

# Q-GERT를 利用한 確率的 네트워크의 分析

## (An Analysis of Stochastic Network Using Q-GERT)

강 석 호\*  
김 원 경\*\*

### Abstract

GERT modeling is in a dynamic stage of development. One of the most exciting and useful new developments in GERT modeling and Simulation is the modeling technology and computer package called Q-GERT.

As the name implies, this provides the capability to analyze complex networks of queueing systems. The modeling approach is quite similar to GERT, but includes queue nodes called "Select" nodes, which allow a considerable amount of logic to be included in the analysis of complex networks of multichannel, multiphase queueing systems should find the Q-GERT package of considerable interest.

상태와 意思決定의 能力을 부여함으로써 GERT를 보완시킨 것이다.

### 1. 序 論

Q-GERT는 네트워크 모델화를 위한 技法이며 컴퓨터 分析 도구이다.

GERT는 Graphical Evaluation and Review Technique의 약자이다. 여기에다가 Q는 대기시스템의 도식적 모델화를 할 수 있음을 나타내기 위하여 붙여진 것이다. GERT나 PERT와 이름이 유사한 것은 Q-GERT가 活動(activity)의 집합체로 구성되는 프로젝트를 모델화하기 위하여 사용할 수 있다는 것을 알리기 위하여 쓰여진 것이다. 事實上 GERT는 PERT의 概念을 一般化한 것이며 Q-GERT는 대기(Quene)현

Q-GERT의 基本的인 長點은 직접적으로 컴퓨터 分析이 可能케하여 圖式的으로 시스템을 모형화할 수 있는 方法에 있다. Q-GERT 分析 프로그램은 이러한 컴퓨터 分析을 修行할 수 있도록 開發되어 있다. Q-GERT는 제조과정의 상태, 防衛 시스템과 서비스 시스템을 연구할 수 있도록 개발되어 왔다.

産業工學者, 經營管理者 및 Operations Researcher 등에게는 모형화와 分析 및 意思決定의 圖式的 도구로서 사용된다.

電氣공학자를 위한 회로의 Diagram, 기계 및 토목공학자를 위한 signal flow graph와 block diagram 그리고 경영관리자를 위한 PERT/CPM 네트워크에 사용되는 것과

\* 서울공대 산업공학과

\*\* 흥능기계공업회사

유사한 機能을 발휘한다. Q-GERT 네트워크는 活動, 서어비스 종사자와 대기 등으로 構成되는 시스템의 모형이다.

Q-GERT는 製造, 재고관리 및 서어비스 기구의 問題解決을 위한 프로젝트 관리, 위험 분석과 의사결정 등에 使用될 수 있다. 基本的으로 Q-GERT는 問題의 해결을 위하여 4 가지 단계를 시스템적인 접근 方式으로도 입한다. 첫째로 시스템을 의미가 있는 重要な 要素들로 나눈다. 둘째로 이 要素들을 시스템의 네트워크 모형에 통합시킨다. 마지막으로 네트워크 모형의 평가를 통해 수행성을 측정한다. Q-GERT는 그 分析을 위해 시뮬레이션 方法을 使用하므로 Q-GERT 分析 프로그램은 GPSS 등과 같은 일종의 시뮬레이션 言語로 볼 수 있다.

## 2. Q-GERT 네트워크의 특징

Q-GERT 네트워크는 어떤 시스템의 모형을 形成하기 위하여 論理的인 순서로 연결되어 있다는 점에서 PERT 형태의 네트워크와는 다소 비슷하다. 그러나 Q-GERT 네트워크는 PERT 네트워크의 제한적 要素들을 모두 없앨 수 있다는 점에서 PERT와 좋은 대조를 이루고 있다.

### ①確率의 分岐(Probabilistic branching)

PERT 네트워크의 모든 活動은 同時に 發生되어야만 한다. 따라서 네트워크 출발점으로부터의 分岐는 確定的이며 모든 분기는 반드시 이루어져야 한다.

Q-GERT 네트워크는 確率的인 분기, 確定的인 분기 또는 이들의 어떤 복합형태라도 可能하다. 네트워크 형태로 구성되는 많은 시스템에서는 실제 상황을 나타내는데 있어 確率的인 분기가 要求된다.

### ②네트워크의 환원성(Feed back)

PERT 네트워크는 환원이 許容안된다.

따라서 活動은 다시 되풀이 될 수가 없고 이미 實現된 事件에서 끝날 수도 없다. Q-GERT는 환원(feed-back)이 可能하므로 어떤 活動을 되풀이 할 수도 있으며 같은 노드를 여러번 實現시킬 수 있다. 또한 이 환원 能力과 確率의 分岐가 GERT 네트워크의 數學的인 分岐方法보다는 시뮬레이션 技法을 많이 使用케 하는 主要因이 되고 있다.

### ③노드의 實現論理

PERT에서는 한 事件에서 끝나는 모든 活動들은 반드시 그 事件이 實現되기 以前에 수행되어야만 한다. 또한 어떠한 事件도 두번 이상은 實現될 수 없다.

Q-GERT에서 노드의 實現은 그 노드에 관련된 活動이 한번 이상 發生되도록 규정할 수 있다. 한 노드의 完全한 實現을 위해 要求되는 回數는 각각 그 노드의 첫번째 實現과 같은 노드의 잔여 實現回數로 나눌 수 있다. 첫째로 Q-GERT 네트워크는 환원될 수 있으므로 노드의 復數實現이 일어날 수 있다.

노드의 첫번째 實現回數와 잔여실현 횟수는 서로 다를 수도 있다.

### ④活動 時間의 分布

PERT에서는 活動 時間의 分布가 3個의 母數를 갖는 베타分布로 限定되어 있으나 Q-GERT에서는 自由로 이 活動의 時間分布를 선택할 수 있다. 이 分布는 다음과 같은 것들이 있다.

1. Beta 分布 (BE)
2. PERT用 Beta 分布 (BP)
3. 상수 (CO)
4. Erlang 分布 (ER)
5. 指數 分布 (EX)
6. Gamma 分布 (GA)

7. 正規 分布 (NO)
8. Poisson 分布 (PO)
9. Triangular 分布 (TR)
10. 일양 분포 (UN)
11. 임의로 지정하는 分布 (UF)

이러한 分布들 외에 매 노드의 實現時마다 증가하는 값을 갖는 것 (IN)과 정보 전달의 속성치 (attribute) 의 要素를 갖는 것(AT) 등이 使用된다.

### ⑤네트워크의 實現

PERT는 프로젝트의 완수를 表現하여 주는 마지막 노드는 단지 하나 뿐이다. Q-GERT는 복수개의 종점노드가 使用되므로 必要한 型態의 네트워크를 만들수 있다.

## 3. Q-GERT 네트워크의 基本要素

### ①活 動(Activity)

活動은 정보전달 과정에서 수행되며 흐름의 方向이나 進行등을 나타낸다.

活動과 관련되는 특성은

- ㄱ. 確率 또는 條件
- ㄴ. 活動을 위한 지연시간을 나타내는 함수와 母數
- ㄷ. 活動의 번호

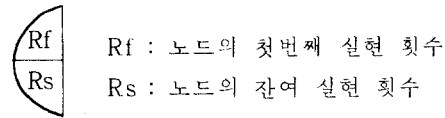
### ②正規 노드

正規 노드는 다음과 같은 機能을 修行하는데 使用한다.

- ㄱ. 노드를 實現시키기 위한 정보전달의 數를 規定
- ㄴ. 노드를 實現시켜주는 정보 전달이나 時間의 통계량 수집
- ㄷ. 정보 전달에 속성요소값을 부여
- ㄹ. 다음 活動을 決定하기 위한 分岐 作業

각 정규 노드는 정보의 흐름을 받아 들이는 入力과 내보내는 出口가 있다.

노드를 實現키 위한 정보 전달의 횟수 규정에 대한 기호는 다음과 같다.



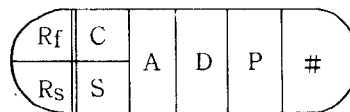
노드의 출력측은 노드로부터 分岐가 發生하는 형태를 나타낸다.

### ③통계 노드

正規 노드의 中間部分은 속성 요소의 선택 基準을 정하는데 사용된다. 즉 노드 또는 이 노드로 흘러 들어오는 정보 전달의 속성 요소에 대한 통계량 수집의 基準이다. 노드에서의 통계량을 수집하는 규정은 노드의 최초 실현 시각을 기록, 노드의 모든 실현 시각을 기록, 노드의 실현 간격 시간을 기록, 정보 전달이 表示된 시각으로부터 이 노드에 그 정보 전달이 도착할 때 까지의 時間을 記錄, 노드의 첫번째 실현 시각으로부터 마지막 실현 시각까지의 지연된 시각을 기록하는 것 등이 있다.

### ④속성 요소(Attribute)의 指定

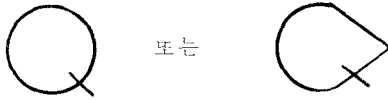
속성 요소의 값들도 정규노드의 中心部에 기술하며 속성요소의 번호, 할당된 형태와 모수등이 指定된다. 어느 한 노드에서 속성요소의 重復指定이 可能하다. 속성 요소 집합의 유치 기준, 통계량 수집 表示, 그리고 속성 요소의 지정 등의 復合형태를 다음 그림과 같이 表示한다.



- 여기서 C = 속성요소의 집합 유치기준  
S = 통계량의 수집 형태  
A = 지정된 속성 요소의 번호  
D = 속성 요소 A의 機能 또는 분포  
P = 속성 요소 A의 母數 규정

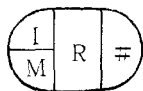
⑤ 대기 노드(Queue Node)

대기 노드는 정보 전달이 나아가기 위해 대기하여야 하는 곳에 위치한다. 대기 노드를 나타내는 기본적인 기호는 다음과 같다.



대기 노드가 活動의 出發노드일 때 活動은 서어비스 活動이 된다. 대기 노드와 活動의 조합은 서어비스 시스템을 나타낸다. 대기 노드로부터는 오직 하나의 서어비스 活動이 도출될 수 있으며 만일 確率的 分岐가 대기 노드로부터 發生하면 이 대기 노드를 出發 노드로 삼는 모든 가지들은 같은 서어비스 活動이다. 復數個의 서어비스 活動이 하나의 대기노드에 연결되어 있을때는 하나의 서어비스 活動만이 선택되도록 한다. 이러한 理由때문에 復數個의 活動이 대기 노드와 연결되어 있을 때 다음에 說明할 선택노드 (Select Node) 가 必要하다.

네트워크 다이어그램으로 나타날때는 다음과 같이 나타낸다.



- I = 처음의 대기수
- M = 최대 대기 허용수
- R = 대기중에 있는 정보전달의 등급과정
- # = 대기 노드 번호

대기 노드는 정보 전달의 最大數가 許用 범위를 초과하지 않는 이상 항상 그 정보 전달을 받아 들인다. 따라서 대기 노드에서는 노드의 實現回數의 概念은 없다. 대기 노드에 있는 정보 전달을 위한 등급의 과정 (R)은 다음 중의 하나가 된다.

- ㄱ. 先入先出法 (FIFO)
- ㄴ. 後入先出法 (LIFO)
- ㄷ. 最少 속성요소 우선법
- ㄹ. 最大 속성요소 우선법

⑥ 대기 행렬의 流出(Balking)

대기 행렬이 대기 노드에서 最大許容 대기수를 초과한 後에 移入되는 경우에는 그 대기 행렬을 대기 노드로부터 流出 시킬수 있다. 流出된 대기 행렬은 그 대기 노드로부터 네트워크의 다른 노드로 向하게 된다.

⑦ 대기 행렬의 봉쇄(Blocking)

대기 행렬의 대기가 막차서 移入이 許容되지 않는 경우에는 許容이 可能할때까지 기다릴수가 있는데 이를 "봉쇄되었다 (blocking)"고 한다. 대기 노드에서 發生되는 봉쇄 現狀은 그 대기 노드로 移入되는 活動이 반드시 서어비스 活動이라야 한다. 즉 대기 노드를 出發點으로 한 活動이다. 봉쇄 現狀이 發生하면 봉쇄된 대기 행렬은 비록 서어비스가 완료되었다 할지라도 다음의 서어비스 活動은 이루어지지 않는다.

⑧ 선택 노드(Select Node)

앞에서 얘기한 바와 같이 復數個의 서어비스 活動이 하나의 대기 노드와 關聯되어 있을 때 여러명의 서어비스 종사자 중 누구를 선택할 것인가 하는 政策이 必要하게 된다. 이것이 선택 노드 機能중의 하나이다. 첫째로 여러개의 서어비스 活動 가운데 하나의 서어비스 活動만이 利用可能할 때 어느것을 선택하느냐 하는 것이다. 여기서 선택 노드는 대기 행렬이 서어비스 活動을 받을 수 있도록 하기 위해 여러개의 대기 노드 중에서 선택해야 한다. 둘째로 선택 노드에 의해 수행되는 다른 機能은 대기 노드가 병렬로 여럿이 있고 이들중 어느 한 대기 노드를 선택하여 대기 행렬을 進行시켜야 할 것인가의 決定이다. 선택 노드에 使用되는 記号는 다음과 같다.



# = 대기 노드의 번호

선택 노드는 여러개의 대기 행렬로부터 선택하는 過程과 여러명의 서어비스 종사자들로부터 어느 하나를 선택하는 과정은 14개가 있

고 서어비스 종사자를 선택하는 과정으로는 8 개가 있다. 이들은 다음과 같다.

〈復數 서어비스 活動中 선택 노드가 선택하는 우선 정책〉

1. POR : 좋아하는 우선 순위
2. CYC : 주기적인 선택 순위
3. RAN : 동일 확률을 갖는 임의의 순위
4. LBT : 最大의 분주시간 ( busy time ) 우선 순위
5. SBT : 最小의 분주시간 우선 순위
6. LIT : 最大의 한가한 시간 ( Idle time ) 우선 순위
7. SIT : 最小의 한가한 시간 우선 순위
8. RFS : 미리 규정된 확률을 갖는 임의적 우선 순위

〈復數個의 대기 행렬중 선택노드가 선택하는 우선 정책〉

1. POR : 좋아하는 우선 순위
2. CYC : 처음의 대기에서 마지막 대기까지의 주기적인 우선 순위
3. RAN : 동일 확률을 갖는 임의의 우선 순위
4. LAV : 最大 대기 平均直 행렬 우선순위
5. SAV : 最小 대기 平均直 행렬 우선순위
6. LWF : 最大의 대기 時間을 갖는 행렬 우선 순위
7. SWF : 最小의 대기 時間을 갖는 행렬 우선 순위
8. LNQ : 最大 대기 행렬 우선
9. SNQ : 最小 대기 행렬 우선
10. LNB : 最大 流出 ( balking ) 행렬 우선 순위
11. SNB : 最小 流出 행렬 우선 순위
12. LRC : 最大 未使用 행렬 우선
13. SRC : 最小 未使用 행렬 우선
14. ASM : 組立型 ( 모든 대기 행렬들은 서어비스가 시작되기 전에는 기다려야 한다. AND 論理에 使用)

선택 노드의 記号는 다음에서 지시하는 바와 같이 적용한다.

QSP	#
SSP	

QSP는 대기의 선택 과정  
SSP는 서어비스 종사자의 선택 과정

정보의 전달이 대기 노드로 진행하기 위해 선택 노드를 거쳐야 할때 대기 노드에서 發生하는 대기의 流出 現狀 ( balking ) 과 봉쇄현상 ( blocking ) 이 선택 노드에서도 적용된다. 선택 노드로부터 流出에 쓰이는 기호는 대기 노드일때와 同一하다. 또한 선택 노드는 정보 전달의 組立에도 使用된다. 따라서 3個의 서로 다른 정보 전달이 進行되기 전에 利用可能 하다면 그 네트워크에서는 組立点이 必要케 된다. 이것은 선택 노드를 ASM(Assembly Mode, 즉 대기의 선택 과정이다) 으로 規定된 대기 선택 과정과 함께 使用하므로써 可能하다.

⑨活動의 修正

어느 活動이 完了되면 이에 근거한 다른 노드가 네트워크 내에서 대체 될수가 있다. 노드의 대체는 그 노드에서 수행되는 機能이 새로운 노드로 바뀔을 나타낸다. 正規노드의 예를들면 노드가 實現된 후에 통계량의 수집, 속성요소의 값, 분기 작업 등이 새로 指定된 노드에서 그에 대응하는 機能이 이루어진다. 이와같이 수정한 効果는 대체되어야 할 노드가 實現된 후에 發生한다.

마찬가지로 대기 노드와 선택 노드의 活動도 수정할 수가 있다.

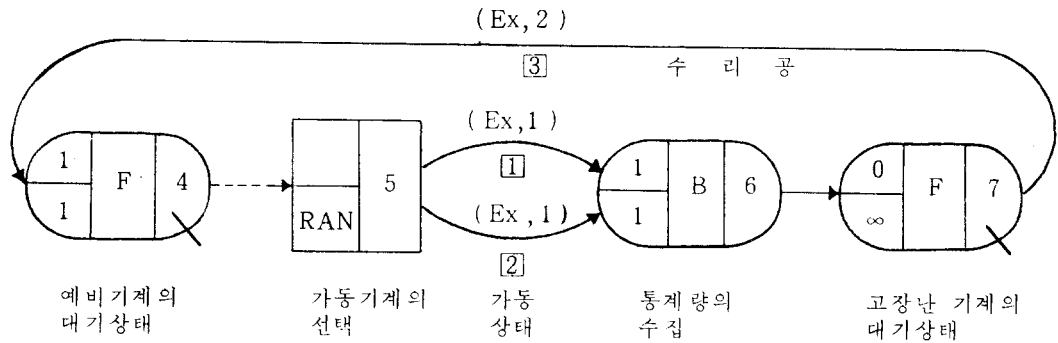
4. Q - GERT 네트워크를 利用한 대기 시스템의 分析 예

앞에서 說明한 Q-GERT의 基本概念을 利用하여 간단한 대기 시스템을 살펴 보기로 한다. 여기서 分析할 문제는 가동기체가  $m$  승

이고 예비기계가  $n$  대이며 모두 동일한 성능을 지녔다고 할 경우  $p$  대의 기계를 동시에 수리할 수 있는 설비가 갖추어져 있는 경우이다.

그 예로  $m=2$ ,  $n=1$ ,  $p=1$  이고  $\lambda=1$ ,  $\mu=2$  인 M/M/1 모델을 생각하자. 이 경우 두대의 가동 기계는 가동상태로부터 수리공의 수리를 必要로 하는 비가동 상태로 그 상태가 바뀐다고 생각할 수 있으며, 다시 가동 상태로 돌아 갈 수 있다. 그러므로 기

계가 실제 시스템에서는 제자리에 머물지만 기계의 상태는 변화하고 있고 이는 바로 정보의 전달이 각각의 서어비스 종사를 앞에 둔 두개의 서어비스 기구 사이에 흐르고 있다고 볼 수 있는 것이다. 이러한 관점에서 볼때 Q-GERT 네트워크 모델은 기계를 포함하는 가동상태, 예비 기계 그리고 수리공 등으로 나타내어 진다.



여기서 대기 노드 4는 예비 기계의 대기 상태를 나타내는 것으로써 처음에 한대의 예비기계를 포함하고 있다.

대기 상태에서 처음에 한명이 있으므로 대기 다음에 있는 수리공들은 바쁜 상태이다. 활동 1과 2는 각 기계의 작동 시간을 나타내 주는 것으로 이 경우에도 기계가 고장날때까지의 시간이다. 이 활동은 指数分布를 따른다고 할때 각 고장 간격의 平均時間이 1 시간이라고 가정하였다. (parameter 1) 선택 노드 5는 기계가 2대가 있는 경우 예비 기계가 어느 기계로 서비스 할 것인가를 선택하는 것이다. 여기서는 두대의 가동 기계의 성능이 동일하다고 가정하였으므로 선택 기준은 임의 (RAN) 로 하였다.

다음에 통제 노드 6은 각 활동 1과 2가完了되는 시간의 간격을 나타낸다. 즉 각 기계의 고장나는 시간의 간격을 관측한다. 기계가 고장을 일으켰을 경우 대기 노드 7에

의해서 나타난것 처럼 고장난 기계의 대기로 들어가게 된다. 만일 예비 기계가 利用可能하다면 그 기계는 다른 생산 cycle을 시작하여 고장을 일으킬때까지 지속한다. 대기 노드 7에서 고장을 일으킨 기계는 만일 수리공이 利用可能한 상태가 아니라면 대기 상태에 있게 된다. 그렇지 않다면 기계의 수리가 고장을 일으킨 기계에 대하여 즉각 시작될 수가 있다. 수리가 고장난 기계에 대하여完了되면 이 기계는 다시 대기 노드 4로 들어가서 예비 기계의 상태로 되거나 아니면 바로 가동 기계의 상태로 들어가게 된다.

이 문제의 Run time을 100時間으로 잡았고 5번의 반복을 행하였을 경우 결과는 다음과 같다. 이 시간동안에 平均적으로 대기 노드 4에서 가동 상태의 기계로 되기 위한 예비 기계의 대기수는 0.2754 대이다. Run하는 도중에 어떤 한時刻에서는 대기하는 예비 기계가 한대도 없고 다른 시각에서는 한

대가 기다리고 있음을 알 수 있다. 이같은 현상은 시뮬레이션의 초기 상태에서 발생한다. 초기 상태의 조건을 달리 하므로써 이러한 현상이 Run하는 도중에 실제로 발생할 수 있는가를 결정할 수 있다. 예를 들어 Run하는 초기 시각에 수리 기계를 0대로 하던가 또는 통계량의 수집을 시작후 다른 시각에 수집한다든가 하는 방법을 사용한다. 대기 노드 7에서의 평균치는 고장난 기계의 평균 대수이며 수리공이 바쁜 상태이므로 기다려야 하는 기계의 대수이다. 이 값은 0.603으로

나타났다. 가동 상태에 있는 기계의 평균 효율은 1번 活動의 경우 0.6924 2번 活動의 경우 0.7049이다.

1번 活動의 경우 가장 긴 idle time은 0.8247시간이며 가장 긴 busy time은 15.16시간이다.

3번 活動은 수리공의 效率을 나타낸다. 바쁜 수리공의 平均 효율은 0.73이고 가장 긴 idle time은 3.76시간이며 가장 긴 busy time은 16.72시간으로 나타났다.

GERT SIMULATION PROJECT									
** FINAL RESULTS FOR 5 SIMULATIONS **									
NODE	PROBA-BILITY	MEAN	STD. DEV.	STD. DEV. OF MEAN	COEFF. VAR.	NO OF OBS.	MIN.	MAX.	STAT TYPE
3	1.0000	100.0000	0.0	0.0	0.0	5.	100.0000	100.0000	F
6	1.0000	0.7024	0.6416	0.0243	0.9135	700.	0.0029	4.2330	B
** AVERAGE NUMBER IN Q-NODE **					** NUMBER IN Q-NODE **				
NODE	MEAN	STD. DEV.	NO. OF OBS.	MIN.	MAX.	MIN.	MAX.		
4	0.2754	0.0412	5.	0.2057	0.3138	0.	1.		
7	0.6027	0.0660	5.	0.5426	0.7147	0.	2.		
** AVERAGE SERVER UTILIZATION **					** TIME PERIODS OF SERVER **				
SERVER NO.	MEAN	STD. DEV.	NO. OF OBS.	MIN.	MAX.	LONGEST PERIOD IDLE	LONGEST PERIOD BUSY		
3	0.7246	0.0412	5.	0.6862	0.7943	3.7546	16.7240		
1	0.6924	0.0443	5.	0.6235	0.7347	3.8247	15.1575		
2	0.7049	0.0256	5.	0.6618	0.7256	4.4486	13.3974		
** AVERAGE NO. BALKING PER UNIT TIME **									
NODE NO.	MEAN	STD. DEV.	NO. OF OBS.	MIN.	MAX.				
4	0.0	0.0	5.	0.0	0.0				

## 5. 結 論

이상에서 살펴본 바와 같이 Q-GERT 네트워크 모델은 Queuing이 發生하는 시스템에는 언제나 거의 現實에 맞게 세워질 수 있는 長점이 있다. 특히 分布函數가 理論値와 잘 부합되지 않는 경우이라도 使用者가 定義한 分布函數를 適用시킬수가 있으므로 여타의 시뮬레이션 言語보다도 더욱 융통성을 발휘한다. Queuing 시스템뿐만이 아니라 確率的 네트워크로 解決할 수 있는 경우에는 모두 응용이 가능하다. 例를 들어 재고 관리의 問題, 샘플링 檢사의 方法, PERT의 critical path의 確率을 구하는 문제라든지 Reliability, R & D 등등 그 應用 범위는 얼마든지 넓힐 수가 있다. GERT의 分析的 技法만으론 解決키 힘든 경우에는 Q-GERT의 힘을 빌려서 쉽게 문제의 해결책을 얻을 수 있으므로 앞으로 意思決定을 위한 도구로서 각광을 받을 것이다.

## 參 考 文 獻

1. Graff, George, "Simple Queueing Theory Saves unnecessary Equipment", Journal of Industrial Engineering, February 1971, pp. 15-18.
2. Laurence J. Moore and Edward R. Clayton, GERT Modeling and Simulation, PETROCELLI / CHARTER, NEW YORK, 1976.
3. Pritsker, A. A. B and Happ, W. W., "GERT: Graphical Evaluation and Review Technique, part I, Fundamentals", Journal of Industrial Engineering, Vol. 17. No. 5, pp. 267-74, 1966.
4. \_\_\_\_\_ and Whitehouse, G. E., "GERT: Graphical Evaluation and Review Technique. Part II, Applications", Journal of Industrial Engineering, Vol. 17. No. 6, pp. 293-301, 1966.
5. \_\_\_\_\_, Modeling and Analysis using Q-GERT networks, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1978.
6. \_\_\_\_\_, The Q-GERT user's manual Pritsker & Associates, Inc, 1974.
7. Whitehouse, G. E., Systems Analysis using Network Techniques, Prentice - Hall, Inc, Englewood Cliffs, New Jersey, 1973.