



저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)

공학석사학위논문

**POD 축소기법을 이용한 유연 다물체
보 구조물의 동역학적 해석**

**Dynamic analysis of flexible multibody beam
structure using POD-based reduction method**

2016 년 8 월

서울대학교 대학원

기계항공공학부

김 현 일

초록

유연 다물체 동역학 연구는 1970년대부터 활발히 연구가 진행되었다. 약 50년이라는 세월이 흘렀음에도 불구하고, 여전히 계산에 많은 전산 자원을 필요로 한다. 유연 다물체 동역학에서는 절대 좌표계와 상대 좌표계를 함께 사용하는 FFRF(Floating Frame Reference Formulation)가 가장 많이 사용된다. FFRF에서는 질량행렬을 구성하는 과정에서 원심력과 코리올리 힘이 나타난다. 반면에 절대절점 좌표계에서는 절대 절점 좌표만을 사용하기 때문에 이 힘들이 나타나지 않고 내력이 비선형으로 나타난다. 따라서 구조 비선형 방정식과 같은 모양을 만들 수 있고 일반적인 비선형 구조해석에 사용할 수 있는 축소기법들의 적용이 가능하다. 이에 본 논문에서는 모드 축소기법 중 하나인, POD(Proper Orthogonal Decomposition) 축소 기법을 이용하여 절대 절점 좌표계를 갖는 유연 다물체 동역학 문제에 적용했다. 절대 절점 좌표계로 이루어진 유연 다물체 동역학 문제에 POD 축소기법을 적용하여, 전체시스템에서 문제와 결과를 비교하여 그 효율을 검증하였다.

Keywords : 유연 다물체 동역학, 절대 절점 좌표계, POD, 축소법

Student Number : 2014-22471

Table of Contents

초록.....	i
List of Figures.....	iii
List of Tables.....	iv
1. 서론.....	1
2. 절대 절점 좌표계.....	3
2.1 좌표계 정의.....	3
2.2 질량행렬 및 강성행렬 구성.....	6
2.3 운동방정식.....	9
3. POD 축소기법.....	9
3.1 특정 구속조건이 없는 모델에서의 POD 축소.....	10
3.2 특정 구속조건이 있는 모델에서의 POD 축소.....	11
4. 수치예제.....	15
4.1 진자 모델.....	15
4.2 4 절 링크가 포함된 보 구조물.....	18
5. 결론.....	21
참고문헌.....	21
Abstract.....	24

List of Figures

그림 1. 변형 전.후의 보 구조물의 임의의 점까지의 절대 절점 좌표.....	4
그림 2. 변형 전.후의 보 요소.....	8
그림 3. 한쪽 끝이 고정된 진자 모델.....	16
그림 4. 시간에 따른 진자 모델의 움직임.....	16
그림 5. 진자 모델 끝점에서의 Y 좌표.....	17
그림 6. 전체시스템과 POD 축소시스템에서 걸린 계산 시간.....	17
그림 7. 4 절 링크가 포함된 보 구조물.....	19
그림 8. 시간에 따른 4 절 링크가 포함된 보 구조물의 움직임.....	19
그림 9. 그림 6 의 A 점에서의 Y 좌표.....	20
그림 10. 전체시스템과 POD 축소시스템에서 걸린 계산 시간.....	20

List of Tables

표 1. 한쪽 끝이 고정된 진자 모델의 물성.....	15
표 2. 4 절 링크가 포함된 보 구조물의 물성.....	18

1 서론

최근 대변형이 발생하는 유연 다물체 동역학(flexible multibody dynamics) 관련 문제들에 많은 관심이 몰리고 있다. 근래에 가장 많이 사용하고 있는 Floating Frame of Reference Formulation(FFRF)의 이용을 통해서 대변형의 모사가 쉽지 않아 Shabana 등은 절대 절점 좌표계(Absolute Nodal Coordinate Formulation, ANCF)를 이용해 대변형 문제에 접근을 하고 있다[1-4]. 하지만 이처럼 절대 절점 좌표계를 이용한 대변형을 동반한 유연 다물체 동역학 해석에는 상당한 연산시간과 전산자원을 요구한다. 이는 첫째, 절대 절점 좌표계 요소의 비선형 내부 에너지의 구성 때문이고, 둘째, 유연 다물체 동역학 시스템의 업데이트를 위한 반복적인 계산 때문이다. 또한 요소의 수가 늘어날수록 많은 연산시간과 전산자원을 소모한다.

이에 절대 절점 좌표계에서의 축소기법은 계속해서 많은 사람들이 연구하고 있다. 대표적으로 Gerstmayr, Kobayashi 등이 다양한 방법을 통해 연구를 진행을 하였지만 아직까지 그 효율이 극대화 되지 못했다 [5-7]. FFRF등 다른 좌표계에서는 각 물체마다의 상대 좌표계를 기준으로 삼기 때문에 원심력, 코리올리힘 등이 나타나 흔히 사용하는 비선형 구조 동적 해석의 축소기법을 적용하기 쉽지 않다. 그에 반해 절대 절점 좌표계에서는 질량행렬이 한 요소 내에서 일정한 값으로 나타나고

강성행렬이 비선형을 띄는 비선형 구조 동적 해석과 같은 식으로 구성이 되어 기존의 비선형 구조 동적 해석을 적용하기 용이하다.

이에 본 논문에서는 POD 축소기법을 적용하여 유연 다물체 보 구조물의 동역학 해석을 함으로 정확도를 유지하면서 해석시간을 줄여 효율성을 높이는 과정을 설명한다. 한쪽 끝이 핀으로 고정된 진자 모델, 4절 링크가 포함된 보 구조물의 문제에 적용해 그 효율성을 검증한다.

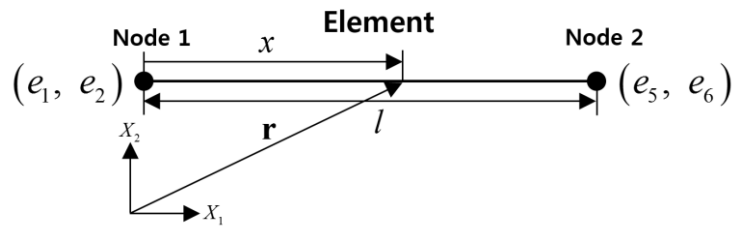
2 절대 절점 좌표계

유연 다물체 동역학에서 가장 많이 사용하고 있는 좌표계는 Floating Frame of Reference Formulation 로, 절대 좌표계(absolute coordinate)와 상대 좌표계(local coordinate)의 조합으로 이루어져 있다. FFRF는 두가지 좌표계를 동시에 사용하기 때문에 상대 좌표계를 이용하여 변형을 다루어 강성행렬은 선형으로 나타난다. 반면, 절대 좌표계, 상대 좌표계의 조합에서 나타나는 관성력 등에 의해 질량 행렬은 비선형으로 나타난다.

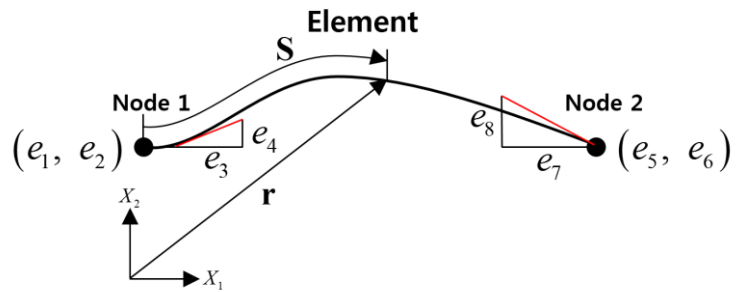
반면 절대 절점 좌표계에서는 절대 좌표계만을 사용하기 때문에 FFRF와 반대로 질량행렬은 선형으로 나타나고 강성행렬이 비선형으로 나타나는데 이는 비선형 구조 동적 해석의 방정식과 유사하다.

2.1 좌표계 정의

절대 절점 좌표계에서 물체의 정보를 나타내기 위해 그림 1과 같이 관성 좌표계의 한 요소 내에서 절점의 위치 및 위치에서의 기울기를 사용한다. 이때 절점의 위치는 보의 중립축 위에 놓인 임의의 점의 위치로 식 (1)과 같이 전체 요소의 형상함수, 절대 절점 좌표의 곱으로 나타난다.



(a) 변형 전의 절대 절점 좌표



(b) 변형 후의 절대 절점 좌표

그림 1. 변형 전.후의 보 구조물의 임의의 점까지의 절대 절점 좌표

$$\mathbf{r} = \mathbf{S}\mathbf{e} \quad (1)$$

관성 좌표계에서 임의의 위치를 표현하기 위해 형상함수는 식 (2)와 같이 요소의 축 방향 및 수직방향에 대해 3차 다항식으로 가정하여 나타낸다.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1-3(\xi)^2+2(\xi)^3 & 0 & l(\xi-2(\xi)^2+(\xi)^3) & 0 \\ 0 & 1-3(\xi)^2+2(\xi)^3 & 0 & l(\xi-2(\xi)^2+(\xi)^3) \\ 3(\xi)^2-2(\xi)^3 & 0 & l((\xi)^3-(\xi)^2) & 0 \\ 0 & 3(\xi)^2-2(\xi)^3 & 0 & l((\xi)^3-(\xi)^2) \end{bmatrix} \quad (2)$$

이때, $\xi = x/l$ 이고 x 는 변형 후의 절점으로부터 임의의 점까지의 거리, l 은 변형 전의 거리를 나타낸다.

한 요소 내에서 각 절점들의 좌표는 식 (3)과 같이 8개의 값들로 구성하고 각 좌표는 식 (4)와 같이 정의된다.

$$\mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & \underbrace{e_3 \ e_4}_{\text{gradient}} & \underbrace{e_5 \ e_6}_{\text{position}} & \underbrace{e_7 \ e_8}_{\text{gradient}} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}
e_1 &= r_1 \Big|_{x=0} & e_2 &= r_2 \Big|_{x=0} & e_3 &= \frac{\delta r_1}{\delta x} \Big|_{x=0} & e_4 &= \frac{\delta r_2}{\delta x} \Big|_{x=0} \\
e_5 &= r_1 \Big|_{x=l} & e_6 &= r_2 \Big|_{x=l} & e_7 &= \frac{\delta r_1}{\delta x} \Big|_{x=l} & e_8 &= \frac{\delta r_2}{\delta x} \Big|_{x=l}
\end{aligned} \tag{4}$$

e_1, e_2, e_5, e_6 은 한 요소 내에서 각 절점에서의 위치를 나타내고 e_3, e_4, e_7, e_8 은 각 절점에서의 기울기를 나타낸다.

2.2 질량행렬 및 강성행렬 구성

하나의 보 요소 내에서의 운동에너지와 질량행렬은 다음 식(5)와 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}
\mathbf{T} &= \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{r}}^T \dot{\mathbf{r}} dV = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{e}} \mathbf{S}^T \mathbf{S} \dot{\mathbf{e}} dV \\
&= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}} \left(\int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV \right) \dot{\mathbf{e}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{e}} \mathbf{M} \dot{\mathbf{e}} \\
\mathbf{M} &= \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV
\end{aligned} \tag{5}$$

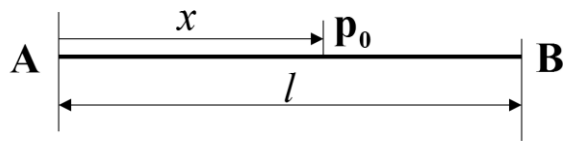
위 식(5)에서 V 는 부피, ρ 는 질량을 나타내고, \mathbf{M} 은 한 요소 내에서의 질량행렬을 나타낸다. 이때 질량행렬은 형상함수에 의해서만 정의되기 때문에 시간에 대해 일정한 값을 갖는다. 반면, 절대 절점 좌표계의 강성행렬은 질량행렬에 비교하여 훨씬 복잡하게 나타난다.

강성행렬은 아래 식(6)과 같이 변형에너지로부터 구할 수 있는데,

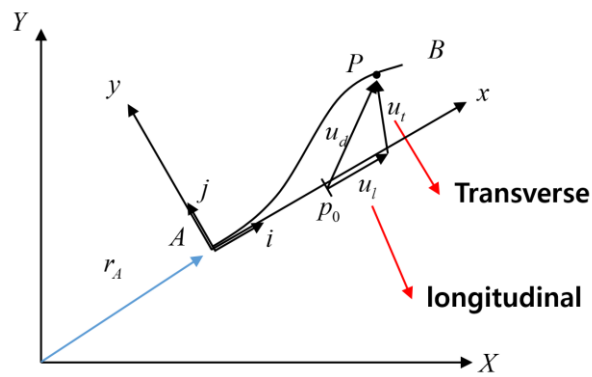
$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \frac{1}{2} \int_0^l \left[EA \left(\frac{\delta \mathbf{u}_t}{\delta x} \right)^2 + EI \left(\frac{\delta^2 \mathbf{u}_t}{\delta x^2} \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{e}^T \mathbf{K} \mathbf{e} \end{aligned} \quad (6)$$

이때 E 는 탄성 계수, A 는 보의 단면적, I 는 보 요소의 면적에 대한 2차 관성 모멘트를 나타낸다. 그리고 그림 2에서와 같이 \mathbf{u}_t , \mathbf{u}_t 는 각각 축 방향, 굽힘 방향 변형에 대한 변위를 나타낸다.

식 (6)에서 \mathbf{e} 는 절대절점 좌표와 기울기 만으로 구성이 되기 때문에 변형에너지와의 관계가 더욱 복잡해져, 절대절점 보 요소의 강성행렬은 비선형으로 나타난다. 이 비선형 성으로 인해 많은 사람들이 서로 다른 축소 모델을 제시했다. 본 논문에서는 축 방향으로의 변형이 작다는 가정이 들어간 Berzeri와 Shabana의 모델로 해석을 진행하였다[3]. 비록 간단한 모델을 사용하였다 해도, 유연 다물체 동역학의 시뮬레이션을 모사하기 위해서는 상당한 시간이 소요된다. 게다가 요소 수가 늘어날수록 훨씬 많은 시간이 걸리게 된다.



(a) 변형 전의 보 요소



(b) 변형 후의 보 요소

그림 2. 변형 전.후의 보 요소

2.3 운동방정식

이상에서 구한 질량행렬과 강성행렬을 바탕으로 식 (7)과 같은 운동방정식을 구성하여 탄성체에 대한 유연 다물체 동역학 운동방정식의 해를 구할 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}(\mathbf{e})\mathbf{e} = \mathbf{F} \quad (7)$$

3 POD 축소기법

POD는 고차의 데이터에서 바탕이 되는 고유 모드를 추출해 낮은 차원의 값으로 근사화해 축소하는 방법이다. 동시에 고차원 데이터와 저차원 축소 모델 간에 동일한 에너지를 가질 수 있도록 함으로, 최적의 축소 모델을 구성할 수 있게 된다.

POD에서는 변위를 스냅샷으로 사용해, 지배방정식을 풀어 변위 스냅샷을 구한다. m 차원 데이터에 n 개의 스냅샷의 개수에 따른 행렬은 다음 식(8)과 같이 구성할 수 있다.

$$\Psi = [e_1 \quad e_2 \quad \cdots \quad e_n] = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & & e_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ e_{m1} & e_{m2} & \cdots & e_{mn} \end{bmatrix} \quad (8)$$

POD 과정은 유클리드 공간에서 특이값 분해 (singular value decomposition)와 동일한 의미를 가지는데 다음 식(9)와 같이 표현할 수 있다.

$$\Psi = \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T \quad (9)$$

이 때, \mathbf{U} 는 $m \times n$ 의 적합 직교 모드를 나타내는 행렬이고, Σ 는 대각 특이값 행렬, \mathbf{V} 는 우-특이벡터를 의미한다. 여기서 특이값은 적합 직교 모드가 시스템에 미치는 에너지를 의미하며 적합 직교 모드를 선택한 개수의 모드가 축소 시스템으로의 변환행렬 역할을 한다.

3.1 특정 구속조건이 없는 모델에서의 POD 축소

본 논문에서는 특정 구속조건이 없는 모델과 있는 모델을 각기 다른 방법을 통해 축소를 진행한다. 우선, 특정 구속조건이 없을 경우

- 1) 식(8)과 같이 전체 시스템에서의 해석을 통해 변위를 도출한다.

2) 특이값 분해를 통해 아래와 같은 POD 모드를 추출한다.

$$\Phi = [\Phi_1 \quad \Phi_2 \quad \cdots \quad \Phi_m] \quad (10)$$

3) 추출된 모드 중 주요모드만 뽑아서 축소모드를 구성한다. 이때, 주요모드의 개수 선택에 따라 축소 효율이 바뀌게 된다.

4) 각각의 시스템 행렬에 축소모드를 곱해 축소된 시스템을 구성한다.

$$\mathbf{M}^R = \Phi^T \mathbf{M} \Phi, \quad \mathbf{C}^R = \Phi^T \mathbf{C} \Phi, \quad \mathbf{K}^R = \Phi^T \mathbf{K}(\mathbf{e}) \Phi, \quad \mathbf{F}^R = \Phi^T \mathbf{F} \quad (11)$$

위와 같은 과정을 통해 해석을 진행한다.

$$\mathbf{M}^R \ddot{\mathbf{e}} + \mathbf{C}^R \dot{\mathbf{e}} + \mathbf{K}^R \mathbf{e} = \mathbf{F}^R \quad (12)$$

3.2 특정 구속조건이 있는 모델에서의 POD 축소

많은 공학적 문제에서 특정 자유도에 특정 구속조건을 부과하는 것을 종종 요구하곤 한다. 특정 구속조건을 부과하는 방법에는 대표적으로 라그랑주 승수법과 페널티 기법이 있는데 본 논문에서는 라그랑주 승수법을 고려했다. 우선, 아래에서 라그랑주 승수법에 대해 간단하게

설명을 한다. 구조 방정식의 변분식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Pi = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{F} \quad (13)$$

위 식 (13)에서 \mathbf{U} 는 변위벡터, \mathbf{K} 는 강성행렬, \mathbf{F} 는 내력을 나타내는 벡터이다. 최소 포텐셜 정리에 의해 모든 자유도 마다 아래 식을 만족한다.

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial U_i} = 0 \quad (14)$$

변위 구속조건을 부여했다고 가정하였을 경우

$$\mathbf{B} \mathbf{U} = \mathbf{V} \quad (15)$$

로 나타낼 수 있다. 이때, 라그랑주 승수법을 사용하면 아래와 같이 쓸 수 있다.

$$\Pi^* = \frac{1}{2} \mathbf{U}^T \mathbf{K} \mathbf{U} - \mathbf{U}^T \mathbf{F} + \lambda^T (\mathbf{B} \mathbf{U} - \mathbf{V}) \quad (16)$$

이때, λ 는 라그랑주 승수를 나타낸다. 미분을 통해 식(16)과 식(14)를 이용하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (17)$$

축소기법을 가장 쉽게 적용하는 방법은 앞 절과 마찬가지로 행렬을 통째로 축소하는 방법이다. 전체 행렬에서 축소 모드를 뽑고 축소 시스템을 구성하면 다음과 같이 나타난다.

$$\tilde{\mathbf{K}}^R \tilde{\mathbf{U}}^R = \tilde{\mathbf{F}}^R \quad (18)$$

$$\tilde{\mathbf{K}}^R = \Phi^T \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \Phi, \quad \tilde{\mathbf{F}}^R = \Phi^T \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{U}}^R = \Phi^T \begin{bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (19)$$

다음과 같은 방법은 앞과 마찬가지로, 굉장히 쉽고 간단하지만 특정 구속조건을 부여한 부분도 같이 축소가 되기 때문에 안정성에 문제가 생긴다. 정확도와 수렴성은 축소 베이스와 축소율에 매우 민감하게 반응하기 때문이다.

본 논문에서는 위와 같은 안정성 문제를 보완하기 위해 다른 방법을 사용하고자 한다. 앞과 같이 전체 행렬을 축소하는 것 대신 구속조건이

포함되는 부분을 제외한 체 축소모드를 구성하고 구속이 되는 부분에 대해서는 행렬을 축소하지 않고 그대로 유지하는 방법이다. 식으로 표현하면 아래와 같다.

$$\begin{bmatrix} \Phi^T \mathbf{K} \Phi & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}^R \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi^T \mathbf{F} \\ \mathbf{V} \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\mathbf{U} = \Phi \mathbf{U}^R, \quad \Phi = \begin{bmatrix} \Phi^* & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (21)$$

식(21)에서 Φ^* 는 구속조건이 포함되지 않는 부분에 대한 축소모드를 나타내고 \mathbf{I} 는 구속조건이 포함되어 있는 부분에 대한 단위행렬을 나타낸다. 이를 통해서 구속조건이 포함되어 있는 부분에 대해 따로 축소가 진행되지 않기 때문에 라그랑주 승수의 특징을 그대로 보존 할 수 있다. 이는 앞의 문제와 다르게 안정성을 그대로 유지할 수 있다. 또한 비선형 강성행렬을 재구성 할 때 라그랑주 승수가 포함되지 않은 부분에 대해서만 재구성을 하기 때문에 효율적으로 사용할 수 있다.

본 논문에서는 특정 구속조건이 있는 경우 다음의 과정을 통해 축소할 때 구속된 자유도 부분의 변위를 그대로 보존하여 라그랑주 승수와 축소기법이 서로 영향을 전혀 미치지 않도록 진행했다.

4 수치예제

4.1 진자 모델

본 논문에서는 POD 축소기법을 바탕으로 그림 3과 같이 한쪽이 편으로 고정된 진자 모델에 적용하였다. 물성은 표 1과 같고 축소율은 10%로 하여 진행하였다.

그림 5를 보았을 경우 POD 축소 기법을 적용하였을 때 전체 시스템에서와 같은 결과를 나타내는 것을 확인할 수 있고, 그림 6을 보았을 경우 POD 축소기법을 적용하였을 때 전체 시스템에서의 소요시간보다 약 9배 가량 빠른 것을 확인 할 수 있다.

표 1. 한쪽 끝이 고정된 진자 모델의 물성

Free falling pendulum without link	
Property / Dimension	Pendulum
Mass density (kg/m^3)	5540
Length (m)	1.2
Cross sectional area (m^2)	1.8×10^{-3}
Second moment of area (m^4)	1.215×10^{-8}
Modulus of elasticity (N/m^2)	0.7×10^9
Number of element	50
Total time (s)	1.1
Time step (s)	0.005
Number of time step	220
Number of DOF	204

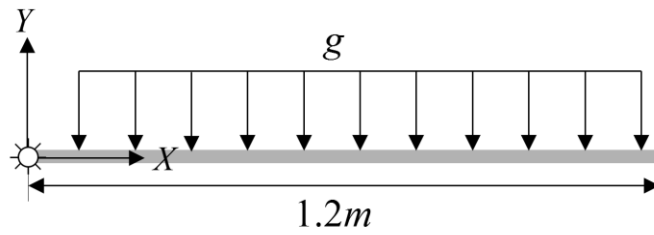


그림 3. 한쪽 끝이 고정된 진자 모델

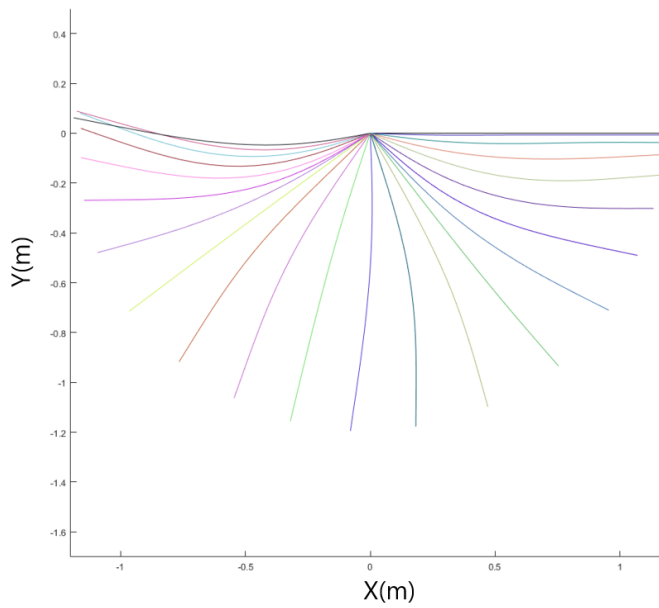


그림 4. 시간에 따른 진자 모델의 움직임

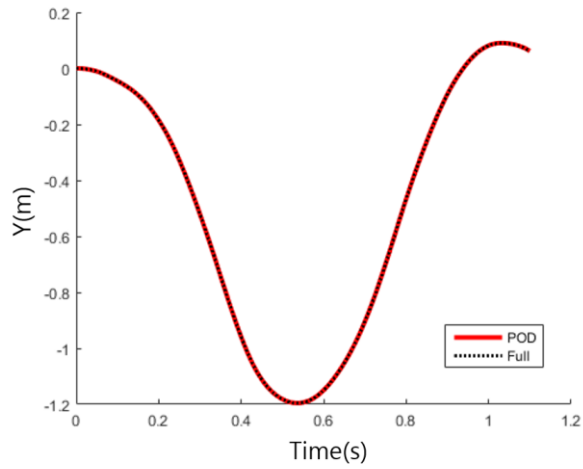


그림 5. 진자 모델 끝점에서의 Y 좌표

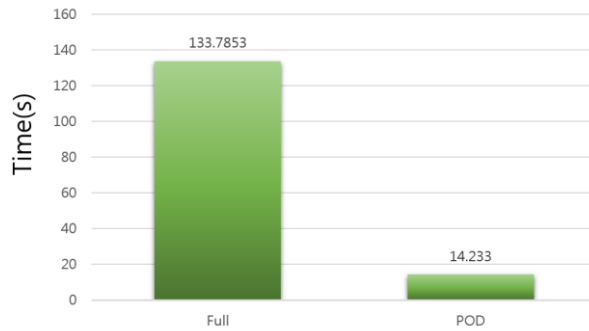


그림 6. 전체시스템과 POD 축소시스템에서 걸린 계산 시간

4.2 4 절 링크가 포함된 보 구조물

다음으로 그림 7과 같은 4절 링크가 포함된 보 구조물에 POD 축소기법을 적용하였다. 물성은 표 2와 같고 축소율은 30%로 하여 진행하였다.

$$\text{Crankshaft에 걸리는 모멘트는 } M = \begin{cases} \lambda \times 10 \sin(3\pi t) & t \leq 0.2778 \\ \lambda \times 465.9 e^{-16.32t} & t > 0.2778 \end{cases}, \lambda = 0.935 \text{ 로}$$

나타내었다. 그림 9, 그림 10을 참고하면 앞의 문제와 마찬가지로 POD 축소기법을 적용하였을 때와 전체 시스템에서 같은 결과를 나타내며 소요시간은 약 6배 가량 빠른 것을 확인 할 수 있다.

보통의 경우 요소의 수가 큰 시스템에서 축소 효율이 좋지만 앞의 문제와 비교하여, 축소율도 높고 라그랑주 승수법이 들어가 그 효율이 더 떨어지는 것을 확인할 수 있다.

표 2. 4 절 링크가 포함된 보 구조물의 물성

Four bar mechanism			
Property / Dimension	Crankshaft	Coupler	Follower
Mass density (kg/m^3)	2709	1402	4002
Length (m)	0.2	0.9	0.52
Cross sectional area (m^2)	1.257×10^{-3}	1.960×10^{-3}	7.068×10^{-4}
Second moment of area (m^4)	1.257×10^{-7}	3.068×10^{-7}	3.976×10^{-8}
Modulus of elasticity (N/m^2)	1×10^9	5×10^6	5×10^8
Number of element	20	50	40
Total time (s)		1.1	
Time step (s)		0.007	
Number of time step		157	
Number of DOF	84	204	164

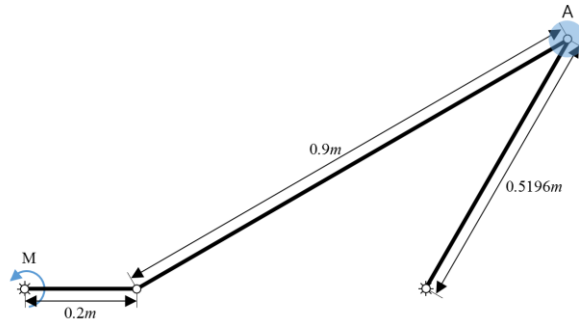


그림 7. 4 절 링크가 포함된 보 구조물

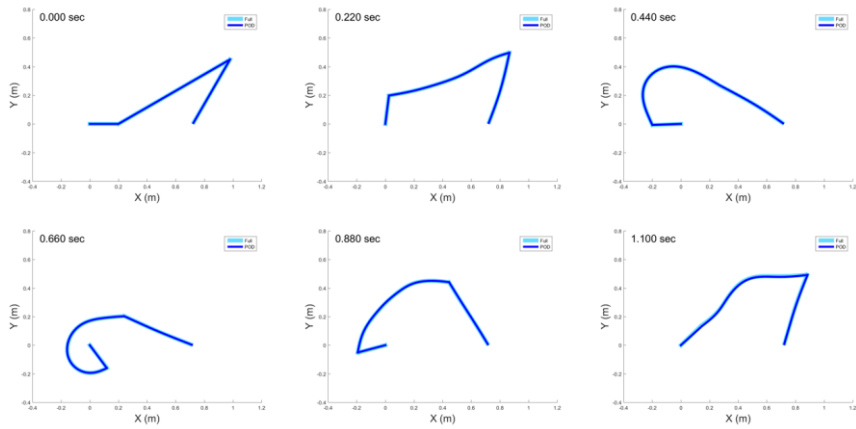


그림 8. 시간에 따른 4 절 링크가 포함된 보 구조물의 움직임

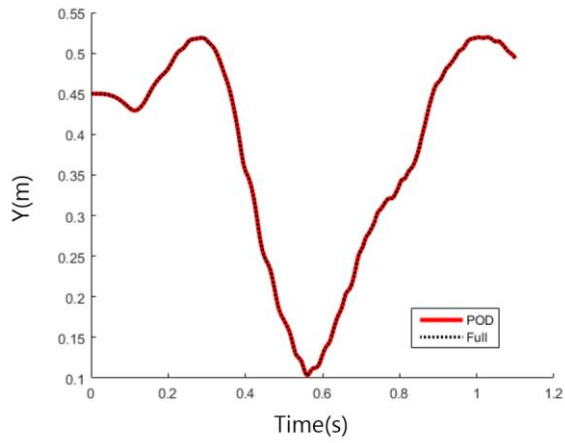


그림 9. 그림 6의 A 점에서의 Y 좌표

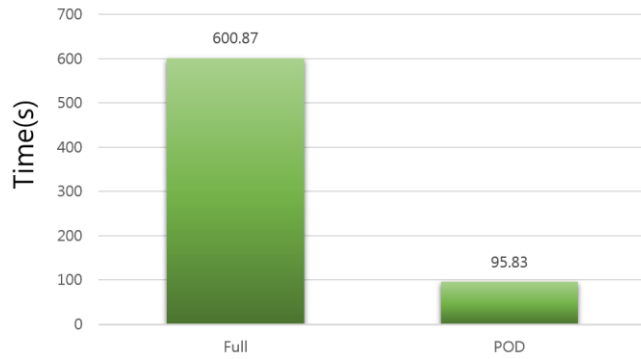


그림 10. 전체시스템과 POD 축소시스템에서 걸린 계산 시간

5. 결론

본 연구는 POD 축소기법을 활용하여 절대 절점 좌표계를 사용하는 유연 다물체 보 구조물의 동역학 해석에서 계산의 효율을 극대화 하였다. 절대 절점 좌표계에서는 코리올리힘과 원심력이 나타나지 않아 질량행렬이 일정한 값을 가지는 원리를 이용하여 비선형 구조 동적 해석을 위해 개발된 축소 기법을 활용하였다.

POD 축소 기법은 유연 다물체 보 구조물의 동역학 해석의 여러 수치예제인 진자 모델, 4절 링크가 포함된 보 구조물에 적용하여 그 효율을 입증하였다. 라그랑주 승수가 포함된, 포함되지 않은 예제를 따로 다룸으로 인해 특정 구속조건이 부과되었을 경우에도 POD 축소 기법을 적용할 수 있도록 하여 정확도 유지를 가능하게 하였다.

참고 문헌

- [1] Escalona, J. L., Hussien, H. A., Shabana, A. A. Application of the absolute nodal coordinate formulation to multibody system dynamics. *Journal of Sound and Vibration*. 214, 833–851 (1998)
- [2] Yakoub, R. Y., Shabana, A. A. Use of Cholesky coordinates and the absolute nodal coordinate formulation in the computer simulation of flexible multibody systems. *Nonlinear Dynamics*. 20(3), 267–282 (1999)

- [3] *Berzeri, M., Shabana, A. A.* Development of simple models for the elastic forces in the absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Sound and Vibration*. 235(4), 539–565 (2000)
- [4] *Shabana, A. A.* Dynamics of multibody systems. Cambridge University Press (2013)
- [5] *Gerstmayr, J., Ambrósio, J. A. C.* Component mode synthesis with constant mass and stiffness matrices applied to flexible multibody systems. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 73(11), 1518–1546 (2008)
- [6] *Kobayashi, N., Wago, T., Sugawara, Y.* Reduction of system matrices of planar beam in ANCF by component mode synthesis method. *Multibody System Dynamics*. 26(3), 265–281 (2011)
- [7] *Sun, D., Chen, G., Sun, R.* Model reduction of a multibody system including a very flexible beam element. *Journal of Mechanical Science and Technology*. 28(8), 2963–2969 (2014)
- [8] *Golub, G. H., Van Loan, C. F.* Matrix Computations (3rd Edition). Johns Hopkins University Press, Baltimore (1996)
- [10] *Breuer, K. S.* The use of the Karhunen–Loève procedure for the calculation of linear eigenfunctions. *Journal of Computational Physics*.

96(2), 277–296 (1991)

[11] *Liang, Y. C., Lee, H. P., Lim, S. P., Lin, W. Z., Lee, K. H., Wu, C. G.* Proper orthogonal decomposition and its applications—Part I: Theory. *Journal of Sound and Vibration*. 252(3), 527–544 (2002)

[12] *Lee, J.* Proper orthogonal decomposition–based parametric reduced order models for structural analysis and design optimization. Ph.D. Dissertation, Seoul National University (2015)

[13] *Bathe, K. J.* Finite element procedures. Klaus–Jurgen Bathe. Prentice Hall, Pearson Education. Inc. (2016)

Abstract

Dynamic analysis of flexible multibody beam structure using POD-based reduction method

Hyunil Kim

Mechanical and Aerospace Engineering, Multiscale

Mechanical Design

The Graduate School

Seoul National University

The study of flexible multibody dynamic system has been actively conducted since 1970's. Flexible multibody dynamic system still needs a lot of time and computational resources, although time passed about 50 years. Floating frame of reference formulation (FFRF), which is the most widely used formulation in the flexible multibody dynamics, uses the local coordinates and global coordinates. It generates Coriolis and gyroscopic forces, and they make nonlinearities in mass matrices and inertia forces. On the other hands, the absolute nodal coordinate formulation (ANCF) has nonlinearities in the internal forces, as it only uses the absolute positions and absolute gradients in the global coordinates. This phenomenon makes the formulation similar to the equations of nonlinear structural dynamics. Therefore, reduced order modelling methods developed for the standard static nonlinear transient analysis can be utilized to flexible multibody dynamics if ANCF is used. This paper applies POD-based reduction method, which is one of the mode based reduction method. Efficiency and the accuracy of the POD-based reduction method is validated by some examples including free falling pendulum model.

Keywords : flexible multibody dynamic system, absolute nodal coordinate formulation, proper orthogonal decomposition (POD), reduced order modelling

Student Number : 2014-22471