

2차원 정렬 격자계에서의 불연속 갤러킨 기법과 Spectral Volume 기법 비교 연구

구 희 석^{1*}, 김 규 흥², 김 종 압²

A COMPARATIVE STUDY BETWEEN DISCONTINUOUS GALERKIN AND SPECTRAL VOLUME METHODS ON STRUCTURED GRIDS

H. S. Koo, K. H. Kim and C. A. Kim

Conventional high order interpolation schemes are limitative in several aspects mainly because they need data of neighboring cells at the reconstruction step. However, discontinuous Galerkin method and spectral volume method, two high order flux schemes which will be analyzed and compared in this paper, have an important benefit that they are not necessary to determine the flow gradients from data of neighboring cells or elements. These two schemes construct polynomial of variables within a cell so that even near wall or discontinuity, the high order does not deteriorate.

Key Words: 불연속 갤러킨 기법(Discontinuous Galerkin method), Spectral volume method, 이중 마하 반사 문제(Double-Mach reflection problem)

1. 서 론

기존의 고차 정확도를 가지는 많은 수치기법들은 인접한 격자들의 정보를 기반으로 하므로 벽면이나 불연속면 근처에서 고차 정확도를 유지할 수 없다는 단점이 있었다. 하지만 최근에는 불연속 갤러킨 기법(discontinuous Galerkin method), spectral volume method, spectral difference method 등 하나의 계산격자 내부에서 물성치를 고차 다항식의 함수로 표현하여 벽면이나 불연속면 근처에서도 고차 정확도를 유지하는 기법들이 개발되었다.

그 중 유한요소법에서 보존형 방정식을 풀 때 널리 쓰이고 있는 갤러킨 기법을 기반으로 개발된 불연속 갤러킨 기법은 물성치를 불연속 다항식으로 근사하는 방법으로 충격파와 불연속면을 잘 포착하는 등의 우수한 특성과 비정렬 격자계로

의 적용이 쉽다는 이점 때문에 많이 연구되고 있다[1,2]. 또한 최근에 개발된 spectral volume 기법은 하나의 계산격자 내부를 여러 개의 격자로 나누어 물성치의 분포를 구하여 계산격자 내부를 다항식으로 표현하는 방법으로 역시 비정렬 격자계로의 적용이 쉽고 보존법칙을 만족한다는 장점이 있다[3,4]. 반면 보존법칙에는 위배되나 수학적 유도가 용이하고 고차로의 적용이 쉽도록 spectral volume 기법을 변형시킨 spectral difference 기법이 최근에 등장하였다[5].

이 중 불연속 갤러킨 기법은 CFL 제한이 크고 진동이 필수적으로 발생하는 등의 한계에도 불구하고 지난 10여년동안 많이 연구되어왔다. spectral volume 기법 역시 충분히 발전된 유한체적법을 이용한다는 것과 고차로의 확장이 쉽다는 장점 때문에 활발히 연구되고 있다. 본 연구에서는 이 두 기법의 특성을 비교하고 각각의 수치 결과를 제시하겠다.

2. 수치 기법

2.1 Discontinuous Galerkin Method (DG)

오일러 방정식($\partial U/\partial t + \vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$)에 기하학적 함수

1 학생회원, 서울대학교 대학원 기계항공공학부

2 정회원, 서울대학교 기계항공공학부

* Corresponding author E-mail: chongam@snu.ac.kr

인 형상함수 W 를 곱하고 적분형을 취한 뒤 Green Theorem을 사용하여 변형시키면 다음과 같다.

$$\int_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial t} W d\Omega + \int_{\Omega} (\vec{F} \cdot \vec{\nabla}) W d\Omega + \int_{\Gamma} W \vec{F} \cdot d\Gamma = 0 \quad (1)$$

여기서 Ω 는 유한요소격자에서 노드 사이의 내부 공간을, Γ 는 경계를 의미한다. 이 때 마지막 항은 경계의 수직방향의 플럭스, \vec{F} 를 뜻하므로 수치 플럭스에 해당된다. 한편 형상함수 W 와 U 는 각 노드에서의 기저함수로 나눌 수 있으므로 1차원에서 각각 식 (2),(3)과 같이 표시할 수 있으며 j 노드를 기준으로 식 (1)을 식 (4)와 같이 표현할 수 있다.

$$W = \phi_j(x) \quad (2)$$

$$U(x, t) = \sum_{l=0}^k u^l(t) \phi_j(x) \quad (3)$$

$$\sum_{l=0}^k \frac{du^l}{dt} \int_{\Omega} \phi_j \phi_j d\Omega - \int_{\Omega} \vec{F}(U)(\phi_j)_x d\Omega + \tilde{\mathcal{F}}(U) \phi_j \Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} = 0 \quad (4)$$

식 (4)에서 형상함수의 가중치에 해당하는 u^l 값은 역행렬 계산과 격자 내부의 면적적분, 그리고 격자 경계에서의 플럭스 계산을 통해 얻어진다. 이 때 기저함수 ϕ 를 식 (5)와 같이 르장드르 다항식(Legendre polynomial)으로 나타내면 르장드르 다항식의 직교성 때문에 $\sum_{l=0}^k \int_{\Omega} \phi_l \phi_j d\Omega$ 부분이 대각행렬이 되어 역행렬 계산이 용이해진다. 행렬의 크기는 식 (6)과 같으며 이 관계를 이용하면 식 (4)는 식 (7)와 같이 변형된다. 여기서 x_j 는 격자 가운데의 좌표값이며 Δx 는 격자의 크기이다.

$$\phi_j(x) = P_l \left(\frac{2(x - x_j)}{\Delta x} \right) \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 P_l(s) P_j(s) ds = \left(\frac{2}{2l+1} \right) \delta_{jl} \quad (6)$$

$$\sum_{l=0}^k \left(\frac{du^l}{dt} + \frac{2l+1}{\Delta x} \left(- \int_{\Omega} \vec{F}(U)(\phi_l)_x d\Omega + \tilde{\mathcal{F}}(U) \phi_l \Big|_{x_{j-1/2}}^{x_{j+1/2}} \right) \right) = -1, \quad x_{i, k+1/2} = 1 \quad (11)$$

$$= 0, \quad x_{i, j+1/2} = -\cos\left(\frac{j\pi}{k}\right), \quad j=0, \dots, k \quad (12)$$

식 (7)은 $(k+1)$ 차 공간정확도를 가지는 불연속 갤러킨 기법을 나타낸다. 2차원 문제는 식 (7)을 각 좌표를 따라 전개하여 풀다. 격자 내부의 면적 적분 및 경계에서의 플럭스 계산을 위한 선 적분은 수치적분 방식인 Gaussian quadrature rule을 이용한다.

2.2 Spectral Volume Method (SV)

주어진 격자를 spectral volume이라 정의하고 이 격자를 작은 격자인 control volume으로 나누어서 계산하는 것이 spectral volume 기법이다. Control volume 각각에 대해 매 시간단계마다 업데이트를 하고 control volume의 물성치들을 이용하여 하나의 다항식을 구성한다. 이 다항식을 이용하여 spectral volume 내부에서 물성치 분포와 격자 경계에서의 물성치 값이 고차 정확도를 가지도록 한다. 그러므로 control volume의 개수는 정확도와 밀접한 관계가 있다. j 번째 spectral volume의 j 번째 control volume을 (i, j) 로, 물성치를 $\overline{Q}_{i,j}$ 로 표기하고 spectral volume 기법을 수식으로 나타내면 다음과 같다.

$$\overline{Q}_{i,j} = \frac{1}{\Delta x_{i,j}} \int_{i,j} Q(x) dx \quad (8)$$

$$p_j(x) = \sum_{r=0}^{k-1} a_r x^r \quad (9)$$

$$\overline{Q}_{i,j} = \int_{x_{i,j-1/2}}^{x_{i,j+1/2}} p_j(x) dx \quad (10)$$

식 (9)에서 k 는 control volume의 수, 혹은 공간정확도를 나타낸다. $(k-1)$ 차 다항식 $p_j(x)$ 는 원시함수를 이용하여 식 (10)이 만족되도록 결정할 수 있다. 이러한 spectral volume 기법은 하나의 다항식으로 spectral volume 전체의 물성치 분포를 얻을 수 있다는 장점이 있는 반면, 경계에서 Runge 현상이 일어난다는 단점이 있다. 이 현상을 최소화하기 위해 control volume의 분포를 다음과 같은 Gauss-Lobatto 분포를 이용하여 나누었다[3]. Spectral volume의 경계 좌표가 식 (11)과 같을 때 control volume의 경계 좌표는 식 (12)와 같이 결정된다.

Spectral volume 사이에서는 물성치가 불연속이므로 일반적인 공간 차분법을 이용하여 플럭스를 구하지만 Control volume 내부에서는 물성치가 연속이라 가정하고 한쪽의 플럭스값을 그대로 사용하면 되므로 계산이 효율적이다.

3. 결과 및 분석

3.1 1차원 스칼라 문제

두 기법의 불연속면 포착능력을 알아보기 위해 다음과 같은 수치 실험을 수행하였다. $(0, 2\pi)$ 구간에서,

$$u_t + u_x = 0, \quad u(x, 0) = \begin{cases} 1 & \pi/2 < x < 3\pi/2 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (13)$$

이고, 주기적인 경계조건을 주었다. 공간 차분법과 시간 적분법은 각각 upwind 방식과 외삽법을 사용하였다. 두 기법 모두 결과값이 제한자의 영향을 많이 받았는데 이 문제의 경우 superbee 개념의 TVD 기법을 이용하였다[1,3]. 40개의 격자에서 각 기법의 3차 정확도에 대해 시간이 50π 가 지난 후, 즉 주기가 25번 반복된 이후의 결과는 Fig. 1과 같다. 두 기법 모두 오랜 시간이 지난 후에도 불연속이 격자 6개 내에서 포착되는 등 좋은 특성을 보여주고 있다.

3.2 2차원 오일러 문제

2차원 비점성 압축성 유동의 문제로 이중 마하반사문제를 선택하였다. 이 문제는 충격파와, 불안정성을 보이는 복잡한 불연속면을 포함하므로 수치 실험에 적당하다. Fig. 3-5에서 코너는 $(\frac{1}{6}, 0)$ 이고 $x > \frac{1}{6}$ 인 곳이 경사진 부분에 해

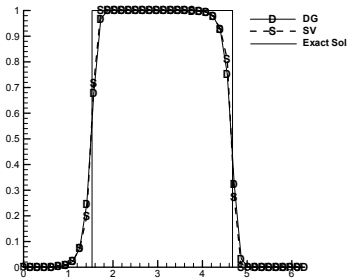


Fig. 1 DG and SV for the 3rd order accurate

당하며 초기에는 마하수 10에 해당하는 이동충격파가 코너에 60° 기울기로 위치해있다. 이동충격파 좌우의 물성치는 다음과 같다.

$$\begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix}_L = \begin{pmatrix} 8 \\ 7.1447 \\ -4.125 \\ 116.5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \rho \\ u \\ v \\ p \end{pmatrix}_R = \begin{pmatrix} 1.4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (14)$$

두 기법에서 공간 차분법은 정확도를 높이고 진동을 줄인 AUSMPW+ 기법[7]을 사용하였다. 특히 Spectral volume 기법에서는 spectral volume 사이와 제한자가 가해진 control volume 사이에서 수치기법을 이용하여 플럭스를 계산해야 한다. 제한자는 개념적으로 superbee 제한자에 해당되는, [1]에서 소개된 기울기 제한자(slope limiter)를 사용하였다. Spectral volume 기법에서 원시 변수가 아닌 보존 변수로 제한자를 가하므로 음압이 발생할 가능성이 있어서 에너지 대신 압력으로 제한자를 취하고 에너지는 계산된 밀도, 운동량, 압력으로 재계산하였다[3]. 불연속 갤러킨 기법은 보존변수를 형상함수인 식 (3)을 이용하여 근사한다. 2차 정확도의 2차원 문제에서는 불연속 갤러킨 기법에서 기저함수 ϕ 에 $1, 2(x-x_i)/\Delta x, 2(y-y_j)/\Delta y$ 등 세 함수를 사용하였다.

Fig. 2,3은 $\Delta x = \Delta y = 1/120$ 인 정렬 격자에서 불연속 갤러킨 기법과 spectral volume 기법을 사용하여 0.2초 후의 결과를 도식한 것이다. 두 기법 모두 충격파와 불연속면을 잘 포착한다는 것을 알 수 있다. 하지만 많은 진동이 생기는 것을 확인할 수 있는데 이는 다차원 효과를 고려하지 않은 제한자의 영향이다. 불연속 갤러킨 기법에 대해서 진동을 완화시킬 목적으로 superbee 개념의 제한자 대신 Van Leer 개념의 제한자[8]를 사용하여 물성치의 기울기, 즉 u' 을 재계산하면 Fig. 4와 같이 진동은 줄어들으나 불연속면 부근에서 해가 약간 무디어진다. 위는 [1,3]의 결과와도 비슷하다.

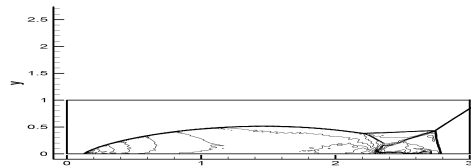


Fig. 2 DG, 2nd order with superbee-like limiter

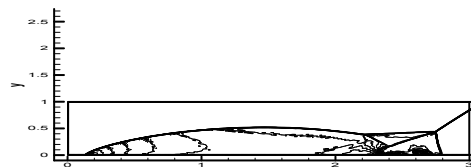


Fig. 3 SV, 2nd order with superbee-like limiter

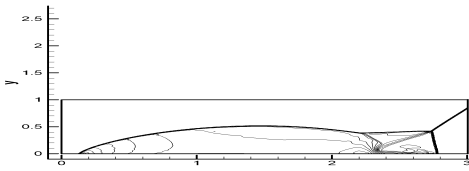


Fig. 4 DG, 2nd order with Van Leer-like limiter

3.3 비교 분석

1차원 스칼라 문제 및 2차원 비점성 유동 문제에서 불연속 갤러킨과 spectral volume 기법은 모두 불연속과 충격파를 잘 포착하는 성질이 있음을 확인하였다. 또한 제한자의 영향을 많이 받고 진동의 제어에 어려움이 있었다. 불연속 갤러킨 기법에서는 진동 제어를 위해 추가로 수치점성을 더하기도 하지만 강건하지 못하고 해가 부정확해질 염려가 있다. Zhang과 Shu[6]의 Fourier 분석 결과를 보면 spectral volume의 경우 불연속 갤러킨 기법에 비해 적게는 1.5배, 많게는 4배 이상 오차가 크다고 한다. 그러나 [6]에서의 refinement test에서 확인할 수 있듯이, 두 기법 모두 원하는 정확도를 구현할 수 있기 때문에 수치 결과에서는 이러한 경향을 발견하기 어렵다.

효율성 측면에서는, 위 수치실험의 2차 정확도에서 1번 반복 계산에 소요되는 평균 시간을 비교한 Table 1과 같이 spectral volume 기법이 더 많은 시간을 요구한다. 그 원인은 spectral volume 기법이 control volume 값들을 각각 업데이트 해야하므로 실질적으로 격자가 더 늘어난 셈이기 때문이다. 또한 각 control volume의 물성치를 바탕으로 spectral volume 내부를 고차식으로 만드는 과정이 추가로 필요하다. 하지만 불연속 갤러킨 기법의 CFL 제한이 spectral volume 기법에 비해 크다[1,6]. 알고리즘 구현 과정에서는 spectral volume 기법이 기존의 유한체적법과 맥락을 같이 하기 때문에 코딩이 더 쉽고 기존코드와의 결합성도 높다.

Table. 1 CPU time comparison (for 1 iteration)

	1D scalar problem	2D euler problem
DG	9.375×10^{-5}	1.8578
SV	1.563×10^{-4}	10.1844
difference	1.67 times	5.48 times

4. 결 론

불연속 갤러킨 기법과 spectral volume 기법을 수치실험을 통해 비교하였다. 정확성 측면에서는 두 기법이 제한자 설계가 어렵고 진동이 나타난다는 문제가 있지만 정렬 격자에서 불연속과 충격파를 잘 포착하는 결과를 보여주었다. 효율성 측면에서는 불연속 갤러킨 기법의 계산 시간이 더 적으나 spectral volume 기법이 코딩이 더 쉽다는 것을 알 수 있었다. 진동을 제거하기 위해 다차원 효과를 고려한 제한자를 적용할 예정이다. 또한 이 두 기법은 비정렬 격자에서 쉽게 고차 정확도를 가질 수 있다는 장점이 있으므로 비정렬 격자로서의 적용이 추후에 이루어질 것이다.

참고문헌

- [1] Cockburn, B. and Shu, C.W., 2001, "Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Methods for Convection-Dominated Problems," *J. of Scientific Computing*, Vol.16-3, p.173-261.
- [2] Cockburn, B. and Shu, C.W., 1998, "The Runge-Kutta Discontinuous Galerkin Method for Conservation Laws V," *J. of Computational Physics*, Vol.141, p.199-224.
- [3] Wang, Z.J. et al., 2004, "Spectral (Finite) Volume Method for Conservation Laws on Unstructured Grids IV: Extension to Two-Dimensional Systems," *J. of Computational Physics*, Vol.194, p716-741.
- [4] 김성수, 2005, "Monotonicity Preserving Spectral Volume 기법", 한국항공우주학회지, Accepted.
- [5] Liu, Y. et al., 2004, "Discontinuous Spectral Difference

Method for Conservation Laws on Unstructured Grids,"
Proceedings of the 3rd ICCFD.

- [6] Zhand, M. and Shu, C.W., 2005, "An Analysis and a Comparison between the Discontinuous Galerkin and the Spectral Finite Volume Methods," *Computers & Fluids*, Vol.34, p.581-592.
- [7] Kim, K.H., Kim, C. and Rho, O.H., 2001, "Methods for the Accurate Computations of Hypersonic Flows ," *J. of Computational Physics*, Vol.174, p.38-80.
- [8] Hirsch, C., 1990, *Numerical Computation of Internal and External Flows*, Wiley, New York, p.536-550.