

MLP 기법을 이용한 3차원 점성 충격파관 유동의 수치적 해석

NUMERICAL ANALYSIS OF THREE-DIMENSIONAL VISCOUS SHOCK TUBE PROBLEM USING MULTI-DIMENSIONAL LIMITING PROCESS

윤성환¹, 김종암¹, 김규홍¹

1) 서울대학교 기계항공공학부, 서울 151-742

교신 저자: 김종암, chongam@snu.ac.kr

요약

본 연구에서는 2차원 유동에 대하여 정의된 점성 충격파관 문제를 3차원 문제로 확장하고, 수치해를 구해 봄으로써 물리적 특성을 살펴보았다. 또한 다차원 압축성 유동에서 정확성 향상 및 수치 진동의 효율적 제어를 목적으로 개발된 MLP 기법을 적용함으로써 새로이 개발된 수치 기법의 성능을 기존 기법과 비교해 보았다. 벽면의 영향이 거의 없는 영역에서는 2차원 유동에서와 유사한 결과를 얻을 수 있었으며, 보태어 3차원 점성 충격파관 유동에서만 발견되는 코너 유동의 형태도 관찰해 볼 수 있었다.

서론

2005년 김규홍, 김종암은 다차원 유동에 있어서 수치 진동을 제어하기 위한 기준을 찾고자 1차원 단조 조건을 2차원으로 확장하여 2차원 제한 기준 (Two-dimensional Limiting Condition)을 성공적으로 제안한 바 있다. 동시에 이들은 2차원 제한 기준을 이용하여 2차원 Euler 방정식 및 Navier-Stokes 방정식에 대하여 매우 정확한 수치해를 제공해 줄 수 있는 MLP 기법 (Multi-dimensional Limiting Process)을 개발하였다[1]. 뒤이어 2차원 MLP 기법을 3차원에 적용할 수 있는 형태로 확장하는 연구가 진행 중이며, 간단한 형태의 3차원 압축성 유동에 대하여 실제 수치 실험을 통한 테스트가 이미 수행된 바 있다[2].

복잡한 상호 작용이 포함된 비정상 점성 충격파 유동에 대한 정확한 해를 구하는 것은 수치 진동 제어와 더불어 수치 기법의 성능을 평가하는데 있어서 중요한 고려 사항 중 하나이다. 대표적인 수치 실험으로는 Daru와 Tenaud에 의해 제안된 점성 충격파관 문제[3]를 들 수 있으며, 이 문제는 여러 연구자들에 의해 수치 기법의 정확성을 확인하는데 사용된 바 있다[4]. 그러나 Daru와 Tenaud에 의해 제안된 점성 충격파관 문제는 2차원 유동에만 국한되는 한계를 갖는다. 따라서 본 연구에서는 2차원 점성 충격파관 문제의 기본 아이디어를 3차원 유동으로 확장하고, 3차원 점성 충격파관 유동에 대한 수치적 해석을 수행하고자 한다. 또한 기존의 수치 기법 및 3차원 압축성 유동에 대해 개발된 MLP 기법의 수치 결과를 비교함으로써 MLP 기법의 성능을 평가해 볼 것이다.

MLP 기법 (MULTI-DIMENSIONAL LIMITING PROCESS)

다차원 제한 함수를 이용하여 변화량을 규제함으로써 다차원 유동 시뮬레이션에서 수치 진동을 제어하기 위해 사용할 수 있는 새로운 형태의 제한 기법이 MLP 기법

(Multi-dimensional Limiting Process)이며, 3차원 유동의 경우 그 적용 방법은 다음과 같다[2].

$$\Phi_{i+1/2,j,k}^L = \bar{\Phi}_{i,j,k} + 0.5\phi(r_{L,i,j,k}^\xi, \alpha_L, \beta_L) \Delta\Phi_{i-1/2,j,k} \quad (1)$$

$$\Phi_{i+1/2,j,k}^R = \bar{\Phi}_{i+1,j,k} - 0.5\phi(r_{R,i+1,j,k}^\xi, \alpha_R, \beta_R) \Delta\Phi_{i+3/2,j,k} \quad (2)$$

여기서 α 는 다차원 제한 계수이며 MLP기법을 통해 실제로 규제될 변화량의 기본 영역을 결정해주는 역할을 한다. 또한 β 는 제한자의 형태를 결정해주는 계수이며 기존의 제한자 형식을 사용할 수도 있고, 혹은 고차 다항식으로부터 기울기 정보를 얻어 결정할 수도 있다.

위의 식(1)과 식(2)에서 내삽된 격자 경계면의 좌, 우값인 $\Phi_{i+1/2,j,k}^L$ 와 $\Phi_{i+1/2,j,k}^R$ 는 MLP 기법의 최종 형태를 기반으로 하여 구해지는 값이다. 그리고 격자 경계면에서 물성치를 내삽하는 과정은 수치 플럭스 계산 기법과는 독립적으로 행해지는 과정이므로 MLP기법은 기본적으로 어떠한 형태의 수치 플럭스 계산 기법과도 함께 사용될 수 있다. 그리고 계수인 $\alpha_{L,R}$ 의 값을 실제로 계산하기 위한 식은 다음과 같이 요약될 수 있다.

ξ -방향을 계산 시, $\Delta\Phi_\xi \geq 0$ 의 조건을 만족하는 경우,

$$\alpha_L = g \left[\frac{2 \max \left(1, r_{L,i,j,k}^\xi \right) \left(\bar{\Phi}_{p,q,r}^{\max} - \bar{\Phi}_{i,j,k} \right)}{\left(1 + \frac{\Delta\Phi_\eta^q + \Delta\Phi_\zeta^r}{\Delta\Phi_\xi^p} \right)_{i,j,k}} \Delta\Phi_{i+1/2,j,k} \right], \quad \alpha_R = g \left[\frac{2 \max \left(1, \frac{1}{r_{R,i+1,j,k}^\xi} \right) \left(\bar{\Phi}_{p,q,r}^{\min} - \bar{\Phi}_{i+1,j,k} \right)}{\left(1 + \frac{\Delta\Phi_\eta^q + \Delta\Phi_\zeta^r}{\Delta\Phi_\xi^p} \right)_{i+1,j,k}} \Delta\Phi_{i+3/2,j,k} \right] \quad (3)$$

반대로, $\Delta\Phi_\xi < 0$ 의 조건을 만족하는 경우는 다음과 같다.

$$\alpha_L = g \left[\frac{2 \max \left(1, r_{L,i,j,k}^\xi \right) \left(\bar{\Phi}_{p,q,r}^{\min} - \bar{\Phi}_{i,j,k} \right)}{\left(1 + \frac{\Delta\Phi_\eta^q + \Delta\Phi_\zeta^r}{\Delta\Phi_\xi^p} \right)_{i,j,k}} \Delta\Phi_{i+1/2,j,k} \right], \quad \alpha_R = g \left[\frac{2 \max \left(1, \frac{1}{r_{R,i+1,j,k}^\xi} \right) \left(\bar{\Phi}_{p,q,r}^{\max} - \bar{\Phi}_{i+1,j,k} \right)}{\left(1 + \frac{\Delta\Phi_\eta^q + \Delta\Phi_\zeta^r}{\Delta\Phi_\xi^p} \right)_{i+1,j,k}} \Delta\Phi_{i+3/2,j,k} \right] \quad (4)$$

여기서 $g(x) = \max(1, \min(2, x))$ 로 주어진다. 그리고 η -방향과 ζ -방향 계산 시, 격자 경계면에서의 내삽된 좌, 우 값은 위와 동일한 방식으로 계산할 수 있다. 위의 식을 각각 3차 혹은 5차 다항식의 정보를 이용하여 구한 β 와 함께 사용하는 경우, 이는 MLP3 혹은 MLP5에 각각 해당한다. 이에 대한 자세한 설명은 참고문헌 [1]에 주어져 있다.

수치 실험 및 결과

Daru와 Tenaud에 의해 제안된 2차원 점성 충격파관 문제는 기본적으로 단위길이의 변을 가지는 2차원 정사각형 충격파관을 고려하고 있으며, 격막(diaphragm)은 그 중앙인 $x=0.5$ 지점에 위치한다. 이와 유사한 형태로 단위길이의 변을 가지는 3차원 정육면체 충격파관을 고려할 수 있으며, 초기 조건은 2차원의 경우와 마찬가지로 다음과 같이

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 120 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 120/\gamma \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ w \\ p \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1.2/\gamma \end{pmatrix} \quad (1)$$

주어진다. Reynolds수는 200이고, 점성계수(viscosity)는 상수값을 사용하였다.

초기 시간에 격막이 제거되면, 충격파는 양의 방향, 즉 $x=0.5$ 에서 $x=1.0$ 의 위치를 향하여 움직여 나가며, 벽면에 반사된 후 음의 방향으로 움직인다. 충격파가 양의 방향으로 전파되는 과정에서 수평방향 벽면과 상호작용하여 얇은 경계층을 형성하게 되고, 벽면에 반사된 후에는 이미 형성된 얇은 경계층과 충격파가 상호작용하면서 수평 벽면 근처에서의 유동 형태가 복잡한 형태로 바뀌게 된다. 충격파-경계층 간의 상호작용은 λ 모양의 충격파와 박리된 와류를 만들어 낸다.

그림 1.(a)는 AUSMPW+ 공간 차분 기법과 van leer 제한자를 사용하여 얻은 결과이며, 그림 1.(b)는 M-AUSMPW+ 기법과 MLP5를 사용하여 얻은 결과이다. 두 경우 모두 $200 \times 100 \times 100$ 의 격자계를 사용하였으며, 무차원화 시간 $t=1.0$ 에서의 등밀도선을 보여주고 있다.

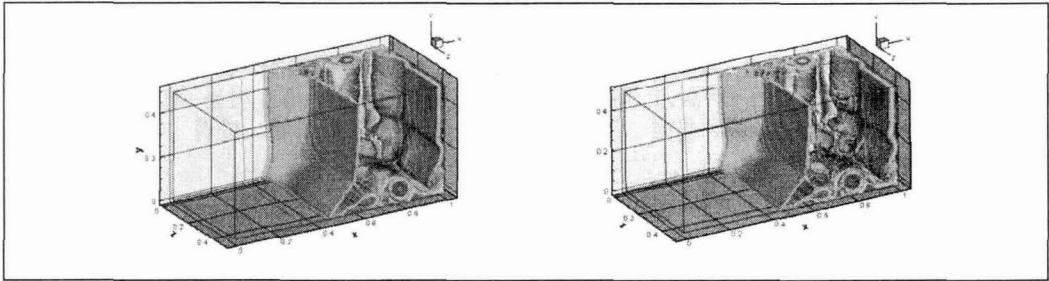


그림 1. 등밀도선도 ($200 \times 100 \times 100$) (a)왼쪽: van leer limiter + AUSMPW+, (b)오른쪽: MLP5 + M-AUSMPW+

대칭 경계면, 즉 벽면의 효과가 거의 없는 경계면에서는 2차원 유동에서와 동일한 유동 형태를 확인할 수 있으며, 그림 2.는 격자계를 달리하면서 수치 기법에 따른 등밀도선도를 비교한 결과를 보여준다. 등밀도선도 상에 보이는 주 와류(primary vortex)의 높이와 회전각은 수치 점성에 매우 민감하며, 이를 기준으로 수치 기법의 정확성을 비교한 연구가 이미 여러 연구자들에 의해 수행된 바 있다. (a)~(c)의 경우는 AUSMPW+기법과 van leer 제한자를 사용하여 얻은 결과이며, (d)~(f)는 M-AUSMPW+기법과 MLP5를 사용하여 구한 결과이다. 같은 격자계에 대해 M-AUSMPW+ 기법과 MLP5를 사용하여 얻은 결과에서 주 와류의 높이와 회전각이 더 크며, 이는 수치 점성 면에서 기존의 기법에 비해 뛰어나다는 점을 말해준다.

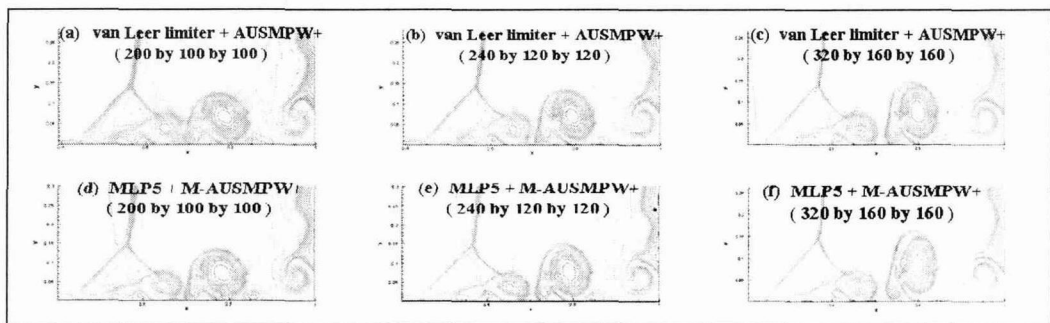


그림 2. 격자계와 수치기법에 따른 등밀도선도 비교

반면, 벽면에 인접한 부분으로 갈수록 벽면에서의 점착조건에 의해 속도가 줄어들고, 이에 따라 2차원 유동에서 나타났던 유동 형태가 점점 사라지게 된다. 특히, yz -평면(그림 1. 참고)에서의 유동 형태는 2차원 유동에서는 고려할 수 없었던 부분으로써 두 개의 교차하는 벽면에 의한 코너 유동이 형성된다.

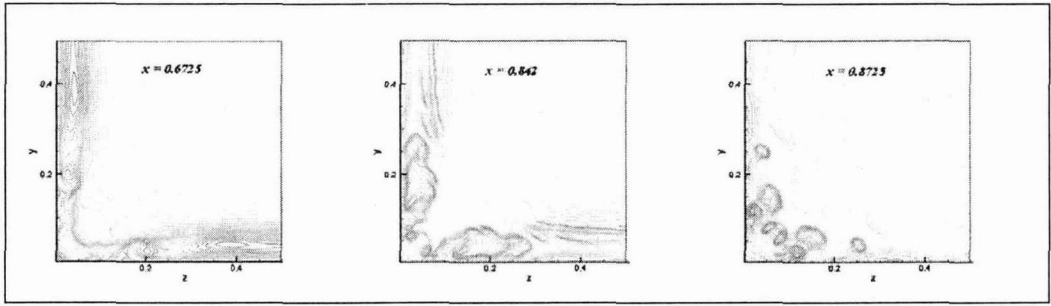


그림 3. yz-평면상의 등밀도선도

그림 3.은 x축을 따른 몇몇 위치에서의 등밀도선도를 도시한 것이다. 각 위치에 따라 코너 유동의 형태가 다르게 나타나는 것을 볼 수 있는데, 이는 충격파의 전파 과정에서 충격파-경계층-와류간의 복잡한 상호 작용이 위치에 따라 다른 형태로 전개되기 때문이다.

참고문헌

1. K. H. Kim and C. Kim, "Accurate, Efficient and Monotonic Numerical Methods for Multi-dimensional Compressible Flows, Part II : Multi-dimensional Limiting Process", *J. Comput. Physics*, Vol. 208(2), 2005, pp. 570-615.
2. 윤성환, 김규홍, 김종암, "3차원 유동 물리 분석을 위한 MLP기법의 개발", *한국항공우주학회 추계 학술발표회 논문집*, 2005년, pp. 69~73.
3. V. Daru, C. Tenaud, "Evaluation of TVD high resolution schemes for unsteady viscous shocked flows", *Computers and Fluids*, Vol. 30, 2001, pp. 89~113
4. B. Sjögreen, H.C. Yee, "Grid convergence of high order methods for multiscale complex unsteady viscous compressible flows", *J. of Comput. Physics*, Vol. 185, 2003, pp. 1~26.