

# Lissajous figure를 이용한 수중에서의 초음파 전파속도 측정

신 회 명  
(물리과)

## I. 서 론

액체의 분자구조, 성질을 연구하는데 초음파가 많이 사용되어 왔으며, 특히 음속은 기본적인 연구수단으로 사용되고 있다. 액체중에서 정밀한 음속측정에는 간접방법이 많이 사용되어 왔다.

그러나 간접방법은 반사판의 평행조절과 반사율이 좋아야 한다는 까다로운 점이 있다.

따라서 Transducer와 Receiver 사이의 위상변화만을 관측하여 파장을 측정하는 Lissajous figure 방법은 간접방법보다 측정이 용이하다.

본 논문에서는 고정음로 Lissajous figure 방법과 가변음로 Lissajous figure 방법으로 물의 온도변화에 따른 음속변화를 측정하여 비교하고자 한다.

## II. Lissajous figure에 의한 속도측정 원리

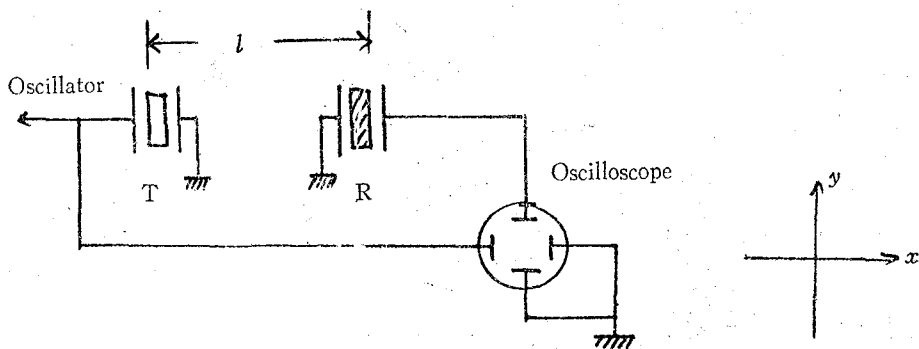


그림 1

그림 1과 같은 배치에서 T는 Transducer, R은 Receiver를 나타낸다. Oscillator에서 sine 파를 보냈을때 Oscilloscope에 나타나는 Lissajous figure는 다음과 같은 원리에 의해서 알 수 있다. 우선 T와 R의 진동주기는 같으므로 나타나는 Lissajous figure는 위상차에 따라 원, 타원, 직선이다.

Transducer에서 보내는 파를  $\Psi_T$ , Receiver에서 받는 파를  $\Psi_R$ 이라고 하고, 이때 Oscillator의 각속도를  $\omega$ 라고 하면,

$$\Psi_T = A \sin \omega t$$

$$\begin{aligned} \Psi_R &= B \sin [\omega t + (n+p)2\pi] \\ &= B \sin (\omega t + 2\pi p) \end{aligned}$$

이것을 다시  $\Psi_T = y$ ,  $\Psi_R = x$ 라 두면,

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{xy}{2AB} \cos(2\pi p) = \sin^2(2\pi p)$$

여기서 p는 임의의 상수이고, n는 정수이다.

따라서,  $p=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 이고,  $A=B$ 이면,

$$x=y$$

또,  $p=\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \pm\frac{5}{2}, \dots$ 이면

$$x=-y \text{ 이고, 그 외는 모두 타원이다.}$$

따라서 Lissajous figure의 형태를 보고 다음 두 가지 방법에 의해서 파장 또는 파장의 변화를 측정할 수 있다.

### 1. 가변음로 Lissajous figure방법

이것은 R을 이동시키면서 직접 파장을 측정하는 방법이다. T와 R 사이의 거리에 따른 T, R사이의 위상변화를 보고 R의 이동거리를 읽음으로서 파장을 측정하는 방법이다.

### 2. 고정음로 Lissajous figure방법

우선 T와 R이 l만큼 떨어져 있었을 때 T와 R의 위상이 일치했다고 하면,

$$l = n\lambda.$$

로 주어진다. 다음 T와 R 사이에 있는 매질의 상태(온도, 밀도, 압력등)가 변하여 그 결과로 파장이  $\lambda$ 로 되었다면,

$$l = (n \pm p)\lambda$$

$$\left( \begin{array}{l} p \text{는 임의의 수} \\ +: \lambda \text{의 감소} \\ -: \lambda \text{의 증가} \end{array} \right)$$

로 된다. 따라서,

$$\lambda = \frac{l}{n \pm p}$$

이것은 다시

$$\lambda = \frac{l}{n} \left( \frac{1}{1 \pm \frac{p}{n}} \right)$$

$$= \lambda_0 \left( \frac{1}{1 \pm \frac{p}{n}} \right)$$

$$= \lambda_0 \left( 1 \mp \frac{p}{n} + \left( \frac{p}{n} \right)^2 \mp \left( \frac{p}{n} \right)^3 + \dots \right)$$

$\frac{p}{n} \ll 1$ 이라는 조건을 만족시키는 경우,

$$\lambda \sim \lambda_0 \left( 1 \mp \frac{p}{n} \right)$$

로 근사시킬 수 있다.

$\lambda_0$ 를 알고 있으면  $p$ 를 측정하므로써  $\lambda$ 를 알 수 있다.

### Ⅲ. 장치 및 준비

#### 1. Transducer

- R : 강철 Ring
- Q : 수정판 (두께 : 2.40mm)  
(반경 : 2.3cm)
- A : 아크릴판(두께 : 2.0mm)
- S : Bronz spring
- E : 전극
- B : 강 철판
- X : 수정이 들어 있는 부분
- Y : 후에 평행조정판에 부착하기 위한 아크릴판

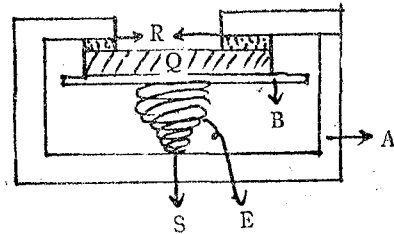


그림 2

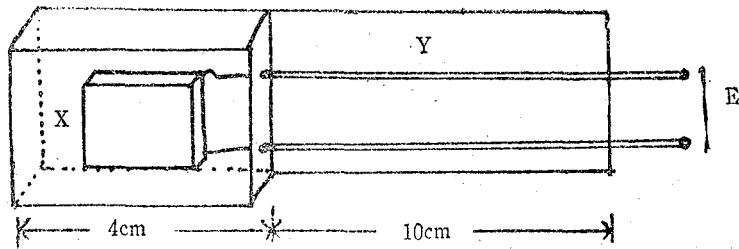


그림 3

아크릴판에 원형 수정판보다 반경이 약간 작은 구멍(직경 : 2.2cm)을 뚫고 얇은 강철 Ring을 놓는다. 그 위에 수정판을 놓고 수정판 뒷면에는 아주 평평한 강철판을 놓고 Spring으로 강철판을 약간 눌러 Ring과 수정판 강철판이 밀착되도록 한다. 다음 전극을 Ring과 강철판에 납땜 연결한 후 아크릴로 만든 상자를 나사로 밀착한다. 방수를 위해서 모든 연결 부분은 접착제로 접착했다.(그림 2, 3)

## 2. Receiver

Atomic Lab.제품 Cot. No 71870인 Ultrasonic Sonar Demonstrator에 달린 Receiver를 그대로 사용했다. 이 Receiver는 1MHz용이고, (실제로 정확히 측정한 결과 1.04MHz였음) Barium Titanate( $BaTiO_3$ )로 만든 것으로서 다음과 같은 회로가 부착되어 있다.

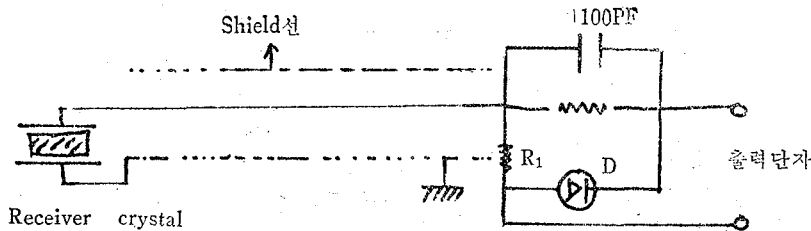


그림 4

$R_1 : 2.2K\Omega$                       D : Diode  
 $R_2 : 100K\Omega$

## 3. 수조 및 항온조

수조는 아크릴판으로 만들었으며, 그 규격은  $5.5cm \times 5.5cm \times 20cm$ 이다. Transducer와 Receiver를 넣을 수 있도록 위는 열려 있고 온도를 일정하게 유지하기 위해서 항온조속에 잠기게 하였다.

## 4. Transducer와 Receiver의 평행조절장치

Stainless steel판에 조절용 나사 3개씩을 장치하고 이판에 Transducer와 Receiver를 고무줄로 부착했다. 3개 나사로 모든 방향의 조정이 가능하다.

## 5. Micrometer

Cenco제품 No 72935 Measuring microscope로서 최장 측정거리는 18.5cm, 최단 측정거리는 0.001cm이며 부척과 돋보기가 달려있다.

### 6. Oscillator

주파수 1.08MHz인 Atomic Lab.제품, No. 71870 Ultrasonic Sonar Demonstrator.

### 7. Oscilloscope

Berkeley Lab. kit Model Iow-12S 5" Oscilloscope이며 Sweep range는 10~500Hz, Frequency response는 5MHz이다. 정밀한 시간 측정을 위해서 Signal Corps제품 Bc-221-AK Frequency meter를 사용하여 교정 했다.

## IV. 측정에 나타날 오차의 예언

### 1. 가변음로 Lissajous figure방법

Micrometer의 정밀도에 주로 기인된다.

### 2. 고정음로 Lissajous figure방법

$$\lambda = \lambda_0 \left( 1 + \frac{p}{n} \right)$$

$$\Delta\lambda = \Delta\lambda_0 \left( 1 + \frac{p}{n} \right) + \lambda_0 \frac{p}{n^2} \Delta n + \lambda_0 \frac{\Delta p}{n}$$

$$\left( \begin{array}{l} \lambda_0 \sim 10^{-1} \text{cm} \\ p \sim 1 \\ n \sim 100 \end{array} \right) \text{ 정도임을 고려하여,}$$

측정이  $\Delta\lambda$ 에 미치는 영향은

$$\left( \begin{array}{l} \Delta\lambda_0 \sim 1 \\ \Delta n \sim 1 \\ \Delta p \sim 1 \end{array} \right) \text{ 정도일때 } \left( \begin{array}{l} \Delta\lambda \sim 1 \\ \Delta\lambda \sim 10^{-5} \\ \Delta\lambda \sim 10^{-3} \end{array} \right) \text{ 정도임을}$$

알 수 있다. 만약 파장을  $10^{-4}\text{cm}$ 정도 정확히 측정하려면  $\Delta\lambda_0 \sim 10^{-4}\text{cm}$ ,  $\Delta n \sim 10$ ,  $\Delta p \sim 10^{-1}$  정도로 정확히 측정해야 함을 알 수 있다.

## V. 실험과정 및 측정치

### 1. 가변음로 Lissajous figure방법

#### a. 실험과정

Transducer에 Sine wave generator를 연결하여 진동시킨후 Receiver에서 받은 파를 Oscilloscope의 vertical input에 넣는다. 파형이 안정된 후 Receiver를 조금씩 이동하여 Oscilloscope

에 나타난 Lissajous figure의 변화를 관찰한다. Receiver가 10과장 움직이는데 따른 micro-meter의 눈금변화를 읽으면 다음식에 의해서 파장이 측정된다. 10과장 이동한 거리를  $l$ 이라고 하면 파장은  $\frac{l}{10}$ 이고 따라서 속도  $N=f\lambda=\frac{lf}{10}$ 에 의해서 구해진다. 사용한 Transducer의 공진주파수는 1.08MHz이었다.

b. 측정치  $f=1.08\text{MHz}$

온도(°C)	과장(mm)	속도 (m/sec)	온도(°C)	과장(mm)	속도 (m/sec)
17.8	1.363	1472	32.1	1.405	1517
18.8	1.366	1475	33.1	1.407	1520
21.1	1.370	1480	34.3	1.410	1523
21.9	1.369	1479	35.1	1.412	1525
23.4	1.377	1487	38.0	1.421	1535
24.4	1.379	1489	39.0	1.421	1535
25.1	1.382	1493	40.0	1.424	1538
26.2	1.385	1495	41.0	1.426	1540
27.1	1.388	1499	42.0	1.423	1537
27.9	1.388	1499	43.0	1.427	1541
29.0	1.401	1513	44.0	1.431	1546
30.0	1.406	1518	45.0	1.430	1544
31.0	1.404	1516			

2. 고정음로 Lissajous figure방법

a. 실험과정

장치는 가변음로 Lissajous figure 방법과 같다. T와 R 사이의 거리를 일정하게 유지시키고 액체의 온도를 변화시킨다. p는 Oscilloscope에 나타난 Lissajous figure의 변화를 보고 측정했다. 오차를 줄이기 위해서 p는  $\frac{1}{4}$ 의 정수배가 될때만 측정했다.

이때  $n=105$ 였으며 15.0°C일때 파장을  $\lambda_0$ 라고 잡고 이때의 속도를 M. Greenspan & C.E Tschiegg가 J. of Res. Nat. Bureau of Standards 59(1957)에서 측정한 값 1466m/sec와 일치시키고, 다른 온도에서는 관계식  $\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{v}{v_0} = 1 + \frac{p}{n}$ 에 의해서 상대적으로 속도를 측정했다.

b. 측정치

온도(°C)	p	$\frac{\lambda}{\lambda_0}$	속도(m/sec)	온도(°C)	p	$\frac{\lambda}{\lambda_0}$	속도(m/sec)
15.0	0	1.0000	1466	18.1	$\frac{3}{4}$	1.0071	1476
16.2	$\frac{1}{4}$	1.0024	1470	19.0	$\frac{4}{4}$	1.0095	1480
16.9	$\frac{2}{4}$	1.0048	1473	20.4	$\frac{5}{4}$	1.0119	1483

21.5	$\frac{6}{4}$	1.0143	1487	33.2	$\frac{14}{4}$	1.0333	1515
24.0	$\frac{8}{4}$	1.0191	1494	34.9	$\frac{15}{4}$	1.0357	1518
26.1	$\frac{9}{4}$	1.0214	1497	36.6	$\frac{16}{4}$	1.0381	1522
27.0	$\frac{10}{4}$	1.0238	1501	39.1	$\frac{17}{4}$	1.0405	1525
28.5	$\frac{11}{4}$	1.0262	1504	41.0	$\frac{18}{4}$	1.0429	1529
29.2	$\frac{12}{4}$	1.0286	1508	42.2	$\frac{19}{4}$	1.0452	1532
31.8	$\frac{13}{4}$	1.0310	1511	44.1	$\frac{20}{4}$	1.0476	1536

### 3. 두 방법에 의한 결과비교

두 방법에 의한 측정치를 그래프로 나타내어 비교하면 그림 5과 같다.

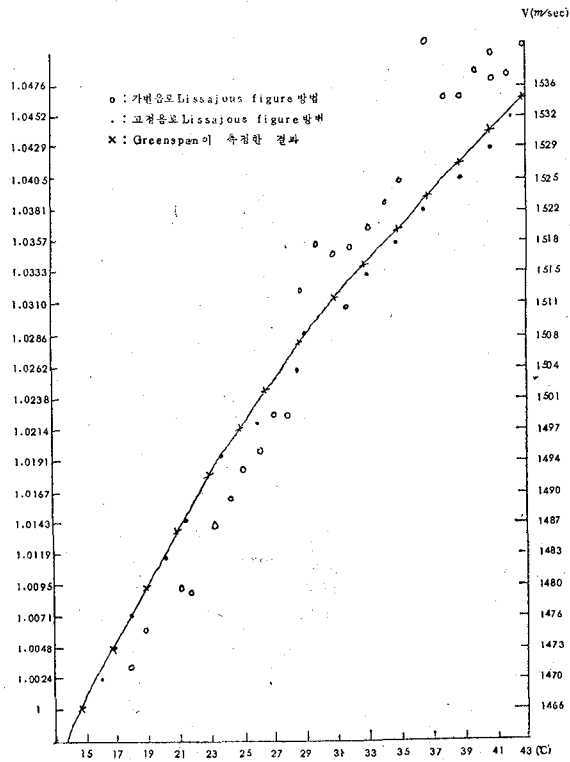


그림 5

## VI. 결 토

결과에 나타난 그래프를 보면 가변음로 Lissajous figure 방법에 의한 곡선은 M. Greenspan

이 얻은 결과와 잘 일치함을 알 수 있다. 물론 정밀도가 높은 Measuring microscope와 frequency meter만 있다면 가변음로 Lissajous figure 방법으로도  $10^{-2}$ m/sec 정도까지 정밀한 속도를 얻을 수 있다.

이 실험에서는 두 방법을 같은 실험기구를 사용하여 측정하였으나 고정음로 Lissajous figure 방법이 보다 오차가 적은 결과를 얻었다.

이것은 앞의 오차 예언에서

$\Delta\lambda \sim 10^{-4}$ cm 정도 정밀한 값을 얻으려면

$$\left( \begin{array}{l} \Delta\lambda_0 \sim 10^{-4}\text{cm} \\ \Delta p \sim 10^{-1} \\ \Delta n \sim 10 \end{array} \right) \text{ 정도이었으므로 가장 문제되는 것은 } \Delta\lambda_0 \text{이라는 사실과도 합치되는 결과이다.}$$

따라서 정밀한 장치에 의한  $\lambda_0$ 의 측정치를 사용하면, 기타 조건에 의한 속도변화는 고정음로 Lissajous figure 방법으로 쉽게 측정할 수 있다. 고정음로 Lissajous figure 방법의 장점은 다음 몇가지로 분류할 수 있다.

- ① 장시간 동안의 항온(constant temperature)이 필요없다.
- ② 짧은 시간 동안에 넓은 범위의 매질의 상태변화에 대한 속도 변화측정이 가능하다.
- ③ Receiver의 이동에 의한 오차를 줄일 수 있다.

### 참 고 문 헌

1. D. Vigoureaux: *Ultrasonics*, John Wiley & Sons Inc. (1951)
2. F.S. Crawford: *Waves*, Berkeley physics course vol III, McGraw-Hill (1968)
3. 實吉純一: 超音波技述便覽(昭和 46年)
4. S.B. Palmer: *Measurement of the velocity of Sound in Liquids*, Amr. J. of phys. vol 39/3, 1971
5. S.B. Palmer: *Experiments in pulsed Ultrasonics*. Amr. J. of phys. vol 38/7, 1970
6. 신희명, 권재술: 간섭을 이용한 초음파의 수중에서의 파장측정. 연구논총 제2집, 서울대학교 사범대학 교육회, 1972



**Measurement of the ultrasonic propagation velocity in water  
by the use of Lissajous figures**

Hee Myung Shin  
(Department of Physics)

**Abstract**

The propagation velocity of ultrasonics in water at various temperatures has been measured by using the Lissajous figures. The Lissajous figures were obtained by two different methods. One is to move the receiver while the temperature of the water kept constant. The other is to control the temperature of the water while the distance between the transducer and the receiver kept constant.

The velocity of sound in water measured by the Lissajous figures obtained by the second method agreed well with the values obtained by M. Greenspan and C.E. Tschiegg J. of Res. Nat. Barau of Standards 59(1957) 249.