서울大學校 師大論叢 第33輯(1986. 12. 30)

# van Hiele의 數學 學習水準 理論에 대한 小考

禹 正 皓
(數學教育科)

## I. 序 言

數學이 旣成의 知識 體系로써가 아니라 學習者의 構成的 活動, 再發明 過程, 數學化 過程을 통해서만이 참으로 바르게 理解되고 適用될 수 있다는 主張은 公教育으로서의 數學教育이 시작된 이래 끊임없이 提起되어 왔다(G. Schubring, 1978). 이는 결국 '過程 目標'를 중시하자는 입장인 바, 멀리 Plato까지 거슬러 올라가며 Kant와 Hegel을 거쳐 Dewey로 이어지고 Gestalt心理學者들에게 影響을 끼쳤으며 최근의 Piaget와 Bruner 등에게 뿌리를 내린 認識論에 의해 뒷받침되어 왔다.

그러나 이러한 '理想'과는 달리 '現實'은 '內容 目標'를 강조하면서, R. Thom(1973)의 표현을 빌리면, 帝王切開를 하여 덜 成熟한 아이를 꺼내려는 外科 醫師의 殘忍한 道具에 비유될 수 있는, 강력한 抽象化 手段인 同値關係와 같은 論理的 槪念을 이용하여, 곧 外延的 定義에 의하여 旣成의 現代數學的 知識에 대한 早期教育을 시도하기까지 하였던 것이다.

1984年 第5次 數學教育 國際會議에서 행한 基調 講演 가운데에서, J. Kilpatrick(1986)은 最近 數學教育에 대한 論議에서 되풀이 되는 主題가 '自己 意識性'의 問題임을 지적하고 數學的 思考와 그 學習—指導에서의 '反映과 循環'의 問題를 논하였다는 것은 이러한 過程的 目標, 數學的 '思考 教育'에 대한 數學教育界의 世界的인 關心의 程度를 잘 대변해 주고 있다.

이러한 目標의 실현을 위해 지금까지 提示되어 온 方案 가운데 주목할만한 것이 操作的 構成主義에 입각한 方案이다. 歷史—發生的, 心理—發生的 立場에서 볼 때, 그리고 現代數學의 發展 傾向을 생각할 때 數學的 思考活動의 本質은 操作的 schèmes이며, 이는 行動이나 보다 낮은 次元의 操作으로부터 反映的 抽象化를 통해 質的인 水準의 飛躍을 반복하면서 再構成되어 가는 것이다. 이러한 측면에서 보면 數學的 思考教育은 n-1水準의 操作的 schèmes이 n水準의 操作的 schèmes으로 再構成되면서, n-1水準의 操作이 n水準의 對象이 되는 螺旋的 過程이 되풀이 되어야 할 것이며, 결국 過程的 目標를 강조하는 數學의 學習—指導는 諸水準의 數學化, 곧 局所的 組織化의 形態가 되어야 할 것이다(拙稿, 1985).

일찌기 1957年 네델란드의 Lycée數學敎師이었던 van Hiele부부는 數學 學習水準 理論을 제시하였는데 그 기본적인 생각은 上述한 操作的 構成主義에 입각한 方案과 근본적으로 다를 바 없는 것이었다(P.M. van Hiele & D. van Hiele-Geldof, 1958). 이 理論은 1960年代에 소련의 數學敎育學者들의 집중적인 硏究와 實驗에 의해 그 主張의 妥當性이 확인되었으며(I. Wirszup, 1976), 幾何敎育課程 開發에 적용되어 成功的인 結果를 가져왔다(A.M. Pyshkalo, 1968). 1974年 NCTM年例 會議에서 이러한 事實에 대한 I. Wirszup의 報告가 있은 後, 최근 美國에서는 그 價值가 새롭게 인식되기 시작하면서 그와 關聯된 다양한 硏究가 이루어져 왔다.

數學敎育 硏究는 J. Kilpatrick(1981)이 적절히 지적하고 있듯이 '걸맞게 有效性이 빈약한' 狀況으로 보다 명확하고 일관성있는 理論 構成이 절실히 要求되고 있는 狀況이다. van Hiele의 數學 學習水準 理論은 現場 數學敎師이었던 van Hiele부부의 數學的 思考, 특히 幾何學的 思考 活動에 대한 洞察에 바탕을 둔 것으로 그 價値가 새롭게 評價되고 있으면서도 지금까지 다른 學習理論과의 關聯性이 명확히 제시되어 있지 못하다. 이러한 事實은 P.M. van Hiele 自身이 Piaget의 影響을 받았음을 명확히 시인하고 있으면서도 Piaget理論에 가하고 있는 辛辣한 批判이(P.M. van Hiele, 1986) 본 硏究者의 見解로는 Piaget理論에 대한 充分한 理解의 缺如에서 비롯된 誤解의 범위를 벗어나지 못하고 있다는 點에서 특히 두드러진다.

本稿는 操作的 構成主義에 입각한 數學敎育論의 構成을 위한 硏究의 일환으로 van Hiele의 數學 學習水準 理論과 認知 學習 理論, 특히 操作的 構成主義와의 關聯性을 밝히고자 한 것이다. 먼저 van Hiele의 數學 學習水準 理論과 그와 關聯된 實證的인 諸硏究 結果를 考察한 다음, 諸學者의 主張을 근거로 그 理論的 골격의 妥當性을 뒷받침 하고자 한다. 그리고 지금까지 제시된 敎授—學習 理論이 數學 學習過程을 적절히 說明하지 못하고 있음을 보이고자 한다. 끝으로 P.M. van Hiele가 제시한 Piaget理論과 자신들의 理論과의 差異點 내지 Piaget理論에 대한 批判의 要旨를 반박하면서 그의 理論이 결과적으로 操作的 構成主義의 그늘을 벗어나지 못한 數學敎育 理論임을 밝히고자 한다.

## Ⅱ. van Hiele의 數學學習水準理論 및 關聯 諸硏究

van Hiele의 數學 學習水準 理論은 네델란드의 Lycée 부부 數學敎師이었던 P.M. van Hiele와 그의 부인 D. van Hiele-Geldof에 의해 1957年 Utrecht大學에 提出된 두 편의 學位論文(P.M. van Hiele, 1957; D. van Hiele-Geldof, 1957)에 의해 그 골격이 제시된 이래 P.M. van Hiele에 의해 開發되어 온 理論이다(P.M. van Hiele, 1959, 1976, 1986).

van Hiele理論은 1960年代 初에 소련의 數學敎育學者와 心理學者들의 集中的인 硏究와 實

驗을 통해 그 主張의 妥當性이 확인되었으며 Pyshkalo에 의해 幾何教育過程 開發에 적용되어 성공적인 結果를 가져왔다는 것은 앞에서 이미 言及한 바와 같다. 그러나 西歐에서는 H. Freudenthal(1973)이 그의 著書 가운데에서 그 중요성을 강조하였을 뿐 별다른 주목을 받지 못하다가, 앞에서 言及한 바와 같이 Wirszup에 의해 소개된 以後 최근 그 가치가 認識되어 그와 關聯된 다양한 硏究가 이루어지고 있다.

1950年代 Lycée의 초임 數學教師이었던 van Hiele부부는 自身들이 指導하고 있는 中學校 學生들이 幾何 學習에 큰 곤란을 겪고 있음에 주목하고 그 原因을 究明하려는 노력의 결과 자신들과 學生들 사이의 思考水準의 差異에 注目하게 되었다. 그들이 洞察한 것은 같은 學問의 硏究對象이 水準에 따라 전연 다르다고 하는 것이며, 따라서 서로 다른 水準에서 생각하고 있는 教師와 學生은 서로 다른 文脈 內에서 말하게 됨으로 서로를 理解할 수 없다고 하는 것이다(H. Freudenthal, 1973, p. 121).

van Hiele 理論의 기본적인 아이디어는 數學的 思考 活動이란 經驗의 世界를 組織化하는 活動이며 한 水準에서 經驗을 整理하는 手段이 새롭게 經驗의 對象으로 意識되어 그것을 組織化하는 活動이 이루어지게 되면서 그 다음 水準으로의 飛躍을 하게 되는 過程을 反復하는 바, 數學의 學習—指導는 그러한 사이클을 再發明해 가도록 되어야 한다는 것이다. van Hiele 理論에 따르면 幾何學的 思考는 다음과 같은 5水準으로 區分된다(P.M. van Hiele & D. van Hiele-Geldof, 1958). 0水準 ; 주변 對象을 形이란 認識 手段에 의해 把握하는 段階로 基本的인 圖形을 그 構成 要素에 대한 명확한 고려 없이 全體로써의 視覺的 外觀에 의해 判別한다. 第 I 水準 ; 주변 對象의 整理 手段이던 形이 硏究의 對象이 되어 圖形의 構成 要素와 性質에 대한 非形式的인 分析을 통해 圖形을 파악한다. 第 II 水準 ; 圖形의 性質과 圖形 사이의 關係가 硏究의 對象이 되고 命題가 整理 手段이 된다. 圖形의 여러가지 性質 및 圖形 사이의 關係를 把握하고 定義를 理解한다. 第 III 水準 ; 命題가 硏究의 對象이 되며 命題사이의 論理的 關係가 整理 手段으로 등장하여 公理, 定義, 定理, 證明의 의미와 역할을 이해하며 全體 幾何의 演繹體系를 파악한다. 第 IV 水準 ; 幾何學 體系 그 自體가 硏究의 對象이 되어 여러가지 公理體系를 비교할 수 있고, Hilbert類의 幾何의 形式的 嚴密性을 파악한다.

P.M. van Hiele(1986)는 후에 이러한 생각을 一般化하여 자신의 學習水準理論은 모든 數學 理解에 적용된다고 主張하면서, 數學的 思考水準을 크게, 視覺的 水準, 記述的 水準, 局所的인 論理的 關係를 파악하는 理論的 水準, 形式的인 演繹體系를 파악하는 水準, 論理的 法則의 本質을 洞察하는 水準으로 區分하고 있으며, 數·函數 등의 學習水準을 거론하고 있으나 그에 대한 상세한 理論은 전개되어 있지 않다.

van Hiele의 數學 學習水準 理論의 要旨를 정리해 보면 다음과 같다(P.M. van Hiele, 1958, 1959, 1986). 첫째, 學生들은 數學 學習에서 n-1水準을 통과하지 않고 n水準에 도달할 수 없으며 數學的 思考는 모든 水準을 차례로 거쳐 發達한다. 둘째, 모든 學生들이 같

은 速度로 各 水準을 통과하지는 않으며, 水準의 移行은 적절한 指導에 의해 促進될 수도 있고 부적절한 指導 때문에 지연될 수도 있다. 셋째, 앞의 水準의 思考에서 內在的이었던 것이 그 다음 水準에서 意識化되어 명확히 認識되게 된다. 各 水準의 數學的 思考는 그 前 水準의 數學的 思考의 內的 秩序를 대상으로 하여 硏究하는 것이다. 네째, 각 水準의 思考는 그 자신의 記號와 그를 연결하는 關係網을 갖고 있다. 水準의 移行은 言語의 확장과 관계된다. 다섯째, 서로 다른 水準에서 推理하는 사람은 서로를 理解할 수 없다. 이것이 敎師와 學生 사이에 자주 發生하여 學習—指導를 어렵게 만드는 要因이 되고 있다. 여섯째, 思考水準의 飛躍은 指導 過程에서 다음과 같은 다섯 段階를 거쳐 이루어질 수 있다. 案內段階 ; 資料를 제시 받고 必要한 논의를 통해 探究할 分野에 친숙해지기 위한 活動을 한다. 制限된 探究段階 ; 제시된 資料를 통해 探究 分野를 硏究하면서 그 進行 方向을 감지하고 探究 分野의 構造가 점진적으로 파악된다. 明確化 段階 ; 발견된 關係를 표현하는 活動을 통해 그를 명확히 하며 專門的인 用語를 학습한다. 自由로운 探究段階 ; 여러가지 解決 方法을 찾아 봄으로써 探究 分野의 構造에 정통하게 된다. 統合段階 ; 探究 活動을 개관하여 全體를 조망하게 되면서 思考水準 飛躍의 一步前에 이르게 된다.

P.M. van Hiele(1959)는 思考 水準 問題의 심각성을 函數의 定義를 例로 들어 다음과 같이 記述하고 있다. 函數가 $f(x)$ 혹은 $y=f(x)$로 定義된다는 모호한 說明은 낮은 思考 水準에서 函數의 定義를 내리려는 데에서, 곧 函數的 思考 活動에 충분히 친숙해지기 전에 그러한 活動 가운데 內在的으로 包含된 構造, 곧 內的 秩序를 표현 하고자 한 데에서 비롯된 것이다. 그러한 시도는 실패할 수 밖에 없었으며 보다 높은 水準에 이르러 函數的 思考에서 실제로 무엇을 하였는가 反省하게 되면서 函數는 $x$와 $f(x)$의 對應 $f$란 결론에 도달하게 되었다.

敎師가 自己自身은 理解하고 있지만 學生들은 理解하지 못하는 關係網에 의해서 推理를 하고 그를 근거로 數學的 關係를 學生들에게 제시할 때, 그러한 關係는 참으로 理解되지 않는 狀態에서 學生들의 推理의 근거를 이루게 된다. 그러한 關係는 學生들의 經驗과 무관한 부과된 것이기 때문에 가르쳐진 것, 그로부터 誘導된 것만을 記憶하게 되며 그것을 특별히 고안된 '問題' 아닌 問題 狀況에 적용하는 學習을 하는데 그치게 된다. 그 결과 數學敎育은 흔히 學生들의 意識에서 벗어난 數學的 知識을 反芻하면서 제시하는 惡循環 속에서 빠져 나올 수 없는 경우를 당하는 것이다. P.M. van Hiele(1986, p. 45)는 "數學을 學習하는 것은 思考하는 것을 學習하는 것을 뜻한다."고 단언하면서 數學敎育의 主要 問題는 서로 다른 水準에서 推理하는 敎師와 學生이 서로를 理解하지 못하는 데에서 비롯되므로 學生들의 思考水準을 파악하여 그에 따른 思考 敎育을 할 것을 要求한다.

다음에는 지금까지 이루어져 온 van Hiele理論과 관련된 諸硏究의 結果를 간단히 考察해 보기로 한다. 소련 敎育科學 아카데미 소속 數學敎育學者인 Pyshkalo와 Stolyar는 1960年부

터 1964年까지 幾何學的 思考의 發達 水準에 대한 van Hiele 理論을 實驗을 통해 그 妥當性을 檢證하였으며(I. Wirszup, 1976) A.M. Pyshkalo(1968)는 van Hiele 理論을 골격으로 하여 國民學校 1~4學年의 幾何敎育課程을 開發하였다. 그 敎育課程에서는 1學年에서 0水準, 2, 3學年에서 第Ⅰ水準의 幾何學的 思考에 도달하도록 되어 있으며 第Ⅱ水準의 幾何學的 思考의 學習은 4學年에서부터 시작하게 되어 있는데 이는 소련의 傳統的인 敎育課程의 6學年 課程과 대등한 것이었다. 그 敎育課程에 따라 學習한 8學年 學生들의 幾何 理解 水準은 傳統的인 敎育課程에 따라 學習한 11學年 學生들이 달성한 것과 比較될 수 있는 결과를 가져 왔는데, I. Wirszup(1976, p. 96)은 이것을 "거의 1世紀 동안의 러시아 數學敎育에서의 가장 철저한 變化"라고 지적하고 있다.

J. Mayberry(1981)은 van Hiele부부의 論文을 분석하여 그들이 제시한 幾何學的 思考 水準을 操作的으로 定義하고 그를 바탕으로 職前 敎師의 幾何에 대한 理解 水準을 評價하기 위한 問項을 開發하였다. 檢査 結果 Mayberry는 van Hiele가 提示한 思考水準이 階層을 이룬다는 사실을 뒷받침하는 結果를 얻었다. Z. Usiskin(1982)은 van Hiele 부부의 論文에서 各 水準의 兒童의 行動을 記述한 광범한 引用文句를 발췌 분석하여 van Hieles가 제시한 思考水準의 도달여부를 評價할 수 있는 보다 具體的인 問項을 개발하고 中等學校 學生들의 幾何 學習에 대한 成就度와 van Hieles가 제시한 思考水準 사이의 關聯性을 檢證하였다. Usiskin은 이 硏究에서 0~Ⅲ水準의 存在를 뒷받침하는 證據를 제시하였으나 第Ⅳ水準의 存在를 뒷받침하는 證據를 찾지는 못하였다. Mayberry와 Usiskin의 硏究에 이어 D. Fuys, D. Geddes, R. Tischler(1985)의 硏究와 W.F. Burger, J.M. Shaughnessy의 硏究가 van Hieles가 제시한 思考水準에 對한 實證的 證據를 제시해 주고 있다. 이러한 諸硏究 結果와 함께 네델란드의 幾何 敎育課程이 van Hiele 理論을 골격으로 하여 改編되었다는 사실은 van Hiele理論이 幾何 敎育課程 構成, 나아가 數學 學習指導 改善을 위해 유효한 準據로 사용될 수 있음을 보여주고 있다고 하겠다(D. Fuys, D. Geddes, R. Tischler, 1985).

## Ⅲ. 數學的 思考 活動과 認知 學習 理論

人間은 圖形에 의하여 形이란 現象의 世界에 秩序를 창조하며, 數에 의해서 量의 世界에 秩序를 창조한다. 보다 높은 水準에서 人間은 證明에 의해서 圖形이란 現象에 秩序를 창조하고 十進法에 의해서 自然數란 現象에 秩序를 창조한다. 나아가 보다 높은 水準에서 여러가지 數學的 現象이 群, 體, 位相空間 등의 槪念으로 파악된다. 이와 같이 하여 人間은 數學을 발전시켜 나아간다. 여기서 注目할 것은 現象과 그 整理手段과의 關係가 相對的인 關係에 있다는 것, 즉 어떤 水準에서 整理手段이었던 것이 그보다 高次의 水準에서 現象으로 파악되며, 보다 낮은 水準에서 실행된 數學이 보다 높은 水準에서는 觀察되는 數學이 된다

는 點이다. 이러한 現象의 整理手段인 本質과 現象과의 關係가 教授—學習 過程에서 어떻게 획득되며 사용되어지는가 하는 問題를 究明하는 것을 H. Freudenthal(1977)은 教授學的 現象學이라고 부르고 있다. 결국 Freudenthal에게 있어서 數學 自體는 自身 혹은 다른 사람의 活動을 反省하는 것이며, 數學教育의 主要 問題로써 "自身의 實際的·精神的·數學的 活動을 反省하도록 어떻게 자극할 것인가" 하는 問題를 제기하지 않을 수 없게 되는 것이다(H. Freudenthal, 1981).

프라그마티즘의 創始者로 科學者요 哲學者요 論理學者이었던 C.S. Peirce(1956, pp. 1777-1778)는 數學的 思考의 主要한 특징으로 抽象化를 들면서 그 特性을 다음과 같이 記述하고 있다. "'밝다'를 '여기 밝음이 있다'로 변형하는 抽象化, 이런 本質的인 抽象化는……매우 특별한 思考樣式이다. ……點은 움직인다. 여기서 幾何學者가 點은 '線을 그린다'고 말하는 것은 抽象化에 의해서이다. 이 線은 抽象的 概念이지만 그 自體가 움직인다. 그리고 이것이 面을 생성하는 것으로 생각된다. 등등 마찬가지로 解析學者가 演算 自體를 演算의 對象으로 다룰 때, 이는 그 有用性을 부정할 수 없는 方法인데, 이는 抽象化의 또 다른 例가 된다. ……이들 보기는 數學的 思考의 大洋에서의 抽象化의 굽이치는 거대한 물결을 나타낸다. 그러나 우리가 數學的 思考를 상세히 檢討하게 되면 모든 部分에서 같은 思考 形態의 끊임없는 잔물결을 發見할 것이다."

이러한 觀點은 數學의 心理 發生을 논한 Piaget理論 가운데에서 보다 명확히 드러난다. Piaget(1977)는 數學的 思考가 行動과 操作의 一般的 調整으로부터의 抽象化 곧 反映的 抽象化에 의해 構成된다고 보고 있는데 그에 따르면 反映的 抽象化는 主體 自身의 行動이나 操作의 보다 높은 水準에의 反射와 거기서의 그에 對한 反省이라고 하는 分離할 수 없는 두 要素로 이루어지며 反射된 內容은 反省에 의한 새로운 形式의 구성을 필연화 하며 反射와 反省의 사이클, 따라서 內容, 形式, 보다 세련된 內容, 새로운 形式의 사이클이 거듭하여 이루어진다.

이러한 數學的 思考 發達의 特性에 대한 記述은 Z.P. Dienes의 文獻 가운데에서도 찾아볼 수 있다. Dienes(1960, pp. 19-21)는 數學的 思考의 發達을 패턴化와 對象化의 반복으로 파악하고 다음과 같이 記述하고 있다. "이러한 종류의 패턴化는 바로 數學的 思考의 本質이다. 더우기 확립된 패턴은 곧바로 數學的 對象으로 간주되게 되며, 이는 그 이상의 패턴에 들어 맞는다. 이것은 다시 친근해지면서 對象으로 간주되며 같은 現象이 반복된다. ……그것을 文法的으로 보면 述語가 또다른 述語에 대한 主語가 되고 이는 다시 또다른 述語에 대한 主語가 된다. 이러한 종류의 끊임없이 열려진 思考가 數學的 思考의 本質이라면 그것은 세속적인 일상적 思考 形態와 분명히 근본적으로 다른 것이다. 學習과 思考의 問題를 연구한 心理學者들은 거의 數學者가 아니었다. 아마도 이것이 이러한 다소 特殊한 分野에서 일어나는 學習을 설명하는 적절한 理論이 지금까지 제시되지 못한 理由일 것이다."

van Hiele의 數學 學習水準 理論은 무엇보다도 이러한 數學的 思考의 本性에 대한 洞察을 바탕으로 하여 전개된, 말하자면 '實用的인 理論'으로 現場數學敎師의 正直한 確信에 대한 合理的 正當化이기에 그 意味가 큰 것으로 생각된다. 흔히 數學敎師들은 여러해 동안 數學을 가르치면 그것이 곧 學生들의 數學的 思考를 개발하는 것이라고 생각하고 過度한 量의 時間을 數學內容을 가르치는데 소비하고 있으면서도 數學的 思考 過程에는 거의 注目하지 않고 있다. van Hiele부부의 洞察에 따르면 數學的 思考 活動이란 經驗의 世界를 단계적으로 抽象化하여 組織化하는 活動이며 한 水準에서 經驗을 정리하는 手段이 새롭게 經驗의 對象으로서 意識化되어 그것을 組織化하는 活動이 이루어지게 되면서 그 다음 水準으로의 思考의 飛躍을 하게 된다. van Hiele는 이러한 數學的 思考 活動의 사이클을 再發明해 가도록 指導함으로써만이 數學的 思考 敎育이 가능하다고 본 것이다.

L. Burton(1984)은 이러한 數學的 思考 活動을 操作, 패턴 感覺의 획득, 패턴을 記號로 명료화 하기, 명료화된 패턴의 操作, 새로운 次元의 패턴 感覺의 획득, 그 패턴을 記號로 명료화 하기와 같은 사이클이 螺旋的으로 반복되는 過程으로 파악하고 앞 段階를 통과하면서 달성된 理解와 意識위에 새로운 思考 段階가 거듭 구성되어 가는 것으로 보았다.

이와 같이 생각하면 결국 數學的 思考 活動의 本質은 記號化에 의한 거듭된 패턴화에 있다고 볼 수 있을 것이다. 그러나 여기서 우리는, G. Vergnaud(1983)가 지적하고 있듯이, 數學的 思考가 階層을 이룬다고 하드라도 全順序는 아니며 部分順序일 것이라는 點, 따라서 數學的 思考 敎育은 局所的 組織化의 形態가 되어야 할 것이라는 點에 留意해야 할 것이다.

學習에 있어서의 主體의 能動的인 構成的 活動을 강조하는 諸敎授—學習理論은 이러한 數學的 思考 活動이 포함된 學習 過程을 적절히 설명하고 있는가? Gestalt 理論에 따르면 心理的 組織은 단순하고 規則的이며 안정된 소위 good Gestalt로 향하는데 이것이 소위 Prägnanz 原理이다(E.R. Hilgard, 1956). 學習 過程은 心的 不均衡 狀態에서 비롯되며 學習者는 不均衡에서 벗어나 均衡狀態로 向한다. 問題狀況의 再構造化를 통해 good Gestalt가 실현되는 순간 洞察이 일어나며 均衡이 회복되고 대립되는 벡터가 均衡을 찾게 된다. 이러한 Gestalt理論은 意味있는 學習活動을 거듭된 패턴화와 비교될 수 있는 good Gestalt의 形成과 再構造化로 표현되는 洞察 活動으로 설명하고 있으면서도 패턴의 對象化에 의한 思考水準의 飛躍이란 관념을 看過하고 있다는 點에서 數學 學習을 설명하는데 충분하지 못하다고 볼 수 있을 것이다.

J.S. Bruner(1963)는 認知 發達을 表現 樣式의 증대와 그 調整 能力의 증대로 보고 學習을 세가지 表現 樣式에 따른 번역 과정으로 보고 있다. 이것이 소위 EIS理論인 바, 그에 따르면 學習의 準備性이란 槪念은 소멸된다. 그러나 EIS理論에 따라 8세 兒童에게 2次式의 完全제곱型의 因數分解에 대한 學習을 시키는 發見的 敎授法에 대한 그의 例示(J.S. Bruner,

1968) 역시 思考 水準의 飛躍이란 면에서 볼 때 받아 들이기 어려운 면이 있다. H. Freudential(1973, pp. 127-130)은 兒童이 그러한 學習을 하였다고 하드라도 前數學的인 基礎水準에 머물러 있는 狀態를 벗어나지 못하며 自身의 行動을 調整·反省하여 數學이 시작되는 水準에까지 이르지 못한다고 批判하고 있다.

Piaget 心理學(1950)의 中核的 槪念은 schèmes과 操作이다. schèmes은 槪念의 理解 즉 同化에 필요한 道具이며 學習의 條件이다. 또한 Piaget에게 있어서 知的 思考의 形成은 操作의 構成이며 이는 一次的으로 兒童의 具體的 活動을 통해서 構成되는 것이다. H. Aebli(1951)는 Piaget心理學을 敎授學에 적용하면서 敎育은 이러한 思考의 操作的 本性에 따라야 한다는 理論을 전개하였다. Aebli의 理論은 實際的인 行動 結果의 관찰로부터 內面化를 통한 操作의 構成을 목표로 하고 있으며, A. Fricke(1970)에 의해 일층 명확히 구체화되어 '操作的 學習原理'라고 불리우게 되었다. 그러나 數學的 思考 活動은 操作의 對象化에 의한 보다 高次的인 操作의 構成 活動이 되풀이 되는 것임을 생각할 때, 操作的 學習原理는 數學 學習 사이클의 첫고리에 해당하는 局所的 理論에 불과한 것으로 볼 수 밖에 없을 것이다.

한편 Z.P. Dienes(1960)는 위에서 言及한 數學的 思考 活動의 本質에 대한 洞察을 바탕으로 數學 學習을 소위 '놀이'를 통한 構造的 活動이라고 보고 數學的 槪念 形成에 대한 '開閉連續體' 모델을 제시하였다. 自由놀이段階, 方向性이 있고 目的 指向的인 中間 段階를 거쳐 槪念이 形成되면 數學的 槪念은 '閉'의 狀態로 되지만, 內省的 活動에 의한 分析·檢討 및 外的 狀況에의 應用 過程을 통해 槪念이 定着되고 보다 정통하게 되면서 이미 '開'의 狀態로 변한다. 이와 같은 狀態가 되면 形成된 槪念은 보다 높은 水準의 새로운 槪念形成을 위한 資料 곧 '놀이'의 對象이 되어 數學的 槪念 形成의 사이클이 끊임없이 反復된다는 것이다. Dienes는 F. Bartlett의 理論을 근거로 數學的 槪念 形成의 고리 즉 開閉連續體의 閉의 狀態로부터 開의 狀態로 옮겨져 새로운 構成的 思考가 展開될 때 '冒險的 思考'가 개재한다고 보고 있다. 이러한 Dienes의 學習理論은 패턴화와 對象化의 반복이란 數學的 思考 活動의 特性에 입각하여 展開된 理論이나 具體的인 學習水準을 例示하지 못하고 있을 뿐만 아니라 정상적인 數學學習을 너무 人工的으로 解釋한 結果가 되었다는 批判을 면하기 어려울 것이다.

## Ⅳ. van Hiele 理論과 操作的 構成主義와의 關聯性

P.M. van Hiele(1970)는 일찍부터 그의 스승인 H. Freudenthal(拙稿, 1984)과 더불어 Piaget 理論에 대해 신랄한 批判을 가해 온 數學敎育學者 가운데 한사람이다. 그러나 P.M. van Hiele(1986, p. viii)는 최근에 출판된 그의 著書 가운데에서 다음과 같은 告白을 하기

에 이르렀음은 매우 흥미있는 일이 아닐 수 없다. "나의 初期 論文에 대한 몇 몇 批判은 Piaget에 대한 나의 見解가 본질적으로 肯定的이라는 것을 알아 내었다. 그들은 옳다. 어떤 理論에 대해서 批判的이라는 것은 그 理論의 보다 큰 部分에 대해서 同意할 때에만 意味를 갖는 것이다. 나의 水準 理論이 Piaget理論으로부터 나왔다고 主張할 어느 程度의 이유조차 있다. 그것이 내 이름을 가진다는 것은 그것을 내가 아주 새로운 方式으로 다루었다는 것으로 說明될 수 있다."

그러나 P.M. van Hiele(1986, pp. 5-6; 98-108)는 Piaget心理學은 發達心理學이며 自身의 硏究는 學習心理學的인 것으로 思考 水準의 상승을 자극하는 敎育的 問題를 다루고 있다는 差異點을 강조하면서 다음과 같은 批判的인 立場을 견지하고 있다.

우선 van Hiele는 Piaget가 두 가지 以上의 思考 水準의 存在를 認識하지 못하였으며 學習 過程이 보다 높은 水準에서 거듭 반복된다는 사실을 看過하였기 때문에 잘못된 結論에 이르렀다고 主張한다. Piaget에 따르면 數學的 思考의 本質은 操作이며 그것은 行動이 內面化된 것이라고 생각하고 있으므로 두 가지 水準만을 생각하고 있다는 것이다. P.M. van Hiele(1986, pp. 100-101)는 그 典型的인 例로써 兒童의 行動의 論理, 具體的 取扱의 論理라고 하는 Piaget의 論理 槪念을 들면서 다음과 같이 記述하고 있다. "論理란 用語에 정상이 아닌 意味를 부여한 것은 모든 思考를 한 段階에 놓으려고 한 데에서 비롯된다. 그는 數學的 論理的 思考를 行動과 經驗으로부터 한 段階로 직접 이끌어 내려고 하였다. 우리의 水準 理論에 따르면 이런 方式으로는 두번째 思考 水準 以上은 도달할 수 없다. 보다 높이 올라 가려면 두번째 水準의 關係網에 注目하고 어떤 文脈 가운데에서 探究를 통해 그러한 關係의 本性과 一貫性을 검토하여, 그 水準에서 관찰된 內的 秩序의 명확화에 참여하고 결국 自由로운 思考 指向에 의해 새로운 思考 分野에 들어가야 한다. 그러한 思考는 活動에 의해 開發되어야 하지만 첫번째 水準의 것과 전연 다른 活動이다." 더우기 具體的 操作期의 兒童의 思考는 결코 論理를 바탕으로 할 수 없으며 自然數 槪念이 論理의 發達과 並行하여 발달한다고 하는 Piaget의 思考 方式은 學習 水準 理論에서 보면 있을 수 없다고 主張하면서 P.M. van Hiele는 Piaget의 操作主義的 立場이 兒童의 具體的인 思考 水準과 그보다 높은 여러 思考 水準을 실질적으로 同一視 하고 있는 誤謬에 빠져있다고 主張한다.

그 다음에 P.M. van Hiele는 Piaget가 思考 水準의 상승에서 言語가 갖는 매우 중요한 役割을 看過하였다고 批判한다. 또한 Piaget에 따르면 人間의 精神은 어떤 정해진 理論的 槪念의 方向으로 발달하는데, 이는 그러한 槪念이 人間의 構成物일 뿐이며 시간이 지나면서 변할 수 있다는 것, 따라서 어떤 槪念의 발달은 그 시대의 사람들에 의해 影響을 받는 學習過程으로 理解되어야 한다는 點을 認識하지 못한 데에서 비롯된 생각이라고 P.M. van Hiele는 主張한다. 또한 Piaget에 따르면 보다 높은 水準의 思考 構造는 근원적인 것으로 兒童들은 그것을 타고 나며 成長하면서 意識하게 되어 있으나 보다 높은 水準의 思考는 보

다 낮은 水準의 思考 構造를 지배하는 法則이 명확히 되고 硏究되어 거기서 그 自體가 새로운 構造로 될 때 달성된다고 P.M. van Hiele는 主張한다.

그리고, P.M. van Hiele는 Piaget가 偶然 學習 過程에서 나타나는 兒童 發達에 대한 情報를 제공하고 있으나, 生物學的 成熟, 文化 環境과의 交流, 探究, 誘導學習 過程에 의한 發達을 명확히 區分하지 않았기 때문에 그의 理論은 敎育的으로 價値가 적다고 批判한다. 또한 P.M. van Hiele는 兒童의 思考와 學習過程을 이해하고자 하는 사람은 어른의 思考에 의한 解釋을 배제하는 것이 不可能 하다는 點을 강조하면서, 兒童의 數學的 槪念 發達에 관한 Piaget의 理論은 兒童의 行動으로부터 이끌어내진 것이 아니라 Piaget 自身의 독특한 생각을 兒童의 行動에 投射하고 있다고 主張한다. P.M. van Hiele(1986, p. 101)는 다음과 같이 記述하고 있다. "行動의 內的 秩序를 아는 어른에게 兒童들이 바르게 행동한 理由를 그 自身의 水準에서 지적하기는 쉽다. 그러나 이것은 兒童들이 똑같은 理解를 통해 행동하였다는 것을 뜻하지는 않는다." 特히 兒童의 量의 保存에 대한 認識은 相補性의 認識으로부터 생긴다고 보는 것은 Piaget 自身의 생각을 입증하기 위한 그 自身의 解釋이며 兒童이 그러한 근거로부터 量의 保存에 대한 判斷을 했다고 보기는 어렵다고 主張한다.

다음에는 以上과 같은 Piaget理論에 대한 P.M. van Hiele의 批判을 차례로 檢討해 보기로 한다. Piaget에 따르면 知能은 操作의 體系이며 論理·數學도 操作 體系이다. 다시 말해 Piaget는 論理·數學的 思考를 內面化된 行動 곧 操作과 그것을 바탕으로 한 보다 高次의 操作으로 보고 兒童의 行動 가운데 그 形成의 根源을 찾고 있는 것이다. Piaget(1961)에 따르면 論理란 具體的 操作期의 '質的 論理'로부터 시작하여 形式的 操作期에 命題論理操作에 達하는 발달의 산물이며 記號論理도 이러한 論理的 操作을 形式化한 理論으로 보고 있다. 具體的 操作期의 '質的 論理'는 反映的 抽象化에 의한 소위 '論理·數學的 經驗'으로부터 생기는 分類 操作과 系列化 操作으로 모든 操作의 기초가 되는 基本的 操作이라고 생각하고 있으며, 自然數 槪念을 이들 操作의 綜合으로 보고 그 發生을 연구하였다. 또한 Piaget는 論理·數學的 思考의 발달을 말하자면 心的 考古學으로 보고 反映的 抽象化에 의해 反射된 內容이 反省을 통해 새로운 形式을 構成하게 되면서 形式과 內容의 交代가 이루어져 발달하는 螺旋的 過程으로 說明한다. 이는 van Hiele理論에서 말하는 內的 秩序의 硏究 對象化에 의한 보다 높은 思考 水準에로의 移行과 다를 바 없는 것이다. 論理를 命題의 結合 操作으로서만 파악하고, 그것이 兒童의 行動으로부터 직접 이끌어내릴 수 없으며, 自然數 槪念이 論理의 발달과 並行하여 발달할 수 없다는 P.M. van Hiele의 主張은 그 자신이 水準理論을 주장하면서도 論理·數學的 思考에 대한 Piaget의 發生的 段階論을 看過한 데에서 비롯된 것이며 따라서 그 意味를 잃은 것으로 생각된다.

Piaget는 思考의 本質은 操作이며 그 根源은 行動이므로 兒童의 言語에는 思考가 직접 反映되지 않는다고 생각하여 操作의 發生을 파악하려면 兒童의 言語에 대한 分析보다 兒童이

事物을 다루는 行動을 관찰해 보지 않으면 안된다는 입장을 명확히 하고 있다. 認知 發達에 있어서의 外的인 社會的 文化的 要因과 敎育的 言語的 要因의 影響을 인정하고 있으면서도 Piaget는 內的인 자기調整 要因을 중시하고 있는 것이다. P.M. van Hiele는 Piaget가 思考發達에 있어서 言語가 갖는 중요한 役割을 看過하였다고 주장하나 이 역시 Piaget理論에 대한 충분한 理解의 缺如에서 비롯된 것으로 밖에 볼 수 없다. Piaget(1970)는 自身이 주장하는 活動的 方法에 대한 주된 誤解로서 兒童의 '活動'은 곧 具體的 活動이라고 생각하는 混亂을 지적하고 있다. 活動的 方法은 兒童이 획득해야 할 知識을 스스로 再構成해야 한다는 意味에서 '活動的'이므로 그 活動은 內面的 抽象的인 反省일 수도 있는 것이다. 特히 幼稚園이나 國民學校의 數學 指導에서 初步的인 論理·數學的 槪念이 具體的 對象을 다루는 主體의 行動의 調整으로부터 이끌어내린다고 하는 생각은 실제적인 行動을 正當化하는 것이지만 本格的인 探究 活動은 抽象的인 言語的 操作으로 전개된다는 點을 看過해서는 안될 것이다.

Piaget에 따르면, 兒童은 數學的 思考를 자신의 行動 schèmes을 바탕으로 社會的 敎育的 環境의 影響아래 스스로의 行動과 操作을 調整하여 反映的 抽象化를 통해 操作 體系로서 構成해 간다. 그리고 數學 自體의 歷史的 發達을 行動 schèmes이란 內在的인 客觀性의 意識化 過程이라고 보고 있으며, 構成 곧 發生의 順序는 反省 곧 分析의 順序의 逆이란 Aristotale의 思考方式을 근거로 數學의 心理的 發生 順序는 數學의 歷史 發生의 逆順이라고 假定하고 있다. Piaget는 自身의 操作的 構成主義란 數學認識論의 이러한 基本 立場이 先驗論은 아니며, P.M. van Hiele의 표현대로 人間 精神은 어떤 정해진 理論的 槪念의 方向으로 發達한다고 생각하고 있는 點에서, Platonism과 유사하나 構成의 可能性만을 받아들이고 그 實在를 認定하지 않는다는 點에서 Platonism과 區別된다는 點을 애써 밝히고 있다 (E.W. Beth et J. Piaget, 1961). 이러한 Piaget의 立場은 數學의 絶對性을 받아들이고 있다는 批判을 받기 쉬운 측면이 없지 않으나, 數學의 發達을 時代的 社會的 狀況에 따라 변하는 人間의 構成物로 생각하고 있는 P.M. van Hiele의 觀點은 數學의 客觀的 强健性을 설명하는데 不足함이 없지 않을 것이다.

한편 認知 發達에 있어서 素質과 環境, 成熟과 學習 등의 구분이 명확히 고려되어 있지 못한 점은 Piaget理論의 명백한 制限點이다. 그러나 이 問題는 敎育的으로 절실하게 要求되고 있다고 하여도 그 누구도 지금까지 만족할 만큼 解決한 사람은 없으며 장래에도 解決될 가능성이 지극히 적은 問題라고 생각된다. Piaget의 理論은 學習 過程에 관한 것은 아니라 하여도 論理·數學的 槪念의 本質과 그 發達의 메카니즘을 비교적 명확히 說明한 點에서 그 敎育的 意味가 큰 것으로 생각된다.

兒童의 數學的 思考의 발달에 대한 Piaget의 理論은 兒童의 行動으로부터 이끌어내린 것이 아니며 어른인 Piaget 自身의 독특한 생각에 따라서 兒童의 行動을 해석한데 불과하다는

P.M. van Hiele의 批判은 특히 數 概念 發生에 관한 Piaget의 硏究에 集中되고 있다. 相補性에 의해 量의 保存에 대한 說明, 1對 1 對應에 근거한 集合의 對等 關係 곧 數의 保存 認識에 대한 說明, $a\times1+a\times1=a\times2$와 같은 形式의 乘法的 關係의 認識에 대한 說明 등은 Piaget 自身의 解釋에 不過하다는 것이다. 이러한 P.M. van Hiele의 批判은 그의 스승인 H. Freudenthal의 Piaget 批判과 脈을 같이 하는 것이다(拙稿, 1984). 數學的 思考의 發達에 관한 Piaget의 硏究는 그 자신의 독특한 數學 認識論 곧 操作的 構成主義를 정립하기 위한 것이었으며 이는 Piaget 自身의 哲學的 思索의 결과임은 말할 필요도 없을 것이다. J.H. Flavell(1963, p. 430)이 지적하고 있드시, Piaget가 自身의 發生的 疑問에 答하기 위하여 實驗을 계획하고 自身의 哲學을 입증하는 方向으로 資料를 해석하였다는 事實 자체는 非難의 對象이 되지 못할 것이다. 量의 保存에 대한 認識이 相補性의 發達 結果라는 解釋은 Piaget의 操作主義의 중심적인 아이디어로 操作的 思考의 全貌를 나타내는 槪念인 可逆性의 存在를 立證하려는 것인 바, 이를 Piaget 自身의 해석에 불과하다고 간단히 否定해 버릴 수 있을 것인가? 兒童의 反應은, 처음 相補性을 이유로 모양이 다른 容器에 옮겨 부은 구슬의 數가 변하지 않는다는 것, 곧 數의 保存을 인식하였다는 것을 보장하지는 못하며, 說明을 하도록 요구 받았을 때 그런 根據를 제시할 수도 있는 바, "兒童이 어떤 근거에서 數의 保存을 理解하는지는 아직 解答이 주어지지 않았다."는 것이 P.M. van Hiele(1986, p. 102)의 對答인 것이다.

그리고, L.E.J. Brower의 影響을 받아 直觀主義的 立場에 서 있는 Freudenthal(1973, p. ix)이나 P.M. van Hiele에게 論理主義者인 Cantor의 基數 槪念을 兒童의 心理 發生面에서 확인하려 한 것으로 보인 Piaget의 硏究가 올바로 評價될 수는 없을 것이다. 그러나 Piaget는 Cantor의 集合論에 대한 피상적인 知識을 바탕으로 數의 心理 發生學을 구축하려 한 것이 아니라, 數 槪念에 대한 直觀主義者들과 論理主義者들의 諸理論을 비교 검토한 후 그를 바탕으로 數의 心理 發生을 硏究 하였다는 사실에 注目하지 않으면 안될 것이다.

Piaget理論은 그 독특한 認識論的 立場과 방대하고 難解한 展開, 모호한 진술 等으로 말미암아 명확히 파악하기 힘든 탓으로 적지 않은 誤解와 非難, 批判의 對象이 되어 왔다. 이상의 考察 결과 드러난 것은 Piaget理論에 대한 P.M. van Hiele의 批判이 주로 Piaget理論에 대한 충분한 理解의 缺如에서 비롯된 誤解에 불과하다는 것이다. 앞에서 考察한 바와 같이 Piaget가 主張하고 있는 反映的 抽象化의 메카니즘은 van Hiele의 數學 學習水準 理論의 기본적인 생각과 근본적으로 다를 바 없는 것이며, "構造 槪念은 行動으로부터 나오며 行動에 內在하여 分析과 명료화에 의해 보다 높은 思考 水準에 이른다."는 P.M. van Hiele(1986, p. 104)의 記述에서 명확히 드러나듯이 數學的 思考의 行動的 起源에 대한 解釋에서, 그리고 發達水準의 恒存性을 假定하고 있다는 點에서 Piaget와 그 基本 立場을 같이 하고 있다. 결국 P.M. van Hiele(1986, p. 5) 自身이 "나의 硏究의 바탕이 되는 중요한 部分

은 Piaget理論 가운데에서 찾을 수 있다."고 告白하고 있드시 van Hiele의 數學 學習水準 理論은 Piaget의 操作的 構成主義의 數學教育에의 應用으로 보는 것이 妥當할 것이다.

## V. 結 言

傳統이란 바뀌기 힘든 것이다. 지난 20年 동안 數學教育界에는 커다란 變革이 있었지만 普通教育으로써의 數學教育이 추구해 나아가는 方向에는 근본적인 變化가 없었다. 普通教育으로써의 數學教育의 目的과 內容이 어떠해야 될 것인가에 대해서는 많은 論議가 필요하겠지만 數學的 思考 過程, 數學化, 數學的 活動 經驗의 一般 教育的 重要性에 대한 깊은 관심은 결코 새로운 것이 아니다. 教育史를 살펴보면 活動主義 教育 理念은 르네상스 以前까지 거슬러 올라가는 매우 깊은 뿌리를 갖고 있는 것을 알 수 있다. 數學教育이 既成의 知識 體系의 傳達에 급급할 것이 아니라 兒童으로 하여금 數學的 思考 活動 經驗에 參與하게 함으로써 數學的 眼目과 思考 態度를 開發하도록 努力해야 한다는 것은 學習者의 意識性을 개발하여 數學教育을 人間化해야 된다는 主張과 다를 바 없는 최근의 數學教育學界의 一般的인 動向이다.

지금까지 이러한 數學化를 통한 數學的 思考 教育의 실현을 위해 제기되어온 方案 가운데 최근 數學教育學界의 관심을 끌고 있는 van Hiele의 數學 學習水準 理論과 관련된 몇가지 問題點에 대해 고찰해 보았다. van Hiele理論은 現象의 整理 手段의 研究 對象化, 思考의 內的 秩序의 研究 對象化 혹은 패턴化와 對象化, 形式化와 內容化의 거듭된 交代로 표현되는 數學的 思考의 特性을 골격으로 하여 數學의 過程的 側面을 강조한 學習 水準 理論으로, 관련諸研究 결과 그 妥當性이 입증되어 數學 教育課程 開發에 이용되어 왔다. 지금까지 제시된 學習—指導 理論이 數學的 思考의 그러한 特性을 반영한 數學學習을 說明하는데 충분하지 못하다는 點은 van Hiele理論의 數學教育學的 價値가 새롭게 인식되고 있는 理由중의 하나일 것이다.

數學的 思考 活動 가운데 무엇보다도 중요한 것은 抽象化이다. 操作的 構成主義에 따르면 數學的 思考는 行動의 一般的 調整으로부터 反映的 抽象化를 통해 構成된 操作과 그를 바탕으로 한 보다 高次의 操作이다. 결국 行動은 數學的 思考의 起源이며 數學的 思考를 키우는 토양인 것이다. '操作的 數學教育 프로그램'의 中心 問題는 數學的 操作의 그러한 心理 發生 過程을 보다 具體的으로 확인하는 것이며 그러한 發生의 메카니즘에 따라서 그 基礎를 튼튼히 해 가면서 '자연스런' 學習이 이루어지도록 함으로써 數學的 思考의 참다운 開發이 가능하도록 하는 것이다.

本稿의 考察 결과 드러난 것은 van Hiele의 數學 學習水準 理論은 P.M. van Hiele 자신의 Piaget理論에 대한 批判에도 불구하고 操作的 構成主義의 그늘을 벗어나지 못하고 있다

는 點이다. H. Freudenthal을 중심으로 한 네델란드의 數學教育學界, 나아가 20世紀 後半의 數學教育學界는 Piaget理論에 대한 批判者를 포함하여 操作的 構成主義의 影響을 벗어나지 못하고 있는 것이 事實이다. 그 理由는 活動主義, 構造主義, 發生主義에 입각하여 展開된 數學的 思考 發生에 대한 包括的인 硏究 結果는 Piaget理論을 제외하고는 거의 찾아보기 어려운 點에도 기인하지만, Piaget自身이 자기자신을 第一의 'Piaget 修正主義者'로 간주하고(B. Inhelder & H.H. Chipman, 1976, p. 11), 反對論者들과의 '辯證法的 和解'를 추구하면서 보다 包括的인 理論을 開發해 온 데에도 기인할 것이다.

서두에 언급한 바와 같이 최근의 數學教育에 대한 論議에서 注目을 끄는 것이 學習者의 意識性의 開發, 反省的 思考를 통한 數學的 思考의 開發 問題이다. 自身이 한 것을 反省하면 思考가 다른 次元으로 飛躍하는 계기가 되고 그렇게 됨으로써 經驗에 意味를 부여할 수 있게 된다. J. Dewey(1933, p. 3)는 反省的 思考를 "어떤 內容을 마음 가운데에서 굴리면서 그것을 진지하고 지속적으로 고려하는 思考의 종류"로 정의하면서 學習에서의 反省的 思考의 중요성을 강조하였다. van Hiele理論은 數學的 活動과 思考를 反省하고 마음 가운데에서 굴리는 것이 數學的 思考를 개발하는 길이 됨을 主張하고 있다. 自身의 學生들에게 數學的 活動을 反省하게 하여 數學的 思考를 經驗하게 하려는 教師는 스스로 그런 經驗을 하도록 努力하지 않으면 안되며, 아울러 自身의 指導를 反省하고 그것을 改善하려는 시도를 끊임없이 지속해 나아가야 할 것이다.

## 參 考 文 獻


拙稿. (1984). 「Piaget理論의 數學教育에의 適用은 數學的 教育學的 心理學的 誤謬인가?」, 韓國數學教育學會誌, 數學教育, vol. xxii, No. 3, pp. 1-13.

拙稿. (1985). 「操作的 數學教育 프로그램」, 師大論叢, 第31輯, 서울大學校 師範大學, pp. 161-181.

Aebli, H. (1951). *Didactique psychologique, Application à la didactique de la psychologie de Jean Piaget*, Delachaux et Niestle.

Bell, A.W. (1976). *The Learning of General Mathematical Strategies*, Shell Centre for Mathematical Education, University of Nottingham.

Beth, E.W. et Piaget, J. (1961). *Épistemologie mathêmatique et psychologie*, Presses Universitaires de France.

Bruner, J.S. (1963). *The Process of Education*, Vintage Books.

Bruner, J.S. (1968). *Toward a Theory of Instruction*, Harvard University Press.

Burger, W.F. & Shaughnessy, J.M. (1986). "Characterizing the van Hiele levels of development in geometry", *JRME, vol. 17,* No. 1, pp. 31-48.

Burton, L. (1984). "Mathematical Thinking; the struggle for meaning", *JRME, vol. 15,* No. 1, pp. 35-49.

Dienes, Z.P. (1960). *Building up Mathematics,* Hutchinson Educational LTD.

Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an Educational Task,* D. Reidel.

Freudenthal, H. (1977). "Didaktische Phänomenologie mathematischer Grundbegriffe", *Der Mathematikunterricht, Heft 3,* S. 46-73.

Freudenthal, H. (1981). "Major Problems of Mathematics Education", *Educational Studies in Mathematics, 12,* pp. 133-150.

Fricke, A. (1970). "Operative Lernprinzipien im Mathematikunterricht der Grundschule", Fricke, A. und Besuden, H.; *Mathematik, Elemente einer Didaktik und Methodik,* Ernst Klett, S. 79-116.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1984). *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre Marie van Hiele,* City University of New York, Brooklyn College.

Fuys, D., Geddes, D. & Tischler, R. (1985). *An Investigation of the van Hiele Model of Thinking in Geometry among Adolescents,* City University of New York, Brooklyn College.

Hilgard, E.R. (1956). *Theories of Learning,* Appleton-Century-Crofts.

Hoffer, A. (1981). "Geometry is more than proof", *Mathematics Teacher 74,* pp. 11-18.

Inhelder, B. & Chipmann, H.H. (ed.) (1976). *Piaget and His School,* Springer.

Kay, C.S. (1986). *Is a square a rectangle?; The development of first grade students' understanding of quadrilaterals with implications for the van Hiele theory of the development of geometric thought,* a doctoral dissertation, print, the University of Georgia.

Kilpatrick, J. (1981). "The Reasonable Ineffectiveness of Research in Mathematics Education", *For the Learning of Mathematics, vol. 2,* No. 2, pp. 22-29.

Kilpatrick, J. (1986). "Reflection and Recursion", M. Carss(ed.), *Proceedings of the Fifth International Congress on Mathematical Education,* Birkhäuser, pp. 7-29.

Mayberry, J. (1981). *An investigation of the van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers,* a doctoral dissertation, print, the University of Georgia.

Peirce, C.S. (1956). "The Essence of Mathematics", J.R. Newman(ed.); *The World of Mathematics, vol. III,* Simon and Schuster, pp. 1773-1783.

Piaget, J. (1950). *The Psychology of Intelligence,* Routledge & Kegan Paul.

Piaget, J. (1970). *Science of Education and Psychology of the Child*, Longman Group Limited.

Piaget, J. et collaborateurs (1977). *Recherches sur l'abstraction réflêchissante II*, Presses Universitaires de France.

Pyshkalo, A.M. (1968). *Geometry in Grades 1-4*, Proveshchenie, Translated by the Survey of Recent East European Mathematical Literature, University of Chicago, 1981.

Schubring, G. (1978). *Das genetische Prinzip in der Mathematik-Didaktik*, Klett Cotta Typoscript.

Thom, R. (1973). "Modern mathematics: does it exist?", A.G. Howson(ed.), *Developments in Mathematical Education*, Cambridge University Press, pp. 194-209.

Usiskin, Z. (1982). *van Hiele levels and achievement in secondary school geometry*, CDASSG Project, University of Chicago, Print, ERIC Document Reproduction Service No. ED 220288.

van Hiele-Geldof, D. (1957). "The didactics of geometry in the lowest class of secondary school", D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler, *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre Marie van Hiele*, City University of New York, Brooklyn College, 1984, pp. 1-206.

van Hiele, P.M. (1957). "The problem of insight in connection with school children's insight into the subject matter of geometry", D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler, *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre Marie van Hiele*, City University of New York, Booklyn College, 1984, pp. 237-241.

van Hiele, P.M. (1959). "A child's thought and geometry", D. Fuys, D. Geddes & R. Tischler, *English translation of selected writings of Dina van Hiele-Geldof and Pierre Marie van Hiele*, City University of New York, Booklyn College, 1984, pp. 243-252.

van Hiele, P.M. (1970). "Piagets Beitrag zu unsere Einsicht in kindliche Zahlbegriffsbildung", *Rechenunterricht und Zahlbegriff*, Georg Westermann, S. 105-131.

van Hiele, P.M. (1986). *Structure and Insight; A theory of Mathematics Education*, Academic Press.

van Hiele, P.M. & van Hiele-Geldof, D. (1958). "A method of initiation into geometry at secondary schools", H. Freudenthal (ed.), *Report on Methods of the Initiation into Geometry*, Groñingen, pp. 67-80.

Vergnaud, G. (1983). "Why is an epistemological perspective necessary for research in mathematics education?", J.C. Bergeron & N. Herscovics(ed.), *Proceedings of the Fifth*

*Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education vol. 1*, Université de Montréal, Faculté de Sciences de l'Education, pp. 41-69.

Wirszup, I. (1976). "Breakthroughs in the psychology of learning and teaching geometry", J.L. Martin(ed.), *Space and Geometry*, ERIC/SMEAC, pp. 75-97.

# Some Remarks on the van Hiele's Level Theory of Mathematical Learning

Woo Cheong Ho


## Abstract

In 1957 the van Hieles, Dutch mathematics teachers, reported on studies about a level theory of mathematical learning. Mathematics educators at the Soviet Academy of Pedagogical Sciences hastened to organize intensive research on the levels of development outlined by the van Hieles, verified the validity of their assertions, and accepted those as a basis for designing a new mathematics curriculum in 1960s. According to I. Wirszup, the new curriculum is the most radical change in Russian mathematics education in nearly a century. Recently, the levels of mathematical thinking approach has been the focus of increasing interest in the United States of America, and several recent studies have tested the hypotheses that the levels can be identified and form a hierarchy as described by the van Hieles. The van Hieles level theory has a great potentiality for uses in the mathematics curriculum development and classroom practices.

In this paper, we found that.

i) The basic principle of the van Hieles level theory emphasizes the process aspect of mathematics, the characteristics of mathematical thought; treating the means to put in order phenomena as themselves subjects of study, the inner order of thought as subject of study, and alternating patterns and subjects, forms and contents. This is supported also by C.S. Peirce, J. Piaget, H. Freudenthal, Z.P. Dienes and L. Burton.

ii) The teaching and learning theories of Gestalt psychologists, J.S. Burner, H. Aebli and Z.P. Dienes, could not sufficiently account the kind of learning emphasizing the characteristics of mathematical thought. This very fact allows us recognize the value of the van Hieles theory in didactics of mathematics.

iii) The criticism of P.M. van Hiele about Piagetian theory—Piaget distinguished only two levels, action and operational level, and did not distinguished more. Piaget used the term "logic" deviatingly and tried to deduce logical thinking directly from action. Piaget mistakenly thought that the concrete operational thoughts based on logic and natural number concept develops side by side with logic. piaget did not see the very important role of language in moving from one level to the next. Piaget did got into the absolute point of

view about mathematics. Piaget did not clearly distinguished between development by biological maturation, confrontation with the cultural environment, and learning process, thus his theory has little value from the educational point of view. Piaget interpreted the subjects' reactions from his own perspective in order to verify his own assertions. These could be considered as misconceptions originating from his insufficient understanding about Piagetian theory, and the van Hieles level theory could be considered as an application of the operational constructivism to mathematics teaching and learning.