $C(R)$은 $I^A/i(K_A)$와 同型이며, $I^A/i(K_A)$가 假定에 의하여 有限이므로 $C(R)$은 有限群이다.

또 B를 R의 任意의 0이 아닌 眞이데알이라 할 때, 위와 마찬가지 方法으로 $I^B/i(K_B) \cong C(R)$임을 證明할 수 있다. 이때 $C(R)$이 有限이므로 $I^B/i(K_B)$도 有限이다.

(2) 지금 $\psi: K_A/K_{A,1} \to i(K_A)/i(K_{A,1})$을 $\psi(\alpha K_{A,1}) = \alpha Ri(K_{A,1})$과 같이 定義할 때 ψ는 全寫인 群準同型이다. 따라서 $i(K_A)/i(K_{A,1})$의 位數는 $K_A/K_{A,1}$의 位數의 約數이다. 補助定理 3에 의하여 $K_A/K_{A,1}$의 位數는 有限이므로 $i(K_A)/i(K_{A,1})$의 位數도 有限이다.

R의 이데알群 $I(R)$의 部分群으로서, $I^A \supset i(K_A) \supset i(K_{A,1})$인 關係가 있으므로 $I^A/i(K_{A,1})$

의 位數는 $I^A/i(K_A)$의 位數와 $i(K_A)/i(K_{A,1})$의 位數와의 곱과 같다. $I^A/i(K_A) \cong C(R)$이어서 이 位數는 有限이고, $i(K_A)/i(K_{A,1})$의 位數도 有限이므로 $I^A/i(K_{A,1})$의 位數도 有限이며 R의 이데알類群 $C(R)$의 位數의 培數이다.

(師範大學 數學科)

參 考 文 獻

1. Lang, Serge. (1970). Algebraic Number Theory. Reading, Massachusetts: Addison-Weseley.
2. Janusz, J. Gerald. (1973). Algebraic Number Fields. New York and London: Academic Press.
3. Artin, E. and J. Tate. (1967). Class Field Theory. New York: Benjamin.
4. Dibello, V. Louis. (1969). The Galois Theory of Infinite Dedekid Field. Notices of A.M.S., Vol. 16, No. 3.
5. Pirtle, E.M. (1968). Some Results on Almost Dedekind Domains, Notices of A.M.S., Vol. 15. No. 5.