論文

다중격자기법을 적용한 극초음속 유동장 계산

김성수*, 김종암**, 이수갑**

Application of Multigrid Method for Computing Hypersonic Flows

Sung-Soo Kim*, Chongam Kim** and Sugab Lee**

ABSTRACT

This paper presents an efficient and robust multigrid method for computing inviscid and viscous high-speed steady-state reactive flows. Curve fitted data in NASA Reference Publication 1811, 1260 are used to calculate equilibrium properties. Nonequilibrium flows are calculated using 5-species and 2-temperature air model. A 5-stage Runge-Kutta method and an LU-SGS method are adopted for time integration. When a 5-stage Runge-Kutta method is used, the chemical source terms are treated in a point-implicit manner. In order to overcome stability problem in applying multigrid method to high-speed reactive flow calculation, an improved damped prolongation and a new implicit residual smoothing are proposed. This method is applied to computing hypersonic equilibrium and nonequilibrium flows over a half-cylinder at a flight condition corresponding to M=10 and 60km altitude. Results indicate the robustness of proposed methods and good multigrid speed-ups in both equilibrium and nonequilibrium test cases

초 록

화학반응을 동반한 극초음속 유동의 효율적인 계산을 위한 강건한 다중격자기법이 본 논문에서 연구되었다. 평형유동 계산을 위하여 NASA RP-1811과 RP-1260의 curve-fit data를 이용하였으며 비평형유동 계산은 5-species, 2-temperature 모델을 이용하였다. 시간적분은 외재적 방법인 5단계 Runge-Kutta와 내재적 방법인 LU-SGS를 사용하였으며 각 기법의 계산 효율을 비교하였다. 다중격자기법을 극초음속 유동에 적용할 경우 생기는 불안정성을 해결하기 위하여 damped prolongation 과 residual smoothing을 새로이 개발하였고 이를 마하수 10의 half-cylinder 문제에 적용하였다.

I. 서 론

인공위성 발사체의 연구와 각종 유도무기의 개발을 위해서는 고속 유동장 해석이 필요하고 수치해석 기법이 이러한 연구에 쓰이기 위해서는 안정적이고 빠른 수렴성을 확보하는 것이 중요한 과제라고 생각된다. 수렴가속화를 위한 효과적인 방법 중의 하나인 다중격자기법은 아음속과 천음속 영역에서 높은 효율성을 보여주고 있는 것으로 알려져 있다.

그러나, 극초음속 유동에서는 수치해의 계산과정에서 발생하는 비물리적인 음의 밀도나 음의 압력으로 인하여 그 적용이 상당히 제한되고 그 효과도 떨어지는 것으로 알려져 있다. 따라서 이러한 안정성 문제는 다중격자기법을 극초음속 유동에 효율적으로 적용함에 있어 먼저 해결하여야 할 문제로 인식되어 많은 연구가 이루어져 왔다.

Turkel, Swanson, Vasta, White[1]는 충격파를 지난 후의 유동 값을 전 영역의 초기 값으로 주어 계산을 시작함으로써 수치계산 초기에 나타나

† 2000년 8월 7일 접수

* 정회원, 서울대학교 항공우주공학과 대학원

** 정회원, 서울대학교 항공우주공학과

는 불안정성을 극복하고자 하였으며, 성근격자에서 계산된 수정항에 implicit residual smoothing을 적용하여 충격파 근처에서의 안정성을 도모하였다.

천음속과 아음속 영역 계산에서 사용되는 central restriction이 초음속, 극초음속 영역 계산에 있어 상류(upstream)에 비물리적인 영향을 준다는 점에 착안하여 압력값을 이용하여 restriction 양을 제한하는 방법도 연구되었다. Koren과 Hemker[2]는 이러한 방법이 다중격자기법의 안정성을 높여준다는 것을 비점성, 극초음속 유동 계산을 통하여 보여주었고, Radespiel과 Swanson[3]도 안정성을 확보하기 위하여 이러한 방법을 사용하였다.

이와 같은 방법은 prolongation과 시간격의 결정에도 적용될 수 있다. Gerlinger, Stoll, Bruggemann[5]은 압력을 이용하여 충격파의 위치를 파악한 후, 그 위치에서의 restriction, prolongation 그리고 사간간격을 제한하는 방법을 사용하였다. Zhu, Alavilli, Lacor, Hirsch[6]는 prolongation 양을 제한하기 위하여 미세 격자와 성근 격자에서의 압력값을 이용하였으며, 2차원과 3차원 극초음속 문제에 적용하였다.

본 논문은 극초음속 유동 계산에 다중격자기법을 적용할 때 생기는 안정성 문제를 해결함으로써 수렴가속 효율을 향상시키는 것을 목적으로 하고 있다. 수치해의 불안정성을 제거하기 위하여 damped prolongation 기법과 residual smoothing을 개발하여 적용하였다. 시간 전진은 Martinelli의 5-stage Runge-Kutta 방법과 LU-SGS를 사용하였으며 비평형 유동의 경우 생성항은 내재적으로 처리하였다. 수렴 가속 성능을 확인하기 위하여 2차원 평형, 비평형 유동을 계산하였다.

II. 지배방정식

2.1. 평형유동

2차원 압축성 Navier-Stokes 방정식은 보존형으로 다음과 같이 표현된다

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{Re_a}\left[\frac{\partial E_v}{\partial x}+\frac{\partial F_v}{\partial y}\right] \quad (1)$$

위의 식에서 보존 변수와 점성, 비점성 플럭스는 동결유동의 경우와 동일하다.

압력 p는 평형유동에서는 이상기체 상태 방정식에 엔탈피와 내부에너지의 비를 이용한 새로운 $\tilde{\gamma}$(equivalent specific heat ratio)를 사용하여, 수정된 상태방정식을 이용한다.

$$p=\rho\left[e_t-\frac{1}{2}(u^2+v^2)\right](\tilde{\gamma}-1) \quad (2)$$

$$=\rho e(\tilde{\gamma}-1)$$

$$\tilde{\gamma}=\frac{h}{e} \quad (3)$$

실제 유동 중 엔탈피가 작은 유동에서는 분자가 진동 또는 화학반응을 할만큼 충분한 에너지를 가지지 못하므로 동결유동으로 가정할 수 있다. 그러나 엔탈피가 큰 유동은 분자의 진동에너지와 화학반응에너지를 무시할 수 없게 되고, 이에 따라 공기구성분자가 바뀌게 되어 γ값과 정적비열, 정압비열이 온도와 압력의 함수로 주어진다. 평형유동의 각각 물성치들은 진동에너지, 화학반응에너지까지 고려된 NASA Reference Publication 1181,1260에 주어져 있는 Curve Fit Data를 이용하였다.[7]

2.2. 비평형유동

본 연구에서는 비평형 유동을 계산하기 위하여 5-species (O_2, N_2, NO, N, O)모델과 유동의 진동에너지를 고려해 주는 2-temperature 모델을 사용하였다.

2차원 압축성 비평형 Navier-Stokes 방정식은 보존형으로 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{1}{Re_a}\left[\frac{\partial E_v}{\partial x}+\frac{\partial F_v}{\partial y}\right]+S \quad (4)$$

보존변수 Q와 생성항 S는 다음과 같다.

$$Q=\begin{pmatrix}\rho\\ \rho u\\ \rho v\\ \rho e_t\\ \rho_1\\ \rho_2\\ \rho_3\\ \rho e_{vib}\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\\dot{w}_1\\\dot{w}_2\\\dot{w}_3\\\sum\dot{\rho}_i e_{vib,i}+\sum\rho_i\,\dot{e}_{vib,i}\end{pmatrix} \quad (5)$$

위의 식에서 ρ_1, ρ_2, ρ_3는 각각 N_2, O_2, NO의 밀도를 나타내고 $\dot{w}_1, \dot{w}_2, \dot{w}_3$는 N_2, O_2, NO의 화학반응에 의한 생성과 소멸을 나타낸다. N, O의 밀도는 전체 밀도의 합이 ρ와 같다는 것과 산소와 수소의 비가 일정하다는 점을 이용하여 계산할 수 있다.[8] 점성, 비점성 플럭스와 생성항 계산을 위한 방법은 참고문헌[8]의 식을 사용하였다.

III. 수치해석기법

3.1 공간이산화

Liou[9]는 강건하면서 점성소산항이 적은 새로운 FVS기법인 AUSM+ 기법을 제시하였다. 이 기법은 기존의 flux splitting 기법에 비해 불연속면과 경계층에서 정확한 해를 보장하여 극초음속 유동장을 해석하는데 있어 적합하다. 그러나 충격파에서의 overshoot와 undershoot, 벽면에서의 압력의 진동이 보인다. 이에 AUSM+ 기법을 토대로 이 기법의 장점을 살리고 단점을 극복한 새로운 flux splitting 기법인 AUSMPW, AUSMPW+가 제시되었다.[10,11] 이 기법은 기본적으로 advection 성질이 가지는 불연속면에서의 진동현상을 압력가중함수를 통해 적절히 제어하는 수치기법이다. 본 연구에서는 AUSMPW를 이용하여 공간 이산화를 행하였다

3.2 시간적분

3.2.1 5단계 Runge-Kutta

수렴가속기법인 다중격자기법으로 효과적인 수렴가속 성능을 얻기 위해서는 시간적분에 쓰이는 방법이 고주파 오차(high frequency error)를 효과적으로 감쇠 시켜 주어야 한다. 따라서 본 연구에서는 국소 시간 전진기법과 외재적 시간적분 기법인 Martinelli의 5단계 Runge-Kutta 방법[12]을 사용하였으며 사용된 계수는 아래와 같다.

$$\alpha_1 = 0.25,\ \alpha_2 = 1/6\ \alpha_3 = 0.375,\ \alpha_4 = 0.5,\ \alpha_5 = 1.0 \tag{6}$$

3.2.2 Point-implicit 방법

비평형 유동의 계산은 convection, diffusion에 의한 time scale과 생성항의 화학반응에 의한 time scale의 차이로 stiffness 문제를 야기한다. 따라서 비평형 유동을 외재적 방법으로 계산하는 것은 계산의 안정성과 수렴성을 낮추는 요인으로 작용할 수 있다. 따라서 본 연구에서는 생성항을 내재적으로 계산하는 Point-implicit 방법을 사용하였다. 생성항은 다음과 같이 계산된다.

$$S^{n+1} \approx S^n + \frac{\partial S}{\partial Q}^n \Delta Q,\ H = \frac{\partial S}{\partial Q} \tag{7}$$

따라서 지배방정식을 차분하면 다음과 같은 꼴을 갖는다.

$$(I - \Delta t H)\Delta Q = \Delta t\, Res \tag{8}$$

$$Res = \left(-\frac{\partial E}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{1}{Re_a}\left[\frac{\partial E_v}{\partial x} + \frac{\partial F_v}{\partial y}\right] + S\right)^n \tag{9}$$

위의 자코비안 H는 8×8의 행렬이지만 1행부터 4행은 0의 값을 갖기 때문에 연속방정식, 운동량방정식, 에너지방정식은 별도의 행렬 계산 없이 외재적인 방법으로 풀 수 있다. 따라서 point-implicit 방법으로 비평형 유동을 계산할 때, 4×4 행렬식을 푸는 것만으로 지배방정식을 풀 수 있다.

3.2.3 LU-SGS

외재적 시간적분법인 5단계 Runge-Kutta방법은 다중격자기법에 알맞은 시간적분법으로 알려져 있지만 내재적 방법에 비해 CFL 수를 많이 못 주는 단점이 있다. 또한 한번의 시간적분을 위해 5단계를 거쳐야 함으로, 내재적 방법보다 한 번의 반복계산에 드는 비용이 비싸다는 단점이 있다. 이러한 면을 비교하기 위하여 내재적 방법인 LU-SGS방법을 적용하였으며 모든 계산 결과에 대하여 계산소요시간 비교를 행하였다.

지배방정식을 Euler 후방차분하면 다음과 같이 나타난다.

$$\left[\frac{I}{J\Delta t} + \delta_\xi^- A^+ + \delta_\xi^+ A^- + \delta_\eta^- B^+ + \delta_\eta^+ B^- - H\right] \Delta Q_{i,j} = -Res_{i,j} \tag{10}$$

위의 식을 LU-SGS 방법으로 근사화하면 다음과 같은 식으로 나타난다.

$$LD^{-1}U\Delta Q_{i,j} = Res_{i,j}$$

$$L = \left[\frac{I}{J\Delta t} + \delta_\xi^- A^+ + \delta_\eta^- B^+ - A^- - B^- - H\right]$$

$$D = \left[\frac{I}{J\Delta t} + A^+ + B^+ - A^- - B^-\right] \tag{11}$$

$$U = \left[\frac{I}{J\Delta t} + \delta_\xi^+ A^- + \delta_\eta^+ B^- - A^+ - B^+\right]$$

3.2.4 다중격자기법

본 연구에서는 다중격자기법 V-cycle을 이용하였다. 다중격자기법의 기본적인 단계는 다음과 같다.

성근 격자에서의 초기 변수는 다음과 같이 준다.

$$Q_{2h}^{(0)} = \sum S_h\, Q_h \,/\, S_{2h} \tag{12}$$

Q : 유동 변수
h : 미세 격자(fine grid)
2h : 미세 격자에서 사이의 격자 선을 지우고 만든 성근 격자(coarse grid)
S : 면적

i) 미세 격자에서 먼저 시간을 전진시키고 수정을 해준다.

ii) 미세 격자에서 얻은 보존 변수를 성근 격자로 전해준다.

iii) 성근 격자에서의 계산을 위해 미세 격자의 잔여량(residual)을 성근 격자로 넘긴다.

iv)시간을 전진시키고 성근 격자에서 변수를 수정해준다. 다음의 성근 격자를 위해서 잔여량을 계산한다.

위의 과정을 연속적으로 성근 격자에 적용한다.

v)마지막으로, 각각의 격자에서 계산된 수정항을 바로 밑의 미세 격자로 bilinear interpolation을 해서 넘겨준다.

Q_{2h}^{+}를 2h 격자에서 계산된 수정항과 4h에서 계산된 수정항을 이용해서 수정된 Q_{2h}의 최종적인 값이라고 하면

$$Q_h^{+} = Q_h + I_{2h}^{h}\left(Q_{2h}^{+} - Q_{2h}\right) \qquad (13)$$

Q_h : 2h에서 수정항이 넘어오기 전의 h에서의 값

I : interpolation 연산자

3.2.5 Damped Prolongation

다중격자기법은 아음속과 천음속 유동에서 수렴가속화라는 효율성을 입증하였다. 그러나 유동에 강한 불연속면(충격파)이 있는 경우와 화학적 반응이 수반될 경우, 수치적 불안정성이 생겨 이를 그대로 극초음속 유동에 적용하는 것이 힘들다.

극초음속 유동에 다중격자기법을 적용하였을 때 나타나는 수치적 불안정성의 요인으로 다음과 같은 것을 고려할 수 있다.

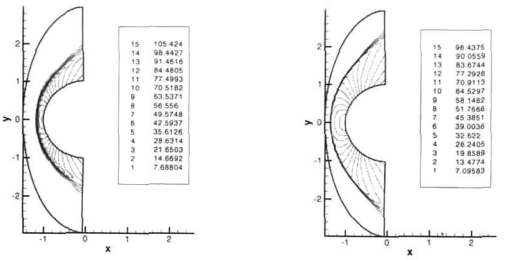

Fig. 1. 중간해와 수렴된 해

위의 Fig. 1은 비점성, 평형유동(마하수 10)의 중간 단계 수치해(transient solution)와 수렴된 상태의 수치해의 등압력선도를 나타낸 것이다. 초기 유동 조건은 자유류 조건을 이용하였다. 충격파는 처음 벽면에서 생성된 후 차차 전방으로 팽창, 성장하면서 자신의 위치를 잡아나가게 된다. 이러한 사실은 중간 단계의 압력이 수렴된 상태의 압력보다 높게 나타나고 있는 것으로도 알 수 있다.

Fig. 2는 중간 단계에서의 압력분포를 미세 격자와 성근 격자에 나타낸 것이다. l은 충격파 이전을, r은 충격파 이후를 나타낸다. Fig. 2와 같이 압력이 분포되어있는 경우 성근 격자에서의 유동은 팽창되는 방향(운동에너지의 증가)으로 수정이 이루어지고 이를 단순히 내삽할 경우 미세 격자의 충격파 전의 영역 l도 팽창되어 유동의 운동에너지가 증가한다. 이로 인해 유동은 내부에너지를 빼앗기게 되고 비물리적인 음의 에너지를 갖게된다. 따라서 압력구배가 심한 영역에서의 단순한 bilinear interpolation은 비물리적인 해를 유발하게 되고 이로 인해 수치해에 불안정성이 오게 된다.

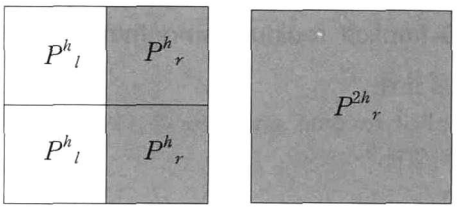

Fig. 2. 미세격자와 성근격자에서의 압력

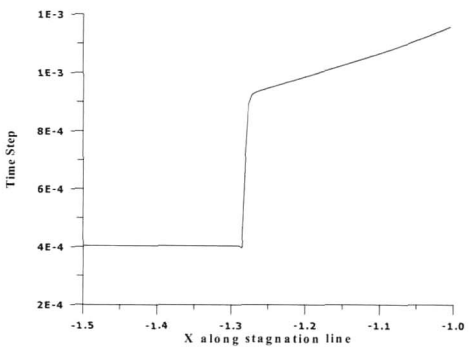

Fig. 3. 정체선(stagnation line)을 따른 Δt

위의 Fig. 3은 CFL을 1.5로 주었을 때 stagnation line을 따른 Δt를 나타낸 것이다. 그림을 보면 충격파를 지난 후에는 유동이 아음속이 되어 Δt가 충격파 전의 값보다 상당히 크다는 것을 보여주고 있다. 따라서 Fig. 2와 같은 영역에서 충격파 전과 충격파 후의 값을 똑같은 양에 기초하여 수정한다는 것은 안정성 면에서 바람직하지 않은 결과를 가능성을 내포하고 있다.

또한 물리적인 면에서 보면 충격파를 지난 후의 아음속영역은 충격파 전의 초음속 영역에 영향을 줄 수 없지만 다중격자기법은 위와 같은 현상을 구분할 수 있는 방법이 없다.

이와 같은 해석에 근거하여 다음과 같은 제한자를 도입하여 damped prolongation을 시도하였다.

$$\phi = \min\left(1, \frac{P_h}{\widetilde{P_h}}\right) \tag{14}$$

$\widetilde{P_h}$: 성근격자에서 smoothing 과정을 거친 후 계산된 P_{2h}를 미세격자로 interpolation한 값

$$Q_h^+ = Q_h + \phi I_{2h}^h (Q_{2h}^+ - Q_{2h}) \tag{15}$$

식(14)의 제한자는 Hirch(7)의 제한자를 수정한 것으로 수치해의 계산 중 성근 격자에서의 압력이 급격하게 변하는 경우, 즉 성근격자에서 충격파의 위치가 변화하게 되는 경우 그 위치를 알아내어 수정량을 제한하는 역할을 하게된다.

3.2.6 Implicit residual smoothing

비점성유동

Implicit residual smoothing은 다음의 식을 사용하였다.[1]

$$[\prod_l (1 - \beta_l \nabla_l \triangle_l)] \overline{R} = R \quad l = \xi, \eta \tag{16}$$

$\overline{R}$: smoothing된 잔여량
R : 잔여량
∇ : 후방차분 연산자
$\triangle$: 전방차분 연산자

$$\beta_\xi = \max\left\{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{N}{N^*}\frac{1}{1+\psi r_{\eta\xi}}\right)^2 - 1\right], 0\right\} \tag{17}$$

$$(\beta_c)_\eta = \max\left\{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{N}{N^*}\frac{1}{1+\psi r_{\eta\xi}^{-1}}\right)^2 - 1\right], 0\right\} \tag{18}$$

$\frac{N}{N^*}$: smoothing한 후와 하기 전의 CFL number의 비로 2 ~ 3의 값을 갖는다.

$$r_{\eta\xi} = \lambda_\eta / \lambda_\xi \tag{19}$$

ψ는 계수로 0.125정도의 값을 갖는다.

점성유동

점성유동의 경우 β는 다음과 같이 정의된다.

$$(\beta_d)_\eta = \frac{1}{4}\frac{(\lambda_d)_\eta}{\lambda_\xi + \lambda_\eta} \tag{20}$$

$$\lambda_d = \frac{\gamma\mu}{\Pr\rho}(\eta_x^2 + \eta_y^2) \tag{21}$$

$$\beta_\eta = \max((\beta_d)_\eta, (\beta_c)_\eta) \tag{22}$$

modified smoothing[13]

비점성유동의 경우, 위의 방법으로 계산한 β를 이용하여 수치계산의 안정성을 확보할 수 있었으나 점성유동의 경우는 충분한 안정성을 확보할 수 없었다. 이는 결국 수렴성의 저하로 나타났다. 이를 해결하기 위하여 convection-diffusion 방정식에서부터 출발하여 새로운 β를 유도하였고 이를 이용하여 보다 향상된 안정성을 얻을 수 있었다.

새로이 얻은 β[13]는 다음과 같다.

$$\beta_\xi = \max\left\{\frac{1}{4}\left[\left(\frac{N}{N^*}\frac{1}{1+r_{\eta\xi}+4r_{d\xi}}\right)^2 - 1\right], 0\right\} \tag{23}$$

$$\beta_\eta = \max\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{N}{N^*}\frac{1}{1+\frac{1}{4}r_{D\xi}^{-1}+\frac{1}{4}r_{d\eta}^{-1}} - 1\right], 0\right\} \tag{24}$$

위의 유도과정은 상당히 길기 때문에 따로 유도는 생략한다. 단, convection-diffusion 방정식에서 출발하였으며, 외재적 시간적분에서의 안정성 영역을 증대시킬 수 있도록 설계하여 극초음속 계산에 다중격자기법을 안정적으로 적용할 수 있는 효과를 얻을 수 있었다.

3.3 경계조건

다중격자기법을 극초음속 유동에 적용하기 위하여 고도 60km에서 마하수 10으로 비행하는 반지름 1m의 실린더를 선정하였다. 이 형상은 극초음속 유동에 다중격자기법을 적용할 때 널리 적용되는 문제이다. 유입류는 자유류 조건을 주었고 유출류는 외삽을 하였다. 비평형 유동의 경우 벽면에서 noncatalytic 조건을 주었다.

IV. 수치해석 결과

4.1 비점성 유동 계산

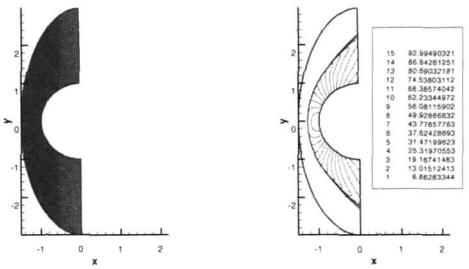

Fig. 4. 계산 격자와 평형유동의 등압력선도

Fig. 4에 계산 격자와 등압력선도를 나타내었다. 형상은 실린더이고 65×113의 격자를 사용하였다. η방향으로는 등간격을 사용하였다.

4.1.1 평형유동 결과

Fig. 5는 5-stage Runge-Kutta와 LU-SGS의 수렴곡선을 계산시간으로 나타낸 그래프이다. 계산시간은 LU-SGS 1 level의 한번 반복계산에 소요

되는 시간을 1로 보고 나타냈다. 이후의 모든 그래프도 위와 같은 방식으로 나타냈다. Table 1.은 각각의 경우, 수렴해를 얻기 위해 필요한 반복계산 횟수와 수렴가속정도를 나타냈다. 수렴가속정도는 반복계산 횟수가 아닌 실제 계산시간을 기준으로 산정하였다.

다중격자기법을 극초음속 유동에 적용하여 성공적으로 수렴가속을 얻어낼 수 있었다.

5-stage Runge-Kutta 시간적분 방법은 high-frequency damping과 propagation 특성이 좋아서 다중격자기법에 적합한 기법으로 알려져 있다. 결과를 보면 역시 7.8배의 수렴가속성능을 보여 이를 확인할 수 있다. 이에 반해 LU-SGS기법은 다중격자기법의 효과가 떨어진다.

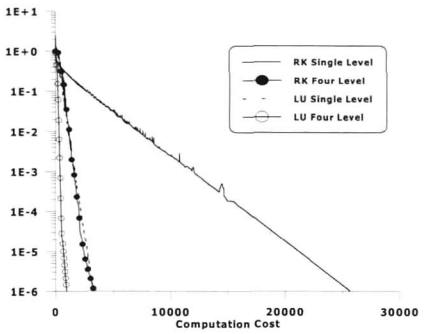

Fig. 5. 수렴곡선

Table 1. 반복계산 횟수와 수렴가속 효과

RK	반복계산 횟수	수렴가속 효과
1 level	8848	-----
4 level	710	7.8

LU-SGS	반복계산 횟수	수렴가속 효과
1 level	3274	-----
4 level	950	1.6

그러나 수렴곡선을 보면 오히려 4 level을 사용한 5-stage Runge-Kutta 방법이 1 level의 LU-SGS보다 계산시간이 많이 걸리는 것을 확인할 수 있다. 이 현상은 두 가지 요인에 인한 것인데 우선 5-stage Runge-Kutta의 경우 외재적 방법이므로 CFL수를 많이 주지 못하는 단점이 있었다. 그리고 5-stage Runge-Kutta는 한번의 시간전진을 위해 5번의 반복계산을 거쳐야하므로 계산시간이 늘어나는 단점이 있다.

다중격자기법의 적용으로 인한 수렴가속 효과는 5-stage Runge-Kutta가 좋지만 결국 LU-SGS 기법이 효율적인 것으로 나타났다. 이러한 결과는 그 정도는 차이가 있지만 다음의 모든 계산결과에서 확인할 수 있다.

4.1.2 비평형 유동 결과

Fig. 6과 Table. 2는 비평형, 비점성 유동을 계산한 결과이다. 역시 다중격자기법을 성공적으로 적용하여 수렴가속효과를 얻어냈다.

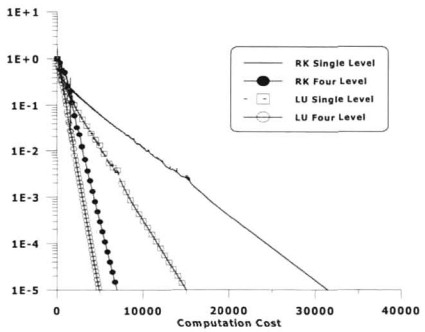

Fig. 6. 수렴곡선

Table 2. 반복계산 횟수와 수렴가속 효과

RK	반복계산 횟수	수렴가속 효과
1 level	8058	-----
4 level	1192	4.5

LU-SGS	반복계산 횟수	수렴가속 효과
1 level	14987	-----
4 level	2730	2.7

5-stage Runge-Kutta가 외재적 방법이지만 화학반응에 의한 생성항을 내재적으로 처리하였기 때문에 비평형 유동에도 안정적으로 적용할 수 있었다. 비평형유동의 경우, CFL수는 주로 화학반응에 의해 제약을 받기 때문에 LU-SGS가 내재적 방법이기는 하지만 외재적 방법인 5-stage Runge-Kutta와 비교하여 CFL수에서 큰 이득을 보지는 못하였다. 이러한 효과는 앞의 결과 Fig. 5와 비교하면 확인할 수 있다.

4.2 점성유동 계산

점성유동의 계산에도 역시 65×113의 격자를 사용하였다. 격자의 모양은 비점성 계산 때와 같고 벽면으로 격자를 밀집시켰다는 차이가 있다.

4.2.1 평형유동 결과

앞의 그림과 표에 수렴 곡선과 수렴가속 정도를 나타내었다.

새롭게 구한 β를 이용하여 향상된 수렴가속 성능을 얻을 수 있음을 알 수 있다.

의 적용을 어렵게 하는 요인은 충격파 주위의 불안정성과 화학반응에 의한 time scale의 stiffness를 들 수 있다. 충격파 주위의 불안정성을 해결하기 위하여 damped prolongation, implicit residual smoothing을 새롭게 유도하였다. 그리고 생성항의 내재적 처리를 이용하여 stiffness 문제를 해결할 수 있었다

불안정성 문제를 해결한 결과, 다중격자기법을 극초음속 유동에 성공적으로 적용할 수 있었고 높은 수렴가속성능을 얻을 수 있음을 확인하였다.

또한 외재적 시간적분법인 Runge-Kutta와 LU-SGS기법을 비교하여 각각의 성능을 알아보았다. Runge-Kutta 방법은 고주파 오차를 효과적으로 감쇄시키는 능력이 있어 다중격자기법의 성능을 효과적으로 끌어낼 수 있었으나 한 번의 반복계산에 시간이 많이 든다는 단점이 있고 또한 안정성 문제로 시간간격이 제한된다는 단점이 있었다. 반면, LU-SGS를 적용할 때는 다중격자기법의 성능이 떨어진다는 단점은 있었으나, 시간간격의 제한이 외재적 방법에 비해 완화되어 single level의 경우, Runge-Kutta보다 항상 좋은 것을 볼 수 있다. LU-SGS와 다중격자기법의 결합이 보여 준 이러한 특성은 높은 CFL수에 의해 wave의 전파특성은 좋지만 고주파 오차의 감쇄능력이 떨어짐으로 해서 나타난 결과로 보이며 이 부분에 대한 연구가 필요할 것으로 보인다.

참고문헌

1. E. Turkel, R. C. Swanson, V. N. Vasta, and J. A. White, "Multigrid for Hypersonic Viscous Two-and Three-Dimensional Flows," AIAA paper 91-1572-CP, 1991

2. B. Koren, and P. W. Hemker, "Damped, Direction-Dependent Multigrid for Hypersonic Flow Computations," Appl. Numer. Math. 7, 309, 1990

3. R. Raspiedel and R. C. Swanson, "Progress with Multigrid Schemes for Hypersonic Flow Problems," Journal of Computational Physics, 116, pp. 103 122, 1995

4. P. Gerlinger, and D. Brüggemann, "Multigrid Convergence Acceleration for Turbulent Supersonic Flows," International Journal for Numerical Methods in Fluids, 24, pp. 1019-1035, 1997

5. P. Gerlinger, P. Stoll, and D. Brüggemann, "An Implicit Multigrid Method for the Simulation of Chemically Reacting Flows," Journal of Computational Physics, 146, pp. 322-345, 1998

6. Z. W. Zhu, P. Alavilli, C. Lacor and Ch. Hirch, Efficiency and Robustness of Multigrid Methods for Hypersonic Flows, AIAA Paper 97-0342, 1997

7. Gupta, R. N., Lee, K. P., Thompson, R. A., and Yos, J. M., "Calculations and Curve Fits of Thermodynamic and Transport Properties for Equilibrium Airto 30000 K," NASA RP-1260, 1991

8. Chul Park and Seokkwan Yoon, "Calculation of Real-Gas Effects on Blunt-Body Trim Angles," AIAA Journal, Vol.30, No.4, 1992, pp.999-1007

9. M. S. Liou, A Sequel to AUSM: AUSM+, Journal of Computational Physics, 129, pp.364-382 1996

10. Kim, K. H. and Rho, O. H., "An Improvement of AUSM Schemes by Introducing the Pressure-based Weight Functions," Computers & Fluids, 27(3), pp. 311-346 1998

11. Kyu Hong Kim, ChongAm Kim and Oh Hyun Rho, "Accurate Computation of Hypersonic Flows Using AUSMPW+ Scheme and Shock-Aligned Grid Technique," AIAA Paper No. 98-2442,1998

12. Lugi Martinelli, "Calculation of viscous Flows with a Multigrid Method," Ph. D thesis, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, Princeton University, 1987

13. Sung-Soo Kim, ChongAm Kim and Oh Hyun Rho, "A Multigrid Algorithm for Computing Hypersonic, Chemically Reacting Flows," AIAA Paper No. 2000-2479-CP