

압축성 유동의 수치해석 및 수치해법 개발 (BGK 기법의 적용)

신동신* · 김종암** · 노오현**

Numerical simulation and development of scheme for compressible flows (Application of BGK method)

D. S. Shin* · C. A. Kim** · O. H. Rho**

ABSTRACT

BGK schemes are developed by improving the standard BGK numerical method. Scheme 1 uses the Osher's Godunov type solution and scheme 2 are developed to overcome the problems of scheme 1. The improved schemes show many unique properties such as entropy condition, positivity condition, higher order gas evolution model, which lead to an high degree of robustness and accuracy. The scheme 2 especially overcomes the shortcomings of the scheme 1 and possesses many superior properties that cannot be found other numerical schemes, and is expected to apply various problems with high accuracy and robustness.

초 록

표준 BGK수치기법을 개선한 기법 1과 기법 2를 개발하였다. 기법 1은 Osher의 Godunov 형태의 해를 사용하며, 기법 2는 기법 1의 문제점을 해결하도록 개발되었다. 개발된 기법들을 다양한 문제에 적용한 결과 이러한 수치기법이 엔트로피 조건, 양수 보존성 등을 지니고 있어 정확하고 강건한 수치기법임을 알 수 있었다. 특히, 기법 2는 기법 1의 단점을 극복하였을 뿐만 아니라 기존의 수치기법에서 찾아볼 수 없는 우수한 성질을 가지고 있어 다양한 문제에 활발하게 적용될 것으로 기대된다.

1. 서 론

최근 들어 공기 역학과 제어 및 구조 역학등의 제반 항공기 기술이 급격히 발달함에 따라서

높은 기동성과 제어 성능을 가질 수 있는 비행체들의 연구 개발이 여러 분야에서 활발하게 이루어지고 있다. 이러한 연구는 특히 전술 미사일이나 전투기와 같은 고도의 비행 성능이 요구

* 홍익대학교 기계공학과(Hong-Ik University)

** 서울대학교 기계항공공학부(Seoul National University)

되는 분야에서 중점적으로 수행되고 있으며, 이를 위해서는 공기 역학적 특성에 대한 정확한 지식이 반드시 필요하다. 그러나 아직까지 실험적 방법과 수치 계산적 방법이 각각 이러한 유동장을 완벽하게 묘사하는데 많은 어려운 점을 가지고 있다. 실험적 연구에서는 실험 모델과 유동 조건을 실제 조건에 맞게 정확히 만들어주는 것이 불가능하며, 수치적 방법에서도 계산 과정에서 필연적으로 유발되는 여러 종류의 수치 오차들이 완벽한 수치 묘사를 하는데 제한 요소가 되고 있다. 그러나 컴퓨터의 비약적인 발전과 함께 점성/비점성 유동장을 해석하기 위한 많은 수치적 기법들을 개발, 발전시켜 왔으며, 실험보다 경제적인 CFD는 미래의 중요한 설계도구로 이용될 수 있다.

수치기법의 개발에 있어 가장 중요한 점은 고차의 정확도와 강건성이다. 이러한 면에서 많은 연구가 쌓여왔으며, 주목할 만한 성과들이 있었다. 단연 돋보이는 성과는 Godunov형 기법과 Flux Vector Splitting (FVS) 기법을 들 수 있다. 이러한 수치기법들은 아음속으로부터 극초음속까지 다양한 공기역학적인 유동현상을 묘사하는데 적용되어 효율적인 수치해를 제공하였으나, 경우에 따라 심각한 단점을 노출하기도 하였다.

FVS 기법은 강한 충격파나 진공에 가까운 유동현상에서도 강건한 결과를 보여주지만, 계면에서의 불연속을 무시하는 경향이 있어, 점성 및 열 유동장에서 정확한 해를 제공하지 못하는 단점이 있다. Godunov형 기법 계열로는 Roes FDS 수치기법⁽¹⁾이 대표적이다. Roe 수치기법은 Rankine-Hugoniot 관계식을 만족하는 평균 플럭스 자코비안을 도입함으로써, 국부적으로 선형화된 Euler방정식을 풀어 충격파를 한 셀에서 잡아낸다. 그러나 짝홀 분리 현상, carbuncle 현상 및 진공에 가까운 유동장에서 양의 밀도를 유지하지 못하는 불안정성⁽²⁾ 등 강건성에서 문제점을 드러내었다.

FVS 기법의 강건성과 Godunov형 기법의 정확성을 동시에 만족시키려는 새로운 시도로 Euler 방정식이 아닌 Boltzmann 방정식에 기반

한 기체운동론(gas-kinetic) 수치기법이 제안되었다. 이러한 시도로 Pullin의 EFM(Equilibrium Flux Method)⁽³⁾을 위시하여, Rietz⁽⁴⁾, Perthame⁽⁵⁾, 그리고 Mandal과 Desphande⁽⁶⁾ 등의 여러 연구자들이 양수조건 및 엔트로피 조건을 만족하는 수치기법을 제안하였다. 그러나 이러한 방법들은 입자들이 셀 경계면을 충돌없이 통과하므로 과도한 수치점성과 열전도를 발행하게 되며 이러한 문제는 Euler 방정식에서 유도된 플럭스 분할 기법과 공통된 성질이다⁽⁷⁾. 이런 수치점성을 줄이기 위한 시도로 Macrossan과 Oliver는 EIM(Equilibrium Interface Method) 수치기법을 통해 입자의 충돌을 고려할 것을 제안하였다⁽⁸⁾. 이런 접근 방법은 Xu의 TTT(Totally Thermalized Transport) 기법이나⁽⁹⁾, Moschetta와 Pullin이 EFM기법을 Osher의 근사 리만 해법을 응용하여 제안한 EFMO기법⁽¹⁰⁾으로 이어진다. 이렇게 입자의 충돌을 고려한 수치기법으로 주목할 만한 것은 Xu등이 제안한 gas-kinetic BGK 수치기법이다⁽¹¹⁾.

이 기법은 볼츠만 방정식의 충돌항을 BGK 모델로 대체하고 이것을 일반해로부터 수치 플럭스를 구한다. 이 수치기법은 기존의 리만 해법에 비하여 수치적으로나 물리적으로 매우 타당한 결과를 준다. 본 연구에서는 기존의 BGK수치기법을 더욱 확장하여 강건성과 정확성이 향상된 BGK 수치기법을 제안하였고 기본적인 수치적 예제를 통하여 이를 확인하였다.

2. 본 론

2.1 BGK 수치기법

2.1.1 Standard BGK 수치기법

Xu 등⁽¹¹⁾이 제안한 수치기법은 다음과 같이 표현된다. 이 수치기법은 Boltzmann 방정식의 충돌항을 BGK모델로 근사화하고 이에 모멘트를 취하여 유도된다. 자세한 유도과정은 참고문헌을 참조하기 바란다.

$$F_{i+1/2,j} = (1 - \tau(1 - e^{-\Delta t/\tau})/\Delta t)F^I + \tau(1 - e^{-\Delta t/\tau})/\Delta t F^{II} + \tau(2\tau - \Delta t) - (\Delta t + 2\tau)d^{-\Delta t/\tau}/\Delta t F^{III} \quad (1)$$

여기서

$$F^I = F^{EIM \text{ or } TTT} = \begin{pmatrix} \rho_0 U_0 \\ \rho_0(U_0^2 + 1/(2\lambda_0)) \\ \rho_0 U_0 V_0 \\ \rho_0 U_0 H_0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\rho_0 U_0 H_0 = \rho_0(U_0^3 + U_0 V_0^2 + 2U_0/\lambda_0 + K(K+2)U_0/(4\lambda_0^2))$$

$$F^{II} = F^{EFM} = F^+ + F^- = \begin{pmatrix} M_l^+ \rho_l a_l \\ M_l^+ \rho_l a_l U_l + P_l^+ \rho_l / (2\lambda_l) \\ M_l^+ \rho_l a_l V_l \\ M_l^+ \rho_l a_l H_l - \frac{\rho_l a_l}{8\lambda_l \sqrt{\pi}} \exp(-\alpha^2 M_l^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_r^- \rho_r a_r \\ M_r^- \rho_r a_r U_r + P_r^- \rho_r / (2\lambda_r) \\ M_r^- \rho_r a_r V_r \\ M_r^- \rho_r a_r H_r - \frac{\rho_r a_r}{8\lambda_r \sqrt{\pi}} \exp(-\alpha^2 M_r^2) \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$F^{III} = \int u(\bar{u} + v\bar{b})g_0 \Psi d\Xi \quad (4)$$

위에서 사용된 입자충돌시간은 다음과 같이 표현된다. 비점성의 경우

$$\tau = C_1 \frac{\sqrt{\lambda}}{\rho} + C_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{\rho} |p^l - p^r| \quad (5)$$

점성의 경우에는

$$\tau = C_1 \frac{M_{\infty} \mu}{Re_{\infty} \rho} + C_2 \frac{\sqrt{\lambda}}{\rho} |p^l - p^r| \quad (6)$$

여기서 C_1 은 인공점성의 크기를 결정하는 항이므로 C_1 이 커지면 점성이 커지게 되나 수치기법 자체가 C_1 에 관계없이 경계면의 불연속을 포착할 수 있으므로 C_1 의 크기가 크게 변하지 않는한 수치해에는 변화가 없게 된다. C_2 는 무차원 상수이다.

2.1.2 Standard BGK 수치기법을 향상시킨 기법 1과 기법 2

Standard BGK 수치기법은 플럭스 벡터 분할 기법의 일종인 EFM 플럭스를 내포하고 있어 점성계산에서 중요한 불연속 접촉면을 포착하지 못하는 단점을 가지고 있다⁽¹²⁾. 이러한 특성은 인공점성이 증가하는 현상으로 나타나며 결국 물리적 점성에 부정적인 영향을 미치게 된다. 이러한 단점을 극복하기 위하여 Osher의 Godunov 형태의 해를 이용하여 BGK수치기법을 개선한 기법 1이 있으며 다음과 같은 형태를 띄고 있다.

$$F_{\text{mod}}^{EFM} = F^{EFMO} = F_l^+ + F_r^- + \begin{cases} -F^-(Q_2) + F^-(Q_1), & u > 0 \\ F^+(Q_2) - F^+(Q_1), & u < 0 \end{cases} \quad (7)$$

참고문헌^(12,13)에 나타난 바와 같이 기법 1은 충격파 포착능력을 그대로 유지하며 불연속 접촉면을 제대로 인식하므로 점성계산이 성공적으로 수행된다. 그러나 이 기법이 더욱 다양한 문제에 적용됨에 따라 몇 가지 단점이 보고되었다. 첫 번째는 위의 식에서 보는 바와 같이 원래의 플럭스에 두 개의 플럭스를 추가하여 발생하는 계산시간의 문제로서 표준 BGK수치기법에 비하여 두 배에 가까운 시간이 소요된다. 두 번째는 열경계층에서의 문제로서 기법 1이 열전도 문제에 사용될 경우 표면에서의 격자를 충분히 밀집시키지 않으면 온도분포가 정확히 예측되지 않는다. 세 번째, Godunov 해를 이용하므로 충격파의 불안정성이 나타날 수 있다. 그러므로 본 연구에서는 이러한 문제를 해결할 수 있는 수치기법에 연구를 집중하였으며 BGK수치기법의 향상된 형태의 기법 2를 개발하였다. 이 기법은 EFM 플럭스에서도 입자의 충돌이 고려되도록 하여 불연속 접촉면을 인식하도록 고안되었다^(14,15,16). 이 과정에서 위의 기법 1이 가지고 있는 단점을 극복할 수 있었으며 그 외에도 수치기법으로서 바람직한 성질을 가지고 있음을 밝혀내었다. 기법 2는 다음의 식으로 표현된다.

$$(M_l^+ + M_r^-) > 0 \text{ 이면,}$$

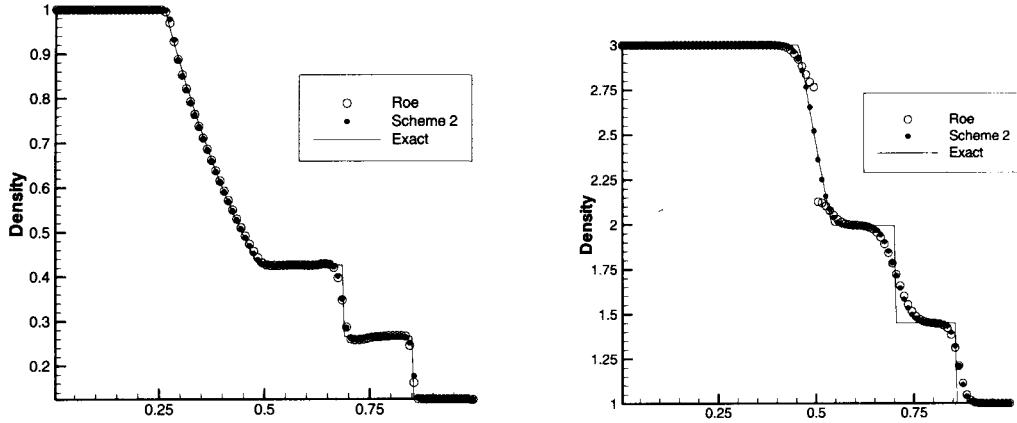


Fig. 1 Shock Tube problem. (a) Left: $\rho=1, u=0, p=1$, right: $\rho=0.125, u=0, p=0.1$

(b) Left: $\rho=3, u=0.9, p=3$, right: $\rho=1, u=0.9, p=1$

$$F_{\text{mod}}^{EFM} = \begin{pmatrix} M_l^+ a_{1/2} \rho_l \\ M_l^+ a_{1/2} \rho_l U_l + P_l^+ \rho_l / (2\lambda_l) \\ M_l^+ a_{1/2} \rho_l V_l \\ M_l^+ a_{1/2} \rho_l H_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_r^- a_{1/2} p w(\rho_l, \rho_r) \\ M_r^- a_{1/2} p w(\rho_l U_l, \rho_r U_r) + P_r^- \rho_r / (2\lambda_r) \\ M_r^- a_{1/2} p w(\rho_l V_l, \rho_r V_r) \\ M_r^- a_{1/2} H p w(\rho_l, \rho_r) \end{pmatrix} \quad (8)$$

$(M_l^+ + M_r^-) < 0$ 이면,

$$F_{\text{mod}}^{EFM} = \begin{pmatrix} M_l^+ a_{1/2} p w(\rho_r, \rho_l) \\ M_l^+ a_{1/2} p w(\rho_r U_r, \rho_l U_l) + P_l^+ \rho_l / (2\lambda_l) \\ M_l^+ a_{1/2} p w(\rho_r V_r, \rho_l V_l) \\ M_l^+ a_{1/2} H p w(\rho_r, \rho_l) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} M_l^+ a_{1/2} \rho_l \\ M_l^+ a_{1/2} \rho_l U_l + P_l^+ \rho_l / (2\lambda_l) \\ M_l^+ a_{1/2} \rho_l V_l \\ M_l^+ a_{1/2} \rho_l H_l \end{pmatrix} \quad (9)$$

여기서

$$p w(x, y) = (1 - w)x + wy$$

$$w = 1 - \min \left(\frac{P_l}{P_r}, \frac{P_r}{P_l} \right)^3$$

이다.

다음의 수치결과를 바탕으로 추론할 수 있는 기법 2가 가지고 있는 성질은 다음과 같다.

1. Roe의 FDS 기법에 비교할 만한 정확도를 가지고 있다.
2. Roe의 FDS 기법이 가지고 있는 단점, 즉 양수성(positivity)을 보존한다.
3. 충격파계산이 강건하다. 즉 transverse shock instability를 보이지 않는다.
4. 엔트로피 조건을 만족한다.
5. 총 엔탈피를 보존한다.

2.2 수치해석 결과

2.2.1 1차원 충격파관 문제에서의 수치결과

1차원 충격파관 문제는 수치기법이 개발되면 수치기법의 특성을 살펴보기 위하여 가장 우선적으로 계산되며 이를 위하여 다양한 문제들이 제안되었다. 본 연구에서는 기본적인 1차원 문제를 통하여 본 연구에서 개발된 기법 2의 여러 가지 특성을 살펴보았다.

먼저, Sod의 충격파관 문제를 해석하였다. 격자수는 100개이며, 비정상 문제로 외재적 시간적분을 사용하였으며, 시간 정확도는 1차이고, 무차원화된 시간 0.2에서 얻은 결과이다. Fig. 1(a)에서 보는 바와 같이 기법 2는 Roe의 FDS 기법과 거의 같은 정확도를 가지고 있음을 볼 수 있으며 팽창파의 양 끝단에서는 더욱 정확한

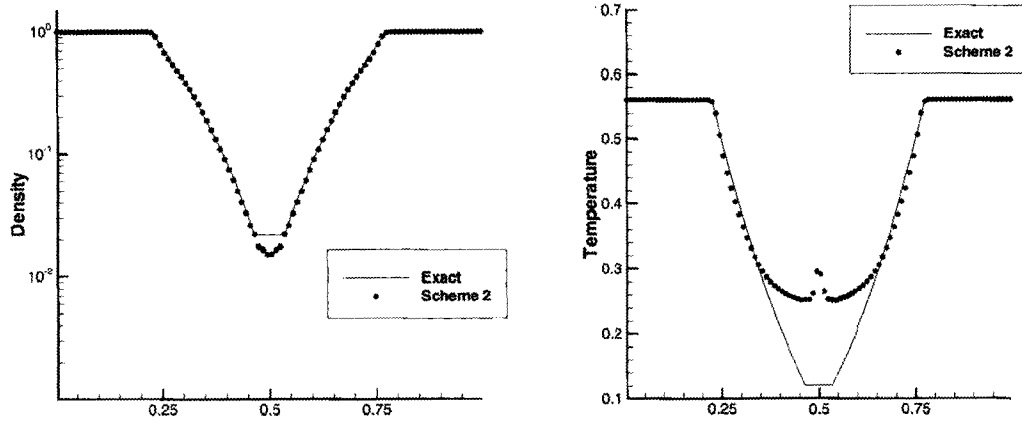


Fig. 2 Supersonic expansion problem Left: $\rho=1, u=-2, E_t=3$, right: $\rho=1, u=2, E_t=3$

해를 보이고 있다. Fig. 1(b)는 (a)와는 다른 초기조건으로 계산을 수행한 Sod의 문제로서 팽창파내에 음속점이 존재하게 된다. 이 경우 Roe의 FDS는 그림에서 보는 바와 같이 팽창충격파와 같은 비물리적 현상을 보이게 된다. 그러나 기법 2의 경우 이러한 현상을 보이지 않고 해석적 해와 잘 일치하는 경향을 보여 엔트로피 조건이 만족됨을 알 수 있다.

또한 양수보존성을 살펴보기 위하여 진공에 가까운 유동이 형성되는 충격파관 문제를 해석

하였다. Fig. 2는 온도와 밀도를 보여준다. Roe의 FDS의 경우 내부 에너지가 음이 되면서 계산이 더 이상 수행되지 않았다. 그러나 기법 2의 경우 어떠한 어려움 없이 계산이 수행되었다. 이 경우 기법 1도 성공적으로 계산이 되었다. 개발된 수치기법의 위와 같은 특성은 천음속 뿐만 아니라 초음속 및 극초음속계산에 매우 유용할 것으로 기대된다. 해석해와 차이가 나는 이유는 공간정확도와 시간 정확도가 1차인 비정상 문제이기 때문에 시간, 공간 정확도를 늘

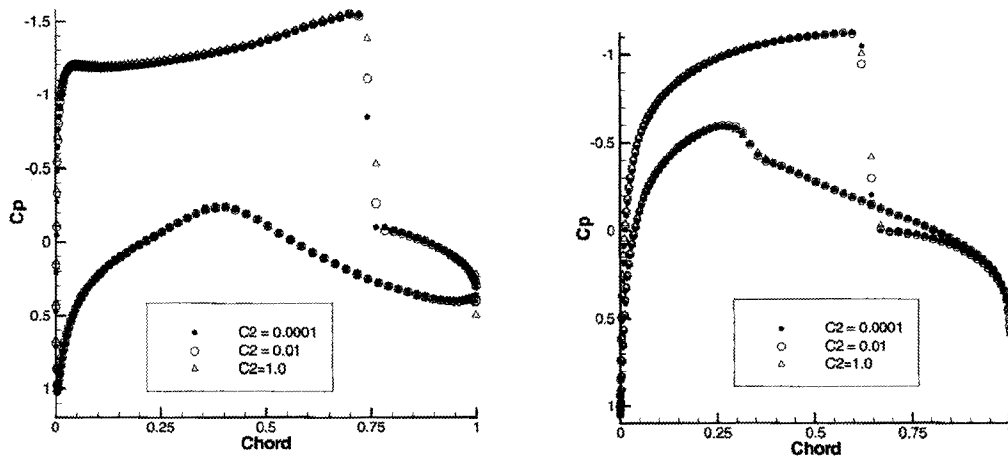


Fig. 3 Pressure coefficient distribution at RAE2822 and NACA0012.

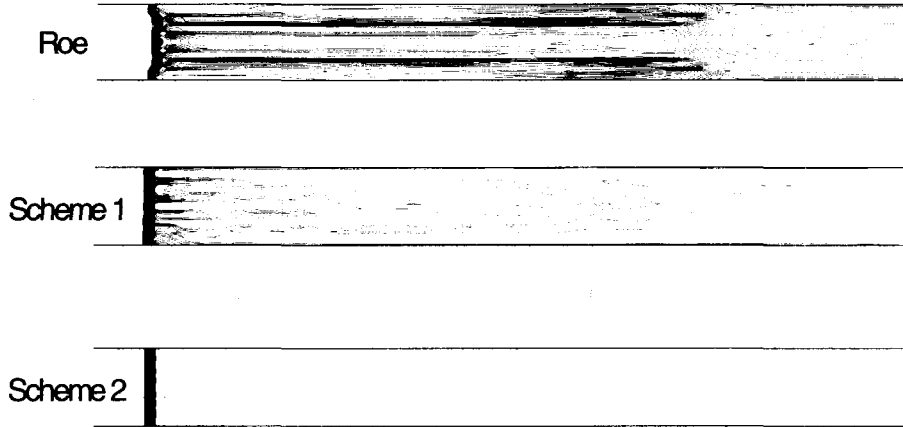


Fig. 4 Transverse shock stability problem. Iso-density contour.

이면 해석해와 더욱 가까워질 것으로 생각된다. 또한 진공상태에서 중앙부분에서 오차가 나는 것은 다른 모든 수치기법에서도 발견되는 현상이다.

2.2.2 2차원 문제에서의 수치결과

개발된 수치기법의 충격파 포착능력을 검증하기 위하여 천음속 익형주위의 유동장을 기법 2를 이용하여 계산하였다. 계산에 사용된 격자는 O-type 형태의 격자로서 161×33 의 격자를 사용하였다. 시간적분 방법으로 ADI기법과 다중격자기법을 사용하였다. Fig. 3은 RAE2822 및 NACA0012의 압력분포계수를 입자충돌시간에 사용된 C_2 에 따라 보여주고 있다. RAE의 마하수는 0.7이며, 공격각은 3도이고 NACA0012의 마하수는 0.8이며 공격각은 1.25도이다. C_2 의 4오더 변화에도 불구하고 충격파 포착능력은 크게 차이나지 않았다. 어느 경우에도 충격파를 2개 이하의 셀에서 잡고 있어 정확성이 우수함을 알 수 있다. 본 결과는 C_2 의 변화에 민감하지 않은 결과를 보이고 있으나 C_2 의 역할이 기본적으로 충격파를 안정적으로 포착하는 것이므로 C_2 를 0으로 하게 되면 충격파 주위에서 진동이

발생하게 된다.

개발된 수치기법의 충격파 안정성 문제를 살펴보기 위하여 2차원 채널 내에서 낮은 속도로 이동하는 충격파를 해석하였다. Roe의 FDS기법과 같은 Godunov 계열 수치기법의 경우 충격파가 채널 내를 지남에 따라 충격파의 구조가 불안정성을 보이게 된다. 이러한 현상을 보이는 수치기법은 극초음속 유동계산 시 carbuncle 현상을 보이게 되므로 극초음속 유동에 사용되기 어렵다. Fig. 4는 5000회의 반복계산 이후에 Roe의 FDS, 기법 1, 기법 2의 등밀도선도를 보여준다. Roe의 FDS의 경우 형태를 알아볼 수 없을 정도로 충격파의 구조가 완전히 파괴되었으며 기법 1은 미약하나마 충격파 불안정성을 드러내고 있다. 반면 기법 2는 충격파를 안정된 형태로 잡고 있어 강한 충격파를 포함하는 초음속 및 극초음속 유동에 적합할 것으로 판단된다.

Fig. 5의 이중 마하 반사 문제도 충격파의 안정성을 검증하기 위하여 많은 연구자들이 계산을 수행하는 문제로서 안정된 수치기법은 마하 줄기를 직선으로 포착하게 된다. 본 연구의 계산조건은 마하 5.5의 이동 충격파 조건이며, 계산격자는 400×400 을 사용하였다. 잘 알려진 바와 같이 불안정한 수치기법의 경우 마하 줄기가

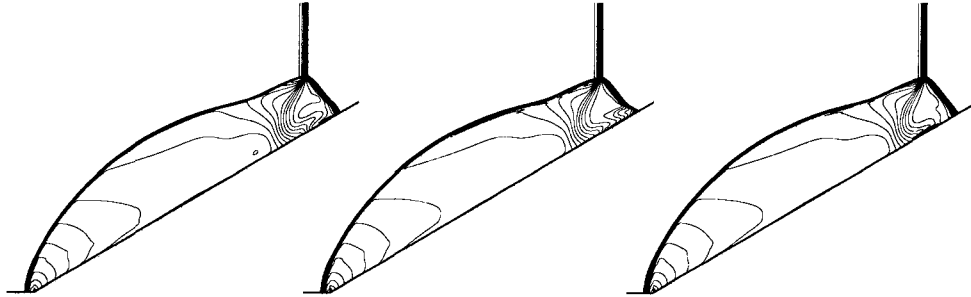


Fig. 5 Double Mach reflection problem

(left: scheme 2, middle: AUSM+, right: AUSM+ with pressure based weighting function)

심하게 뒤틀리는 현상(kinked Mach stem)을 보이게 된다. Fig. 5는 AUSM+기법과 기법 2의 등밀도선도를 나타낸다. Roe의 FDS기법은 그림에서는 나타나지 않았지만 마하줄기가 뒤틀림을 보인다고 보고되어있다. 충격파를 포착하는데 매우 강건하다고 알려진 AUSM+기법의 결과도 이 경우에는 마하 줄기의 뒤틀림 현상이 발생하려는 조짐을 보이고 있다. 그러나 기법 2의 경우 마하 줄기를 직선으로 잡고 있어 강건성이 우수함을 알 수 있다.

평판의 열경계층 문제에서는 기존에 보고된 바와 같이 기법 1은 격자가 충분히 벽면에 밀집되지 않은 경우 벽면근처에서 온도가 과도히 예측되는 경향을 보인다. 이러한 문제는 벽면에 격자를 매우 밀집시킴으로써 해결될 수 있으나

그에 해당하는 계산시간이 증가하는 문제를 안고 있다. Fig. 6은 본 연구에서 개발한 Pr보정법을 통하여 계산된 다양한 Pr수에 따른 벽면의 온도분포를 나타낸다. 전술한 바와 같이 기법 1의 경우 격자가 충분히 밀집되지 않았을 때 온도분포를 과도히 예측하고 있으며 이는 격자의 밀집을 통하여 어느 정도 해결될 수 있음을 볼 수 있다. 반면 기법 2는 벽면에서의 성긴 격자를 통해서도 해석적 해와 매우 잘 일치하는 온도분포의 결과를 내고 있다.

천음속 익형의 난류 문제에서는 2방정식 난류 모델인 kw-SST모델을 기법 2에 적용하였다. Fig. 7은 RAE2822 익형 위에서의 압력분포로서 실험결과와 매우 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 특히 계산에 사용된 자유류 조건에서는

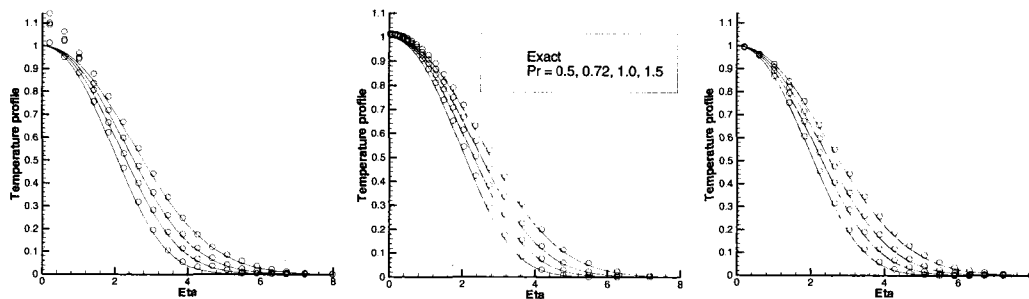


Fig. 6 Temperature distribution in the thermal boundary layer on a flat plate. Left: scheme 1, middle: scheme 1-fine grid, right: scheme 2)

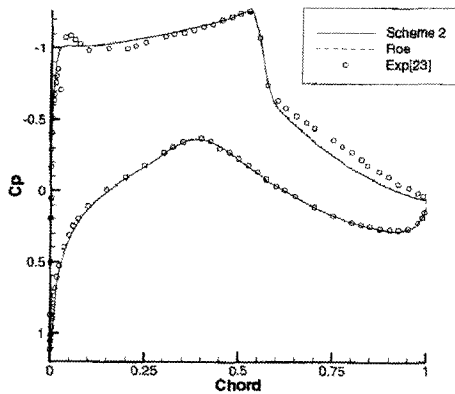


Fig. 7 Pressure distribution at RAE2822
(kw-SST turbulence model)

Baldwin-Lomax 모델이 충격파의 위치를 정확히 계산하지 못한다고 알려져 있으나 본 계산에서 사용된 난류모델은 이를 잘 잡고 있음을 볼 수 있다. 이 계산에서 알 수 있듯이 제안된 수치기법은 어떠한 난류모델과도 성공적으로 계산이 수행되게 된다.

3. 결 론

본 연구에서는 표준 BGK 수치기법을 개선한 기법 1과 기법 2를 개발하였다. 기법 1은 Osher의 Godunov 형태의 해를 사용하며, 기법 2는 기법 1의 문제점을 해결하도록 개발되었다. 개발된 기법들을 다양한 문제에 적용한 결과 이러한 수치기법이 정확성과 강건성을 갖추고 있음을 보였다. 특히, 기법 2는 기법 1의 단점을 극복하였을 뿐만 아니라 기존의 수치기법에서 찾아볼 수 없는 우수한 성질을 가지고 있어 다양한 문제에 활발하게 적용될 것으로 기대된다.

후 기

본 연구는 교육부 과학기술기초 중점연구지원사업(과제번호)에 의한 연구(과제번호)

[1998-018-E00174])로서 이에 관계자 여러분께 감사드립니다.

참 고 문 헌

1. P. L. Roe, "Approximate Riemann solve solver, parameter vectors and difference schemes," *J. Comp. Phys.*, 1981, Vol. 43, pp. 357.
2. J. J. Quirk, "A contribution to the great Riemann solver debate," *Int. J. Numer. Met. Fluids*, 1994, Vol. 18, pp. 555.
3. D. I. Pullin, "Direct simulation methods for compressible inviscid ideal-gas flow," *J. Comp. Phys.*, 1980, Vol. 34, p. 231.
4. R. D. Reitz, "One-dimensional compressible gas dynamics calculations using the Boltzmann equation," *J. Comp. Phys.*, 1981, Vol. 42, pp. 108.
5. B. Perthame, "Second-order Boltzmann schemes for compressible Euler equations in one and two space dimensions," *SIAM J. Numer. Anal.* 1992, Vol. 29, pp. 1.
6. J. C. Mandal and S. M. Deshpande, "Kinetic flux vector splitting for Euler equations," *Comput. & Fluids*, 1994, Vol. 23, pp. 447.
7. A. Harten, P. D. Lax, and B. van Leer, "On upstream differencing and Godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws," *SIAM Rev.* 1983, Vol. 25, pp. 35.
8. M. N. Macrossan and R. I. Oliver, "A kinetic theory solution method for Navier-Stokes equations," *Int. J. Numer. Met. Fluids*. 1993, Vol. 17, pp. 177.
9. K. Xu, "Numerical hydrodynamics from gas-kinetic theory," Ph.D. thesis, Columbia University, 1993.

10. J-M, Moschetta and D. I. Pullin, "A robust low diffusive kinetic scheme for the Navier-Stokes/Euler equations," *J. Comp. Phys.* 1997, Vol. 133, pp. 193.
11. K. Xu and K. H. Prendergast, "Numerical hydrodynamics from gas-kinetic theory," *J. Comp. Phys.*, 1993, Vol. 109, pp. 53.
12. 채동석, 김종암, 노오현, "점성 및 비점성 유동장 해석을 위한 BGK 수치기법의 효율적 계산" 한국전산유체공학회지 3(2), 1999, pp. 65-72.
13. 노오현, "강건하고 정확한 수치기법의 개발 및 이를 응용한 비행체 내/외부 유동연구", 한국과학재단, 특정연구 제 1차 중간보고서, 1999.
14. 채동석, 김종암, 노오현, "BGK 수치기법의 개선에 관한 연구", 한국항공우주학회 춘계학술발표회 논문집, April 17, 1999, pp. 160-164, 한국항공우주학회, 대전.
15. D. Chae, C. Kim and O. Rho, "Efficient Calculations of a Gas-Kinetic BGK Scheme for Inviscid and Viscous Steady Flows," 14th AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, AIAA-99-3281, June 28-July 1, 1999, pp.276-286, AIAA, Norfolk, USA.
16. D. Chae, C. Kim, and O. H. Rho, "Development of an Improved Gas-kinetic BGK Scheme for Inviscid and Viscous Flows', *Journal of Computational Physics*, 2000, Vol. 158, pp 1-27.