

Schwarzschild black hole에 의한 중력 렌즈 효과에 관한 연구

소 광 섭·양 동 석
(서울대학교 사범대학 물리교육과)

I. 서 론

중력장에서 빛의 경로가 휘어진다는 사실은 Einstein의 일반상대론에 의하여 예견되었고, 1919. 5. 29 일식때 Eddington에 의하여 처음으로 관측 확인되었으며, 그 후 많은 사람들에 의하여 관측된 결과는 Einstein이 계산한 값과 거의 일치하고 있다. ⁽²⁾

이와 관련하여 1936년 Einstein은 지구로부터 멀리 있는 별(s)을 중간의 다른별 (B)을 통하여 볼 때 두 개의 상 S_1 , S_2 로 보여지며, 그 두상의 밝기는 직접 보이는 별의 밝기보다 더 클 수 있다는 것을 계산하여 발표하였으나 실질적인 관측이 어려워 별다른 관심을 얻지 못하였다. 1937년 Tikhov도 같은 내용을 발표하였고 이러한 효과를 중력에 의하여 빛이 모아진다는 의미로 “중력렌즈”라고 하였다.

그 후 중력렌즈효과에 관한 연구는 1964년 S. Refsdal의 구체적인 계산에 ⁽⁴⁾ 의하여 본격화되었으며 1963년 Maarten Schmidt의 QSO(Quasistellar Object)의 발견과 함께 천문학자들 사이에 많은 관심의 대상이 되었다. ⁽¹⁾ 특히 1979년 D. Walsh의 쌍둥이 QSO 0957+561A, B의 발견으로 중력렌즈의 효과에 관한 관심이 더욱 고조되었다. 이 쌍둥이 QSO는 서로 5.7'' 정도 떨어져 보이는 QSO의 spectrum을 분석한 결과 아주 동일한 것으로 나타났다. ⁽⁵⁾

또한 1980년과 1981년 사이에 R.J. Weymann팀은 Triple QSO PG 1115+08 등 multiple QSO를 발견하였으며 이것을 중력렌즈 효과로 설명하고 있다. ⁽⁶⁾

그러나 S. Refsdal이 계산한 이중상이 밝기는 빛이 휘는 각이 $v=4M/b$ 으로 놓고 계산하였기 때문에 $v=4M/b$ 으로 부터 현저히 벗어나는 black hole의 경우에는 적용할 수 없다. 따라서 본 논문에서는 충격상수가 작은 영역($b=3.09M\sim 100M$)에 대하여 빛의 경로가 휘어진 각을 계산하고 이것을 이용하여 black hole에서만 나타날 수 있는 중력렌즈 현상에 대하여 논의하였다.

빛의 밝기를 계산하는 방법은 S. Refsdal의 방법을 사용하였고 빛의 경로가 휘는 각과 각 점에서 상의 밝기는 컴퓨터에 의한 수치계산을 하였다.

II. Schwarzschild black hole의 주위를 지나가는 빛의 경로⁽³⁾

빛이 black hole의 주위를 지나갈 때 black hole의 강력한 중력의 영향으로 빛의 경로가 휘어진다. 이때 휘어지는 각은 빛의 유효 퍼텐셜과 geodesic 방정식으로 부터

$$v=2 \int_0^{1/R_0} \frac{du}{\sqrt{b^{-2}-u^2+2Mu^3}} - \pi \dots\dots\dots(2-1)$$

로 주어지며, 여기서 $u=1/r$ 이고, R_0 는 최근접 거리이다. 또 b 는 impact parameter로서 $b=L/E$ 로 정의되며, R_0 와의 관계는

$$b=\sqrt{\frac{R_0^3}{R_0-2M}} \dots\dots\dots(2-2)$$

이다. 빛이 휘는 각 v 는 (2-1)식에서 보는 바와 같이 적분이 되지 않지만 b 가 매우 클 때 $v=4M/b$ 으로 접근해 간다. 그러나 black hole의 질량은 매우 좁은 영역에서 분포하고 있으므로 b 가 아주 작은 영역까지 접근하여 갈 수 있다. 따라서 black hole에 의한 중력렌즈 효과를 알아 보기 위해서는 (2-1)식을 b 가 작은 영역까지 계산하여야 한다. b 가 작은 경우 (2-1)식은 직접 적분되지 않으므로 computer를 사용하여 구분구적법에 의한 계산을 하였다. 수치적분을 하기 위해 변수를 다음과 같이 변환 한다.

$$\begin{aligned} \bar{r} &= r/M \\ \bar{b} &= b/M \\ \pi &= Mu \end{aligned}$$

그러면

$$v=2 \int_0^{1/R_0} \frac{du}{\sqrt{\bar{b}^{-2}-\pi^2+2\pi^3-\pi}} \dots\dots\dots(2-1)'$$

$$\bar{b}=\sqrt{\frac{\bar{R}_0^3}{\bar{R}_0-2}} \dots\dots\dots(2-2)'$$

이고 여기서 계산된 v 값은 radian 값이다. 각각의 \bar{b} 에 대한 v 값은 표 2-1과 같다. 표에서 \bar{b} 가 가장 작은 값인 3.09일 때 $v=6.297$ 로써 거의 2π 를 넘고 있다. Q 는 $Q=v/(4/\bar{b})$ 로서 \bar{b} 가 클 때의 값과 비교 되도록 나타내었으며 표 2-1에서 보듯이 $\bar{b}=101$ 일 때 $Q=1.03$ 으로 거의 $v=4/\bar{b}$ 임을 알 수 있다.

또한 K 는

$$k=dv/d\bar{b} \dots\dots\dots(2-3)$$

변화율을 나타내며 이것은 인접한 두 점을 택하여 기울기를 구한 값이다.

〈표 2-1〉 b 와 v 와의 관계

	\bar{R}_0	\bar{b}	v	Q	K
1	3.09	3.20264	6.287	8.17	-150.311
2	3.091	5.20278	6.266	8.15	-148.851
3	3.092	5.20292	6.245	8.12	-147.418
4	3.093	5.20307	6.224	8.09	-146.021
5	3.094	5.20321	6.203	8.06	-137.759
6	3.095	5.20336	6.183	8.04	-129.659
7	3.096	5.20350	6.164	8.01	-135.233
8	3.097	5.20365	6.144	7.99	-134.004
9	3.098	5.20380	4.124	7.96	-126.166
10	3.099	5.20395	6.105	7.94	-131.629
11	3.1	5.20410	6.085	7.91	-113.641
12	3.11	5.20569	5.904	7.68	-95.7199
13	3.12	5.20742	5.739	7.47	-81.5455
14	3.13	5.20927	5.588	7.27	-70.8265
15	3.14	5.21125	5.448	7.09	-61.4672
16	3.15	5.21335	5.319	6.93	-54.1059
17	3.16	5.21556	5.199	6.77	-48.4080
18	3.17	5.21790	5.086	6.63	-42.8899
19	3.18	5.22035	4.981	6.50	-39.0722
20	3.19	5.22291	4.881	6.37	-34.4814
21	3.2	5.22557	4.789	6.25	-32.4392
22	3.21	5.22835	4.699	6.14	-29.5303
23	3.22	5.23123	4.614	6.03	-26.8448
24	3.23	5.23421	4.534	5.93	-24.6786
25	3.24	5.23729	4.458	5.83	-22.9781
26	3.25	5.24046	4.385	5.74	-21.3923
27	3.26	5.24373	4.315	5.65	-19.9082
28	3.27	5.24710	4.248	5.57	-18.5147
29	3.28	5.25056	4.184	5.49	-17.4840
30	3.29	5.25410	4.122	5.41	-15.9621
31	3.3	5.25774	4.064	5.34	-15.5943
32	3.31	5.26146	4.006	5.26	-14.4612
33	3.32	5.26526	3.951	5.20	-13.6404
34	3.33	5.26914	3.898	5.13	-13.1111
35	3.34	5.27311	3.846	5.07	-12.1134
36	3.35	5.27716	3.797	5.00	-11.6434
37	3.36	5.28128	3.749	4.94	-11.1948
38	3.37	5.28548	3.702	4.89	-10.5318
39	3.38	5.28975	3.657	4.83	-10.1249
40	3.39	5.29410	3.613	4.78	-9.28183
41	3.4	5.29851	3.572	4.73	-9.35956
42	3.41	5.30300	3.53	4.67	-8.77922

	\bar{R}_0	\bar{b}	v	Q	K
43	3.42	5.30756	3.49	4.63	-8.43475
44	3.43	5.31218	3.451	4.58	-8.10239
45	3.44	5.31687	3.413	4.53	-7.78132
46	3.45	5.32162	3.376	4.49	-7.47078
47	3.46	5.32644	3.3	4.44	-7.17007
48	3.47	5.33132	3.305	4.40	-6.87860
49	3.48	5.33627	3.271	4.36	-6.59575
50	3.49	5.34127	3.238	4.32	-6.32101
51	3.5	5.34633	3.206	4.28	-5.80931
52	3.55	5.37250	3.054	4.10	-4.87328
53	3.6	5.4	2.92	3.94	-4.28294
54	3.65	5.42871	2.797	3.79	-3.71959
55	3.7	5.45856	2.686	3.66	-3.30338
56	3.75	5.48943	2.584	3.54	-2.88998
57	3.8	5.52127	2.492	3.43	-2.62838
58	3.85	5.55399	2.406	3.34	-2.35530
59	3.9	5.58753	2.327	3.25	-2.18626
60	3.95	5.62183	2.252	3.16	-1.91340
61	4	5.65685	2.185	3.09	-1.75052
62	4.1	5.72883	2.059	2.94	-1.48045
63	4.2	5.80313	1.949	2.82	-1.28366
64	4.3	5.87947	1.851	2.72	-1.12603
65	4.4	5.95762	1.763	2.62	-1.01560
66	4.5	6.03738	1.682	2.53	-.874508
67	4.6	6.11857	1.611	2.46	-.800258
68	4.7	6.20104	1.545	2.39	-.729403
69	4.8	6.28467	1.484	2.33	-.661353
70	4.9	6.36935	1.428	2.27	-.595640
71	5	6.45497	1.377	2.22	-.555018
72	5.1	6.54145	1.329	2.17	-.515644
73	5.2	6.62872	1.284	2.12	-.465971
74	5.3	6.71671	1.243	2.08	-.439944
75	5.4	6.80536	1.204	2.04	-.414548
76	5.5	6.89461	1.167	2.01	-.378567
77	5.6	6.98442	1.133	1.97	-.354267
78	5.7	7.07475	1.101	1.94	-.330375
79	5.8	7.16556	1.071	1.91	-.317813
80	5.9	7.25680	1.042	1.89	-.305477
81	6	7.34846	1.014	1.86	-.252395
82	6.5	7.81202	.897	1.75	-.193417
83	7	8.28251	.806	1.66	-.159767
84	7.5	8.75811	.73	1.59	-.125132
85	8	9.23760	.67	1.54	-.111913
86	8.5	9.72012	.616	1.49	-.090736

	\bar{R}_0	\bar{b}	v	Q	K
87	9	10.2050	.572	1.45	-.080105
88	9.5	10.6918	.533	1.42	-.067561
89	10	11.1803	.5	1.39	-.057106
90	11	12.1609	.444	1.34	-.044698
91	12	13.1454	.4	1.31	-.037481
92	13	14.1324	.363	1.28	-.030326
93	14	15.1217	.333	1.25	-.026239
94	15	16.1125	.307	1.23	-.021166
95	16	17.1047	.286	1.22	-.020137
96	17	18.0978	.266	1.20	-.016096
97	18	19.0918	.25	1.19	-.015080
98	19	20.0865	.235	1.18	-.013061
99	20	21.0818	.222	1.17	-.012051
100	21	22.0776	.21	1.15	-.010038
101	22	23.0737	.2	1.15	-.010034
102	23	24.0703	.19	1.14	-8.0E-03
103	24	25.0671	.182	1.14	-8.0E-03
104	25	26.0643	.174	1.13	-6.2E-03
105	30	31.0529	.143	1.11	-4.4E-03
106	35	36.0450	.121	1.09	-3.2E-03
107	40	41.0391	.105	1.07	-2.4E-03
108	45	46.0346	.093	1.07	-2.0E-03
109	50	51.0310	.083	1.05	-1.4E-03
110	60	61.0257	.069	1.05	-1.0E-03
111	70	71.0219	.059	1.04	-8.0E-04
112	80	81.0191	.051	1.03	-5.0E-04
113	90	91.0169	.046	1.04	-5.0E-04
114	100	101.015	.041	1.03	-2.8E-04

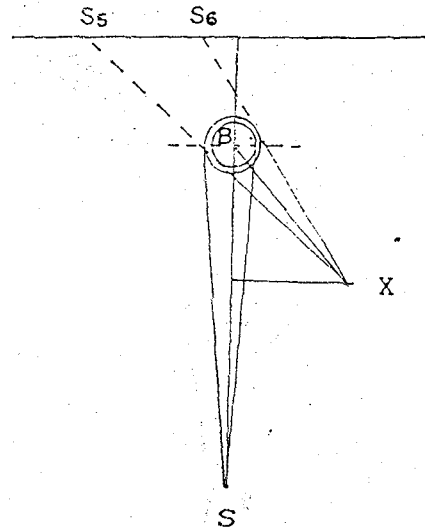
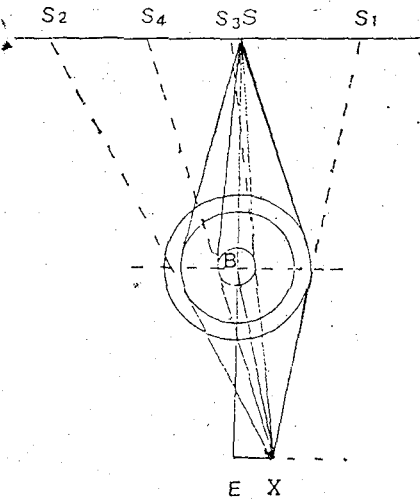
Ⅲ. Schwarzschild black hole에 의한 중력렌즈 효과

1. 중력렌즈 현상

빛이 black hole을 지날 때 휘는 각은 표 2-1에서 보는바와 같이 impact paramete b 가 작은 경우 빛은 black hole을 반바퀴 또는 한바퀴 돌아 나오기 때문에 black hole이 아닌 다른 별에 의한 효과보다 다양하게 나타난다. 관측자의 위치에 따라 나타나는 현상을 알아 보면,

첫째, black hole 전면(black hole을 기준으로 광원의 반대편) 대칭축상에 있는 관측자에게는 2중고리상이 관측된다.

둘째, black hole 전면축을 벗어난 위치에 있는 관측자에게는 광원의 4중상이 관측된다



〈그림 III-1〉 black hole에 의한 4중상 : 관측점 x 에서 별 S 를 관측할 때 별과 관측점 사이에 black hole B 가 있으면 별의 상은 S_1, S_2, S_3, S_4 로 4개의 상이 보인다.

〈그림 III-2〉 black hole에 의한 2중상 : 관측점 x 의 전면에 black hole B 가 있으면 관측점 후면에 위치에 별 S 의 상이 2개로 보여진다.

(그림 III-1).

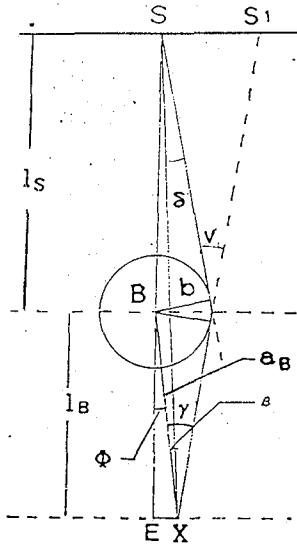
셋째, black hole 후면(black hole을 기준으로 광원과 같은 편) 측상에 있는 관측자에게는 단일고리상이 관측된다.

네째, black hole 후면 측을 벗어난 위치에 있는 관측자에게는 2중상이 관측된다(그림 III-2).

2. 각각 상의 밝기

그림 III-3에서와 같이 광원 S 가 점광원이라고 생각하고 black hole에서 부터의 거리를 l_s 라 한다. 또한 black hole에서 정점 E 까지의 거리를 l_b , 관측점까지의 거리를 a_b 로 한다. 선분 \overline{SE} 와 \overline{BX} 가 이루는 각을 θ 로 하고 편의상 black hole의 중심을 좌표의 원점으로 하였고 x 는 선분 \overline{SE} 를 축으로 오른쪽을 양, 왼쪽을 음으로 하였으며, l_b 는 광원과 맞은 편이 양, 같은 방향일 때를 음으로 하였다. 그러나 좌표상에서 주의할 점은 x 를 평면 극좌표로 쓰기 때문에 사실상의 음의 값은 없으며 x 가 양의 값이란 빛이 수직선 \overline{SE} 를 지나지 않는 상태에서 x 의 위치란 의미이고 x 가 음의 값이란 빛이 수직선을 지난 후 x 의 위치란 의미이다.

그림 III-3으로부터 Schwarzschild black hole의 방위각 대칭성을 고려하고 black hole에서 b 를 지나는 광속에 관측점 x 에 모두 도달한다고 생각한다. 이때 b 점에서의 밝기를 L_b, x



<그림 Ⅲ-3> B는 black hole, S₁은 관측점 X에서 보여지는 광원 S의 상이며 ϕ 는 축 BE로부터 벗어난 각도이고, a_B 는 black hole에서 관측점까지의 거리이다.

점에서의 밝기를 L_x 라 하면

$$L_x = \frac{|bdb|}{|xdx|} L_b \dots\dots\dots (3-1)$$

이고

$$\delta = b/l_s \dots\dots\dots (3-2)$$

$$\gamma = \sin^{-1}(b/a_B) \dots\dots\dots (3-3)$$

로 놓으면

$$\phi = \gamma + \delta - \nu \dots\dots\dots (3-4)$$

이다.

그러면

$$x = a_B \sin \phi \dots\dots\dots (3-5)$$

$$l_B = a_B \cos \phi \dots\dots\dots (3-6)$$

이고

$$a_B = \sqrt{x^2 + l_B^2} \dots\dots\dots (3-7)$$

이다.

또한 (3-6)식으로 부터

$$\begin{aligned} l_B &= a_B \cos \phi \\ &= a_B \cos(\gamma + \delta - \nu) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= a_B \{ \cos \gamma \cos (\delta - \nu) - \sin \gamma \sin (\delta - \nu) \} \\
 &= \sqrt{a_B^2 - b^2} \cos (\delta - \nu) - b \sin (\delta - \nu)
 \end{aligned}$$

이코

$$\sqrt{a_B^2 - b^2} = \frac{l_B + b \sin (\delta - \nu)}{\cos (\delta - \nu)}$$

에서

$$a_B = \sqrt{b^2 + \left\{ \frac{l_B + b \sin (\delta - \nu)}{\cos (\delta - \nu)} \right\}^2} \dots \dots \dots (3-8)$$

이다.

(3-5)식으로 부터

$$\begin{aligned}
 dx &= da_B \sin \Phi + a_B \cos \Phi d\Phi \\
 &= da_B \sin \Phi + l_B d\Phi
 \end{aligned}$$

이코 (3-7)식으로 부터

$$da_B = \frac{x dx}{\sqrt{x^2 + l_B^2}}$$

를 이용하면

$$dx = \frac{l_B d\Phi}{\left(1 - \frac{x \sin \Phi}{\sqrt{x^2 + l_B^2}} \right)} \dots \dots \dots (3-9)$$

이다. (3-1)식에 (3-5), (3-9)식을 대입하면

$$\begin{aligned}
 L_x &= \frac{|bdb|}{|x| l_B d\Phi \left(1 - \frac{x \sin \Phi}{\sqrt{x^2 + l_B^2}} \right)^{-1}} L_b \\
 &= \frac{b}{\left| x l_B \frac{d\Phi}{db} \left(1 - \frac{x \sin \Phi}{\sqrt{x^2 + l_B^2}} \right)^{-1} \right|} L_b \\
 &= F(x) L_b \dots \dots \dots (3-10)
 \end{aligned}$$

(3-10)식에서

$$F(x) = \frac{b}{\left| x l_B \frac{d\Phi}{db} \left(1 - \frac{x \sin \Phi}{\sqrt{x^2 + l_B^2}} \right)^{-1} \right|} \dots \dots \dots (3-11)$$

이며 $F(x)$ 는 각점에서의 밝기를 back hole에서의 밝기의 배수로 나타내도록 하였다.

(3-4)식으로 부터

$$\frac{d\Phi}{db} = \left(\frac{1}{a_B} - \frac{b}{a_{B2}} \frac{da_B}{db} + \frac{1}{l_s} - \frac{d\nu}{db} \right) \dots \dots \dots (3-12)$$

이코 (3-8)식으로 부터

$$\frac{da_B}{db} = \frac{1}{2} \left\{ b^2 + \left(\frac{l_B + b \sin (\delta - \nu)}{\cos (\delta - \nu)} \right)^2 \right\}^{-1/2}$$

$$\cdot \left\{ 2b + \left(\frac{l_B + b \sin(\delta - \nu)}{\cos(\delta - \nu)} \right) \right\} \cdot \sin(\delta - \nu) \dots\dots\dots(3-13)$$

이므로 (3-2), (3-3), (3-4), (3-5), (3-8), (3-12), (3-13)으로 부터 $F(x)$ 를 계산할 수 있다. 그러나, (2-3)식의 K 값이 b 에 따라 변하는 값이기 때문에 각각의 경우에 대하여 x 와 $F(x)$ 값을 computer로 수치 계산하였다. 또한 black hole의 중심으로부터 상이 보여지는 각을 α 라 하면

$\alpha = \sin(b/a_B)$ 로 주어지므로 각각의 상이 보여지는 각을 계산할 수 있다.

표 3-1에 $l_s = 10^4 M$, $l_B = 500 M$ 인 경우 계산된 4중상의 값을 black hole이 없을 때의 밝기 L_N 의 비로 나타내었다. 표에서 네번째 상의 밝기는 나타나 있지 않지만 세번째 상의 밝기와 비슷하다. 표 3-2에서는 광원과 같은 방향에서 black hole을 바라볼 때 생기는 이중상 즉, S_5 , S_6 의 상의 밝기이다.

<표 3-1> black hole에 의한 4중상의 밝기와 각 위치

$X(M)$	α_1	L_{X_1}/L_N	α_2	L_{X_2}/L_N	α_3	L_{X_3}/L_N
25	0.116	2.02	0.068	0.61	0.01039	6.14×10^{-6}
50	0.149	1.16	0.054	0.13	0.01035	1.67×10^{-6}
75	0.188	1.05	0.046	0.06	0.01029	1.12×10^{-6}
100	0.235	1.01	0.047	0.02	0.01021	0.92×10^{-6}

<표 3-2> black hole에 의한 2중상의 밝기와 각 위치

$X(M)$	α_5	L_{X_5}/K_N	α_6	L_{X_6}/L_N
50	0.0106	2.7×10^{-5}	0.0107	4.5×10^{-5}
100	0.0104	1.37×10^{-5}	0.0106	2.49×10^{-5}
150	0.0102	7.89×10^{-5}	0.0104	1.75×10^{-5}
200	9.849×10^{-3}	6.14×10^{-6}	0.0101	1.37×10^{-5}
250	9.472×10^{-3}	4.55×10^{-6}	9.476×10^{-3}	1.18×10^{-5}

IV. 결론 및 논의

Schwarzschild black hole에 의한 중력렌즈 현상을 알아보기 위하여 black hole로 입사하는 빛의 충격상수에 따라 빛이 휘는 각을 계산하였다. 충격상수가 무한대로 부터 10M까지는 휘는 각이 완만히 증가하나 충격상수가 10M보다 적어짐에 따라 휘는 작은 급격히 증가하여 3.09M에서는 6.289 radian으로 2π 를 넘게 된다.

이와 같이 휘는 각이 커지는 black hole 주위에서 관측될 수 있는 렌즈효과를 조사한 결과 black hole에서만 나타날 수 있는 현상으로 black hole의 전면의 축상에 있는 관측자에

계는 이중고리상이, 축을 벗어난 위치에 있는 관측자에게는 4중상이 관측되며, black hole의 후면에 있는 관측자에게는 단일고리상이, 축을 벗어난 위치에 있는 관측자에게는 2중상이 관측될 수 있음을 알았다.

따라서, 만일 black hole의 존재 여부를 확인하기 위한 방법으로 중력렌즈 현상을 이용하고자 한다면 단순히 black hole의 전면에 있는 관측자에게 보이는 이중상의 관측만으로 불완전 하며 반드시 black hole에 의해서 나타날 수 있는 이중고리상이나 4중상 또는 black hole 후면에서의 단일고리상이나 2중상 등의 관측이 이루어져야만 완전해질 수 있을 것이다.

참 고 문 헌

1. Charles W. Misner, Kips. Thorne, John Archibald Wheeler: "Gravitation", 1974.
2. S. Weinberg: "Gravitation and Cosmology", 1972.
3. Robert M. Wald: "General Relativity", 1984.
4. Sjur Resfsdal: 1964, Monthly Notices Roy. Astron. SOC. 128, 295.
5. D. Walsh, R.F Carswell, R.T. Weymann. 1979, Nature, Vol. 279, 381.
6. R.J. Weymann, David Latham, J. Roger, d. Angel R.F. Green, J.W. Liebert, Davida. Turnshek, Diane E. Turnshek and J. Anthony Tyson: 1980. Nature, Vol. 285, 641.
7. Xuchongming, Wu Xuejun: 1983, Astron. Astrophys. 120, 15-20.

Gravitational lens effect of a Schwarzschild black hole

Soh, Kwang Sup

Yang, Dong Seok

Abstract

Images due to a Schwarzschild black hole lens action are discussed. Double loop image (on axis) and Quadruple image (off axis) are formed in the opposite side of the source light from the black hole. One loop image (on axis) and double image (off axis) are formed in the source light side.