creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

교육학석사학위논문

고등학교 학생들의 무한급수 개념에 대한 분석

2013년 2월

서울대학교 대학원

수학교육과

김 아 미

고등학교 학생들의
무한급수 개념에 대한 분석

지도교수 권 오 남

이 논문을 교육학 석사학위논문으로 제출함

2012년 10월

서울대학교 대학원

수학교육과

김 아 미

김아미의 석사학위논문을 인준함

2012년 12월

위 원 장 조 한 혁 (인)

부 위 원 장 이 경 화 (인)

위 원 권 오 남 (인)

국문 초록

고등학교 학생들의 무한급수 개념에 대한 분석

무한급수란 무한수열의 각 항을 차례대로 합의 기호 + 로 연결한 식이다. 용어의 정의에서 드러나듯이 무한급수는 무한, 수열, 합, 극한 등의 여러 가지 수학적 개념들이 들어있는 복합적인 수학적 개념이다. 한편, 무한급수는 미적분학의 이해의 바탕이 되는 개념으로 고등 수학의 학습에서 매우 중요하다. 그러나 직관적인 이해로는 올바른 이해가 어려운 무한 개념을 기반으로 하기 때문에 무한급수 개념의 지도와 학습 모두 어렵다고 볼 수 있다.

무한급수 개념은 무한에 대한 직관적인 생각의 맥락에서 무한히 더하는 과정으로 먼저 받아들여진다. 하지만 무한급수에 대한 정확한 이해를 위해서는 무한급수를 대상으로 인식하여 그 자체에 대한 성질과 이론을 적용할 수 있어야 한다. Dubinsky의 APOS이론에서는 수학적 개념의 형성과 이해과정을 과정과 대상의 상호작용으로 보고 과정이 대상으로 바뀌는 과정을 행동, 과정, 대상, 스키마로 설명한다. 따라서 이 연구에서는 무한급수 개념의 형성과 이해과정을 APOS이론의 관점에서 분석하였다.

이를 위하여 고등학교 2학년 학생들을 대상으로 무한급수 관련 문항 풀이 검사를 하고, 학생들의 사고 과정을 심층적으로 분석하기 위하여 반구조화된 면담을 실시하였다.

무한급수 개념의 발생적 분해는 수열 스키마로부터 시작된다. 수열 스키마로부터 일반화 과정을 거쳐 일반항 스키마를 형성하고 이 일반항과 수열의 합에 대한 스키마가 조절 과정을 통해 부분합 스키마를 형성하게 된다. 하지만 부분합 스키마를 형성하는 과정은 이 과정 외에도 또 다른 과정이 가능한데 무한급수에서 새로운 수열인 부분합의 수열을 생성하는 것이다. $a_1 = S_1$, $a_1 + a_2 = S_2$, $a_1 + a_2 + a_3 = S_3$, $\cdots$ 등과 같이 무한급

수의 무한히 더하는 과정에 대한 내면화를 거쳐 부분합 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 을 대상으로 인식하여 새로운 수열을 생각할 수 있게 되고, 이 수열의 규칙성을 찾아 일반항을 구하는 일반화 과정을 거쳐 부분합 S_n에 대한 스키마를 형성하게 되는 것이다. 이러한 두 가지 과정 중 하나의 과정을 통하거나 두 과정 모두를 통해 부분합 스키마를 형성하고 나면, 부분합 스키마와 수열의 극한 스키마의 조절을 통해 무한급수 또는 무한급수의 합에 대한 스키마를 형성하게 된다.

무한급수에서 일반항을 구하는 과정이 학생들에게 익숙하여 자연스러운 접근인 반면에 부분합의 수열을 생성하는 것은 낯설고 어렵기 때문에 섬세한 교수학적 접근이 필요하다는 것을 연구 과정을 통해 알 수 있었다. 한편, 부분합 개념을 구성하는 두 가지 과정의 연결성을 이해하는 것은 무한급수 개념에 대한 스키마에 큰 영향을 준다고 볼 수 있다.

수열의 극한 스키마는 여러 가지 수학적 내용을 담고 있지만 그 중 무한에 관하여 잠재적 무한 개념 또는 실제적 무한 개념을 가지고 있는지에 따라 무한급수 개념 형성에 큰 영향을 미치는 것으로 볼 수 있다. 학생들은 직관적으로 잠재적 무한 개념을 이해하는데 반하여 실무한의 개념은 이해하기 쉽지 않다. 잠재적 무한 개념을 바탕으로 하는 극한 개념은 무한급수의 대상화 과정에도 영향을 미쳐 무한급수의 완전한 대상화를 방해하고 무한급수를 대상으로 다루는데 있어서 곤란함을 초래한다. 따라서 무한급수의 올바른 대상화를 위해 실무한 개념도 함께 이해하면서 수열의 극한 스키마를 구성할 수 있도록 할 필요가 있다.

본 연구는 무한급수 개념의 발생적 분해를 밝힘으로써 무한급수 개념 구성에 관여하는 다른 수학적 개념들과 반영적 추상화에 대해 설명할 수 있게 되어 무한급수에 대한 학생들의 이해의 이면을 드러냈다. 이를 통해 무한급수 개념의 발생적 분해를 반영한 수업 또는 교재 개발로 학생들이 무한급수 개념을 자연스럽게 형성할 수 있도록 할 수 있을 것이다.

주요어 : 무한급수, 부분합, 수열의 극한, APOS이론, 반영적 추상화

학 번 : 2011-21558

차 례

국문 초록 ····· i
차례 ····· iii
표 차례 ····· v
그림 차례 ····· vi

Ⅰ. 서론 ····· 1
1.1. 연구의 필요성 및 목적 ····· 1
1.2. 연구문제 ····· 4

Ⅱ. 이론적 배경 ····· 6
2.1. 무한급수 ····· 6
2.1.1. 무한급수 개념의 역사적 발달과정 ····· 6
2.1.2. 교과서에서의 무한급수 ····· 11
2.1.3. 무한급수에 관한 선행연구 ····· 16

2.2. 발생적 분해와 APOS이론 ····· 21
2.2.1. 반영적 추상화와 발생적 분해 ····· 21
2.2.2. APOS이론 ····· 30

Ⅲ. 연구 방법 ····· 38
3.1. 연구 절차 ····· 38
3.1.1. 예비 조사 ····· 38
3.1.2. 문항 검사 및 면담 ····· 39
3.2. 연구 참여자 ····· 39
3.3. 검사 문항 개발 ····· 40

Ⅳ. 연구 결과 ····· 46
4.1. 무한급수 개념의 발생적 분해 ····· 46
4.1.1. 무한급수 스키마 구성 과정 ····· 46

4.2. 부분합 스키마 분석 ····· 50
4.2.1. 부분합 스키마의 구성 ····· 50
4.2.1.1. 첫 번째 과정: 일반항과 수열의 합 스키마의 조절 · 51
4.2.1.2. 두 번째 과정: 부분합의 수열의 일반화 ····· 62
4.2.2. 무한급수 개념 구성에 미치는 영향 ····· 65

4.3. 수열의 극한 스키마 분석 ····· 76
4.3.1. 수열의 극한 스키마의 구성 ····· 76
4.3.2. 무한급수 개념 구성에 미치는 영향 ····· 83

Ⅴ. 결론 ····· 88
5.1. 요약 ····· 88
5.2. 의의 및 제언 ····· 94

참 고 문 헌 ····· 97
<부록> 검사 문항지 ····· 103
ABSTRACT ····· 107

표 차 례

<표Ⅱ-1> 과정과 대상 사이의 이행(Tall 외 4인, 1999) ····· 32
<표Ⅲ-1> 검사 문항별 참고문헌 ····· 44
<표Ⅲ-2> 검사 문항별 해당 영역 및 내용 ····· 45

그 림 차 례

<그림Ⅱ-1> 스키마의 구조(Dubinsky, 1991) ····· 24
<그림Ⅱ-2> 수학적 귀납법의 발생적 분해(Dubinsky, 1986) ····· 26
<그림Ⅱ-3> 술어 계산의 발생적 분해(Dubinsky, 1991) ····· 27
<그림Ⅱ-4> APOS이론의 도식 ····· 34
<그림Ⅳ-1> 학생들의 무한급수 개념의 발생적 분해 ····· 49
<그림Ⅳ-2> 학생3의 면담 과정에서의 추가 문항 풀이 ····· 52
<그림Ⅳ-3> 학생1의 3-(1)번 풀이 ····· 53
<그림Ⅳ-4> 학생4의 3-(1)번 풀이 ····· 54
<그림Ⅳ-5> 학생2의 3-(1)번 풀이 ····· 55
<그림Ⅳ-6> 학생3의 3-(1)번 풀이 ····· 57
<그림Ⅳ-7> 학생1의 3-(2)번 풀이 ····· 63
<그림Ⅳ-8> 학생5의 3-(2)번 풀이 ····· 65
<그림Ⅳ-9> 3-(1)번 면담 과정에서 학생1의 풀이 ····· 70
<그림Ⅳ-10> 학생3의 3-(2)번 문항에 대한 첫 번째 풀이 ····· 72
<그림Ⅳ-11> 학생3의 3-(2)번 문항에 대한 두 번째 풀이 ····· 72
<그림Ⅴ-1> 무한급수 개념의 발생적 분해 ····· 91

Ⅰ. 서론

1.1. 연구의 필요성 및 목적

제7차 개정 교육과정에 따르면 무한급수는 고등학교 2학년 학생들이 선택과목인 수학Ⅰ의 마지막 단원에서 무한수열의 극한을 학습한 이후에 배우게 되는 개념이다. 무한급수란 무한수열의 각 항을 차례대로 합의 기호 + 로 연결한 식을 말하므로 이미 용어의 정의에서 무한, 수열, 합, 극한 등의 여러 가지 수학적 개념들이 들어있는 복합적인 수학적 개념임을 알 수 있다.

집합론적인 무한 개념은 우리의 직관적인 생각과 많은 점에서 어긋나 있어서 학생들이 이를 이해하는데 많은 곤란을 겪기(박선화, 1993) 때문에 무한 개념을 기반으로 하는 극한, 부분합의 극한으로 볼 수 있는 무한급수 개념 등에 대한 학생들의 이해는 쉽지 않다. 이러한 무한급수 개념 이해의 어려움은 무한급수 개념이 수학적으로 정립되기까지의 긴 역사적인 발달 과정에서도 잘 볼 수 있다.

하지만 수학사에서도 무한급수의 개념에 대한 명확한 수학적 이해가 미적분학의 발달의 기초가 되었듯이 학생들이 미적분학을 비롯한 고등수학을 학습하기 위해서는 무한급수 개념에 대한 이해가 필수적이라고 할 수 있다. 따라서 학교수학에서 다루고 있는 많은 수학 개념들 중 특히 학생들이 이해하기 어려운 개념인 무한급수 개념 지도의 중요성은 매우 크다고 볼 수 있다.

이러한 점에서 Bagni(2005)가 언급하였듯이 교실 수업에서 무한급수를 도입하는 것은 단순하지 않고 여러 가지 부분이 고려되어야 한다. 무한급수 개념 지도에 대한 고민은 학생들의 무한급수 개념 구성에 대한 이해로부터 출발한다. 학생들이 새로운 수학적 개념을 학습하는데 있어서 학생 스스로 그 수학적 개념을 어떻게 구성할 수 있는지 그 과정이 어떠

한지에 대한 분석하는 것은 수학 학습과 지도에 대한 방향을 제시할 수 있는 근거가 되기 때문이다. 따라서 본 연구는 무한급수를 학습한 학생들이 어떻게 무한급수 개념 구성을 하고 있는지에 대한 분석을 통해 무한급수 지도 방안을 탐색해 보고자 한다.

무한급수의 학습과 지도에 관한 국내 연구들 중 김채지(2010)에 따르면 학생들은 무한급수의 개념을 이해하는 데에 많은 어려움을 겪고 있고, 다양한 유형의 오개념을 가지고 있다. 무한급수에 관한 우리나라 논문의 대다수(조영혜, 2008; 김채지, 2010; 남윤희, 2006; 지영조, 2006; 고지현, 2012)는 무한급수에 대한 학생들의 이해를 오류 및 오개념의 관점에서 분석하였고, 몇 개의 연구에서는 무한급수의 효율적인 지도 방안도 제안하고 있지만 오류 및 오개념과 깊게 연관된 지도 방안을 제시하거나 지도 방안의 효과성을 확인해 보지는 않았다. 이들 연구의 공통적인 결과는 학생들이 무한급수를 부분합의 극한으로 이해하는 것에 대해 어려움을 느낀다는 점으로 볼 수 있다. 그러나 무한급수 개념을 학생들이 어떻게 구성하는지에 대한 구체적이고 심층적인 분석을 통해 지도방안을 제안하는 연구는 거의 없었다.

외국의 무한급수 관련 연구를 살펴보면, 무한급수의 역사적 발생 배경을 수학교육에 적용하는 것에 관한 연구(Bagni, 2000, 2005), 학생들의 무한급수 개념 이해의 어려움에 관한 연구(Mamona, 1990), 학생들의 무한급수 개념 이해를 APOS이론의 관점에서 분석한 연구(Martinez-Planell 외, 2012) 등이 있다. 이 중 Martinez-Planell 외(2012)는 수열에 대한 이해를 APOS이론의 관점에서 분석한 McDonald 외(2000)를 바탕으로 대학생들이 무한급수 개념을 어떻게 이해하고 있는지를 행동, 과정, 대상 관점으로 나누어 분석하고 있다. 그러나 APOS이론에서는 수학적 개념의 발생적 분해(genetic decomposition)를 통해 학생들의 개념 구성을 분석하는 것에서 시작하는데 Martinez-Planell 외(2012)는 무한급수 개념의 발생적 분해를 명확하게 보여주지 않고 APOS이론의 일부인 행동, 과정, 대상 관점에서의 학생들의 이해를 보여

주기만 한 것에 한계가 있다. 이 연구에서 학생들의 무한급수 개념의 이해를 APOS이론의 관점에서 분석하는 것의 가능성을 볼 수 있었고, 분석 결과를 바탕으로 무한급수의 지도방안에 구체적인 제언을 해 줄 수 있을 것으로 기대할 수 있었다. 이로부터 본 연구가 시작되었다고 볼 수 있다.

무한급수 개념은 무한에 대한 직관적인 생각의 맥락에서 무한히 더하는 과정으로 먼저 받아들여진다. 하지만 무한급수에 대한 정확한 이해를 위해서는 무한급수를 대상으로 인식할 수 있고 그 자체에 대해 성질과 이론을 적용할 수 있어야 한다. Dubinsky의 APOS이론에서 수학적 개념의 형성과 이해과정은 과정과 대상의 상호작용이 결정적인 역할을 하는데, 특히 Dubinsky는 과정이 대상으로 바뀌는 과정을 행동, 과정, 대상, 스키마로 설명한다. 따라서 무한급수 개념의 형성과 이해과정을 APOS 이론으로 분석하는 것이 적절하다고 볼 수 있다.

한편, 특별한 수학적 개념에 대한 구성 과정의 기술을 개념의 발생적 분해(genetic decomposition)라고 하는데, 발생적 분해는 학생들이 어떤 특별한 개념을 어떻게 학습할 수 있는지를 기술하여, 그 개념을 위한 스키마를 발달시키는 가능한 구성 방법의 명백한 기술을 제공(Dubinsky, 1991)하므로 본 연구에서는 무한급수 개념이 어떻게 구성되는지를 보기 위해 무한급수의 발생적 분해를 기술해 보고자 한다. Dubinsky(1991)에 따르면 개념을 이해하기 위해서는 학생들이 그 개념의 발생적 분해를 따라 스키마를 구성하도록 유도되어야 하므로 무한급수의 발생적 분해를 밝히는 것은 무한급수 지도에 대한 안내가 될 수 있을 것이다.

APOS이론은 수학적 개념을 구성하고자 하는 학생을 관찰하여 볼 수 있는 현상에 대한 설명을 제공하고, 학습 과정을 도와줄 수 있는 교육학적 방향을 제시함으로써 학습 과정을 이해할 수 있도록 도와주기 위한 개발된 수학 학습에 대한 이론이다(Dubinsky 외, 2001). 따라서 본 연구에서는 APOS이론을 바탕으로 무한급수 개념을 학생들이 어떻게 구성하는지 알아보기 위해 학생들의 문제 풀이와 면담을 활용하고 그것에 대한

분석을 통해 무한급수의 지도에 대한 시사점을 주고자 한다.

이를 위해 무한급수에 관한 문제 풀이와 면담에서 관찰한 학생들의 무한급수의 개념의 구성 과정을 발생적 분해와 반영적 추상화를 통해 분석해 보고자 한다. 또한 학생들의 무한급수 개념 구성의 특징을 APOS이론에서의 행동, 과정, 대상, 스키마를 이용하여 설명하고 이를 통해 무한급수의 지도에 대한 구체적인 제언을 하고자 한다.

이러한 학생들의 무한급수 개념의 구성 과정을 세부적으로 살펴보는 것은 무한급수 개념의 지도 방향에 긍정적인 역할을 할 수 있을 것이다.

1.2. 연구문제

무한급수를 학습한 학생들이 무한급수 개념을 어떻게 형성하고 있는지를 알기 위해서는 학생들의 무한급수 스키마의 구성을 분석해 보아야 한다. 정신적인 구성체인 스키마에 대한 이해는 수학적 개념이 발생되는 매커니즘을 설명하는 핵심적인 이론인 Piaget의 반영적 추상화에 관한 이론(홍진곤, 1999)을 고등 수학 개념을 발달시키는 사고를 설명하는 이론으로 확장한 Dubinsky의 APOS이론을 통해 가능하다.

수학적 개념은 수학자 집단에서 공식적으로 인정된 의미인 수학적 정의를 지칭할 수도 있고, 그 정의를 학습하거나 경험한 개개인이 그 개념과 관련하여 마음속에 가지게 되는 정신적 구성물을 지칭할 수도 있다(박선화, 1998). 이 글에서 학생들의 무한급수 개념이란 후자를 의미하고 분석하고자 하는 무한급수 개념도 학생들이 구성하는 무한급수 개념이다.

학생들이 무한급수 개념을 형성하는 데에 연관되는 스키마들을 알고, 학생이 무한급수 개념 구성 과정에서 이러한 스키마들이 어떤 특징을 가지고 구성되는지 그리고 이 스키마들이 무한급수 개념에 어떠한 영향을

미치는지를 인식하는 것은 무한급수를 지도하는 데에 필수적인 요소이다.

이러한 점에서 이전의 연구들의 공통적인 결과인 학생들이 무한급수를 부분합의 극한으로 이해하는데 어려움을 겪는다는 현상의 이면에 존재하는 근본적인 이유를 무한급수 개념을 구성하기 위해 필요한 다른 수학적 개념 스키마들과 이전의 스키마들로부터 새로운 스키마를 생성하는 반영적 추상화의 과정을 분석하면서 찾아보고자 한다. 따라서 무한급수 개념에 대한 학생들의 구성이 어떠한지 알아보고 그 특징을 APOS이론에서의 관점에서 분석하여 무한급수 개념 지도의 방향을 알아보기 위해 다음의 연구 문제를 설정하였다.

1. 학생들이 구성하는 무한급수 개념의 발생적 분해는 어떠한가?
2. APOS이론의 관점에서 학생들의 부분합 개념 구성에 따른 무한급수 개념의 행동, 스키마는 어떠한가?
3. APOS이론의 관점에서 학생들의 수열의 극한 개념 구성에 따른 무한급수 개념의 과정, 대상은 어떠한가?

Ⅱ. 이론적 배경

이 장에서는 본 연구에서 분석하게 될 개념인 무한급수에 대해 살펴보고, 학생들의 무한급수 개념 구성을 분석하기 위해 사용할 Dubinsky의 수학적 개념의 발생적 분해와 APOS이론에 대해 정리한다.

2.1. 무한급수

이 절에서는 무한급수의 역사적 발달 과정을 살펴보고, 교육과정 상으로 학생들이 무한급수 개념을 처음 학습하게 되는 고등학교 수학 Ⅰ 교과서에서 무한급수가 어떻게 다루어지고 있는지를 볼 것이다. 이는 무한급수의 개념에 대한 수학적인 분석의 바탕이 될 것이다. 그리고 이어서 무한급수에 관한 국내외 선행 연구들을 살펴볼 것이다.

2.1.1. 무한급수 개념의 역사적 발달 과정

수학적 개념의 역사적 발달과 개인의 사고력의 발달 사이에 유사성이 있다(김응태 외, 2007)는 점에서 무한급수의 역사적 발달 과정을 살펴보는 것은 학생들의 무한급수 개념에 대한 이해에 도움이 된다고 볼 수 있다.

무한급수 개념이 처음 등장했던 것은 기원전 5세기경 그리스 시대의 유명한 제논의 역설로 볼 수 있다. 수학에 심대한 영향을 끼친 이 역설은 어떤 양을 무한히 쪼갤 수 있다고 가정하든지 또는 많은 개수의 극소량들의 합으로 만들어질 수 있다고 가정하든지 간에 운동은 불가능하다고 주장한다. 이는 무한 개념에 대한 직관적인 인식에 대해 의심을 하게 되는 계기가 되었고, 그 결과 각 양이 극히 작다 하더라도 양의 무한개

의 합은 무한히 크고, 그 크기가 0인 양의 유한 또는 무한개의 합은 0이라는 통상적인 직관적 믿음이 깨지게 되었다. 에우독소스(Eudoxus)의 실진법은 제논의 역설에 대한 플라톤 학파의 답변으로 간주될 수 있으며 이는 무한등비급수의 수렴에 대한 이해를 기초로 한다.

등차수열과 등비수열은 기원전 2000년경의 고대 이집트와 바빌로니아의 수학에서도 그 예를 찾아볼 수 있는 가장 오래된 종류의 수열이지만 수렴하는 무한급수의 합을 처음으로 구한 사람은 아르키메데스(Archimedes)이다. 그는 책 『포물선의 구적』에서 다음을 밝혔다.

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{4^{n-1}}+\cdots=\frac{4}{3}$$

아르키메데스는 포물선의 기하학을 반복 적용하고 고대의 실진법의 이중 귀류법을 사용하여 이 무한등비급수의 합을 구했다. 이처럼 아르키메데스가 수렴하는 특별한 무한급수의 합을 최초로 구한 이후 미적분법이 완성되기까지 넓이나 부피를 계산하는 데에 무한급수가 수렴과 발산에 대한 별다른 논의 없이 종종 사용되어왔고, 무한급수에 관한 단편적인 계산들을 했다. 예를 들어, 1350년 니콜 오렘(Nicole Oresme)은 조화급수 $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$가 발산한다는 것을 최초로 증명하였고, 무한급수 $\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\cdots+\frac{n}{2^n}+\cdots$의 합을 구하였다.

이번 연구에서 제시한 무한급수 관련 문제 풀이에서 학생들은 무한급수 중 특별한 형태인 무한등비급수를 다른 무한급수보다 더 쉽게 다루지만 무한급수의 수렴과 발산에 대한 의식 없이 무한급수를 계산하는 현상을 볼 수 있었는데 이러한 현상은 무한급수의 역사적 발달 과정에서도 나타났던 것이다.

그리고 1671년 스코틀랜드 수학자 그레고리(Gregory)는 거듭제곱 급수의 일종인 $\arctan x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\cdots$ 을 알아냈고, 비슷한 시기인 15세기에 인도의 수학자 마드하바(Madhava)도 이를 발견하였다. 이 그레

고리 급수는 이후에 여러 수학자들에 의해 π의 근삿값을 계산하는데 이용되었다. 1715년에 테일러(Taylor)가 책 『증분법』에서 거듭제곱 급수와 관련한 내용을 서술하여 '테일러 전개'가 탄생하였고, 1742년에 그 중 특별한 경우를 매클로린(Maclaurin)이 책 『유율론』에서 사용한 뒤로 그 특별한 급수가 '매클로린 전개'로 불리게 되었다. 테일러 급수의 중요성에 대한 완전한 인식은 오일러가 그것을 미분학에 응용했던 1755년과 그 뒤에 라그랑주가 함수론의 기초로서 급수를 사용했던 1797년까지 지연되었다. 거듭제곱 급수는 삼각 함수, 로그 함수, 지수 함수 등의 수표를 만들기 위한 계산 과정에서 유용하게 사용되었고, 1967년 π에 대한 소수점 아래 50만 자리 이상까지의 계산에서도 그 위력을 발휘하였다(허민, 오혜영, 2009).

1812년에 가우스(Gauss)가 자신이 만든 초기하급수(hypergeometric series)를 다루면서 무한급수의 수렴에 대한 개념을 최초로 적절하게 고려하였고, 1820년 경 코시(Cauchy)에 의해 무한급수의 수렴성에 관한 이론이 발표되었다. 코시는 증가하는 n의 값에 대하여 처음 n개 항의 합 S_n이 어떤 극한 S에 가까워질 때 이 극한 S를 급수의 합으로써 이 급수는 수렴한다고 정의하고, 어떤 무한급수가 수렴하기 위한 필요충분조건은 어떤 주어진 값에 대해서 S_n과 S_{n+p}사이의 차가 n이 무한대가 될 때 0에 가까워지는 것이라는 것을 증명하였다(양영요, 조윤동, 2011, p.841).

고등학교 학생들이 무한급수를 학습하고 나서 무한급수 개념 스키마를 구성하게 되면 이와 같은 코시의 무한급수의 수렴에 대한 개념을 가지게 될 것으로 기대한다. 하지만 무한급수를 학습한 이후 학생들이 무한급수 관련 문제 풀이 과정에서 보여준 모습은 이러한 개념을 잘 이해하지 못하고 있는 것으로 보였고, 선행 연구들의 결과에서도 학생들이 무한급수를 부분합의 극한으로 이해하지 못한다는 것을 볼 수 있었다. 따라서 연구자는 학생들의 무한급수 개념 스키마의 구성에 대해 알 수 있는 무한급수 개념의 발생적 분해를 밝힐 필요가 있다고 보았다. 무한등비급수의

합을 계산할 수 있었던 기원전 2000년 경부터 코시에 의해 무한급수의 수렴에 대한 개념이 부분합의 극한으로서 수학적으로 정립된 19세기까지 4000년에 가까운 오랜 세월이 걸린 것에서 알 수 있듯이 학생들이 무한급수의 수렴에 대한 개념을 직관적으로 구성하는 것은 거의 불가능하다는 것을 생각할 수 있다. 의식적으로 여러 가지 수학적 개념 스키마들에 대한 내면화, 조절, 일반화, 대상화, 가역적 사고 등의 반영적 추상화가 적절하게 이루어져야 새로운 무한급수 개념의 스키마를 구성할 수 있게 되는 것이다.

코시 이전에도 미적분학과 관련된 수학의 엄밀성에 관한 논의가 있었으나 극한과 무한의 개념을 수학적으로 다루는 것이 대단히 어려운 것이어서 그 때까지 극한, 연속, 미분, 적분 등이 엄밀한 기초를 세우지 못한 채 사용되고 있었다. 19세기 초 푸리에(Fourier)에 의해서 푸리에 급수가 만들어지면서 함수의 연속성에 관한 오일러식의 판별법의 근거가 애매해졌을 때, 코시는 함수를 변수 사이의 관계, 즉 대응으로서 규정하고 극한을 현대적인 개념으로 정의하였다. 코시는 극한의 개념을 명확히 하여 앞에서 설명한 바와 같이 수열의 극한과 무한급수의 수렴에 대한 수학적인 엄밀한 정의를 함으로써 극한의 개념을 체계화하였다.

일반급수의 절대수렴과 조건부수렴에 대한 연구는 디리클레(Dirichlet)에 의해서 이루어졌으며, 이어서 1854년에 리만(Riemann)은 조건부수렴하는 급수는 항의 순서를 바꾸어서 임의의 수에 수렴시킬 수 있다는 것을 발견하였다.

이러한 절대수렴과 조건부수렴에 관한 연구가 이루어지기 전에는 무한급수에서 유한합에서 성립하는 교환법칙이나 결합법칙을 그대로 사용하여 모순적인 결과를 내고 이에 대해 설명하지 못하는 현상이 많았다. 예를 들어 Grandi의 급수라고 불리는 무한급수 $1-1+1-1+1-1+\cdots$을 다음과 같이 계산하였다.

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+\cdots=0$$

$$1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1+0+0+\cdots=1$$

무한급수 $1-1+1-1+1-1+\cdots$의 합이 0또는 1이라는 결론이다. 이러한 모순적인 결과를 얻게 된 이유는 무한급수에서 일반적으로 결합법칙이 성립하지 않기 때문이다. 무한급수 $1-1+1-1+1-1+\cdots$와 같이 짝수 번째 항까지의 합과 홀수 번째 항까지의 합이 다른 경우에는 무한급수가 수렴하지 않는다. 수렴하지 않은 무한급수에서는 결합법칙이 성립하지 않기 때문에 위와 같은 등식은 잘못된 것이므로 그 등식으로부터 무한급수 $1-1+1-1+1-1+\cdots$의 합이 0또는 1이라는 결론은 틀린 것이다.

이번에는 Grandi의 급수의 합을 S라고 하면, 다음과 같은 풀이도 가능하다. $S=1-1+1-1+1-1+\cdots$ 라고 하면,

$$S=(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0$$

$$S=1+(-1+1)+(-1+1)+\cdots=1$$

이므로 두 식을 변끼리 더하면 $2S=1$ 이 되어 $S=\frac{1}{2}$이라는 결과를 얻게 된다. 이러한 결과들은 $S=1-1+1-1+1-1+\cdots$ 에 대해 $S=1$ 또는 $S=0$ 또는 $S=\frac{1}{2}$이 되어 모순적인 상황이 발생하게 된다. 이는 수렴하지 않는 급수인 무한급수 $1-1+1-1+1-1+\cdots$을 수렴하는 것으로 가정했기 때문이고, 특히 결합법칙을 사용한 것은 무한급수 $1-1+1-1+1-1+\cdots$ 를 절대수렴하는 무한급수로 취급했기 때문이다. 즉, 무한급수에서 교환법칙과 결합법칙은 절대수렴할 경우에만 성립하는데 절대수렴은커녕 수렴도 하지 않는 무한급수에 대해 결합법칙을 사용했기 때문에 이러한 모순적인 결과가 나타나는 것이다. 이렇듯 유한한 항들의 합에서는 성립했던 결합법칙을 무한급수에서는 그것이 절대수렴한다는 전제조건이 있어야 사용할 수 있는 것이다. 이렇듯 절대수렴과 조건부수렴에 대한 연구가 이루어지기 전에 무한급수의 계산에서 결합법칙과 교환법칙을 사용했던 역사를 보면, 학생들도 자연스럽게 결합법칙과 교환법칙을 무한급수에 적용하게 될 것임을 예상할 수 있고 실제로 무한급수 학습에서 이러한 학생들의 오류가 발생하는 것을 관찰할 수 있

다. 이러한 점에서 무한급수의 수렴성에 대한 판단은 매우 중요함을 알 수 있다.

19세기 후반에는 많은 수학자들의 노력에 의해서 수렴 조건에 대한 폭넓은 조건을 통일적 견지에서 조직적으로 체계화하여 급수의 수렴 조건에 대한 논리를 새롭게 하였으며 발산하는 급수에도 주목하게 되어 19세기 말에는 보렐(Borel)에 의해서 새로운 총합법이 제시되었다(박배훈 외, 2002).

이와 같은 과정으로 무한급수는 해석학에서 가장 널리 사용되는 도구 중 하나가 되었고 미적분학의 근간을 이룬다. 또한 무한급수의 수렴성에 관한 개념이 수학적으로 엄밀하게 정의되기까지는 고대 그리스 시대의 제논의 역설에서부터 시작하여 19세기 코시에 의해 무한급수 개념에 대한 수학적인 엄밀한 인식이 가능해지기 전까지 매우 오랜 세월이 걸린 것을 볼 수 있다.

2.1.2. 교과서에서의 무한급수

교육과정 상으로 처음 무한급수를 학습하게 되는 고등학교 2학년 학생들의 고등학교 수학Ⅰ 교과서에서 무한급수는 '무한수열의 각 항들을 합의 기호 '+'로 연결한 식'으로 정의되고 있다. 하지만 무한급수의 정의만으로는 무한급수의 수렴성을 판단하거나 무한급수의 성질을 적용하여 문제를 해결하는 것이 불가능하다. 따라서 무한급수의 정의에 이어서 부분합 S_n을 정의하고 부분합의 수열을 도입하여 무한급수의 합을 정의한다. 무한급수에서는 무한급수의 수렴성이 가장 중요한 요소인데 이에 대한 이해를 위해서는 부분합의 수열로서 무한급수를 이해하는 것이 필수적이다.

다음은 고등학교 수학Ⅰ 교과서에서 무한급수와 무한급수의 합을 정의하는 부분이다. 고등학교 수학Ⅰ 교과서는 여러 출판사의 교과서가 있지

만 다루는 내용과 그 순서가 거의 동일하기 때문에 한 종의 교과서의 무한급수 도입 부분을 예로 살펴보고자 한다. 고등학교 수학Ⅰ 교과서에서 무한급수 단원은 다음과 같이 무한급수의 정의를 소개하고, 부분합을 정의한 후에 무한급수의 합을 설명하는 순서로 구성된다.

무한수열 $\{a_n\}$의 각 항을 차례대로 합의 기호 $+$로 연결한 식

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

을 **무한급수**라 하고, 이를 기호 $\sum$를 사용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$과 같이 나타낸다.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 첫째항부터 제 n항까지의 합

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

를 이 무한급수의 제 n항까지의 부분합이라고 한다.

무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$에서 부분합

$$\begin{aligned} S_1 &= a_1 \\ S_2 &= a_1 + a_2 \\ S_3 &= a_1 + a_2 + a_3 \\ &\vdots \\ S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \end{aligned}$$

으로 이루어진 무한수열 $\{S_n\}$이 일정한 수 S에 수렴할 때, 즉

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S$$

일 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 S에 수렴한다고 한다. 이때 S를 **무한급수의 합**이라고 하고, 다음과 같이 나타낸다.

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = S \quad \text{또는} \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

한편 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 부분합으로 이루어진 무한수열 $\{S_n\}$이 발산할 때, 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다고 하며 발산하는 무한급수에 대해서는 그 합을 생각하지 않는다.

(최용준 외, 2010, pp.194-195)

위와 같이 무한급수의 합을 정의한 후에는 무한급수의 수렴과 발산을 판단할 수 있는 중요한 명제를 다루고, 무한급수 중 다루기 쉬운 특수한 예인 무한등비급수의 내용을 대표적으로 다루고 있다. 그리고 마지막으로 무한급수의 성질과 무한등비급수의 활용 문제들을 다룬다. 이때, 학생들은 무한급수의 수렴성을 효율적으로 판단할 수 있는 도구 중 하나로 볼 수 있는 무한급수의 수렴과 발산에 관한 다음과 같은 명제를 학습하게 된다. 그러나 무한급수에서 매우 중요한 내용임에도 불구하고 선행연구의 결과를 보면 이 명제를 이용하여 무한급수의 수렴성을 판단하는 데에 있어서 학생들이 많은 오류를 보인다는 것을 확인할 수 있다.

무한급수의 수렴과 발산

(1) 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 수렴하면 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$이다.

(2) $\lim_{n\to\infty} a_n \neq 0$이면 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$은 발산한다.

(최용준 외, 2010, p.197)

이번 연구의 과정에서 학생들이 무한급수와 무한등비급수를 혼동하는 것을 종종 확인할 수 있었는데 이는 교육과정에서 무한급수의 합을 정의

한 이후에 무한급수 중 특수한 형태인 무한등비급수에 대한 내용만을 비중 있게 다루고 있기 때문인 것으로 볼 수 있다. 학생들이 무한급수에 대한 개념 이미지를 형성할 때 교과서에서 많이 접하고 문제 풀이도 많이 경험했던 무한등비급수의 이미지가 크게 영향을 미치는 것이다. 다음은 고등학교 수학Ⅰ 교과서에서 무한등비급수를 정의하고 무한등비급수의 수렴과 발산에 대해 설명하는 부분이다.

무한등비수열 $\{ar^{n-1}\}$에서 각 항의 합으로 이루어진 무한급수

$$\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots$$

을 첫째항이 a, 공비가 r인 **무한등비급수**라고 한다.

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 부분합

$$S_n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1}$$

에서

$r \neq 1$일 때, $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

$r = 1$일 때, $S_n = a + a + a + \cdots + a = na$

따라서 무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$의 수렴, 발산은 r의 값에 따라 다음과 같다.

(1) $|r| < 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = 0$이므로 $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{a(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a}{1-r}$

따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 수렴하고, 그 합은 $\dfrac{a}{1-r}$이다.

(2) $r = 1$일 때, $\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} na = \begin{cases} \infty & (a > 0) \\ -\infty & (a < 0) \end{cases}$이므로 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$는 발산한다.

(3) $r>1$ 일 때, $\lim_{n\to\infty} r^n = \infty$ 이므로 $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} \neq 0$ 이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

(4) $r \leq -1$ 일 때, 수열 $\{r^n\}$은 진동하므로 $\lim_{n\to\infty} ar^{n-1} \neq 0$ 이다. 따라서 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1}$은 발산한다.

이상을 정리하면 다음과 같다.

무한등비급수의 수렴과 발산

무한등비급수 $\sum_{n=1}^{\infty} ar^{n-1} = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} + \cdots \ (a \neq 0)$은

(1) $|r|<1$ 일 때, 수렴하고 그 합은 $\frac{a}{1-r}$ 이다.

(2) $|r| \geq 1$ 일 때, 발산한다.

(최용준 외, 2010, pp.199-200)

위의 내용을 보면 무한등비급수의 수렴과 발산에 대해 무한등비급수의 합을 부분합의 극한으로 설명하고 수렴조건에 대해서도 이 과정을 통해 이끌어내고 있지만 연구 과정에서 학생들의 문제 풀이와 면담 과정에서는 이 내용에 대한 이해가 부족한 학생들을 쉽게 볼 수 있었다.

그리고 무한급수 단원의 마지막에 무한급수의 성질로 다루어지고 있는 다음 내용은 학생들의 무한급수에 대한 대상화를 거쳐 무한급수를 대상으로 다룰 수 있을 때 비로소 적절하게 활용될 수 있다.

무한급수의 성질

두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 이 수렴할 때

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} c a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (단, c는 상수)

(최용준 외, 2010, p.201)

2.1.3. 무한급수에 관한 선행연구

무한급수에 관한 선행연구는 국내외 모두 무한급수를 단독 주제로 하기보다는 극한 개념에 대한 연구에서 다루고 있는 경우가 많으며, 연구 영역은 무한급수의 학습이나 지도보다 무한급수 자체에 대한 연구가 더 많은 편이다.

무한급수에 관한 국내 연구들로는 수열의 극한과 무한급수 관련 문제 풀이 과정에서의 학생들의 오류 유형을 분석(지영조, 2006; 고지현, 2012; 황우형, 지영조, 2008)하거나 무한급수 학습에서 발생하는 오개념을 분석(김채지, 2010)한 연구, 무한급수 학습에서 학생들이 어떤 인지적 장애를 겪는지를 분석(조영혜, 2008; 남윤희, 2006)한 연구들과 같은 무한급수의 학습의 어려움에 관한 연구들과 도형을 활용한 무한급수의 지도 방안을 제시하는 연구(정성미, 2008; 김지선, 2010), 무한등비급수의 지도 방안을 제시하는 연구(최정윤, 2012)와 같이 무한급수의 지도에 관한 연구들이 있다. 이와 더불어 무한급수 수렴성 판정에 대한 수학적 연구(곽부진, 2006; 김가영, 2007; 김미경, 2003; 김성덕, 2010; 김현정, 2002; 이승연, 2007)가 다수 있다.

무한급수의 수렴성 판정에 관한 수학적 내용의 연구가 많은 것에 비해 무한급수의 학습과 지도에 대한 연구의 양이 적고, 무한급수의 학습에 관한 연구의 경우에도 오개념과 오류에 관한 연구에 치우쳐져 있는 것을 볼 수 있다. 이를 통해 수학적으로 중요한 의미를 가지고 있는 무한급수의 학습에 대한 연구가 다양한 관점에서 이루어질 필요가 있음을 알 수

있다.

무한급수의 학습에 관한 연구들의 결과를 정리해 보면 다음과 같다. 지영조(2006)와 황우형, 지영조(2008)는 고등학교 2학년 여학생 121을 대상으로 질문지 검사를 실시하여 수열의 극한과 무한급수에 관련하여 학생들이 가지고 있는 개념 정의와 개념 이미지를 알아보고 교과서 예제를 풀이하는 과정에서의 오류 유형을 보이고자 하였다. 그 결과 대다수의 학생들이 형식적인 정의가 아닌 직관적인 정의를 내리고 부적절한 개념 이미지를 가지고 있는 것으로 나타났다. 부적절한 개념 이미지 중 무한급수에 관한 것은 '무한급수의 합'은 부분합의 수열의 극한값이 아니라 극한값을 계속 더해 나가는 것이다, 각 항이 모두 양수이면 무한급수는 발산한다.' 등이 있었다. 오류의 유형은 기호 사용의 오류, 연산 오류, 정의가 왜곡된 오류, 정리 또는 성질을 잘못 적용한 오류, 풀이 과정이 생략된 오류, 기타 오류의 크게 6가지로 분류하였고, 이 중 무한급수의 합에 대한 오류로는 정의와 정리 또는 성질을 잘못 적용한 오류가 가장 많았다. 또한 이 연구의 결과 중 학생들의 무한급수의 합에 관한 부적절한 개념 이미지 개수와 문제의 정답을 구하지 못하는 것 사이에 강한 상관관계가 나타나지 않았다는 결과가 있었다. 이는 학생들의 무한급수에 대한 개념 이미지만으로는 학생들의 무한급수 개념에 대한 분석이 충분하지 못함을 보여주고, 학생들이 무한급수에 관한 문제를 풀이하는 과정을 세부적으로 살펴보고 어떤 과정에서 학생들이 어떤 이유로 어려움을 겪는지를 볼 필요가 있음을 시사한다.

조영혜(2008)는 고등학교 3학년 학생 203명을 대상으로 무한급수 관련 문제 풀이 검사를 실시하여 무한급수의 학습에서 발생하는 인지적 장애의 종류를 조사하고 분석하였는데, 그 결과 학생들은 무한급수 단원 자체를 부담스러워하고, 무한급수의 합에 대한 정확한 수학적인 이해를 하지 못하는 것으로 드러났다. 그리고 무한급수의 수렴과 발산을 판별하는 문제에서 부분합 S_n을 구한 후 n을 무한히 크게 하는 극한을 취하는 문제는 비교적 잘 해결하는 것에 비해 부분합 S_n을 통일된 하나의 식으로

표현하기 힘든 문제에서는 풀이에 어려움을 겪는다고 하였다. 또한 학생들은 무한등비급수 문제를 풀 때, 수렴하기 위한 공비의 조건을 고려하지 않고 공식을 적용하는 모습을 보이는데, 이러한 연구 결과는 본 연구에서 검사 문항을 만드는 데에 기초를 제공하였다.

김채지(2010)는 고등학교 3학년 학생 150명을 대상으로 설문 분석을 하여 학생들이 무한급수 개념 학습에서 겪게 되는 인지적 장애를 살펴보았는데, 그 결과 인지적 장애의 대부분이 부분합의 극한으로서의 무한급수를 정확히 이해하지 못한데서 비롯됨을 밝혔다.

비슷한 연구로 고지현(2012)의 연구에서는 고등학교 2학년 학생 34명을 대상으로 수열의 극한과 무한급수의 문제해결 중에 일어나는 오류의 유형을 (오류 1) 문제를 잘못 이해 또는 해석한 오류: 기호, 용어의 이해 부족, (오류 2) 논리적으로 부적절한 추론: 문제의 일부분만 고려한 경우 포함, (오류 3) 숙련되지 못한 개념, 정의 사용: 정의, 정리의 부적절한 사용, 잘못된 공식 사용, (오류 4) 기술적 오류: 연산의 실수, 계산과정의 오류, (오류 5) 풀이과정의 생략, (오류 6) 애매한 오류: 해석 불가능한 오류의 6가지 유형으로 파악하고 원인 분석을 통해 수열의 극한 단원을 효율적으로 지도하기 위한 기반을 제공하고자 하였다. 무한급수에 관한 결과만을 정리해 보면, (오류 6), (오류 3), (오류 2)가 다른 오류들에 비해 상대적으로 두드러지게 많이 나타났다. (오류 3)의 경우는 지영조(2006)와 황우형, 지영조(2008)의 연구 결과와 같지만 (오류 2)와 (오류 6)의 경우는 학생들의 직관적인 판단으로 인한 논리적인 추론의 부적절함과 풀이과정 누락으로 학생들의 사고 과정을 파악할 수 없는 경우가 많았던 것으로 볼 수 있다. 이는 무한급수에 대한 학생들의 개념을 분석을 위해서는 설문조사를 통한 연구보다 문제풀이 과정 전체에서 학생들의 시행착오의 모습을 관찰하고 심층적인 면담을 통해 학생들의 사고 과정을 살펴볼 필요가 있다는 점을 보여준다.

정성미(2010)와 김지선(2010)은 도형을 활용한 무한급수 지도방안을 제시한다. 무한급수를 도형을 활용하여 지도하는 것이 학생들에게 수학적

인 구조를 깨닫게 하고, 수학을 직관과 통찰로 이해함으로써 학생들이 수학적 힘을 기를 수 있고, 흥미를 가질 수 있다고 하였다. 그러나 무한급수 학습의 어려움에 대해 도형을 활용한 지도 방안은 어느 정도 도움이 될 수는 있겠지만 학생들의 무한급수 개념에 대한 심층적인 분석이 선행되어야 더 구체적이고 효과적인 지도방안을 제시할 수 있을 것이다.

곽부진(2006)을 비롯한 무한급수의 수렴성 판정에 관한 논문들은 여러 가지 특징적인 무한급수의 수렴 판정법을 제시하거나 함수항 급수의 수렴성을 판정하는 것(이승연, 2007)과 관련된 비슷한 내용의 연구들이다.

이처럼 국내에서 이루어진 무한급수에 관한 연구는 대부분 무한급수의 수렴성을 수학적으로 분석하거나 학생들의 오류 및 오개념을 분석하고 있어 연구 영역이 제한되어 있는 것을 볼 수 있다. 최근의 석사학위 논문들도 무한급수 관련 문제의 풀이에 대한 오류의 분석하여 학생들의 오류 유형과 그에 대한 지도방안을 간략하게 제시하는데 그치고 있을 뿐 학생들의 풀이에서 오류가 생기는 원인을 학생들의 개념 이해의 측면에서 심층적으로 분석하지는 못하였다. 이에 비해 수열의 극한과 함수의 극한에 관한 연구는 다양한 관점에서 많은 연구가 진행되었음을 볼 수 있었다. 이들 연구 중에서는 무한급수에 대한 언급을 조금씩 하고 있는 것도 있지만 무한급수 자체에 대한 연구가 아니기 때문에 무한급수에 대한 학생들의 개념 형성과정이나 형성된 개념의 분석이 충분하지 못했다.

따라서 본 연구에서는 무한급수 개념에 대한 학생들의 이해 과정을 살펴보고 설명해 보고자 하였다. 이전 연구들이 많은 학생들을 대상으로 설문 또는 문제 풀이 검사 방식을 택해 양적 연구를 했던 것과 달리 이번 연구에서는 소수의 학생들을 대상으로 하지만 질적 연구를 통해 그들의 무한급수에 관한 사고 과정을 분석하고 반영적 추상화로 설명함으로써 학생들의 무한급수 개념의 구성에 대해 이해하고 학생들의 무한급수 스키마의 구성에 다른 수학적 개념들이 어떠한 영향을 미치는지에 대해서도 APOS이론의 관점에서 살펴보고자 한다.

인식론적 장애, 오류의 개념이 학생들이 이해하지 못하는 이유를 설명

하려는 것임에 반해 반영적 추상화는 무엇이 이루어져야 하는가를 말하려는 것이라고 생각할 수 있다(Dubinsky, 1991). 따라서 Piaget의 반영적 추상화를 고등 수학적 개념에 확장시킨 APOS이론으로 무한급수 개념을 분석하는 것은 학생들의 무한급수 개념 형성을 위해 무엇을 해야 하는지를 알려줄 수 있다고 본다.

다음으로 무한급수에 관한 국외 연구도 국내 연구와 마찬가지로 무한급수의 학습과 지도에 관한 연구보다는 무한급수 자체에 대한 수학 분야의 연구가 많았다. 본 연구와 관련된 무한급수의 학습과 지도에 관한 연구로는 대표적으로 수학사에서의 무한급수에 대한 내용을 16-18세 학생들에게 제공하여 역사적 사례가 무한급수의 교수(teaching)를 향상하는데 유용하다는 결론을 보여준 Bagni(2000, 2005)의 연구와 수열에 관한 학생들의 이해를 APOS이론의 관점에서 분석하여 학생들이 수열에 관한 두 가지 다른 인지적 대상을 구성한다는 것을 보여준 McDonald 외(2000)의 연구를 바탕으로 학생들의 무한급수 개념 이해에 대해 분석한 Martinez-Planell 외(2012)의 연구가 있다. 이 연구는 대학 학부생 10명을 대상으로 무한급수 관련 문항을 풀이하도록 하고 면담을 하여 이를 APOS이론으로 분석하였다.

Martinez-Planell 외(2012)는 무한급수의 개념이 발달하는 과정에서 학생들이 만드는 정신적인 구성에 대해 설명하였다. 크게 3개의 문제에 대한 대학 학부생 10명의 면담 결과를 APOS이론과 Balacheff의 개념화(conception) 모델을 사용하여 분석하였다. 이 연구에서는 학생들이 무한히 더해가는 합의 과정으로의 무한급수와 부분합의 수열로서의 무한급수의 두 가지 개념을 구성하는 것을 보여주고, 그 중 부분합의 수열로서의 무한급수의 개념을 구성하기 어려워한다는 것을 보였다. 그리고 두 개의 다른 개념을 모두 구성하여 무한급수에 대한 이해를 향상시키도록 도울 수 있도록 하는 방안을 찾고자 하였다. Martinez-Planell 외(2012)의 이론적 분석은 두 가지 대상의 조직과 연관되어 있는데 무한급수를 합의 무한한 끝없는 과정으로 생각하는 SERLIST와 부분합의 수열로 인식할

수 있는 SERFUNC의 두 개의 구성이다. 각 학생들의 이해는 그 학생이 SERLIST와 SERFUNC의 과정 또는 대상 개념에 도달했는지 아닌지를 바탕으로 분석하였다.

Martinez-Planell 외(2012)의 연구는 본 연구에 대한 영감을 주었는데, 이번 연구에서는 APOS이론의 시작인 발생적 분해를 알아보고 이전 연구에서 보여주었던 무한급수의 두 가지 개념의 구성 과정을 발생적 분해를 바탕으로 설명해 보고자 한다. 또한 무한급수 개념 구성과 관련되는 다른 스키마를 밝힘으로써 학생들의 이해 과정도 좀 더 구체적으로 분석해 보고자 한다. 이전 연구에서 학생들의 행동, 과정, 대상 관점에 초점을 두었다면 이번 연구에서는 발생적 분해에 초점을 두고 발생적 분해를 바탕으로 각 학생들의 무한급수 개념 구성의 과정을 반영적 추상화의 관점에서 설명하고자 한다. 또한 무한급수 스키마를 구성하는데 크게 영향을 미치는 부분합 스키마와 수열의 극한 스키마가 어떻게 구성되고 어떠한 영향을 미치는지에 대해서 알아봄으로써 무한급수 지도에 구체적인 제언을 하고자 한다.

2.2. 발생적 분해와 APOS이론

이 절에서는 본 연구에서 사용하게 될 이론적 배경인 Dubinsky의 수학적 개념의 발생적 분해와 APOS이론의 행동, 과정, 대상, 스키마에 관해 정리해 본다.

2.2.1. 반영적 추상화와 발생적 분해

반영적 추상화는 Piaget가 아동들이 인지 발달 과정에서 논리 수학적 구조를 어떻게 구성하는지를 설명하기 위해 도입한 개념이다(Dubinsky,

1991). Piaget(1980)에 의하면 인지 구조의 발달은 반영적 추상화에서 기인하고, 특히 모든 논리 수학적 구조는 반영적 추상화에 의해 구성되며 반영적 추상화만이 논리 수학적 구성의 거대한 결정체를 지탱하고 활성화할 수 있다. 따라서 수학적 개념의 발달 과정과 구조를 설명하기 위해서 반영적 추상화를 이용할 수 있다.

이러한 점에서 Dubinsky(1991)는 Piaget의 반영적 추상화를 고등 수학적 사고에 적용하여 모든 수학적 개념과 그 개념의 획득 과정을 설명할 수 있는 일반적인 이론을 만들었고, 이 이론이 점차 발달하여 현재의 APOS이론이 되었다. Dubinsky는 고등 수학 개념이 내면화, 조절, 대상화, 일반화, 가역적 사고라는 다섯 가지 반영적 추상화의 구성 형식의 관점에서 설명될 수 있다고 하였다.

반영적 추상화의 다섯 가지 구성 양식 중 앞의 네 가지는 Piaget가 반영적 추상화로 제시하였던 것이고 마지막 가역적 사고는 Piaget가 생각하긴 했지만 반영적 추상화로는 보지 않았던 것을 Dubinsky가 추가한 것이다. 다음은 반영적 추상화의 다섯 가지 구성 양식에 대한 간략한 설명과 무한급수에서의 각 구성 양식의 의미이다.

(1) 내면화(interiorization)

내면화란 인식한 현상을 이해하는 방법으로서의 내적인 과정을 구성하기 위해 하게 되는 반영적 추상화를 말한다. 일련의 구체적인 활동을 내면화된 조작의 체계로 번안하는 것으로 덧셈의 교환법칙이 내면화의 예가 된다. 무한급수를 보고 부분합의 수열을 내면적으로 구성할 수 있는 것은 내면화의 예로 볼 수 있다.

(2) 조절(coordination)

둘 또는 그 이상의 과정을 결합 또는 조절해서 새로운 것을 구성할 수 있다. 무한급수 스키마를 구성하는데 있어서 연관되는 스키마들이 많기 때문에 반영적 추상화 중에서도 조절이 특히 많이 필요하게 된다. 예를

들어, 일반항과 수열의 합의 스키마 간의 조절을 통해 부분합 스키마를 구성할 수 있게 되고, 부분합과 수열의 극한 스키마 간의 조절을 통해 무한급수 스키마가 형성된다. 각각의 스키마가 바르게 형성되어 있더라도 조절에 실패하면 새로운 스키마를 올바르게 구성하는 데에 어려움을 겪게 된다.

(3) 대상화(encapsulation)

대상화란 역동적인 과정을 정적인 대상으로 바꾸는 것을 말한다. 예를 들어, 무한급수를 무한히 더해가는 과정이라고 보는 것에서 대상화를 거치면 무한급수를 하나의 통일된 식과 시그마를 이용하여 나타낼 수 있고 그것을 하나의 대상으로 취급하여 두 개 이상의 수렴하는 무한급수들 간의 연산이 가능하거나 무한등비급수의 경우 그 대상이 수렴하기 위한 수렴 조건에 관해 생각할 수 있게 된다.

(4) 일반화(generalization)

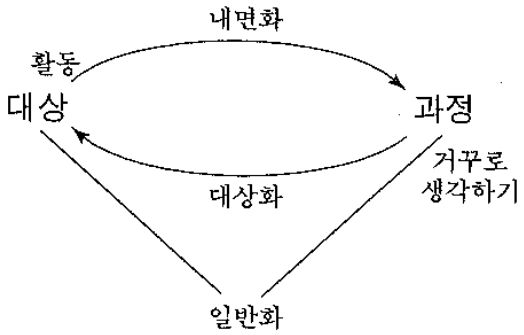
일반화란 현재의 스키마를 다른 여러 가지 현상에 적용할 수 있게 되는 것을 말한다. 일반화는 스키마를 더욱 폭넓게 응용할 수 있다는 것을 깨닫게 되면서 가능해진다. 무한급수에서는 무한급수의 각 항들을 보고 수열로 인식하여 항들의 규칙을 찾아 일반항을 구하려고 하는 것은 수열 스키마가 일반화를 통해 확장되었다고 볼 수 있다. 또한 부분합의 수열 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 에서 수열의 규칙을 찾아 부분합의 일반항 S_n을 구하는 것도 일반화 과정을 거치는 것으로 볼 수 있다.

(5) 가역적 사고(reversal)

일단 과정이 내적으로 존재하면 처음의 과정을 거꾸로 생각하는 새로운 과정을 구성할 수 있는데 이것이 가역적 사고이다. 무한급수에서는 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 형태로 주어진 무한급수를 n에 1부터 대입하여 처음 몇 개의

항의 값 또는 식을 구해 '+' 기호로 연결하여 나타내고 반대로 '+' 기호로 연결하여 표현한 형태로 주어진 무한급수를 하나의 통일된 식과 시그마 기호를 이용하여 나타내는 것이 가역적 사고의 예가 될 수 있다.

Dubinsky는 다음 그림과 같이 스키마의 구조를 설명하면서 이를 통해 수학적 개념과 그 개념의 획득 과정을 설명하고자 하였다.



<그림Ⅱ-1> 스키마의 구조(Dubinsky, 1991)

스키마는 그림에서 보이는 것과 같이 선형적인 관계가 아니라 순환 피드백 체계이다. 모든 수학 개념들은 대상이 될 수 있고, 이 대상들을 이용할 수 있는 많은 활동(행동, action)들이 있다. 단순히 대상에 적용하는 것과 달리 활동에 관련된 어떤 내적 구성이 이루어지면 그 내면화된 활동이 바로 과정이다. 기존의 과정에서 가역적 사고를 통해 새로운 과정을 만들어내기도 하고, 둘 또는 그 이상의 과정을 합성 또는 조절하여 새로운 과정을 만들어 내기도 한다. 또한 새로운 과정을 구성하기 위해 기존의 과정을 반성하고 그 과정을 대상으로 바꿀 수도 있다. 이러한 스키마의 구조는 APOS이론의 바탕이 된다.

Dubinsky(1991)는 수학적 개념을 분석할 때는 APOS이론과 연구자들 자신의 수학에 대한 이해, 그리고 학생들 스스로가(그러나 반드시 교사의 도움을 받아) 발견한 상황을 이해하기 위해, 수학 개념을 구성하는 학생

들에 대한 관찰의 세 가지 요소를 통합적으로 고려해야 한다고 하였다.

따라서 본 연구에서는 Dubinsky의 수학적 개념의 발생적 분해와 APOS이론에 대해 알아보고, 무한급수의 수학적 의미를 역사적 발달과정과 교과서를 통해 이해한 후, 무한급수 개념을 재구성하는 학생들에 대한 관찰을 실시하였다. 이때, 학생들이 무한급수 개념을 처음으로 형성해 나가는 과정을 관찰한 것은 아니지만 학생들이 학습했던 교과서를 분석하여 어떠한 과정을 통해 무한급수 개념을 형성하게 되었을지 살펴보고 학생들이 연구자가 제시하는 무한급수 문제를 풀이하는 동안 무한급수 개념을 재구성해 나가는 과정을 살펴봄으로써 학생들이 무한급수 개념의 구조 및 구성 과정을 파악하고자 하였다.

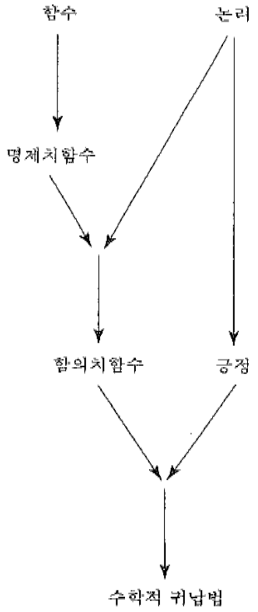
Dubinsky의 APOS이론에서는 수학적 개념을 반영적 추상화의 구성요소로 분석하기 위해 수학적 개념의 발생적 분해(genetic decomposition)를 사용한다. Dubinsky(1991)에 따르면 수학의 학습과 지도에서 모방과 암기에 의한 학습을 탈피하고 진정한 이해를 가능하게 하려면 지도하려는 수학적 지식의 구성에 필요한 스키마 구성의 매커니즘을 충실히 고려하여 그 자연스러운 구성을 안내하는 방안을 찾아야 한다. 따라서 APOS이론을 적용하는 연구는 수학적 지식의 구성에 필요한 스키마 구성의 매커니즘을 볼 수 있는 수학적 개념의 발생적 분해를 제시하는 것에서 시작되는 것이다. 수학적 개념에 관한 발생적 분해란 특수한 수학적 개념과 관련된 수학 내용들과 학생들이 그것을 어떻게 구성해서 이해하는가에 관해 기술하는 것을 말하고, 복잡한 구조를 가진 어떤 개념(스키마)에서 하나의 작은 부분을 떼어내서 스키마 사이의 관계를 조사하는 것이다(Dubinsky, 1991).

그러나 하나의 발생적 분해가 모든 학생들에게 유일한 것임을 뜻하는 것은 아니고, 학생들이 개념을 구성할 때 이용할 수 있는 한 가지 합리적 방법을 나타내는 것이다. 따라서 본 연구에서 제시하는 무한급수 개념의 발생적 분해 또한 유일무이한 것은 아니다. 하지만 무한급수 개념을 합리적으로 구성할 수 있는 하나의 방법인 만큼 무한급수의 발생적

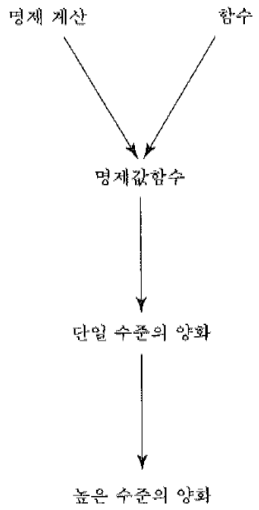
분해를 구성하는 것은 무한급수의 개념 지도에 긍정적인 영향을 줄 수 있을 것이다.

발생적 분해는 새롭게 구성되는 개념 스키마와 연관되는 다른 스키마들, 그들 사이의 반영적 추상화 과정 등을 밝히는 것이므로 학생들의 개념 습득과정과 개념 형성에 필요한 요소들을 추출하는 일이 학생들이 일으키는 인지적 장애를 분석하고 치유하는데 필수적(박혜숙 외, 2005)이라는 점에서 의미가 있다. 무한급수의 학습에서 학생들이 여러 가지 인지적 장애를 겪고, 오개념과 오류를 경험한다는 연구 결과들을 통해 이를 방지하거나 치유하기 위해서는 학생들의 무한급수 개념 습득과정과 개념 형성에 필요한 요소들에 대한 분석이 필요하다는 것을 알 수 있다.

Dubinsky는 수학적 귀납법과 옹골성(compactness)(Dubinsky, 1986), 술어 계산(Dubinsky, 1991), 극한(Cottrill 외, 1996)의 발생적 분해를 밝힘으로써 APOS이론이 고등 수학적 개념의 구성을 설명하는데 효과적인 이론임을 보여주었다. 그 중 수학적 귀납법과 술어 계산의 발생적 분해는 각각 다음과 같이 제시하고 있다.



<그림Ⅱ-2> 수학적 귀납법의 발생적 분해(Dubinsky, 1986)



<그림Ⅱ-3> 술어 계산의 발생적 분해(Dubinsky, 1991)

Cottrill 외(1996)는 이론적 관점으로부터 함수의 극한의 발생적 분해를 만들고 그것을 바탕으로 ISETL 소프트웨어를 이용한 교수 설계를 한 후 수업을 진행하였다. 그리고 수업 후에 학생들을 관찰하여 발생적 분해를 수정하였다. 최종적으로 제시한 학생들의 함수의 극한 개념에 대한 발생적 분해는 다음과 같다. (괄호 안의 내용은 İbrahim(2009)이 제시한 발생적 분해로 두 가지 발생적 분해는 양립가능하다.)

1. a에 가깝다고 생각하거나 a인 하나의 점 x에서의 함숫값을 계산하는 행동
2. a에 점점 가까워지는 연속되는 각각의 점들에서의 함숫값을 계산하는 행동
3. 다음과 같이 조절된 과정 스키마의 구성
   (a) 정의역 과정(a에 다가가는 x가 존재하는 정의역 과정을 구성하기 위한 두 번째 단계의 행동의 내면화)

(b) 치역 과정(L에 다가가는 y가 존재하는 치역 과정의 구성)

(c) 비형식적 극한의 과정 관념(함수 f에 대한 (a)와 (b)의 조절)

4. 비형식적 극한의 대상 관념(예를 들어, 합성 함수의 극한에 대해 말함으로써 비형식적인 극한 개념에 대한 행동을 실행한다. 이런 식으로 3단계의 스키마가 대상화되어 대상이 된다.)

5. 구간이나 부등식의 관점으로 비형식적 극한 과정 관념을 재구성(3(c)의 과정을 구간과 부등식의 관점에서 재구성한다. 이것은 기호로 $0<|x-a|<\delta$ 와 $|f(x)-L|<\epsilon$ 와 같이 접근의 근접성을 수치적으로 측정하는 것을 소개함으로써 이루어진다.)

6. 극한의 형식적 정의를 획득하기 전 단계의 재구성된 과정과 연결하기 위한 양화(quantification) 스키마의 적용

7. 구체적인 상황에 적용되는 완성된 $\epsilon-\delta$관념

İbrahim(2009)은 터키 대학생을 대상으로 5주간, 매주 2시간씩 컴퓨터를 활용한 그룹 수업을 하였고, 4시간은 일반적인 수업을 진행하였다. 수업은 Cottrill 외(1996)에서 밝힌 함수의 극한 개념에 대한 발생적 분해를 바탕으로 설계되었다. 수업 전과 후, 학생들의 함수의 극한 개념의 이해를 발생적 분해의 단계에 따라 분석한 결과 극한의 형식적 정의를 수업 후에 획득한 학생들이 다수 생긴 결과를 보여주어 발생적 분해를 바탕으로 설계된 수업의 효과성을 보여주었다.

Cottrill 외(1996)는 발생적 분해와 APOS이론의 의미를 다음 세 가지로 설명하고, 그 중 처음 두 가지의 의미를 함수의 극한의 발생적 분해를 통해 보여주었고, İbrahim(2009)은 세 번째의 의미를 보여준 것으로 볼 수 있다.

1. 방대한 양의 질적 자료에 대해 이해할 수 있는 방법을 제공한다.

2. 수학에서 특정한 주제의 학습의 본성에 대해 말할 수 있는 언어를 제공한다.

3. 학습 현장을 개선할 수 있는 교수학적 전략을 제안할 수 있는 잠재력을 가진다.

이와 같이 발생적 분해는 학생들의 수업 과정 또는 문제풀이 과정, 면담 과정에서 얻어지는 방대한 양의 질적 자료에 대해 이해할 수 있는 방법으로서 학생들이 이미 알고 있는 수학적 개념으로부터 새로운 수학적 개념을 어떤 반영적 추상화의 과정을 거쳐서 구성하게 되는지를 보여줄 수 있다. 또한 발생적 분해를 바탕으로 APOS이론은 수학에서 특정한 개념의 학습의 본성을 설명할 수 있는 언어를 제공하여 궁극적으로 수학적 개념 지도에 구체적인 교수학적 전략을 제공할 수 있다.

국내 연구 중 수학적 개념의 발생적 분해를 적용한 연구로는 Dubinsky의 수학적 귀납법에 관한 발생적 분해를 이용하여 학생들의 수학적 귀납법 개념 형성에 관해 분석한 김윤경(2006)의 석사학위 논문과 추상대수학에서의 Z_n에 대해 발생적 분해를 적용한 박혜숙 외(2005)의 연구가 있다. 김윤경(2006)은 고등학교 학생들이 수학적 귀납법 개념 형성과 관련된 각 스키마들을 어느 정도로 갖고 있는지를 알아보았고, 그 결과 명제치 함수 스키마에 비해 함의치 함수 스키마 구성에서 학생들이 어려움을 겪는 것으로 나타났다. 또한 논리 긍정식 스키마 구성에 있어서도 많은 학생들이 어려워함을 알게 되었다. 그리고 수학적 귀납법의 증명 과정에서 학생들이 보인 오류의 원인을 발생적 분해를 바탕으로 설명하였다. 이를 통해 보다 구체적인 수학적 귀납법의 지도에 대한 제언을 하였고, 다른 수학적 개념들에 대한 발생적 분해의 제시와 그것을 통해 학생들의 오류를 확인하고 교정할 수 있는 수업 모델들이 연구되기를 제안하였다. 다음으로 박혜숙 외(2005)는 APOS이론을 기반으로 하여 Z_n 개념의 발생적 분해를 제시하고, 대학에서 현대대수학 강좌를 수강한 수학 전공 학생들 중에서 7명을 선정하여 면담을 진행하여 발생적 분해의 몇 단계에 대한 학생들의 개념 형성을 분석하였다. 그리고 개념이미지를 형성하지 못한 학생을 대상으로 발생적 분해의 각 과정을 자연스럽게 거치도록 문제를 제시하여 문제풀이가 끝난 후에 학생이 올바른 개념

을 획득한 것을 확인하였다. 이를 통해 발생적 분해의 각 단계를 거치는 문제 해결 과정을 적용한 수업이 필요함을 강조하였다.

이와 같이 발생적 분해를 적용한 연구들에서 발생적 분해의 효용성을 보여주고 있고 특히 무한급수와 같이 복합적인 수학적 개념의 경우 그 개념의 구성을 다른 수학적 개념 스키마들과의 관계 속에서 분석해 봄으로써 무한급수 개념 지도에 도움이 될 수 있음을 보여준다. 따라서 본 연구에서도 이들 연구에서와 같이 학생들이 무한급수 개념을 형성하는 과정에서 어떠한 수학적 개념 스키마가 부족하여 어려움을 겪는지 또는 어떠한 반영적 추상화 과정에서 곤란을 겪는지를 살펴보고 이를 통해 학생들이 자연스럽게 무한급수 개념의 스키마를 구성하기 위해서는 어떠한 과정으로 어떤 수학적 개념 스키마들을 어떻게 형성하도록 유도하면서 지도를 해야 하는지에 대해 알아보고자 하였다. 또한 면담 과정 중 학생들이 무한급수 개념의 발생적 분해의 각 과정 중 잘 형성되어 있지 않았던 과정에 대해 문제풀이와 연구자와의 대화를 통해 다시 형성하는 모습을 보이는지를 살펴보고 이를 통해서도 무한급수 개념 지도에 대해 시사하는 바를 생각해 보고자 하였다.

2.2.2. APOS이론

Borgen 외(2002)는 수학적 개념 이해에 관한 이론적인 틀을 Sierpinska의 인식론적 장애에 관한 접근, 반영적 추상화에 대한 Piaget의 개념을 바탕으로 한 Dubinsky의 APOS이론, 개념의 표준적인 교육과정 지식과 학생의 지식을 비교하는 Schoenfeld의 구조적인 접근, 관계적 이해와 도구적 이해에 관한 Skemp의 논의, 서로 구별되지만 상호보완적인 수학적 아이디어의 구조적 개념과 조작적 개념의 이중성에 대한 Sfard의 논의, 수학적 이해의 성장에 관한 역동적 이론인 Pirie와 Kieren의 연구와 같이 여섯 가지로 구분하고 있다. 이 중 Dubinsky의 APOS이론은 수학적 개념 이해를 과정-대상 측면에서 논의한 이론 중 하나이다.

하나의 개념이 완전한 모습을 갖추기 위해서는 과정에서부터 시작해서 대상으로 인식되어야 하며, 이러한 대상은 다시 조작의 대상이 되고 그 결과 구조를 형성할 수 있어야 한다(김성준, 2004). Piaget 이후 과정과 대상을 다루는 여러 이론에서는 과정과 대상의 상호작용을 강조하고 있다. 과정과 대상의 통합은 수학적 개념 형성에 중요한 시사를 제공한다. 과정과 대상의 반복적인 순환 과정을 통해 수학적 개념이 형성되기 때문이다. 과정과 대상, 조작과 구조를 통해 개념적 실체를 형성하는 것은 과정과 대상의 통합을 통한 수학적 지식의 성장을 의미한다(김성준, 2004). Tall 외(1999)는 이러한 과정-대상 측면에서의 수학적 개념 구성을 논의한 연구들을 다음 <표Ⅱ-1>과 같이 정리하였다.

	과정(process)	…	대상(object)
Piaget (50년대)	행동, 조작	…	사고의 주제화된 대상
Dienes (60년대)	술어	…	주어
Davis (80년대)	시각적으로 조정된 배열, 각 단계는 다음을 촉진시킴	통합된 배열, 전체로서 보고 sub-sequence로 쪼갤 수 있음	어떤 것, 개체, 명사
Greeno (80년대)	절차	다른 절차에 넣기	개념적 개체
Dubinsky (80년대)	행동, 각 단계는 다음을 유발함	내면화된 과정, 의식적인 제어를 하는	대상화된 대상
Sfard (80년대)	내면화 과정, 과정이 실행됨	압축 과정, self-contained	실재화된 대상

Gray&Tall (90년대)	절차, 특정 알고리즘	과정, 알고리즘과 관계없이 전체로서 생각함	과정-개념, 과정이나 개념을 불러일으키는 기호

<표Ⅱ-1> 과정과 대상 사이의 이행(Tall 외 4인, 1999)

APOS이론은 수학적 개념을 학습하는 것이 어떻게 일어날 수 있는지에 관한 구성주의적 이론이다. APOS이론은 수학적 지식의 본성에 대하여 다음과 같은 기본적인 가정을 하고 있다(Asiala 외, 1996).

> 개인의 수학적 지식은 상황을 다루기 위해 수학적 행동(action), 과정(process), 대상(object)을 구성 또는 재구성하며, 이들을 조직하여 그런 상황을 다루는데 사용할 스키마(schema)를 만들어, 인지된 수학적 문제 상황에 반응하려는 그들 자신의 경향(tendency)이다.

Dubinsky는 그의 동료들과의 연구 Cottrill 외(1996)에서 이전의 일반이론에서 APOS이론으로 자신의 이론의 명칭을 변경하게 되었다. 일반이론에서는 과정과 대상의 두 가지 구성만으로 스키마의 구조를 설명하려고 했던 것에 반해 학생들이 암기한 공식을 기계적으로 적용하는 것을 설명할 수 없다는 것을 반영하여 행동의 개념을 추가하고, 행동을 내면화하여 과정 관점을 가지게 된다는 것에 대한 생각을 하게 되었고, 과정의 대상화를 통해서도 대상을 형성할 수 있지만 스키마 또한 대상이 되고 더 높은 차원의 새로운 스키마를 구성할 수 있는 행동의 대상이 될 수 있다는 것을 알게 되었다. 따라서 APOS이론은 초기의 수학 지식과 지식 획득에 관한 일반이론에서 확장되어 행동(Action), 과정(Process), 대상(Object), 스키마(Schema)의 요소로 개념의 구조를 설명한다는 것을 반영하여 각 요소의 앞 글자를 따서 APOS이론이라는 이름으로 부르게 되었다.

APOS이론은 아동의 논리적 사고의 발달을 묘사한 Piaget의 반영적 추상화의 매커니즘을 이해하고, 이 아이디어를 고등 수학적 개념까지 확장하려는 시도에서 제기되었다(Dubinsky 외, 2001). 곧, 고등 수학적 사

고에서 적용되는 반영적 추상화의 개념을 개발하기 위한 노력의 일환으로, 반영적 추상화의 특징은 무엇이며, 고등 수학에서 그 특징들이 어떤 역할을 하는지를 생각해 보고 그것들을 조직 또는 재구성하여 수학 지식과 수학 지식의 구성에 관한 일관성 있는 설명을 제공하는 이론이다 (Dubinsky, 1991).

APOS이론의 특성을 Dubinsky 외(2001)는 다음과 같이 설명한다. 먼저 학생이 특정한 정신적 구성을 이루었다면 이후에 그 학생이 어떤 수학적 주제를 배울 수 있는지를 예측하는 것을 도와주며, 어떤 주제에 대한 구체적인 행동, 과정, 대상, 스키마를 구성하였는지 아닌지의 분석에 의하여 학생의 성공과 실패에 관한 해석을 제공할 수 있다. 또한 학생들이 어떻게 수학적 개념을 학습할 수 있는지에 관한 생각을 조직하는 방법을 제공하며, 자료를 분석하기 위한 도구로서도 활용된다. 그리고 수학의 단편적인 주제에만 적용될 수 있는 것이 아니라 광범위한 현상에 적용될 수 있으며, 학생들의 수학 학습에 대한 연구에서 의사소통을 위한 언어를 제공할 수 있다.

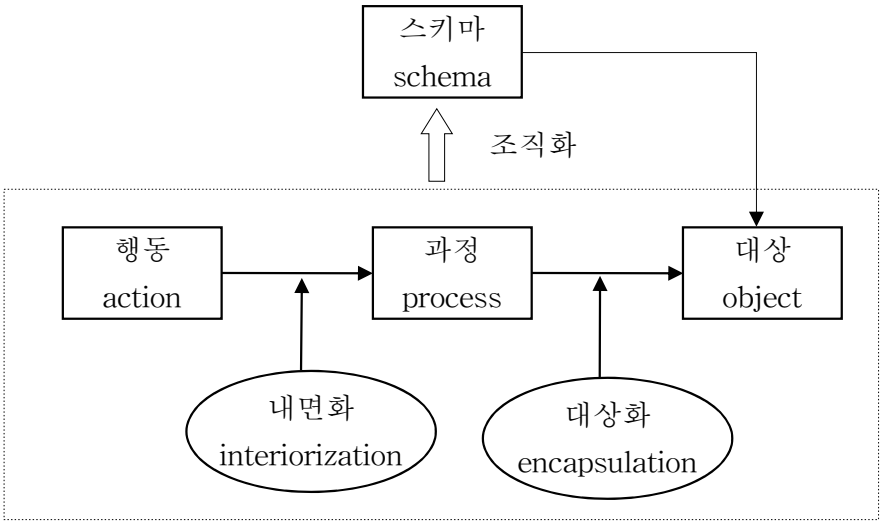
Asiala 외(1996)에 따르면 APOS이론에서의 행동, 과정, 대상은 각각 Piaget의 행동 스키마, 조작, 대상(행동과 과정을 적용할 수 있는)과 매우 유사한 의미를 가지는 용어이고, 스키마는 Piaget의 schemata와 비슷하고, Tall과 Vinner의 개념 이미지와도 맥락을 같이 한다고 한다.

APOS이론을 구성하는 각각의 요소인 행동, 과정, 대상, 스키마에 대해 Asiala 외(1996)는 다음과 같이 설명하고 있다.

행동이란 개인에 의해 적어도 어느 정도 겉으로 드러나는 대상에 대한 변환이다. 즉, 행동 관념에 머무르고 있는 사람은 어떤 단계에서 주어지는 구체적이고 상세한 겉으로 드러나는 실마리에만 반응하여 변환을 수행할 수 있다. 대상에 대한 행동을 반복하면서 반성함으로써 그 행동이 내면화되어(interiorized) 하나의 정신적인 과정이 된다. 변환에 대한 과정 관념을 가지고 있는 사람은 실제로 그러한 단계를 수행하지 않아도 변환의 단계를 반성하고, 묘사하고, 역과정을 생각할 수 있다. 특정한 과정에

적용하는 조작에 대해 반성하고 과정을 전체적으로 인식하기 시작하면서 그것에 대해 변환을 가할 수 있게 되면 과정은 대상화되어(encapsulated) 하나의 대상이 된다. 행동, 과정, 대상이 조직화되고 연결됨으로써 하나의 일관성 있는 구조가 되면 스키마가 된다. 스키마는 다른 정신적인 구성물인 행동, 과정, 대상과 구별되는데 이는 생물학에서 기관(organ)과 세포(cell)의 차이와 같다고 볼 수 있다. 스키마는 의식적으로 또는 무의식적으로 특정한 수학적 주제와 관련된 지식의 총체를 말한다.

이러한 APOS이론의 행동, 과정, 대상, 스키마에 대한 설명은 다음과 같은 도식으로 표현할 수 있다. 행동 관념에서 내면화를 통해 과정 관념으로, 과정 관념에서 대상화를 통해 대상 관념으로 그리고 이러한 행동, 과정, 대상 관념이 일관성 있는 하나의 구조가 되면 스키마 관념이 되고 이 스키마 관념은 다시 대상으로 볼 수 있고 이 대상으로부터 또 다른 스키마를 구성할 수 있게 되는 것이다.



<그림Ⅱ-4> APOS이론의 도식

Dubinsky 외(2005)는 무한 개념에 대하여 APOS이론을 적용하였다. 우선 자연수를 $1, 2, 3$에서 시작하여 $N = \{1, 2, 3, \cdots\}$으로 구성하는 것은

행동 단계이다. 이런 행동을 반복하면서 내면화된 '가능적 무한'의 단계는 과정에 해당한다. 도달할 수 없는 '가능적 무한'이 대상화되면 도달할 수 있는 무한의 개념인 '실무한'의 단계가 되며, 이는 대상에 해당한다. 대상 상태인 '실무한'은 그 자체로 완결된 전체성(totality)을 갖는다.

함수 개념을 APOS이론으로 설명할 수도 있다. 함수 개념에 대해 생각하기 위해서 구체적인 함수식이 표현되어야 하고, 함수식의 변수에 값을 대입해 보고 그것을 조작하는 것 이상은 하지 못할 때 함수에 대해 행동 이해를 하고 있다고 볼 수 있다. 주어진 함수에 대해 정신적인 과정을 구성할 수 있고 구체적이지 않은 입력값과 출력값에 대한 변형이 가능할 때 함수에 대한 과정 이해를 하고 있다고 본다. 그리고 함수 집합을 형성하거나 집합과 같은 산술적인 연산을 정의하거나 위상을 다둘 수 있는 등 함수에 대한 변형을 적용할 수 있을 때 과정을 내면화하여 인지적인 대상을 가지게 되었다고 한다. 그리고 이러한 행동, 과정, 대상이 조직되고 연결되어 일관성 있는 틀인 스키마를 구성하면 실세계 상황이나 주어진 수학적 상황에서 함수를 볼 수 있고 이용할 수 있게 된다.

Sfard(1991)는 수학적 개념은 대상과 과정의 두 가지 측면이 있으며, 이는 동전의 양면과 같이 상호보완적이라고 보았는데, 이는 APOS이론과 상통하는 바가 있다. Sfard는 수학 개념의 역사적 발달 과정을 분석한 후 수학적 정의와 표상에는 대상으로서의 구조적(structural as object) 방법과 과정으로서의 조작적(operational as process) 방법이 있으며, 이 두 가지가 교대로 나타나면서 개념이 구성된다고 보았다. Sfard(1991)는 수학적 개념의 형성 과정을 분석하고, '계산적인 조작'이 '추상적인 대상'으로 전이되기 위해서는 복잡한 과정을 거쳐야 하는데, 이 과정을 내면화, 압축, 실재화의 세 단계로 설명하였다. 내면화(interiorization) 단계에서는 실제로 수행한 행동을 통해 조작이 구성되도록 하고, 압축(condensation) 단계에서는 더 일반화된 경우를 생각한다. 그리고 실재화(reification) 단계에서는 이제까지 다루어오던 것을 새로운 시각에서 조망한다. 이 세 단계는 위계적인 특성을 가지고 있으며, 실재화된 개념이 새로운 조작 대상

이 되면 세 단계가 다시 반복되면서 이미 형성된 개념이 더 상위 수준의 개념으로 발달된다. 이 중 내면화와 실재화 단계는 APOS이론에서의 내면화, 대상화와 비슷한 것으로 볼 수 있다.

그러나 Sfard의 과정-대상 이론에서는 학생들이 공식을 암기하여 기계적으로 적용하거나 알고리즘에 의해 어떤 행동을 하고 그 다음 행동을 무의식적, 자동적으로 하게 되는 상황을 설명할 수 있는 요소가 결여되어 있다. 특히, 우리나라 학생들의 경우 무한급수에 관한 공식, 정의들을 이해하지 못하고 암기만 한 채로 문제 풀이에서 적용하는 상황이 이전의 연구들에서 드러났고 이번 연구에서도 이러한 상황을 볼 수 있을 것으로 예상할 수 있었다. 이러한 상황을 APOS이론에서는 '행동'의 관점으로 설명할 수 있다.

Tall & Vinner의 개념 이미지 또한 학생들의 수학적 개념의 이해를 분석할 수 있는 도구이지만 APOS이론의 경우 개념 이미지를 포함하면서도 더욱 세부적으로 발생적 분해를 통해 다른 스키마들과의 관계를 도식화하거나 학생들의 문제 풀이 또는 면담 결과를 행동, 과정, 대상의 관점으로 설명할 수 있기 때문에 다른 분석틀과 비교하여 학생들의 개념 이해를 풍부하게 설명할 수 있고, 이를 통해 무한급수의 지도에도 구체적인 안내도 가능할 수 있다.

국내에서 APOS이론을 적용한 연구로는 합성함수와 역함수의 개념 이해에 관해 연구한 김효정(2008)의 석사학위 논문과 극한 개념의 이해와 미분개념 획득과정의 연결에 관한 연구를 한 정은선(2010)의 석사학위 논문이 있다. 김효정(2008)은 엑셀을 이용한 탐구활동에서 학생들이 합성함수와 역함수 개념을 어떻게 이해하는지를 분석하고 이해 양상의 변화를 알아보고자 하였다. 그 결과 엑셀을 이용한 탐구활동을 통해 합성함수와 역함수 개념에 대한 행동, 과정, 대상 관점으로 더 정확하게 이해하게 되었음을 보여주었다. 정은선(2010)은 극한개념의 이해 단계가 높은 단계에 있을수록 미분 개념 획득 과정도 반드시 빠른 것은 아니라는 것과 개념 간의 연결방법이 유의미한 연결 관계인 결합적 연결이나 반영

적 연결 관계를 맺을수록 미분개념 획득 단계에서 보다 쉽게 미분개념의 스키마를 구성할 수 있다는 점을 밝혔다.

무한급수의 개념은 직관적으로 무한히 더해나가는 것으로 이해하기 쉽다. 그러나 무한급수 개념에 대한 올바른 이해를 위해서는 부분합의 수열을 생각하고 부분합의 수열의 극한으로 무한급수 및 무한급수의 합을 이해하는 것이 필수적이다. 즉, 무한히 더하는 과정으로서의 이해에 더하여 무한급수 자체를 대상으로 인식할 필요가 있는 것이다. 따라서 무한급수의 합이 부분합의 수열의 극한이라는 개념이 형성되어 가는 단계를 행동(마치 공식과 같이 S_n의 극한값을 계산하는 단계), 과정(부분합의 수열을 생각할 수 있는 단계), 대상(부분합의 극한으로 대상화되어 무한급수들 사이의 연산, 수렴반경 등에 대한 이해가 가능한 단계) 단계로 나누어 각각에 해당하는 학생들의 개념 이해의 특징을 알아보는 것은 의미가 있다. 따라서 무한급수 개념의 이해를 과정과 대상의 상호작용의 관점에서 분석하는 것은 의미가 있다.

이번 연구에서는 고등학교 2학년 학생들이 무한급수를 학습한 이후에 구성한 무한급수 스키마의 구조에 대해 알아보고자 한다. 학생들의 무한급수 관련 문항 풀이 과정과 면담을 통해 무한급수 스키마의 구성 과정을 볼 수 있을 것으로 가정하였다. 가장 낮은 단계의 학생은 특별한 형태, 예를 들어 무한등비급수와 같은 형태의 무한급수의 합을 구하는 공식을 알고 있거나 무한급수의 합을 구하는 방법을 단편적으로 알고 있을 것이다. 또한 무한급수의 합을 구하는 과정에서 부분분수의 분해와 같은 식의 변형을 할 수 있지만 무한급수와 부분합의 수열의 극한의 관계를 알지 못한다. 다음 단계의 경우는 특별한 형태의 무한급수의 수렴과 발산을 조사하거나 무한급수의 합을 구하는 방법들의 관계를 인지할 수 있다. 무한급수 스키마를 구성하는 요소들의 집합이 형성되는 단계에 해당한다. 최종 단계에 이르면 학생은 무한급수의 성질을 이해하고 무한급수의 합을 구하는 방법들의 일관성을 알 수 있다.

Ⅲ. 연구 방법

학생들의 무한급수 개념 구성에 대해 알아보기 위하여 본 연구에서는 무한급수 관련 문항에 대한 문제 풀이와 개별 면담을 진행하였다. 이 장에서는 연구 절차, 연구 참여자, 문항 개발의 순으로 정리한다.

3.1. 연구 절차

본 연구에서는 학생들의 무한급수 개념 구성에 대해 알아보기 위하여 먼저 이전 연구들과 무한급수의 수학적 분석을 바탕으로 개발한 무한급수 관련 문항에 대한 문제 풀이와 개별 면담을 2명의 학생을 대상으로 예비 조사를 실시하였다. 그리고 그 결과를 바탕으로 검사 문항과 면담 문항의 내용 및 서술 방식과 배열을 수정하여 개선한 후, 본 검사를 실시하였다.

3.1.1. 예비 조사

예비 조사는 2012년 10월 24일 서울시 강남구 ○○고등학교 자연계열 2학년 학생들 중에서 수학 성적이 상위권에 속하는 남학생 1명과 중하위권에 속하는 여학생 1명을 검사문항 풀이 및 면담 대상자로 선정하여 검사를 실시하였다. 그 결과 1번 문항의 세분화 및 기타 문항들을 수정이 필요하다고 판단되어 본 검사에서는 수정된 문항으로 검사를 진행하였다. 또한 10월 29일 같은 고등학교 자연계열 2학년 여학생 22명을 대상으로 문항 검사를 실시하였고, 이 중 의미가 있는 14명의 문항 검사 결과를 본 검사에서 검사 대상 학생 수를 정하는데 참조하였다.

3.1.2. 문항 검사 및 면담

무한급수 관련 문항 검사는 무한급수 개념에 대한 학생들의 이해에 대해 알아보기 위해 실시하였다. 그리고 그 결과를 바탕으로 한 개별적인 면담을 통해 심층적으로 학생들의 사고 과정을 보고자 하였다. 검사 대상자로 선정된 학생들에 대해 2012년 10월 30일에 개별적으로 약 30분간 검사 문항지를 풀게 한 후, 개인차가 있지만 평균적으로 약 한 시간 가량의 면담을 진행하였다. 문항 풀이는 충분히 생각할 시간을 주기 위해 시간제한을 두지 않았으며 스스로 모든 풀이가 끝났다고 말할 때까지 풀이를 할 수 있도록 허용하였다.

각 학생들은 개별적으로 총 6개의 무한급수 관련 문항을 풀도록 하였고, 정답만을 쓰기보다는 답을 구하는 과정을 상세히 서술하도록 하였다. 면담에서는 각 학생들의 검사 문항지 풀이 과정과 답에 근거하여 추가적인 질문을 하여 풀이과정을 더 명확하게 하거나 학생들의 무한급수 개념에 대한 이해를 더 잘 볼 수 있도록 하였다.

학생들에게 문제 제시에 대한 사전 언질을 없었으며 문항 풀이 및 면담 내용은 학생들의 동의를 얻어 캠코더로 모두 녹화한 후, 이후에 영상을 보면서 녹취록을 작성하여 그 내용을 분석하였다. 녹화된 영상으로 다시 학생들의 문제 풀이 과정을 보면서 학생들이 문제풀이 과정에서 생각하는 시간, 사용하는 제스처, 수정하는 과정 등도 주의 깊게 보면서 학생들의 사고 과정을 분석하는데 참고하였고, 면담 과정 역시 학생들의 무한급수 개념에 대한 사고의 변화의 순간이 있을 경우 그 순간을 포착하고자 하였다.

3.2. 연구 참여자

본 검사를 위하여 경기도 부천시 ○○고등학교 자연계열 2학년 학생들

중에서 수학 성적이 중위권 이상에 속하는 5명의 학생을 문항 검사 및 면담 대상자로 임의 선정하였다. 수학 성적이 중위권 이상인 학생들을 선정한 이유는 예비 조사에서 수학 성적이 하위권인 학생들의 문항 검사 결과에서 풀지 못하고 비워둔 문항이 많아 개념 이해에 관한 분석에 어려움이 있었기 때문이다. 본 연구의 목적이 학생들의 무한급수 개념 구성에 대한 분석이므로 무한급수 개념을 어느 정도 형성하고 있는 것으로 생각되는 중위권 이상의 학생들 중 5명의 학생들을 임의 선정하였고, 성별 구성은 4명의 남학생과 한 명의 여학생이었다. 5명의 학생들의 문항 검사 결과와 예비 조사에서의 다수의 학생들의 문항 검사 결과를 비교하여 다수의 학생들의 답안을 범주화하면 5명의 학생들의 답안 결과에 속하는 것으로 판단되어 5명의 학생들을 대상으로 심층적인 면담을 진행하였다.

3.3. 검사 문항 개발

예비 조사 실시 전, 처음 개발된 문항지에 포함된 문항은 총 7개의 서술형 문항이었으나 예비 조사 결과 및 현직 교사의 의견을 반영하여 최초 개발 문항 중 1개 문항을 삭제하였고, 1번 문항은 세분화하여 학생들의 좀 더 상세한 답변을 얻고자 하였으며, 문항의 순서를 조정하여 학생들이 문제에서 제시하고 있는 풀이 방법에 영향을 받지 않고 자신의 무한급수 관련 개념을 이용하여 문제를 풀이하도록 재구성하였다. 검사에 사용한 문항 검사지는 부록에 수록하였다.

다음은 각 검사 문항과 면담 문항을 통해 알아보고자 한 내용을 설명한 것이다. 1-(1)번은 무한급수의 정의를 생각해 보도록 하고, 1-(2)번은 수열과의 관계에 대해 생각해 보게 하는 문항으로 이에 대한 답변을 통해 무한급수와 부분합의 수열을 함께 떠올리는지를 알아보고자 하였다. 1-(3)번은 무한급수와 관련되는 것들을 모두 떠올려보게 함으로써 무한

급수의 발생적 분해에서 연결될 수 있는 다른 스키마들을 알아보고자 하였고, 1-(4)번은 무한급수의 예를 들어보게 하여 학생들이 무한급수를 과정으로 인식하는지 대상으로 인식하는지 또는 대상화와 그 역과정이 가능한지를 알아보고자 하였다.

2번 문항은 수렴하는 무한등비급수에 대해 무한등비급수의 합 공식을 사용하는지, 실무한의 개념을 가지고 있는지를 보고자 하였다. 면담에서는 이 문항에 대한 풀이과정에 근거하여 학생들이 무한등비급수의 합 공식을 유도할 수 있는지, 무한등비급수의 수렴조건에 대해 이해하고 있는지를 알아볼 수 있는 질문을 하였고, 실무한의 개념을 가지고 있는지를 조사하기 위해 $0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots$ 에 대한 질문을 하였다.

2번 문항은 Fishbein 외(1981)에서 사용한 문항 중 무한급수에 관한 문항으로 무한에 대해 직관적으로 받아들이는 정도가 높을수록 학생들의 응답이 2보다 작다(16.8%) 또는 무한대(51.4%)가 많고, 소수의 학생들만(5.6%)이 2라고 답하였다. 따라서 이 문항은 무한에 대한 직관적인 인식의 결과로 잠재적 무한의 개념을 가지고 있는 학생들과 실무한의 개념을 가지고 있는 학생들을 구별할 수 있는 문항으로 보고 이번 검사에서 이용하게 되었다. 또한 학생들의 무한에 대한 개념을 하나의 문항에 대한 답변으로 알아보는 것의 한계를 보완하기 위하여 면담 과정에서 $0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots$ 에 대한 학생들의 생각을 자유롭게 말해보도록 하였고, 이에 대한 학생들의 답변을 통해 실무한의 개념을 가지고 있는지의 여부를 다시 한 번 알아보았다.

3번 문항은 무한급수의 수렴과 발산을 조사하도록 하였는데 3-(1)번은 일반항을 하나의 식으로 구하기 힘든 교대급수로 항들을 나열한 형태로 수열을 제시했고, 3-(2)번은 하나의 식으로 나타내어진 일반항과 합의 기호를 이용하여 나타낸 교대급수를 제시하였다. 3-(1)번의 풀이에서 일반항을 구하기 힘들 때 학생들이 부분합을 생각해 내는지 그리고 어떻게 부분합의 수열을 이용하는지를 보고자 하였고, 3-(2)번의 경우 n에 관한 하나의 식으로 표현된 일반항에서 n에 숫자를 대입하여 각각의 항들을

구해 나열하는 행동을 보이는지와 그 이후에 부분합을 생각해 내고 부분합의 수열의 극한으로 무한급수의 수렴성을 판정할 수 있는지를 보고자 하였다. 3번 문제를 통해 학생들의 행동 관념과 과정 관념을 포착하고자 의도한 것이다.

조영혜(2008)의 연구결과 중 무한급수의 수렴과 발산을 판별하는 문제에서 학생들이 부분합 S_n을 구한 후 n을 무한히 크게 하는 극한을 취하는 문제는 비교적 잘 해결하는 것에 비해 부분합 S_n을 통일된 하나의 식으로 표현하기 힘든 문제에서는 풀이에 어려움을 겪는다는 것을 특징이 있었는데, 3-(1)번 문항은 그 이유를 분석해 보고자 조영혜(2008)에서 사용했던 문항을 수정하여 이용하였다. 조영혜(2008)에서는 객관식 문항으로 수렴하는 이유 또는 발산하는 이유를 고르도록 했지만 이번 연구에서는 서술형 문항으로 학생들이 풀이과정을 직접 서술하도록 하여 학생들의 자유로운 사고과정을 보고자 하였다.

4번 문항의 경우 주어진 두 무한급수를 대상으로 인지하고 무한급수의 성질을 적용하여 문제를 해결할 수 있는지를 보고자 하였으나, 해당 문제가 교과서의 예제로 많이 사용되는 유형으로 학생들이 흔하게 접할 수 있다는 점에 주목하고 면담 과정에서 추가적으로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}$을 구해보도록 제시하여 무한급수의 대상화가 가능한지를 한 번 더 알아보고자 하였다.

5번 문항에서는 부분분수의 분해를 이용하여 무한급수의 합을 구하는 문제를 제시하여 5-(1)번에서는 학생들이 어떤 과정을 거쳐 무한급수의 합을 구하는지를 보고, 5-(2)번에서는 옳은 풀이(b)와 틀린 풀이(a)를 제시하고 각각에 대한 학생들의 의견을 물어 무한급수에 대한 과정 관념에 머무르는지 부분합의 수열의 극한으로 대상화하여 대상 관념을 획득하였는지를 보고자 하였다. 문항 풀이에서 학생의 이해가 드러나지 않은 경우에는 면담 과정에서 관련 질문을 통해 학생의 무한급수 개념에 대한 사고를 드러내도록 하였다.

마지막으로 6번 문항은 수렴반경이 겹치지 않는 두 개의 무한등비급수 등식으로부터 두 등식을 변끼리 더하여 수학적으로 성립하지 않는 등식을 제시하고 이에 대한 판단과 정당화를 하도록 하여 무한등비급수를 대상화할 수 있는지를 보고자 하였다.

5번과 6번 문항의 경우 Martinez-Planell 외(2012)에서 사용했던 3개의 문항 중 우리나라 고등학교 교육과정에 적합한 2개의 문항을 선택하여 적절히 수정한 후 사용하였다. 5번 문항의 경우에 Martinez-Planell 외(2012)에서는 주어진 무한급수를 학생들이 풀어보도록 하는 문항이 따로 있지 않았고 주어진 두 풀이과정에 대한 생각을 서술하도록 하였는데, 이번 연구에서는 학생들이 먼저 풀이를 하게 한 후 서로 다른 풀이를 제시하고 그에 대한 자신의 생각을 쓰도록 하였다. 또한 면담 과정에서 자신의 풀이와 주어진 두 개의 풀이를 비교해 보게 하였다. 이를 통해 학생들의 무한급수 개념이 어느 정도 일관성 있게 조직되어 있는지를 보고자 하였다. 6번 문항은 무한등비급수의 수렴 조건을 고려할 수 있는지를 볼 수 있는 문항이면서 수학사적으로 의미가 있는 Grandi 급수에 대한 학생들의 반응을 살펴보고자 사용하게 되었다. 실제로 면담과정에서 Grandi 급수에 대한 학생들의 생각에 대해 질문하였고, 그것에 대한 학생들의 응답은 학생들이 무한급수 개념에 대한 분석에 사용되었다.

문항 번호	참고문헌
1	McDonald, M. A., Mathews, D., & Strobel, K.(2000). Understanding sequences: A tale of two objects, *CBMS Issues in Mathematics Education*, 8, 77-102.
2	Fishbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics, 12,* 491-512.

3(1),(2)	조영혜 (2008). 무한급수 개념의 이해에 관한 연구 : 고등학교 3학년 학생을 중심으로. 석사학위 논문. 건국대학교 교육대학원
4	최용준 외 (2010). 고등학교 수학Ⅰ 익힘책. 천재교육. p.166
5, 6	Martinez-Planell, R., Gonzalez, A. C., DiCristina, G. & Acevedo, V. (2012), Students′ conception of infinite series, *Educational Studies in Mathematics*, *81(2),* 235-249.

<표Ⅲ-1> 검사 문항별 참고문헌

면담 문항은 모든 문항에 대한 학생들의 개별적인 풀이 결과를 바탕으로 하여 주로 어떻게 그 답을 구하게 되었는지 설명해보도록 하고, 왜 그렇게 풀었는지를 질문하였으며, 학생들이 자신의 사고 과정을 인지하고 말로 표현해 보도록 하였다. 이를 통해 무한급수 개념의 발생적 분해를 위한 요소들을 추출하고자 하였고, 무한급수 개념에 대한 학생들의 행동, 과정, 대상 관념을 포착하고자 하였다. 또한 발생적 분해에서 무한급수 개념과 연결되어 있는 다른 스키마들과의 관계가 어느 정도로 유기적인지를 알아보고자 하였다.

이러한 검사 문항의 내용을 다음 표에 정리하였다.

문항 영역	문항 번호	문항 내용
무한급수 관련 개념	1-(1)	무한급수의 정의
	1-(2)	무한급수와 수열의 관계
	1-(3)	무한급수와 관련된 개념
	1-(4)	무한급수의 예
무한의 개념	2	간단한 무한등비급수의 합과 무한에 대한 개념

무한급수의 수렴과 발산	3-(1)	a_n과 S_n이 하나의 식으로 표현되지 않는 교대급수의 수렴성
	3-(2)	S_n이 하나의 식으로 표현되지 않는 교대급수의 수렴성
무한급수의 성질	4	무한급수의 성질을 이용한 계산
무한급수의 합	5-(1)	부분분수의 분해를 이용하여 무한급수의 합 구하기
	5-(2)	무한급수의 합을 구하는 방법에 대한 정당화하기
무한등비급수의 수렴조건	6	무한등비급수의 합과 수렴조건에 관하여 정당화하기

<표Ⅲ-2> 검사 문항별 해당 영역 및 내용

Ⅳ. 연구 결과

이 장에서는 학생들의 무한급수 관련 문항 풀이와 면담 결과를 토대로 하여, 그들이 구성한 무한급수 개념에 대한 분석을 하고 이를 발생적 분해를 이용하여 나타낼 것이다. 그리고 발생적 분해를 바탕으로 학생들의 무한급수 개념 구성에 영향을 미치는 부분합 스키마의 구성 과정과 수열의 극한 스키마의 구성을 알아보고, 이 두 스키마가 무한급수 개념 구성에 미치는 영향을 APOS이론의 관점에서 설명하고자 한다. 이를 통해 무한급수 개념 지도에 대한 시사점을 제공할 수 있을 것으로 기대한다.

4.1. 무한급수 개념의 발생적 분해

이 절에서는 무한급수 개념의 발생적 분해를 보이고자 한다. 먼저 무한급수 개념 이해에 필요한 요소들을 분석하고 그 계통성을 고려하여 수열, 일반항 a_n, 부분합 S_n, 합, 극한 등의 요소를 추출하였다. 그리고 이 요소들의 연결 관계를 학생들의 문제 풀이와 면담 과정 그리고 무한급수 및 무한급수의 합의 수학적 정의를 바탕으로 하여 구성하였다. 이 발생적 분해를 바탕으로 반영적 추상화의 관점에서 학생들의 무한급수 개념 구성 과정을 설명할 수 있다.

4.1.1. 무한급수 스키마 구성 과정

무한급수 스키마를 구성하는데 연관되는 다른 수학적 개념들은 검사 문항 중 1번 문항에서 무한급수에 대한 정의와 무한급수를 생각할 때 떠오르는 것들에 대한 학생들의 답안과 무한급수 개념에 대한 수학적 분석을 통해 추출하였다.

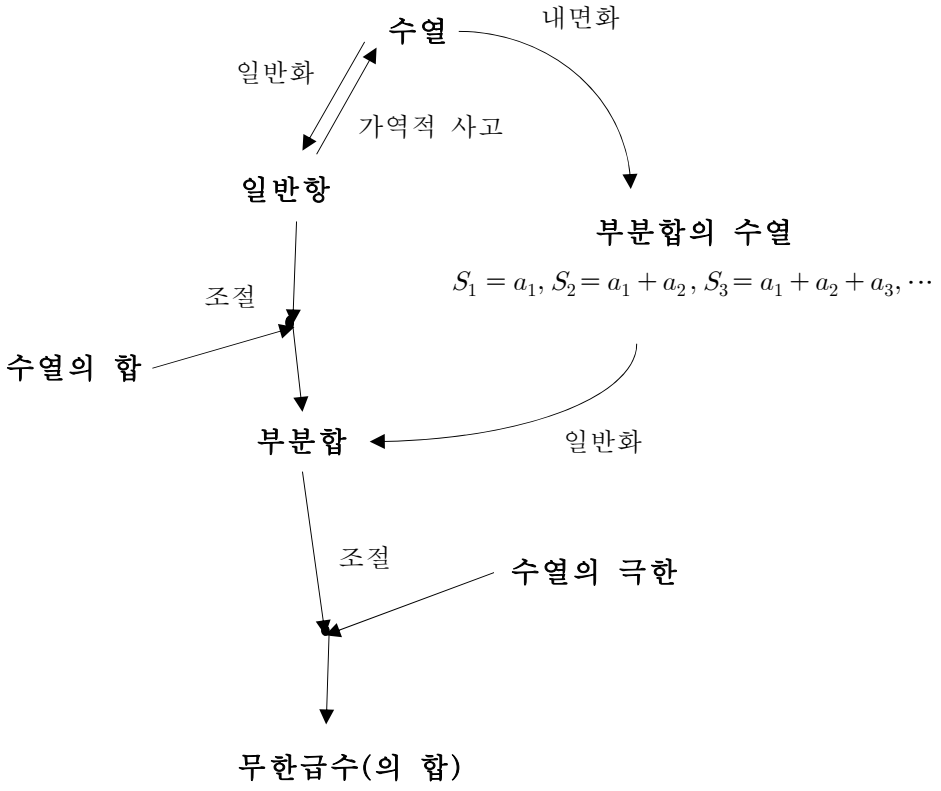
1번 문항은 무한급수에 대한 학생들의 개념 이미지를 알아보기 위해 제시되었다. 1-(1)번 문항은 무한급수란 무엇인가라는 질문이었다. 다음은 1-(1)번 문항에 대한 학생들의 답안이다. 밑줄 친 부분은 학생들의 답안에서 공통적으로 언급하고 있는 내용을 나타낸다.

학생1: 무한급수란 수들의 무한한 합이다.
학생2: 어떠한 수부터 일정한 비율로 커지거나 작아지는 것을 더하는 것
학생3: 어떠한 규칙이 존재하는 수들(수열)을 무한히 합한 것
학생4: 무한등비수열의 합입니다.
(수정 후) 무한수열의 각 항을 + 기호로 연결한 식입니다.
학생5: 무한급수는 $a_1, a_2, a_3, \cdots$ 의 항을 합으로 나타낸 것

학생들의 답안을 통해 대부분의 학생들이 무한급수는 '무한수열의 각 항들을 무한히 더한 것'이라는 개념 이미지를 공유하고 있는 것으로 볼 수 있었다. 무한급수에 대한 학생들의 정의에서 볼 수 있듯이 무한급수의 개념은 무한수열 스키마와 강하게 연결되어 있는 것을 확인할 수 있다. 무한급수를 무한등비급수와 혼동(학생4)하거나 특별한 수열, 예를 들어 등차수열, 등비수열과 같이 제한된 수열 스키마(학생2)를 가지고 있음으로 인해 무한급수의 개념도 제한적으로 구성하는 학생들이 있었다. 이러한 학생들의 답안과 무한급수의 수학적 정의를 고려할 때, 수열 스키마는 무한급수의 개념에 상당한 영향을 줄 수 있는 근본이 되는 스키마라고 볼 수 있다.

무한급수와 함께 연상되는 것들을 적어보라는 1-(3)번 문항에 대한 학생들의 답안에서는 $\sum$, $\lim_{n\to\infty}$, a_n, S_n, $\frac{a}{1-r}$, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} S_n$, 등비수열 등을 볼 수 있었는데 이 개념들 중에 무한급수 스키마를 형성하는데 관여하는 핵심적인 스키마들로 수열의 합, 일반항, 부분합, 수열의 극한 스키마를 추출할 수 있었다.

다음으로는 이러한 무한급수 개념을 구성하는 주요한 수학적 개념들로부터 무한급수 개념을 어떻게 구성하는지를 학생들의 무한급수 문제 풀이 과정과 면담 과정을 바탕으로 알아보았다. 무한급수는 수열의 극한 개념에 대한 직접적인 응용(박선화, 1998)으로 볼 수 있으므로 수열은 무한급수 스키마 형성을 위한 그 출발이 되는 개념이 된다. 학생들은 무한급수 학습 이전에 수열을 학습하였으므로 수열 스키마를 가지고 있는 것으로 본다. 수열 스키마로부터 무한급수에서의 각 항을 수열의 항으로 파악하고 그 항들의 규칙성을 찾을 수 있다. 규칙성을 찾고 일반항을 구하는 일반화 과정을 거쳐 수열의 일반항 a_n을 구할 수 있는 경우에는 수열 스키마에서 일반화 과정을 거쳐 일반항 스키마를 형성한 것으로 볼 수 있다. 그리고 이 일반항과 수열의 합에 대한 스키마의 조절 과정을 통해 부분합 스키마를 형성하게 된다. 하지만 부분합 스키마를 형성하는 과정은 이 과정 이외에도 또 다른 과정이 가능한데, 무한급수에서 새로운 수열인 부분합의 수열 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 을 구성하는 과정이다. 부분합의 수열 스키마를 구성하기 위해서는 수열 스키마를 통해 무한급수의 각 항을 수열의 항들로 파악하고 무한급수의 무한히 더하는 과정을 대상화하여 부분합의 수열의 각 항들을 대상으로서 인식하고 다룰 수 있어야 한다. 즉, 무한급수의 무한히 더하는 과정에 대한 대상화를 거쳐 $a_1 = S_1$, $a_1 + a_2 = S_2$, $a_1 + a_2 + a_3 = S_3, \cdots$ 등과 같이 부분합 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 을 대상으로 인식하여 새로운 수열을 생각할 수 있게 되고, 이 수열의 규칙성을 찾아 일반항을 구하는 일반화 과정을 거쳐 부분합 S_n에 대한 스키마를 형성하게 되는 것이다. 이러한 두 가지 과정 중 하나의 과정을 통하거나 두 과정 모두를 통해 부분합 스키마를 형성하고 나면, 부분합 스키마와 극한 스키마의 조절을 통해 무한급수 또는 무한급수의 합에 대한 스키마를 형성할 수 있다. 이러한 무한급수 개념의 발생적 분해를 다음과 같이 나타내었다.



<그림Ⅳ-1> 학생들의 무한급수 개념의 발생적 분해

무한급수 개념 형성에서 부분합 스키마와 수열의 극한 스키마는 가장 큰 영향을 미치는 요소로 볼 수 있다. 따라서 이어지는 다음 절에서는 부분합 스키마와 수열의 극한 스키마의 학생들의 구성을 차례로 살펴보고 이들 스키마들이 각각 무한급수 개념 구성에 어떠한 영향을 미치는지를 알아볼 것이다. 이를 위해 학생들의 무한급수 관련 문제 풀이와 면담 과정에서 나타나는 학생들의 사고 과정을 일반화, 조절, 대상화, 내면화, 가역적 사고의 다섯 가지 반영적 추상화 요소와 APOS이론에서의 행동, 과정, 대상, 스키마를 이용하여 살펴보고자 한다.

4.2. 부분합 스키마 분석

이 절에서는 무한급수 개념 구성에 핵심적인 역할을 하는 부분합 스키마의 구성 과정을 학생들의 문항 검사 결과와 면담 과정을 바탕으로 알아보고, 이러한 과정을 거쳐 형성된 부분합의 개념은 무한급수 개념의 행동, 과정, 대상, 스키마와 어떠한 관계가 있는지에 대해 알아보고자 한다.

4.2.1. 부분합 스키마의 구성

먼저 앞에서 살펴본 바와 같이 무한급수 스키마 구성의 핵심이라고 볼 수 있는 부분합 스키마의 구성은 두 가지 과정으로 가능하다. 일반항 스키마와 수열의 합 스키마의 조절을 통한 과정과 부분합의 수열에서 일반화를 거쳐 구성되는 과정이다. 두 가지 과정 중 학생들의 무한급수 문제 풀이 과정에서 더 많이 볼 수 있었던 과정은 전자로 일반항을 구한 후 합의 기호인 시그마($\sum$)의 계산을 통해 결과적으로 부분합의 일반항 S_n을 구하게 되는 방법이다. 이에 비해 부분합의 수열을 생각해 내는 것은 학생들에게 비교적 어려운 과정으로 보였는데, 우선 부분합의 수열에 대해 생각을 하고 난 이후에는 어렵지 않게 일반화를 통해 부분합의 일반항을 구하는 모습을 관찰할 수 있었다.

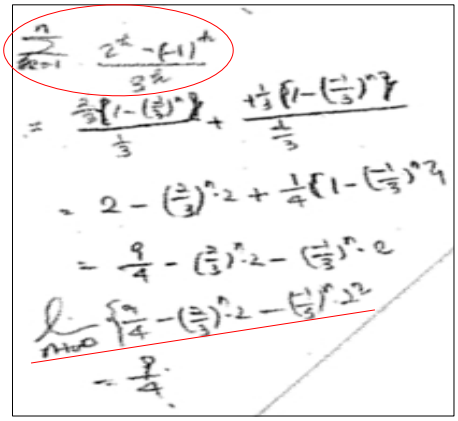
먼저 부분합 스키마를 구성하는 두 가지 과정 중 주어진 무한급수가 + 기호로 연결하여 나타낸 식으로 주어졌을 때, 각 항을 무한수열의 항들로 파악하고 항들의 규칙성을 찾아 일반항을 구하는 첫 번째 과정에 대해 자세히 알아보자.

4.2.1.1. 첫 번째 과정: 일반항과 수열의 합 스키마의 조절

일반항 스키마와 수열의 합 스키마의 조절을 통해 부분합 스키마를 구성하는 과정을 학생들의 검사 문항 중 2번, 3-(1)번, 5-(1)번 문제 풀이와 면담 내용에서 살펴보자.

일반항 a_n 에 관한 스키마는 수열 스키마에서 일반화 과정을 통해 구성된다. 학생들이 무한급수 관련 문제를 읽고 처음으로 시도하는 것은 대부분 무한급수에서의 각 항을 수열의 항으로 인식하고, 이 수열의 규칙을 찾아 일반항으로 표현하려는 것이었다. 실제로 2번 문항의 경우 5명의 학생들 중 네 명 모두가 주어진 무한급수 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$ 을 보고 바로 일반항 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$을 구하는 모습을 볼 수 있었다. 학생5는 답안지에 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$을 적지는 않았지만 주어진 무한급수의 각 항들의 규칙성을 파악하여 무한등비급수임을 알고 바로 무한등비급수의 합 공식에 대입하여 $\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=2$를 무한급수의 합으로 구했다.

2번 문항의 경우 일반항을 쉽게 구할 수 있고, 무한등비급수임을 알고 나면 등비수열의 합 공식을 이용하고 극한을 취해서 답을 구하거나 무한등비급수의 합 공식을 이용하여 답을 구할 수 있다. 이때, 학생3과 학생5는 면담 과정에서 등비수열의 합 공식을 적용하여 부분합을 구하는 과정을 보여주었는데 이 과정에서는 무한등비급수의 합 공식을 이용하는 방법에서는 거치지 않는 일반항과 수열의 합 스키마의 조절 과정을 거치게 된다. 다음은 4번 문항에 대한 면담에서 제시한 문제인 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}$ 을 학생3이 풀이하는 과정이다. 이 풀이 과정에서는 문제에서 주어진 식을 변형하여 두 개의 일반항으로 분리하고 각각에 대해 등비수열의 합 공식을 적용하여 부분합을 구하는 모습을 볼 수 있다.



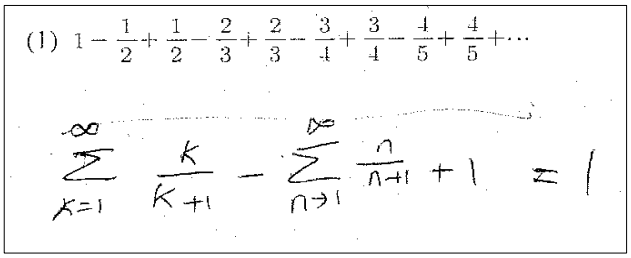
<그림Ⅳ-2> 학생3의 면담 과정에서의 추가 문항 풀이

대개의 경우 무한등비급수의 합을 구하는 문제의 경우에 수렴조건을 확인하고 수렴조건을 만족하면 바로 무한등비급수의 합 공식을 적용하지만 학생3의 풀이에서는 등비수열의 n항까지의 합을 구하는 공식을 사용하여 부분합 S_n(<그림Ⅳ-2>에서 동그라미로 표시한 부분)을 구한 후 극한을 취해 답을 구하는 것을 볼 수 있었다. 이때, <그림Ⅳ-2>에서 밑줄 친 부분은 부분합에 대해 극한을 취하는 과정으로 이는 부분합 스키마와 수열의 극한 스키마의 조절이 필요한 과정으로 볼 수 있다.

3-(1)번 문항은 일반항이 하나의 식으로 표현되지 않는 문제이기 때문에 일반항을 구하려는 시도로는 문제를 해결하지 못한다. 하지만 이 문항에 대해서도 학생들은 일반화 과정을 거쳐 일반항을 구하기 위해 노력하는 모습을 볼 수 있었다. 이 문항은 검사 문항 중 학생들이 가장 어려워하고 오답이 많았던 문항으로 이 문항에 대해 학생들은 다양한 풀이를 시도하였다. 다음은 각 학생의 3-(1)번 문항에 대한 풀이 과정을 관찰한 내용이다.

학생1은 3-(1)번 문항을 읽고 1분가량 아무것도 쓰지 않고 생각하였다. 모든 검사 문항의 풀이 중 이 문항에 대해서만 고민하는 시간이 특히 길

었고, ‘어렵다’는 혼잣말을 하기도 했다. 1분 정도 후에 2분 20초에 걸쳐 다음과 같은 식을 천천히 고민하면서 적은 것으로 보아 처음 1분 간 학생1은 머릿속으로 무한급수의 각 항들의 규칙성을 찾아보고 일반화를 시도해보았던 것으로 생각된다. 나열된 무한급수 식을 세 번째 항부터 홀수 번째 항들의 규칙을 파악하여 일반화하여 나타내고, 짝수 번째 항들의 규칙을 파악하여 일반화하여 나타내어, 홀수 번째 항들에 대한 일반항을 이용한 무한합에서 짝수 번째 항들에 대한 일반항을 이용한 무한합을 빼고 제외했던 첫째항 1을 더해준 식으로 다음과 같이 표현했다.

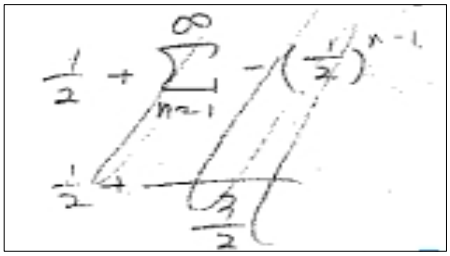


<그림Ⅳ-3> 학생1의 3-(1)번 풀이

하지만 이 풀이에 대해 의심을 하면서 우선 3-(2)번 문항을 풀기 위해 넘어가는 모습을 볼 수 있었다. 학생1의 3-(1)번 문항의 풀이에서 주목할 점은 무한급수의 각 항들을 수열로 파악한 후 부분합의 수열을 생각하는 대신에 일반항을 구해 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 기호와 함께 표현하려고 시도했다는 점이다. 이러한 경향은 학생 5명 각각의 풀이에서 공통적으로 관찰할 수 있었다.

학생1과 유사하게 수열의 규칙성을 찾아 일반화하여 일반항을 구하려고 했던 학생4의 답안을 보자. 학생4는 문제를 읽고 서로 소거되는 항들을 손가락으로 동그라미 표시를 하며 묶는 시늉을 하였다. 그리고는 썼다 지웠다를 반복하다가 다음 문제로 넘어갔다. 그리고 이후에 다시 이 문제를 풀기 위해 시도하였는데, 이러한 모습은 학생1이 다른 문항들의

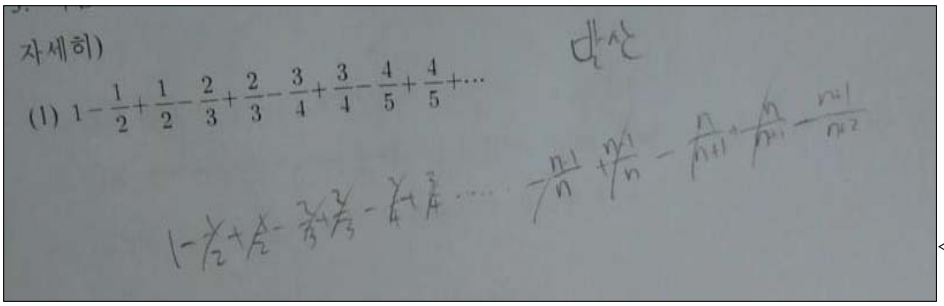
풀이와는 달리 이 문항을 특히 어려워하면서 고민하는 시간이 길었던 것과 같은 반응이라고 볼 수 있었다. 다시 풀이를 시도했을 때, 이번에는 앞의 두 항을 계산하고, 세 번째 항과 네 번째 항, 다섯 번째 항과 여섯 번째 항을 각각 계산하여 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$을 적고, 그 새로운 무한급수의 각 항들의 규칙을 찾아 일반항을 다음과 같이 구하였다.



<그림Ⅳ-4> 학생4의 3-(1)번 풀이

하지만 $\frac{1}{6}$과 $\frac{1}{12}$만을 보고 두 번째 항부터 공비가 $\frac{1}{2}$인 무한등비급수인 것으로 잘못 판단하였다. 무한급수에서 결합법칙을 사용하는 오류를 범하기도 하였지만 $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{12}$에 이어지는 다음 항이 $-\frac{1}{20}$인 것을 미처 알지 못한 것으로 보인다. 따라서 여러 가지 오류를 범하고 있지만 무한급수 문제를 풀이하는데 있어서 항상 처음으로 시도하는 것이 일반항을 구하는 것임은 분명히 확인할 수 있다.

학생2는 학생1과 학생4가 많은 고민을 하면서 3-(1)번을 풀었던 것과는 달리 문제를 읽고 바로 주어진 식을 그대로 다시 적었다. 그리고 두 번째 항부터 / 표시를 하며 소거하는 모습을 볼 수 있다. 그리고는 뒤쪽 부분에 n에 관한 식으로 4개의 항을 연달아 적은 후 앞에서와 같이 소거되는 항들을 표시하고 발산이라고 답을 적었다. 다음은 학생2의 3-(1)번 문항에 대한 풀이와 풀이에 대한 설명을 발췌한 것이다.



그림Ⅳ-5> 학생2의 3-(1)번 풀이

연구자: (학생의 풀이 중 n으로 표현된 항을 가리키며)이건 왜 쓴 거예요?

학생2: 무한이니까 어떤 수를 대신해 가지고 기호로 나타낸 건데, 아! 이것도 잘 좀 이해가 안돼요.

연구자: 아, 본인이 했는데도 이해가 안 되는데 그냥 했어요? 음...다시 한 번 설명을 해보면 무한이니까

학생2: 네, 무한이니까 백만, 천만까지 쓸 수 없으니까 기호로 썼어요.

연구자: 얘(학생의 풀이 중 n으로 표현된 항을 가리키며)가 의미하는거는?

학생2: 숫자.

연구자: 그러면 이렇게...여기에 얘가 나올 거라는 건 어떻게 찾아낸 거예요?

학생2: 여기 2분의 1, 3분의 2, 4분의 3이니까 분모를 어떤 숫자라고 놓으면 분자는 그것보다 하나 더 작으니까 $n-1$로 오고, 그 뒤의 것은 숫자 하나가 더 크니까 $n+1$이고 또 하나가 작으니까 n이라고 놓고, 이렇게 뒤로 쭉 있어요.

학생2의 경우는 위의 면담과정에서 밑줄 친 부분을 보면 무한급수의 합을 구하는 방법에 대해 무한 번째의 항을 나타낼 수 없기 때문에 임의의 항을 n에 관한 식으로 나타낸 후 그 항까지 합의 계산을 한 후 n에 무한대를 대입한다고 설명하고 있다. 이는 학생2가 부분합의 개념을 알

고 있는지를 보기 위한 다음의 면담 과정에서도 밑줄 친 부분에서 무한대를 수로 인식하고 무한합에 대해 암기했던 어떤 것을 기억해 내려고 애쓰는 모습에서도 드러난다.

연구자: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$이 나타내는 게 뭐죠?

학생2: a_1부터 a_∞까지 전부 더한 것

연구자: 그렇죠. 그럼 얘를 계산할 때는 어떻게 계산하는지

학생2: 계산할 때요?

연구자: 무한까지 더할 수 없으니까 우리가 어떻게 하죠?

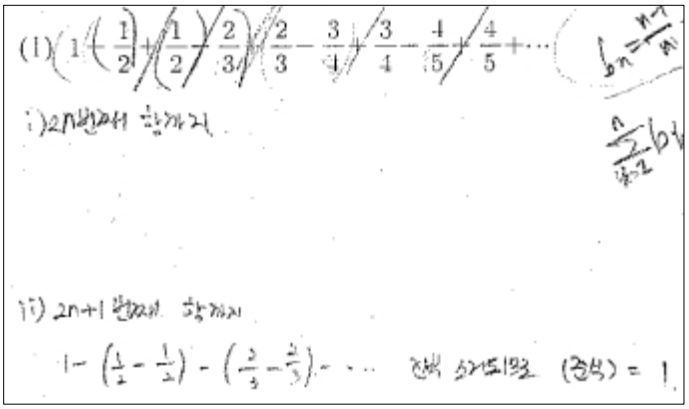
학생2: 알았는데...

연구자: 이걸 다른 방식으로 쓸 수 있는 방식이 있나요?

학생2: 아...기억이 안나요.

이러한 학생2의 이해를 바탕으로 생각해 보면, 학생2는 학생1과 학생4가 일반항을 구하고자 했던 의도와는 다르게 임의의 항을 표현하기 위해 n을 이용하여 몇 개의 항들을 표현하였고, 두 번째 항부터 연속된 항들이 소거되는 연산을 시행하였다. 임의의 항을 표현하기 위해서는 무한급수의 각 항들의 규칙성을 파악하고 일반화 과정을 거쳐야 하므로 학생2도 학생1과 학생4와 같이 무한급수 문제를 풀이하는데 있어서 일반항을 구하려고 하는 시도와 마찬가지 방식을 시도한다고 볼 수 있다.

학생3은 문제를 읽고 바로 ‘i) $2n$번째 항까지’라고 적고, 두 번째 항 뒤에 /, 네 번째 항 뒤에 /, 여섯 번째 항 뒤에 /, … 으로 짝수 번째 항 뒤에 /를 표시하였다. 그리고는 두 번째 항과 세 번째 항을 괄호로 묶은 후, $2n$번째 항까지의 합을 일반항을 이용하여 표현해 보려고 n에 관한 식을 이리 저리 써 보다가 결국 쓰지 못한 채 ‘ii) $2n+1$번째 항까지’라고 쓰고 다음과 같이 답을 적었다.



<그림Ⅳ-6> 학생3의 3-(1)번 풀이

홀수 번째 항까지의 합은 무한급수에서 결합법칙을 사용하는 오류를 범하였지만 결과적으로 그 합이 1이 된다는 것은 맞았다. 학생3의 3-(1)번 풀이에서는 짝수 번째 항까지의 합을 구하기 위해 주어진 무한급수의 일반항을 구하여 합의 기호와 함께 나타내려고 노력은 했지만 결국 실패하여 답안에서는 일반항을 구하려고 노력한 모습을 확인하기 힘들지만 면담 과정에서 이러한 모습이 분명하게 드러난다.

다음은 학생3의 3-(1)번 문항에 대한 면담 과정의 발췌문이다. 밑줄 친 부분은 일반항을 구하려고 하는 의도가 확실히 드러나는 부분이다.

> 학생3: 지금 경우를 짝수 번째까지랑 홀수 번째까지로 나눠야 한다는 것은 알겠고, 지금 홀수 번째까지는 두 개씩 지워지니까...이렇게 두 개씩 묶이는 식은 잘리니까 식이 이렇게 정리가 되니까 앞의 1만 남아서 정리가 된다는 걸 알겠는데, 짝수 번째까지는 <u>항의 일반항을 구해야 하는 거</u>잖아요....
>
> (중략)
>
> 학생3: 무한급수를 계산하는 방법...가장 일반적인 방법이...무한급수를 이제... 시그마 n이 1부터 무한대까지 a_n이랑 이거를 정리를 하려면 극한값으로 정리를 하고 앞에는 그냥 수열의 부분합을 사용을 해서 정

리를 할 수가 있는데 지금 이 부분(a_n을 가리키며)을 알아야 문제를 풀 수 있을 것 같아서요. 일반항을 찾으려고 하는데 잘 안보여요.

(중략)

학생3: 두 개씩 묶어서 $b_n = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1}$로 나타낼 수 있어요.

학생3의 경우도 학생2와 마찬가지로 주어진 무한급수를 보고 각 항들에 대해 연산을 바로 수행하여 부분합(실제로 학생2가 나타낸 것은 n번째 항까지의 합은 아니다.)을 구한 것으로 보인다. 그러나 학생3은 학생2와 달리 짝수 번째 항까지의 합과 홀수 번째 항까지의 합을 따로 구해야 한다고 생각했다. 이 학생의 경우 무한급수 중 교대급수인 경우 짝수 번째 항까지의 부분합과 홀수 번째 항까지의 부분합의 극한값을 비교하여 무한급수의 수렴과 발산을 판단한다는 것을 알고 있는 것으로 볼 수 있다. 이때, 첫 번째 풀이에서는 짝수 번째 항까지의 부분합의 경우 각 항들의 일반항을 구하기 힘들기 때문에 구하는데 실패하였고, 홀수 번째 항까지의 부분합이 1인 것은 간단하게 계산할 수 있기 때문에 쉽게 구한 것이다. 이후 면담 과정에서 다시 풀었을 때, 앞의 면담 과정의 발췌문에서 볼 수 있듯이 처음 두 개의 항을 제외하고 세 번째 항부터 두 항씩 묶어서 일반항 $b_n = \frac{n-1}{n} - \frac{n}{n+1}\,(n \geq 2)$으로 나타내고 이를 이용하여 짝수 번째 항까지의 부분합을 구하는 모습을 볼 수 있었다. 여기서도 무한급수에서의 결합법칙 사용이라는 오류를 범하고 있는데 이것도 일반항을 구하기 위한 노력에서 비롯된 것이라고 볼 수도 있을 것이다.

학생5는 일반항을 구하기 위해 노력하다가 다음 문제로 넘어가고 이후에 다시 시도하였는데, 첫 번째 항인 1을 제외하면 이후의 항들은 서로 인접한 항들끼리 항의 절댓값이 같기 때문에 홀수 번째 항들만 먼저 n에 관한 식으로 표현해 보려고 시도하여 $\sum \frac{n}{n+1}$과 같이 나타내는 모습을 볼 수 있었다.

이러한 3-(1)번 문항에 대한 학생들의 문제풀이 과정을 분석해 볼 때, 무한급수의 수렴과 발산을 판단하고 무한급수의 합을 구하는 문제의 풀이에 있어서 학생들은 무한급수의 각 항들을 수열로 인식하고 이 수열의 규칙성을 찾는 일반화 과정을 거쳐 일반항으로 표현하는 과정에 익숙한 것으로 보였다. 이 과정에서 학생들의 답안은 먼저 일반항을 구해 합의 기호 시그마($\sum$)와 함께 표현하려고 했던 학생1, 학생4와 학생5, 무한히 더하거나 빼는 과정으로서의 연산을 임의의 항까지 시행하고 식을 정리하는 학생2, 무한히 더하는 과정으로서의 연산을 임의의 짝수 번째 항까지와 홀수 번째 항까지로 나누어 정리하려고 한 학생3의 세 가지 유형으로 분류할 수 있었다.

이러한 분류에서 첫 번째와 두 번째의 유형은 5-(1)번 문항의 풀이에서도 드러난다. 5-(1)번 문항에 대한 학생들의 풀이에서도 일반항을 구하고자 노력하는 학생들의 모습을 볼 수 있는데, 그 중 학생4의 면담 과정의 일부와 학생3, 학생4 그리고 학생5가 일반항을 구한 후 부분분수의 분해를 이용하여 풀이한 다음 식을 보자. 이것은 3-(1)번 문항에서 먼저 일반항을 구해 합의 기호와 함께 표현하려고 했던 것과 같은 유형이라고 볼 수 있다. 밑줄 친 부분은 특히 학생이 일반항을 구하려는 의도를 가지고 있음을 잘 보여주는 대목이다.

> 학생4: <u>일반항</u>...일반항이 아니라 이거 보면요, $1, 3, 3, 5, 5, 7$ 하면요, 얘 <u>앞부분의 일반항</u>을 구해요. 앞부분의 일반항이 이게($2n-1$을 말한다) 나오잖아요. 그리고 <u>뒷부분의 일반항</u>은 $2n+1$이 나오잖아요.

5-(1)번에 대한 학생3, 학생4 그리고 학생5의 풀이는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

주어진 무한급수의 각 항의 규칙성에 주목하여 먼저 일반항을 n에 관한 하나의 식으로 나타낸 후, n번째 항까지의 합인 S_n을 구하기 위해서 각 항들을 부분분수의 분해를 이용하여 분수들을 분리한 후에 합을 계산하였다. 그리고 소거되지 않고 남은 항에 대하여 극한을 취해 답을 구하였다. 풀이의 처음을 보면 일반항을 구해 합의 기호와 함께 표현하는 유형임을 확인할 수 있다.

반면에 학생1과 학생2는 5-(1)번 문항의 풀이에서 처음 몇 개의 항에 대해서 부분분수의 분해를 적용하는 것으로 시작하였다. 이것은 3-(1)번 문항에서 무한히 더하거나 빼는 과정으로서의 연산을 임의의 항까지 하고나서 남은 항들을 정리하는 것과 같은 유형으로 볼 수 있다.

$$
\begin{aligned}
S &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

주어진 무한급수의 각 항의 특징을 파악하고 부분분수의 분해를 사용하여 처음 몇 개의 항들을 분해하다가 임의의 n번째 항도 마찬가지 방식으로 분해한 후 연산을 시행하여 소거하고 남은 항에 대하여 극한을 취해 답을 구하였다. 학생2는 3-(1)번 문항과 5-(1)번 문항에서 같은 유형으로 접근하고 있으나 학생1은 3-(1)번 문항의 경우에는 일반항과 합의 기호를 이용하여 부분합을 구하고, 5-(1)번 문항에서는 임의의 항까

지의 연산을 한 후 식을 정리하는 방식으로 부분합을 구하는 서로 다른 유형으로 접근하고 있음을 확인 할 수 있었다.

5-(1)번 문항에서의 학생1과 학생2의 풀이는 5-(2)번의 (b)의 풀이에서 의도적으로 부분합의 수열 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 에 주목한 것과는 다르다. 단지 일반항을 바로 구하지 않고 개별적으로 각 항을 부분분수의 분해를 적용하여 임의로 정한 n번째의 항까지의 합을 계산한 후 극한을 취한 것이기 때문에 부분합의 수열을 의식하고 있지 않은 것으로 볼 수 있다.

정리해 보면, 먼저 무한등비급수가 수렴하는 경우에는 무한등비급수의 합 공식을 적용하여 무한급수의 합을 구하므로 일반항 스키마에서 수열의 합 스키마와의 조절 과정이 없이도 바로 무한급수의 합을 구할 수 있다. 반면에 부분분수의 분해를 적용해야 하는 무한급수 문제의 경우에는 일반항을 먼저 구한 후, 일반항과 합의 기호를 이용하여 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$의 형태로 표현하고 무한급수의 합을 구하기 위해 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k$로 나타냄으로써 부분합에 해당하는 $\sum_{k=1}^{n} a_k$을 구해야 한다는 것을 의식한 후 부분합을 구하는 유형과 부분분수의 분해를 처음 몇 개의 항들에 적용한 후, 임의의 항에 대해서도 부분분수의 분해를 하고 항들 간의 연산을 하고 남은 항들을 정리하여 결과적으로 부분합에 해당하는 식을 구하게 되는 유형으로 나눌 수 있다. 이러한 두 가지 유형은 동일하게 일반항 스키마와 수열의 합 스키마의 조절 과정으로 부분합 스키마를 구성하게 된다.

학생들이 부분합 스키마를 구성하기 위해 자연스럽게 거치는 과정은 일반항 스키마와 수열의 합 스키마의 조절 과정이라고 볼 수 있다. 무한급수에 관한 문제들 중 학생들이 주로 사용하는 이 방법으로 풀이가 가능한 문제, 즉 일반항이 하나의 식으로 표현하는 것이 가능하고 합의 기호 시그마($\sum$)를 이용하여 계산이 가능하여 부분합을 쉽게 구할 수 있는 문제인 경우에 학생들은 무한급수 문제 풀이에 큰 어려움을 느끼지 않을

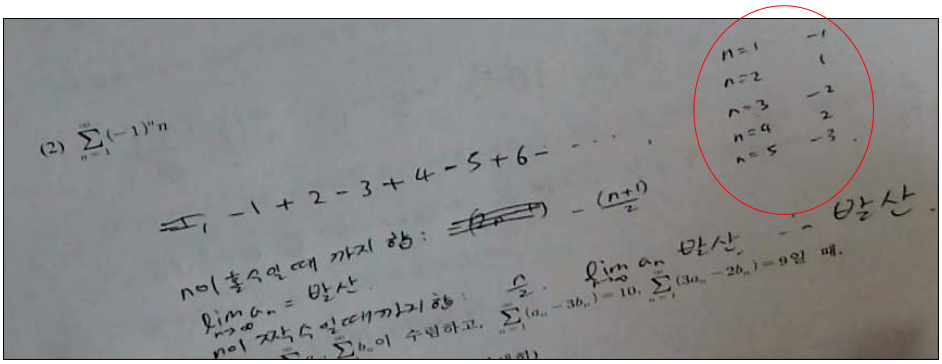
것이다. 그러나 3-(1)번과 같이 일반항을 구할 수 없어서 이러한 익숙한 방법으로 해결할 수 없는 문제의 경우에는 학생들이 풀이 과정에서 곤란함을 느끼게 된다. 이러한 문제는 부분합의 수열에 관한 스키마를 통해 해결할 수 있다.

4.2.1.2. 두 번째 과정: 부분합의 수열의 일반화

이제 부분합의 수열의 일반화를 통해 부분합 스키마를 구성하는 과정을 학생들의 검사 문항 3-(2)번 풀이와 면담 내용에서 살펴보자.

3-(2)번 문항에서 학생1이 부분합의 수열의 일반화를 통해 부분합을 구하여 문제를 해결하는 모습을 볼 수 있었고, 다른 학생들의 경우에도 3-(1)번 문항에서 첫 번째 과정을 통해 부분합을 구하는데 실패했던 것과 달리 3-(2)번 문항의 풀이에서 3-(1)번의 풀이에서 보다 쉽게 학생들이 부분합의 수열을 생각해내는 모습을 볼 수 있었다.

3-(2)번 풀이를 보면 학생1과 학생2는 먼저 주어진 무한급수 식의 일반항 $(-1)^n n$ 의 n에 $1, 2, 3, \cdots$ 을 대입해보았다. 이는 일반항의 형태로 주어진 무한급수 식으로부터 가역적 사고를 통해 무한급수를 + 기호로 연결된 식으로 나타낸 것으로 볼 수 있다. 무한급수가 + 기호로 연결되어 표현된 식으로 주어지면 학생들은 일반항을 구하려고 한다. 이때, 일반항이 하나의 식으로 구해지고 시그마의 성질이나 자연수의 거듭제곱의 합 등을 이용하여 계산이 가능한 경우에는 특정 항까지의 합을 계산하여 부분합을 구하게 된다. 그러나 3-(2)번 문제와 같이 일반항이 이러한 계산이 가능하지 않은 형태일 경우에는 학생들의 접근처럼 가역적 사고를 통해 몇 개의 항들을 직접 구해 + 기호로 연결하여 나타내어야 다음 풀이를 진행할 수 있게 된다. 다음 학생1의 풀이를 살펴보자.



<그림Ⅳ-7> 학생1의 3-(2)번 풀이

<그림Ⅳ-7>에서 동그라미로 표시된 부분은 학생1이 $-1+2-3+4-5+6-\cdots$ 을 쓰고 나서 적은 내용으로 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5를 계산하여 적은 것이다. 비록 S_1, S_2, S_3, S_4, S_5와 같은 기호로 나타내지는 않았지만 부분합의 수열임을 알 수 있다. 따라서 학생1은 무한급수의 앞쪽 몇 개의 항들을 직접 구해보고 나서 부분합의 수열을 생각하고, 그 수열의 규칙을 파악하여 학생의 표현대로라면 n이 홀수일 때까지의 합(정확히 말해 n번째 홀수 번째 항까지의 합)과 n이 짝수일 때까지의 합(정확히 말해 n번째 짝수 번째 항까지의 합)을 각각 구하였다.

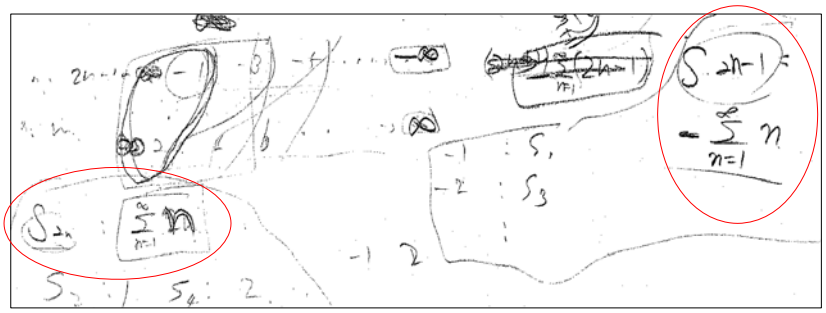
이 학생의 경우에는 3-(1)번 문항에서는 첫 번째 과정으로 부분합을 구하려고 했던 것과 달리 3-(2)번 문항에서는 두 번째 과정으로 부분합의 수열을 생각하고, 이 수열을 관찰하여 짝수 번째 항까지의 부분합과 홀수 번째 항까지의 부분합을 각각 구하였다. 다른 학생들은 개별적으로 문제 풀이를 했을 때 3-(2)번 문항에서 부분합의 수열을 생각하지 못한 것과는 달리 학생1만이 부분합의 수열을 생각하고 문제를 해결하였다.

학생5의 경우에는 면담 과정에서 3-(2)번 문항을 다시 풀면서 부분합의 수열을 구성하는 모습을 볼 수 있었다. 학생5는 처음에는 홀수 항과 짝수 항을 두 줄로 나누어 쓰고 각각을 다른 수열로 보고 극한값을 구해보았다. 이때, 학생5는 학생1과 같이 가역적 사고를 통해 무한급수의 각 항의 값을 계산하지만 + 기호로 연결하여 쓰지 않고 짝수 번째 항들과

홀수 번째 항들로 나누어 수열과 같이 항들을 간격을 두고 분리하여 썼다. 학생5가 3-(1)번에서의 풀이(면담 과정 중)에서 부분합의 수열을 이용하여 풀었던 방식과 다르게 수열의 극한을 생각하고 있다는 점을 인식하지 못하자 연구자는 학생이 이를 인지하도록 식을 써서 풀이를 해보도록 하였다. 그러자 학생은 처음 풀이가 잘못된 것을 깨닫고 다시 S_{2n}과 S_{2n-1}을 n에 관한 식으로 구했다. 다음은 부분합의 수열과 그 규칙성에 대해 언급하고 있는 학생5의 설명으로 밑줄 친 부분은 부분합의 수열과 수열의 규칙성을 인식하고 있음을 확인할 수 있는 부분이다.

> 학생5: 아...합이네요!
>
> 학생5: <u>홀수 항까지 하면 -1이고, 그 다음 홀수 항인 3항까지 계산하면 -2이고, 계속 -1씩 더해져 가는데 $-\sum_{n=1}^{\infty} n$에서 무한급수가....차가 1인 수의 합을 해준 다음에 마이너스를 붙였을 때 그 값이 동일한 거 같구요. 이거는 짝수 항씩 계산하면 1이 더해져 가니까</u> 그 계산에서 양수로, 반대로 이거랑 달리 양수로 나타냈어요.

처음에는 각 항들의 규칙을 찾아 일반항을 구하려고 했으나 연구자와의 대화를 통해 부분합의 수열을 통해 부분합의 일반항을 구하는 방식으로 풀이를 시도했고 표기에서 $\sum_{n=1}^{\infty}$를 불필요하게 쓰긴 하지만 다음 학생5의 풀이를 보면, 부분합의 수열에서 짝수 번째 항까지의 합과 홀수 번째 항까지의 합을 n에 관한 식으로 구한 것(<그림Ⅳ-8>에서의 동그라미로 표시한 부분)을 확인할 수 있었다.



<그림Ⅳ-8> 학생5의 3-(2)번 풀이

수열 스키마에서 내면화를 통해 더하는 과정을 인식하고 부분합의 수열 $S_1 = a_1, S_2 = a_1 + a_2, S_3 = a_1 + a_2 + a_3, \cdots$ 을 생각하는 과정은 무한급수의 발생적 분해에서 드러나는 과정 중 가장 적은 수의 학생들이 보여준 과정이었다. 5-(2)번의 (b)의 풀이가 두 번째 과정 즉, 부분합의 수열에서 일반화를 거쳐 부분합의 일반항을 구하는 방식이었는데 이에 대해 학생들은 맞는 풀이라고 답하였지만 무한급수의 합을 구하기 위해 5-(1)번 문항에서 이 방법을 이용한 학생은 없었다.

4.2.2. 무한급수 개념 구성에 미치는 영향

부분합 스키마의 구성이 무한급수 개념 구성에 미치는 영향에 대해 생각해 보자. 무한급수의 수렴과 발산을 조사하는 방법에 대한 질문에 대해 학생4는 “거의 정석같이 보면요. S_1, S_2, S_3을 구해서 S_n의 일반항 같은 거를 구해서 거기에 극한을 취해서 풀면 효율적이에요.”라고 답했고, 무한급수의 합을 구하라는 문제에서도 그렇게 하느냐는 질문에 “그렇게 할 때도 있고, 특별한 형태는 이중근호나 부분분수를 이용해서 일반항 a_n을 구해서 하는 것 같아요.”라고 답하였다. 이러한 답변에서 학생4는 무한급수에 관한 문제를 풀 수 있는 두 가지 과정에 대해 알고 있는 것 같지만 실제 문제 풀이에서는 부분합의 수열의 일반항으로서의 부분합을

식으로 표현해내지 못하였다. 실제로 학생들은 대부분 첫 번째 과정을 통해 무한급수의 수렴과 발산을 판단하거나 무한급수의 합을 구하려고 하였고, 스스로 부분합의 수열을 만들고 일반화를 통해 부분합을 구성한 학생은 학생1 뿐이었다.

학생4는 처음에 3-(1)번 문항을 풀지 못했지만 5-(2)번의 (b)에서 부분합의 수열로 풀이하는 방법을 보고 이 방법을 적용해 보려고 하였는데 다음은 학생4의 3-(1)번 문항 풀이에 대한 설명이다.

학생4: 이거 0이요.

연구자: 어떻게 한 걸까?

학생4: 뒤에서 가르쳐 준대로 했어요.

연구자: 뒤에서?

학생4: 비슷한 거 있잖아요. (5-(2) (b)번 문제를 가리키며) 이 문제 이렇게 푸는 거 확실히 알아서요. 그거보고 따라했어요.

연구자: 어떻게 했는지 설명해 줄 수 있어요?

학생4: 이렇게 해서 가면은 이게 합이 이렇게 되잖아요. 합 $1, 2, 3$일 때, 이렇게 쭉 해본 거예요. 근데 이 무한등비급수는 리미트 n이 무한으로 갈 때 S_n의 총합을 물어보는 거잖아요. 근데 S_n의 총합이 이거니까,

(중략)

연구자: 음...이게(S_1을 가리키며) 지금 뭔지 설명할 수 있나요?

학생4: 이거 S_1이요. S_1 이렇게 쪼개서 이걸 첫 항이라고 생각하고 이게 둘째항, 이게 셋째항, 이게 넷째항

연구자: 원래 괄호가 없었는데 지금 괄호를 만들었네요.

학생4: 아, 원래 괄호가 없었어요? 네. 괄호가 없었어요.

연구자: 괄호를 이렇게 만들어도 괜찮아요?

학생4: 괄호는...될 거 같아요. 괄호 될 것 같아요.

연구자: 괄호를 만들어서 얘를 S_1, S_2는?

학생4: S_2는 얘랑 얘랑 사라지고 얘랑 얘랑 남으니까 두 번째 항 해가

지고, 그렇게 풀면 3분의 1 나와서, 2분의 1, 3분의 1, 4분의 1 해가 지고 $n+1$분의 1 나오면, 이렇게 풀어가지고

학생4는 임의로 괄호를 생각하고 괄호로 묶은 항들을 하나의 항으로 취급하여 부분합의 수열 $\{S_n\}$을 구하였다. 이는 5-(2)번 (b)에서 부분분수의 분해를 적용함으로써 생기는 괄호로 인해 만들어진 항과 원래 주어진 무한급수에서의 항 사이의 관계를 인지하지 못하고 괄호로 묶어서 부분합의 수열의 항들을 만들어야 한다고 생각하게 된 것으로 보인다. 이는 부분합의 수열 스키마가 아직 제대로 구성되지 못한 것으로 볼 수 있다. 이러한 이유로 부분합의 수열의 앞쪽 몇 개의 항들의 값을 계산할 수 있지만 이를 일반화하여 일반항을 구하거나 수열의 극한에 대해 생각하는 것이 불가능했다. 따라서 부분합의 수열 스키마가 제대로 구성되지 않으면 일반화 과정을 통해 부분합의 스키마를 구성하는 것이 어렵다는 것을 알 수 있다.

무한급수 스키마를 구성하는 데에 있어서 부분합 스키마의 구성은 핵심적이다. 앞에서 학생들이 부분합 스키마를 구성하는 과정을 살펴보면, 학생들은 부분합 스키마를 구성하는 두 가지 과정 중 첫 번째 과정을 선호하고 두 번째 과정은 쉽게 이용하지 못하고 있음을 알 수 있다. 수열의 일반항을 구하고 일반항과 합의 기호 $\sum$를 이용하는 것은 익숙하지만 수열에서 새로운 수열을 만들어내는 것은 학생들에게 낯선 과정이라고 볼 수 있다. 무한급수 단원을 학습하기 전에 수열의 합을 구하는 과정에서 부분합 S_n의 기호를 사용한 경험은 있지만 새로운 수열 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 에 대해 생각해 본 것은 아니기 때문에 무한급수 단원에서 등장하는 부분합은 그 중요성이 큰 만큼이나 신중하게 도입되어야 함에도 그렇지 못함을 앞에서 살펴본 수학Ⅰ 교과서의 무한급수 단원 내용을 통해 알 수 있다.

교과서에서 무한급수 단원의 도입 부분 내용을 살펴보면 학생들에게 무한급수를 무한수열의 각 항을 차례대로 합의 기호 $+$로 연결한 식으

로 설명한 후 바로 부분합을 정의하고 있다. 그러나 이렇게 부분합의 정의를 바로 제시하는 것은 학생들이 아직 부분합 개념 구성에 대한 필요성을 느끼지 못한 상태에서 부분합의 정의를 주입하는 것이 되어 학생들의 무한급수를 부분합의 극한으로 이해하는 것에 장애가 될 수 있다.

부분합의 개념은 수열에 대한 개념으로부터 만들어지는데 교육과정 해설서(교육과학기술부, 2008)에서 수열에 대한 내용을 살펴보면 '일정한 규칙에 의해 나열되는 수열의 일반항을 자연수 n에 관한 식으로 구하도록 하는 것'이 주요한 학습 내용이다. 나열된 항들로부터 새로운 수열을 생성하는 것에 대한 내용은 다루지 않고 있다. 따라서 학생들의 문제 풀이에서 볼 수 있듯이 무한급수의 각 항들을 수열로 보고 그 항들의 규칙을 찾아 일반항을 하나의 식으로 구할 수 있는 경우에는 이전 수열의 스키마를 바탕으로 충분히 일반항 스키마를 쉽게 생성할 수 있다. 이 과정은 수열 스키마가 잘 형성되어 있는 학생들에게 별로 무리가 없어 보인다. 학생들에게 일반항 a_n은 임의의 n번째 항을 표현한 식이므로 첫째 항부터 n번째 항까지의 유한합을 직접 계산하여 그 결과로 S_n을 구하게 된다. 이때, 학생들은 의도적으로 부분합 S_n을 구했다기보다는 유한한 n개의 항에 대한 합을 계산한 것으로 보아야 할 것이다. 이를 통해 부분합의 의미를 충분히 이해할 수 있는 부분합 스키마를 형성하지 않은 상태에서도 학생들은 알고리즘적으로 무한급수의 합을 계산할 수 있다는 것을 알 수 있다.

또한 학생들은 여러 가지 수열 단원에서 $\frac{1}{AB}=\frac{1}{B-A}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)$임을 활용하여 수열의 합을 구하는 내용을 학습하였다. 따라서 무한급수 중 부분분수의 분해를 이용하여 무한급수의 합을 구할 수 있는 문항의 경우 수열의 합을 쉽게 계산하여 부분합에 해당하는 것을 구할 수 있기 때문에 이후 수열의 극한 개념을 적용하여 무한급수의 합을 잘 구할 수 있게 되는 것이다. 따라서 의식적으로 부분합 S_n을 생각하지 않아도 n번째 항을 n에 관한 식으로 나타낼 수 있고 n번째 항까지의 유한합을 계산

할 수 있는 경우에 해당하는 무한급수 문제에 대한 학생들이 비교적 쉽게 무한급수의 합을 구할 수 있었다. 하지만 이러한 유형의 문제가 아닐 경우 즉, 부분합의 수열을 생각해야 하는 문제의 경우에는 학생들이 어려워하는 것이다. 따라서 무한급수를 부분합의 극한으로 이해할 수 있도록 하기 위해서는 부분합의 수열을 구성할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

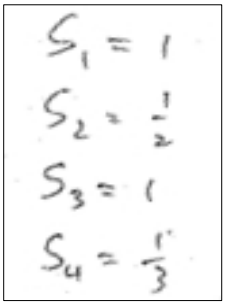
이를 위한 지도 방안으로 다음을 제안한다. 먼저 무한급수에 대한 정의를 하고나서 이 무한한 항들의 합을 어떻게 구할 수 있을까에 대한 고민을 해 보는 시간이 필요하다. 유한한 항들의 합과 비교해 보면서 무한한 항들의 합을 어떻게 계산해야 할 것인지를 고민하는 과정에서 첫 번째 항까지의 합, 두 번째 항까지의 합, 세 번째 항까지의 합, … 을 구할 수 있지만 이 작업을 무한으로 할 수 없다는 것을 학생 스스로 인지하고, n번째 항까지의 합은 유한한 항들의 합이므로 구할 수 있고, n에 대해 무한대로 극한을 취하면 무한한 항들의 합의 의미가 될 수 있다는 생각을 학생들이 할 수 있도록 안내할 필요가 있다. 이에 대한 이해가 이루어지면 무한급수의 합은 부분합 S_n을 구하고 n에 대해 무한대로 극한을 취하면 된다는 것을 이해할 수 있게 되고, 그러면 부분합은 부분합의 수열의 일반화를 통해서도 구할 수 있고, 부분분수의 분해와 같은 규칙적인 형태의 계산 과정을 거쳐 구할 수도 있는 것이다. 부분합의 필요성을 인지하지 못한 학생들에게 부분합 스키마를 주입하는 것은 무한급수를 부분합의 극한으로 바르게 이해하는 것을 방해한다고 볼 수 있다.

학생들이 특히 풀이 과정에서 어려움을 보였던 3번 문항에 대해 알아보자. 3-(1)번 문항은 일반화를 통해 일반항을 구하는 과정이 아닌 수열에 대한 내면화를 통해 부분합의 수열을 생각할 수 있어야 해결할 수 있는 문제이기 때문에 앞에서 살펴본 바와 같이 학생들이 쉽게 문제를 해결하지 못하였다. 혼자서 3-(1)번 문항을 풀이할 때는 모든 학생들이 일반항 구하기를 시도하다가 실패하여 답을 구하지 못하는 모습을 볼 수 있었는데 면담 과정에서는 부분합의 수열의 아이디어를 통해 문제를 해

결하는 모습을 확인할 수 있었다.

학생1이 3-(1)번 문항에서는 부분합의 수열을 생각하지 못해서 문제를 해결하지 못했는데 3-(2)번 문항에서는 비교적 바로 부분합의 수열을 생각하여 구성하고 그것으로부터 부분합을 구하여 문제를 해결한 것을 보고 면담 과정에서 연구자가 3-(1)번 문항을 부분합의 수열을 이용하여 풀어보도록 제안하였다. 다음은 이 과정에서 학생1이 적은 것과 면담 내용을 발췌한 것이다.

연구자: 3-(2)에서 썼던 방식으로 풀면 안 될까요?
학생1: 한 번 해 볼까요?
연구자: 네, 해 보세요.



<그림Ⅳ-9> 3-(1)번 면담 과정에서 학생1의 풀이

학생1: 이게 홀수 번째까지의 합은요 1이 나오는데요, 1로 딱 나오는데, 짝수 번째까지의 합은요 0으로 수렴하는 것 같아요.
연구자: 그러면 답은 뭐라고 해야 할까요?
학생1: 발산이요.
연구자: 발산이요?
학생1: 진동발산이요.
(중략)
연구자: 무한급수를 구할 때 왜 이렇게 구할까요?
학생1: 규칙을 찾아서 이거를 쭉 보내면 답이 나오니까.

(중략)

학생1: 수열의 규칙을 가지고 무한급수를 구할 수 있다?

(중략)

학생1: 수열의 합을 가지고 무한급수를 풀었잖아요.

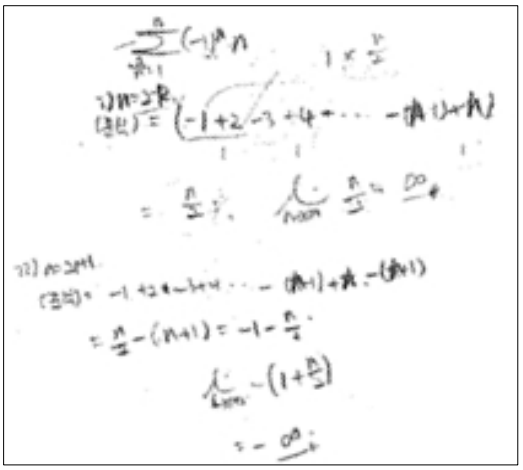
연구자: 수열의 합을 어떻게 이용했죠?

학생1: 수열의 합을요, 차례차례 하나씩 규칙적으로 배열해서 더한 다음에요. 그것에서 규칙을 찾아 가지고 답을 구했어요.

위의 대화에서 학생1은 부분합의 수열을 구해 무한급수의 합을 구하는 방식에 대해 처음에는 의심했지만 무한급수의 합을 구하는 하나의 방법임을 인지하게 되었다고 볼 수 있을 것이다. 또한 3-(2)번 문항에서 부분합의 수열로부터 부분합을 구하는 과정을 거친 것과 같이 3-(1)번 문항에 대해서도 부분합의 수열을 구해 보도록 하자 S_1, S_2, S_3, S_4를 바르게 구하여 무한급수에 대한 행동 관념을 보여주었고, 이 수열의 규칙성을 파악하여 부분합을 하나의 식으로 표현할 수 없지만 짝수 번째 항까지의 합의 극한과 홀수 번째 항까지의 합의 극한이 달라서 발산한다는 바른 풀이를 하였다.

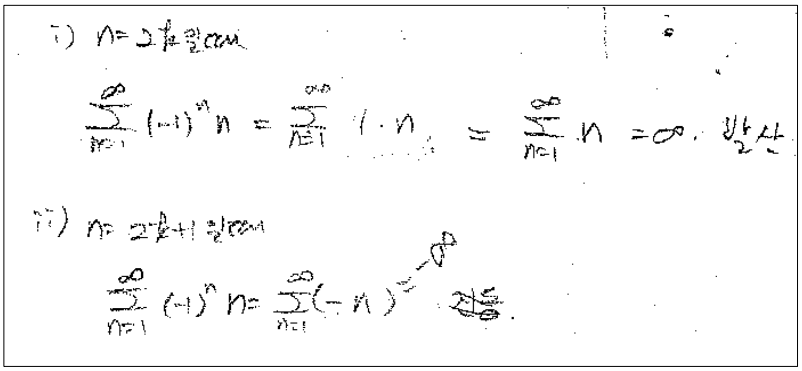
부분합의 스키마를 구성하는 과정에서 학생들은 무한급수에서 더하는 과정을 내면화하는 과정에서 더하는 순서에 대한 오류를 범하였다. 그 중 짝수 번째 항까지의 합과 홀수 번째 항까지의 합을 구하는 것과 짝수 번째 항들의 합과 홀수 번째 항들의 합을 구하는 것을 혼동하는 경우를 관찰할 수 있었다.

학생3은 3-(2)번 문항에 대해 처음에 다음과 같은 풀이를 하였다.



<그림Ⅳ-10> 학생3의 3-(2)번 문항에 대한 첫 번째 풀이

위의 풀이를 보면 짝수 항끼리의 합과 홀수 항끼리의 합을 계산하려는 의도로 부분합에 대한 잘못된 적용을 하고 있음을 알 수 있다. 이에 대해 이후 면담 과정에서 학생3은 다음과 같이 풀이를 수정하였다.



<그림Ⅳ-11> 학생3의 3-(2)번 문항에 대한 두 번째 풀이

먼저 주어진 무한급수 식에서 처음 몇 개의 항들의 값을 직접 구하여 나타내고 짝수 번째 항까지의 합과 홀수 번째 항까지의 합을 식으로 나타낸 후 극한을 취하여 결국 두 극한값이 달라서 발산하는 것으로 풀이

하였다. 이 두 번째 풀이에서는 가역적 사고를 통해 무한급수의 각 항들을 구해내는 행동 관념에서 시작한다. 이렇듯 부분합의 수열 스키마를 구성하기 위해서는 부분합 S_1, S_2, S_3, S_4를 직접 구해보도록 하는 무한급수개념의 행동 관념을 자극하는 지도가 필요하다. 이렇게 부분합의 수열 스키마를 구성하게 되면 부분합의 수열의 일반항을 구하는 일반화 과정은 비교적 자연스럽게 이루어질 수 있다.

또 부분합의 스키마를 구성하는 과정에서 학생들은 무한급수에서 더하는 과정을 내면화하는 과정에서 더하는 순서에 대해 고려하지 못하고 일으키는 오류는 무한급수에서 결합법칙을 적용하는 경우이다.

부분합의 수열을 생각하고 부분합의 일반항을 구해 극한을 보내는 방법을 알고 있지만 부분합의 개념을 괄호와 연관하여 혼동하고 있음을 볼 수 있다. 이러한 모습은 5번 문항에서 부분분수의 분해로 인해 괄호를 사용하여 무한급수를 나타내게 되는데 이 문항에서의 부분합의 수열 S_1, S_2, S_3, S_4과 3(1)번과 같이 괄호가 없는 무한급수에서의 S_1, S_2, S_3, S_4의 차이를 인지하지 못하고 5번의 풀이방식을 3번에서도 적용하여 오류를 범하는 경우가 있었다.

연구자: 그럼 3번을 다시 한번 풀 수 있을까요?
학생2: 이건 <u>괄호가 안 나와있어서 기준이</u>...

학생2의 풀이는 두 항씩 괄호로 묶어 두 개의 항을 하나로 취급하고 있다. 부분합에 대한 의미가 괄호와 연관하여 혼동되고 있다.

연구자: 무한급수 합을 구할 때 꼭 두 개씩 묶어야 해요?
학생2: <u>안 그래도 되는데 편하게 하기 위해서</u>
연구자: S_1이라는게 어떤 의미가 뭐죠? $1, 2, 3$이 뭐지?
학생2: ...
연구자: S_n에서 n이 뜻하는 게 뭐예요?

학생2: (오래 고민하다가)이 두 개를 기준으로 해서 1이면 2개고, 2면 4개고 해서...n이 항 두 개, 하나의 항 두 개?

다음으로는 부분합 스키마 구성이 무한급수 개념의 스키마 관념에 미치는 영향에 대해 알아보자. 5번 문제에서 부분합 S_n의 기호가 나오기 전에 3번 문제에서 부분합의 기호를 쓰고 부분합을 문제풀이에 사용했던 학생은 학생1이다. 다른 학생들의 경우에는 무한급수의 각 항들의 규칙을 찾아 일반항 a_n을 구하고 부분합 S_n을 합의 계산 또는 직접 n항까지의 합을 구하는 과정을 거치는데 비해 학생1의 경우에는 부분합의 수열을 생각하고 그 수열의 일반항으로서 부분합 S_n을 구한 후 극한을 취해 무한급수의 합을 구하는 모습을 볼 수 있다.

이 학생의 경우 5번 문항에서 자신의 풀이와 5-(2)번의 (b)의 풀이를 비교해 보라는 질문에 대해 다음과 같이 답하였다.

학생1: 일단은 S_n을 쭉 풀고요. 다 이렇게 약분을 시킨 다음에(소거의 의미로 약분이라는 용어를 잘못 설명하였다) 남는 항을 가지고 극한을 취해 줬는데요. 여기서도 따지고 보면요. 결국엔 이렇게 약분이 돼서 나온 값이 이렇게 나왔잖아요. 그러니까 이것들의 규칙을 갖고 극한을 취해줘서 답이 이렇게 나온 거 같아요.

학생이 이러한 대답을 한 이면에는 밑줄 친 부분에서 알 수 있듯이 결국은 자신이 일반항을 구하고 부분합을 계산한 것이나 부분합의 수열을 일반화하여 부분합을 구한 것이 같은 의미라고 인식하고 있음을 알 수 있다. 이는 부분합을 구하는 두 가지 과정이 결국은 긴밀하게 연결되어 있는 일관적인 과정임을 느끼고 있다고 볼 수 있다. 이는 학생2와 학생4의 면담과정에서도 볼 수 있다.

연구자: 지금 학생이 풀었던 방법이랑 얘가 푸는 방법((b)의 풀이방식을 말함)이랑 같은가요?

학생2: 비슷한 거 같은데...

연구자: 비슷한 거 같아요?

학생2: 네,.. 똑같이 2분의 1로 묶었을 때 맨 첫 번째 거랑, 맨 첫 번째에서 맨 뒤에 거를 뺀 거랑 같은데...

연구자: 학생이 푼 거랑 (b)가 같은 방식인가요?

(중략)

연구자: 이 풀이랑 이 풀이랑 다른가요?

학생4: 일반항을 두는 게 달라요.

연구자: 왜 같은 문제인데 달라요?

학생4: 이 사람은 뒤의 항들로만, 서로 방식만 틀린 것 같아요.

(중략)

학생4: 이 풀이는 그냥 처음부터 S_n에, S_n의 일반항...일반항이라고 그래야 하나... 총합 먼저 일반화시킬려고 하고, 거기다가 극한을 붙이고, 저는 일반항에서 이렇게 한 상태에서 일반항 먼저 구해서 일반항이 이렇게 사라진다는 것을 발견하고 극한 취해 준 거 같아요. 맨 앞과 맨 뒤가 남는다는 사실을 알고,

연구자: 다른 거라는 거죠?

학생4: 어디서 연관점이 있는 것 같은데 못 찾겠어요.

학생들은 부분합을 구하는 두 가지 과정이 연관성이 있고 비슷하다는 것은 느끼지만 구체적으로 어떤 점이 같고 어떤 점이 차이가 있는지에 대해 명확하게 설명하지는 못하고 있다. 무한급수 개념의 스키마 관념을 가지기 위해서는 이러한 부분합을 구성하는 두 가지 과정의 공통점과 차이점을 인식하고 이들의 연관성을 알 수 있어야 한다고 볼 수 있다. 또한 이러한 두 가지 과정은 Martinez-Planell 외(2012)에서 SERLIST와 SERFUNC으로 구분하였던 무한급수 개념의 구성을 설명할 수 있는 보다 구체적인 요인이 된다. SERLIST에서 일반항 스키마와 수열의 합 스키마의 조절이 필요한 반면에 부분합의 수열의 일반화를 통한 부분합 스키마의 구성이 SERFUNC에 해당하는 것으로서 부분합의 수열을 구성하

기 위해서는 함수 개념이 바탕이 되어야 하기 때문으로 설명할 수 있다. Martinez-Planell 외(2012)에서 SERLIST 구성과 SERFUNC 구성을 모두 가져야 한다고 한 것은 우리의 연구에서 부분합을 구성하는 두 가지 과정을 모두 이해하고 연관성을 알아야 한다는 것과 같은 맥락으로 볼 수 있다.

4.3. 수열의 극한 스키마 분석

앞에서 살펴 본 바와 같이 두 가지 과정을 거쳐 부분합의 스키마를 구성한 학생들은 무한급수(의 합) 스키마를 구성하기 위해 부분합 스키마와 수열의 극한 스키마의 조절 과정을 거치게 된다. 이때, 어떠한 수열의 극한 스키마를 가지고 있는지에 따라서 무한급수 개념의 대상화가 다르게 나타날 수 있다는 점을 학생들의 면담 과정에서 발견할 수 있었다. 먼저 학생들의 수열의 극한 스키마에 대해 살펴보자.

4.3.1. 수열의 극한 스키마의 구성

수열의 극한 스키마를 거치지 않고 무한급수의 스키마를 구성하는 경우와 수열의 극한 스키마와의 조절을 통해 무한급수의 스키마를 구성하는 경우를 비교해 봄으로써 수열의 극한 스키마의 영향에 대해 보도록 하자.

수열의 극한 스키마와 직접적으로 조절 과정을 거치지 않아도 무한급수의 합을 구할 수 있는 경우는 무한등비급수일 때이다. 무한등비급수의 수렴 조건을 알고 무한등비급수의 합 공식을 알고 있다면 무한등비급수의 합을 구하는 문제는 다음과 같은 과정으로 쉽게 답을 구할 수 있다.

주어진 무한급수의 각 항들의 규칙을 파악하고 일반화를 하는 과정에서 등비수열임을 인지하고 공비를 찾는다. 그 공비의 범위가 -1과 1 사

이라면 무한등비급수는 수렴한다. 만약 공비의 범위가 $|r| \geq 1$이라면 무한등비급수는 발산한다. 수렴하는 경우에 무한등비급수의 합은 $\frac{a}{1-r}$이므로 첫째항 a와 공비 r을 식에 대입하면 된다. 이 과정에서 부분합 스키마나 수열의 극한 스키마가 관여하지 않기 때문에 무한등비급수의 합 공식만 알고 있다면 정답을 구할 수 있는 것이다. 이러한 점에서 무한등비급수에 관한 문제에 대한 학생들의 정답률이 높게 나타났다고 볼 수 있다. 무한등비급수의 수렴 조건에 대한 이해 없이도 주어진 무한등비급수가 수렴하는 경우에는 수렴조건에 대해 생각하지 않은 학생도 간단하게 공식에 첫째항과 공비의 값을 대입만 함으로써 답을 맞힐 수 있기 때문이다.

하지만 무한등비급수의 합 공식에 대해 이해하기 위해서는 등비수열의 합 공식으로부터 유도를 하고, 그 과정에서 무한등비급수의 수렴 조건의 의미도 알 수 있어야 한다. 학생들이 2번에서 무한등비급수의 수렴조건을 생각하지 않고도 무한등비급수의 합을 쉽게 구한 반면에 수렴조건에 대한 생각을 해야 하는 6번 문항의 경우에는 풀지 못하는 학생들을 볼 수 있었던 것은 이러한 설명을 뒷받침한다.

학생들의 수열의 극한 스키마의 구성을 볼 수 있는 검사 문항은 2번과 6번 문항이다. 먼저 2번 문항에 대한 학생들의 답안과 면담 과정에서의 답변을 통해 수열의 극한 스키마의 특징을 알아보자. 2번 문항에 대한 면담 과정 중 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=2$가 의미하는 것이 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots$가 2에 다가가는 것인지 2가 되는 것인지를 판단하도록 했을 때, 학생2, 학생3 그리고 학생4의 세 명은 2에 다가간다고 답했고, 학생 1은 처음에 문제 풀이를 했을 때는 2에 다가간다고 썼다가 면담 과정에서 $0.9+0.09+0.009+0.0009=?$의 예를 들자 2가 된다고 수정하였다. 학생5는 극한을 취하면 2가 되는 것 같은데 2가 된다고 확답을 하지 못하고 혼란스러워하였다.

무한 개념은 잠재적 무한(potential infinity) 개념과 실무한(actual

infinity) 개념으로 나누어 생각할 수 있다(박선화, 1998). 무한을 이러한 두 가지 종류의 개념으로 처음 분류한 아리스토텔레스(Aristotle)에 따르면, 잠재적 무한이란 어떤 것을 임의로 끝없이 증대시키는 것을 말하며, 실무한이란 무한히 증대시킨 것의 총체가 완결되어 실체로서 존재하는 것을 말한다(임정대, 1985).

다음은 학생4의 면담 내용이고, 밑줄 친 부분은 학생4의 잠재적 무한 개념이 드러나는 부분이다.

연구자: 2에 가까이 간다고 했잖아요? '2가 된다'고 말을 하면 틀린 말일까?

학생4: 네, 전혀 틀려요.

연구자: 틀려요?

학생4: 틀려요.

연구자: 음...그래?

학생4: 함수의 극한 때 했을 때도 수학 선생님이 틀리다고 했어요. 2가 아니라 2로 가까이 간다고 확실하게 말했어요. 그래서 그래요.

연구자: 그러면 '$0.9+0.09+0.009+0.0009+\cdots=$ '(연구자가 적는다) 이거는 뭐라고 쓸 수 있어요?

학생4: 1로 가까이 간다고 써야겠죠. 1로

연구자: 응...

학생4: 이거 봤던 문제라서....(중략)극한 설명하면서 이게 나와서...답은 알죠...1(등호 옆에 1이라고 적는다)

연구자: 1인데... 여기가 등호가 '같다'가 아니라는 거죠?

학생4: 네, 저도 모르겠어요. 왜냐면요 옛날에는 이렇게 화살표 표시로 했다는데 이걸로 개정이 되었데요.

연구자: 음...그래요?

학생4: 내, 개정이 되었데요. 근데 전 왜 이렇게 개정이 되었는지 저도 모르겠어요. (중략) 이게 같다는 게 아니라 얘로 끝까지 가까이 가고 있다는 게 확실하다고 생각해요.

연구자: 음...그러면 얘랑 얘랑은($\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$에서) 지금 같다고(첫 번째 등호를 가리키며) 했잖아요. 얘랑 얘랑 같고(두 번째 등호를 가리키며), 얘랑 얘랑 같고(세 번째 등호를 가리키며), 그럼 이중에 등호가 아닌 게 있어요?

(중략)

학생4: 가까이 간다. 수렴한다.

연구자: 가까이 간다?

학생4: 네

이 발췌문에서 볼 수 있듯이 학생4는 무한등비급수의 합 공식을 무한등비급수의 합의 근삿값을 구하는 공식으로 인식하고 있다. 이는 다른 세 학생들의 경우도 마찬가지였고, 학생1의 경우만 확신을 가지지는 못했지만 무한등비급수의 합이 2가 된다고 답하였다. 다음에 이어지는 학생2의 면담에서도 밑줄 친 부분에서 비슷한 내용을 확인할 수 있다.

연구자: 음...그러면 그건 2라고 해야 될까? 2에 가까이 다가간다고 해야 할까?

학생2: 가까이간다...

연구자: 음..그럼 무한등비급수에서 배웠던 공식은 이거는 등호로 하면 안 되는 거예요?

학생2: 약, 약이라고 해야 할 것 같은데

연구자: 그럼, 이 공식을 만약에 모른다 그러면 이 문제는 어떻게 풀 수 있어요?

학생2: 모르면 무한이라고 할 것 같은데, 이 식을 모르면.

이를 통해 학생1을 제외한 4명의 학생들은 가무한 개념 또는 잠재적 무한 개념을 가지고 있고, 실무한의 개념은 아직 형성하지 못하였다고 볼 수 있으며, 학생1의 경우는 실무한의 개념을 가지고 있는 것으로 볼

수 있었다. 잠재적 무한의 스키마를 가지고 있는 학생들이 무한급수의 합을 근삿값으로 인식하고 있음을 볼 수 있다.

대부분의 학생들이 잠재적 무한 개념을 바탕으로 수열의 극한 스키마를 구성하고 있는 이유는 교육과정에서 찾아볼 수 있다. 교육과정 해설서(교육과학기술부, 2008)의 수열의 극한 부분에서는 수열의 극한을 구체적인 그래프와 '한없이 가까이 간다.'는 표현 등을 사용하여 직관적으로 이해하게 하도록 하고 있다. 극한을 직관적으로 이해하도록 한다는 것은 학생들이 잠재적 무한 개념을 가지도록 하는 것이다. 잠재적 무한 개념과는 반대의 개념으로 볼 수 있는 실무한의 개념은 극한을 형식적으로 이해하는 과정에서 획득될 수 있다.

무한급수 학습에서 발생하는 오류 중 잠재적 무한 개념으로 인한 것이라고 설명하는 몇 가지 오류들이 있다. 잠재적 무한 개념은 예를 들어 $0.999\cdots$는 1과 같을 수는 없고 매우 가까워지는 수라고 생각하고 1보다는 작다고 생각하는 것으로 드러난다. 교육과정을 바탕으로 만들어진 교과서를 통해 수열의 극한을 학습한 학생들이 잠재적 무한 개념을 가지고 있는 것은 당연한 결과라고 볼 수 있다. 이러한 잠재적 무한 개념으로 인해 학생들은 무한등비급수 $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n+\cdots\ (|r|<1)$의 합을 구할 수 있는 공식인 $\frac{a}{1-r}$을 통해 얻은 값이 무한등비급수 $a+ar+ar^2+ar^3+\cdots+ar^n+\cdots\ (|r|<1)$의 합이 되는 값이 아니라 가까워지는 값이라고 생각한다. 이것은 잘못된 생각이지만 실무한의 개념이 아닌 잠재적 무한 개념만을 가지고 있는 학생들의 입장에서는 매우 자연스러운 이해라고 볼 수 있다. 잠재적 무한 개념은 학생들이 무한급수를 무한히 수들을 더해가는 과정으로 인식하고 무한급수를 하나의 수의 값을 갖는 대상으로 인식하지 못하는 원인이 된다. 따라서 무한급수 개념이 과정과 대상의 측면을 모두 고려할 수 있는 올바른 스키마로 구성되기 위해서는 실무한의 개념이 반드시 필요하다는 것을 알 수 있다. 극한에 대한 형식적인 정의를 고등학교 수열의 극한 단원에서 도입하는 것이 어렵

다면 도형을 이용하여 직관적으로도 실무한의 개념을 이해할 수 있도록 지도할 필요가 있다.

한편, 부분합 스키마의 구성은 수열의 극한 스키마와의 조절 과정에서 영향을 미치게 된다. 부분합이 하나의 식으로 구해지지 않는 경우에도 부분합의 수열의 개념을 가지고 있는 학생들은 부분합의 수열을 통해 부분합의 규칙성을 찾아 짝수 항까지의 합과 홀수 항까지의 합의 일반항을 각각 구하여 그들의 극한값을 비교해 보고 그 극한값이 다를 경우 그 무한급수는 발산한다는 것을 알 수 있게 된다. 여기에서 두 극한값이 다를 경우 부분합의 수열이 수렴하지 않는다는 사실은 수열의 극한 스키마에 해당하는 내용이다. 즉, 수열의 극한에서 배운 짝수 항들의 일반항과 홀수 항들의 일반항의 극한값이 다를 경우에 발산한다는 사실을 부분합의 수열에 적용해야 하는 것이다. 이것은 부분합 스키마와 수열의 극한 스키마의 조절에 해당한다. 이때, 부분합 스키마가 부분합의 수열로부터 일반화되는 과정을 거치지 않았을 경우, 부분합의 수열에 대한 수열의 극한 스키마의 조절이 어렵기 때문에 무한급수의 합을 두 개의 값으로 생각하는 오류를 범하게 되는 것이다.

부분합이 부분합의 수열로부터 일반화 과정을 통해 생성되었을 경우에는 부분합의 수열의 극한값으로 무한급수의 합을 생각할 수 있고, 만약 부분합의 수열의 극한값이 하나의 수로 존재하지 않는 경우에는 수열의 극한 스키마와의 조절 과정을 통해 부분합의 수열이 발산한다는 것을 판단할 수 있게 되는 것이다.

다음은 부분합의 극한값이 두 개 이상 가능하다는 생각을 가지고 있는 학생2의 면담 과정을 발췌한 것이다. 밑줄 친 부분을 보면 학생2가 부분합의 수열을 확실하게 인지하지 못하여 부분합의 수열의 극한값이 2개 이상 존재할 수 있다고 답하는 모습을 확인할 수 있다.

학생2: 이게 홀수로, 만약에 숫자의 개수가 홀수라고 했으면 1로 다 없어지는데 짝수면 이게 1 마이너스 무한분의 무한이어서 0이 되요.

아, 1이 되나?

연구자: 그러면 짝수 번째 항까지 더했을 때랑?

학생2: 홀수 번째 항까지 더했을 때랑 달라요.

연구자: 음..값이 다르다? 그러면 발산인건가요?

학생2: 수렴인가?...어...홀수 개면 1로 수렴하고, 짝수 개면 만약에 이렇게 되어있으면 이렇게 묶을 수 있다는(두 개 항씩 괄호로 묶는다)... 하면은 1 마이너스 이렇게 되는데($1-\frac{n+1}{n+2}$을 쓰면서) 만약에 나타내면 그러면 이걸로 수렴하고...무한으...아, 0으로 수렴...한다...0으로 수렴해요. 짝수 개면

연구자: 그러면 결론은 어떻게 내릴 수 있죠?

학생2: 수렴하고, 식이 홀수 개면 1로 수렴하고 짝수 개면 0으로 수렴

연구자: 수렴하면 그 합을 구하여라인데 답을 뭐라고 써야 할까?

학생2: 음...0 또는1?

반면에 학생2와는 다르게 학생3은 부분합의 수열이 0과 1이 번갈아 나오기 때문에 주어진 무한급수가 발산한다고 답하고 있다.

연구자: 그럼 이 두 가지 방법에 의해서 구했더니 이렇게 나오면 이에 대한 답은 뭐라고 써야 할까요?

학생3: 진동한다....발산

연구자: 발산하는 이유는 뭐예요?

학생3: 일반적으로 급수의 값을 보면 일반적일 때는 $2n$번째일 때는 0이고, $2n+1$번째 일 때 1인데 그러면 또 다음 $2n+2$일 경우... 결국에는 또 짝수 번째 항이란 말이고 그럼 또 0이 나오고 그 다음 항은 또 1이 나오고 그래서 값이 계속 번갈아 나와서 진동한다고 할 수 있을 것 같아요.

학생3은 부분합의 수열 스키마와 수열의 극한 스키마의 조절이 제대로

이루어지고 있는 것을 볼 수 있다.

4.3.2. 무한급수 개념 구성에 미치는 영향

발생적 분해에서 보면 수열의 극한 스키마는 부분합의 스키마와의 조절 과정을 통해 무한급수(의 합) 스키마를 구성하는 마지막 단계라고 볼 수 있다. 수열의 극한 스키마에서 무한에 관한 개념은 무한급수 개념의 대상화와 관련될 수 있다는 것을 알 수 있었다. 무한급수 개념을 대상화하여 무한급수의 성질을 적용하고, 무한급수에 관한 문제를 해결할 수 있는지는 검사 문항 중 2번, 4번과 6번 문항을 통해 알아볼 수 있었다.

2번과 6번은 무한등비급수의 합 공식을 이용할 때, 그 공식이 어디서 나온 것인지 생각하지 않고 암기한 공식을 기계적으로 이용하는지 아니면 등비수열의 합 공식을 알고 극한을 통해 무한등비급수의 합 공식을 이끌어낼 수 있고, 그 과정에서 무한등비급수의 수렴조건에 대해 인식하고 있는지를 보고자 하였다. 다음은 2번 문항에서 대한 학생4와의 면담 과정 중 일부이다.

연구자: 얘($\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$를 가리키며)가 왜 얘($\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$를 가리키며)로 가까이가요?

학생4: 이거 증명..하는거 있는거 같은데...이건 잘 모르겠어요. 제가 아직 수학을 깊이 있게 아직...

연구자: 그러면 이거($\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$를 가리키며) 구하기 위해서 이건 ($\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$를 가리키며) 어떻게 생각한 거예요?

학생4: <u>공식에다 넣었어요. 그냥</u>

연구자: 아, 어떤 공식에

학생4: 이게 공비가 이렇게 -1과 1사이일 때, 이 무한등비급수는 1 빼기 공비 분의 첫 항

연구자: 음...그거에 가까워져요?

학생4: 네, 이걸로 수렴한다라고 배웠고

연구자: 왜 그 공식이 나왔는지는

학생4: 네, 제가 아직, 까먹은 것 같아요.

밑줄 친 부분을 보면 등비수열의 합 공식으로부터 무한등비급수의 합 공식을 유도하지는 못했지만 무한등비급수의 수렴조건에 대한 인식을 확실하게 하고 있는 것으로 볼 수 있다. 반면에 학생2는 무한등비급수의 수렴조건에 대한 인식 없이 무한등비급수의 합 공식을 기계적으로 적용하고 있음을 다음 2번 문항에 대한 학생2와의 면담 과정 중 일부를 통해 확인할 수 있다.

연구자: 이건 어떻게 했어요?

학생2: 이건 식의 성질을..1 마이너스 r분의 a라는 식에 대입하니까 2라는 값이 나오는...

연구자: 1 마이너스 r분의 a라는건 어디서 나온 식이지?

학생2: 무한등비급수에서 첫째항하고 공차(공비를 의미하고 있다)를 알 때, 그 값을 구할 때

연구자: 그 값이라는 건?

학생2: 다 더한 값을 구할 때

연구자: 다 더한 값을 구할 때?

학생2: 공차(공비를 의미하고 있다)하고 첫째항을 알면 1 마이너스 r분의 a라는 식에 대입하면 그 모두 더한 값이 나와요.

(중략)

연구자: 아...그럼 이 공식을 모르면 구할 수 있는 방법이 없나? 이 공식을 안 외웠으면 이 문제를 풀 수 있는 방법은 없을까?

학생2: 모르겠어요...

6번 문항에서는 2번 문항과 비교하여 무한등비급수의 합 공식을 사용할 때, 무한등비급수의 수렴조건을 고려하면서 공식을 사용하는지를 알아보고자 하였다. 2번 문항에서 실무한의 개념을 어느 정도 가지고 있는 것으로 판단되었던 학생1의 경우, 6번 문항에서 문제를 읽고 나서 바로 수렴조건이 다른 두 식을 더하여 0이 된다는 결론을 얻은 것이 잘못된 것임을 정확하게 설명하였다. 학생3과 학생4의 경우에는 문제 풀이 또는 면담 과정에서 주어진 두 무한급수의 수렴반경이 서로 겹치지 않기 때문에 두 식을 더해서 얻은 세 번째 등식은 잘못된 것이라는 내용으로 답하였고, 학생2와 학생5는 세 번째 등식이 성립하지 않는 것 같은 느낌은 있지만 그 이유에 대해 설명하지는 못했다.

이러한 학생들의 답안은 크게 두 가지 범주로 나눌 수 있다. 먼저 무한급수에 대한 대상화가 가능하여 무한등비급수를 대상으로 보고 무한등비급수의 수렴조건에 대해 인식할 수 있어서 주어진 두 무한등비급수가 각각 수렴하기 위한 x값의 범위가 서로 겹치지 않기 때문에 두 식을 변끼리 더하여 0이 된다는 세 번째 등식은 잘못된 등식이라는 답을 한 경우이다. 다음은 학생들의 6번 문항의 풀이에 대한 설명 중 일부를 발췌한 것이다. 밑줄 친 부분을 통해 학생들이 무한급수를 대상화하여 대상으로 보고 수렴조건을 고려하고 있음을 확인할 수 있다.

> 학생4: 두 식 모두 성립할 수 없어요(동시에 성립할 수 없다는 것을 의미한다). <u>하나가 수렴하면 다른 한 식은 발산하기 때문에 등식이 성립하지 않아요.</u>

> 연구자: 이 두 식은 더하면 안 되는 거예요?
> 학생1: 더해도 되긴 하는데요. <u>같은 문자를 가지고 더해주면 안될 것 같아요. 이 x랑 이 x랑 다른 x니까. 답도 0이 나오면 안 되고.</u>

> 학생3: x가 1보다 작다는 전제하에 x의 절댓값이...이건 x분의 1의 절댓값이 1보다 작다는. <u>x가 성립하는 범위가 달라서 이게 성립한다고 할 수 없어요.</u>

그리고 나머지 두 학생은 세 번째 등식이 잘못된 것은 느끼지만 수렴조건을 생각하지 못하거나 수렴조건을 생각하면서도 첫 번째 등식에서만 수렴조건을 생각하여 세 번째 등식이 틀렸다는 것을 정당화하지 못하였다.

4번 문항의 경우 무한급수를 대상으로 볼 수 있어야 풀 수 있는 문제라고 생각하고 학생들에게 제시하였으나 학생들은 이러한 유형의 문항을 많이 접해보았기 때문에 대상 관념이 형성되지 않은 학생들도 문제를 기계적으로 풀이할 수 있을 가능성이 있는 것으로 판단되었다. 실제로 문제 풀이에서 5명의 모든 학생들이 이 문제를 쉽게 해결하는 모습을 확인할 수 있었다. 학생들은 두 무한급수가 수렴한다는 조건과 주어진 두 등식에서 무한급수의 성질을 활용하여 두 무한급수를 대상화하고 각각의 무한급수의 합을 구한 후 구하고자 하는 식에 대입하는 방법을 이용하여 다음과 같이 정답을 구하였다.

연구자: 어떻게 한 건지 설명을 간단히 해 볼까?

학생2: 이거랑 이게($\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$을 각각 가리키며) 수렴한다고 했으니까 수렴값을 α, β로 놓고서 이거를 성질을 써가지고 다 푼 다음에 대신에 이 기호를, 아..이 치환한 값을 넣고서 연립방정식을 풀면 이 값이 -3이 나오고 이 값이 1 나와 가지고 또 이거를(구하는 식을 가리키며) 성질을 써서 풀면은 4가 나와요.

연구자: 성질이란 건 어떤 성질을 말하는 거예요?

학생2: 이런 거는 그냥 앞으로 3을 뺄 수 있고 마이너스는 이렇게 따로따로 쓸 수 있고 플러스도 따로따로 쓸 수 있어요.

따라서 면담 과정에서 무한급수에 대한 대상 관념을 형성하고 있는지를 추가적으로 알아보기 위해 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n - (-1)^n}{3^n}$을 구해보도록 제시하였다.

이때, 학생1은 처음에 n에 $1, 2, 3, 4$를 대입하여 $\frac{3}{3}+\frac{3}{9}+\frac{9}{27}+\frac{15}{81}$을 써 보다가 $\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{2}{3}}\right)-\left(\frac{-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}}\right)=\frac{9}{4}$로 계산하는 것을 볼 수 있었다. 학생2와 학생4는 바로 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n-(-1)^n}{3^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}$으로 분수를 분리한 후 무한등비급수의 합 공식을 각각 적용하여 답을 이끌어냈다. 하지만 학생4의 면담과정을 통해 학생4는 이 문제를 풀기 위해 수열의 극한에서 풀었던 비슷한 문항을 떠올리고 그 방식을 적용하려고 했다는 설명을 들을 수 있었다. 각각의 무한급수를 의도적으로 대상화하기보다는 무한급수의 성질을 적용해야 하는 문제임을 먼저 파악하고 풀이를 하는 과정에서 무의식적으로 무한급수를 대상화하고 있는 것을 볼 수 있었다. 학생5는 짝수 번째 항과 홀수 번째 항의 차이에 지나치게 얽매어서 문제를 해결하지 못하였다.

지금까지의 내용을 정리해 보면 학생들은 수열 스키마로부터 두 가지 과정 중 한 과정 또는 두 가지 과정을 통해 부분합 스키마를 구성하고 수열의 극한 스키마와의 조절을 통해 무한급수 스키마를 구성하게 된다는 것을 알 수 있었다. 그리고 무한급수 개념을 대상화하여 대상으로 다룰 수 있게 되면 무한급수의 성질을 적용하거나 무한급수들 간의 연산, 무한등비급수의 수렴조건에 대한 인식이 가능하여 무한급수에 관한 문제를 해결할 수 있게 됨을 알 수 있었다. 이 과정에서 부분합 스키마의 구성과 수열의 극한 스키마의 구성이 무한급수 개념 구성에 어떠한 영향을 미치는지에 대해 알 수 있었다.

Ⅴ. 결론

5.1. 요약

지금까지 무한급수에 대한 선행연구들은 무한급수의 수렴성에 대한 수학적 분석이나 학생들의 무한급수에 관한 문제 풀이 과정에서 나타나는 오류와 오개념, 인지적 장애 분석을 중심으로 이루어졌다. 게다가 이러한 연구들도 대부분이 무한급수를 단독으로 다루기보다는 수열의 극한을 주제로 하면서 두 세 개 정도의 무한급수 관련 문항에 대한 학생들의 답을 분석하여 무한급수를 수열의 극한의 속한 하나의 소주제로 간단히 다루고 있다. 또한 거의 모든 연구가 양적 연구로 객관식 또는 단답식 형태의 설문지 조사를 실시하여 학생들의 사고 과정을 심층적으로 분석하지는 못하였다. 무한급수는 비교적 다양한 수학적 개념들과 연관된 복합적인 개념으로 볼 수 있으므로 피상적으로 학생들의 오류를 분석하는 것은 학생들이 가지고 있는 무한급수 개념을 이해하는 방법으로 적절하지 않다. 따라서 본 연구는 무한급수 관련 문제를 풀이하는 과정에서 드러나는 학생들의 사고 과정과 학생들의 관념을 APOS이론을 이용하여 심층적으로 살펴봄으로써 무한급수의 발생적 분해를 밝히고, 부분합 스키마와 수열의 극한 스키마가 특히 무한급수 개념 구성에 어떠한 영향을 미치는지에 대해 알아봄으로써 무한급수 지도에 도움을 주고자 하였다. 발생적 분해는 수학적 개념의 구성 과정을 분석하는 틀이므로 학생들의 무한급수 개념 구성 과정을 분석하기 위해 사용하였고, APOS이론은 과정과 대상으로서의 이해를 필요로 하는 무한급수의 개념의 특성을 반영하여 학생들의 무한급수 개념을 분석하기 위해 사용하였다.

학생들의 무한급수 개념의 구성 과정을 알아보기 위해 학생들에게 무한급수 관련 문항 검사지를 풀어보도록 하였다. 풀이 과정은 학생들의 동의를 얻어 모두 동영상 촬영을 하였고 이 자료는 분석에 사용되었다.

또한 학생들의 문제 풀이 후에는 문제 풀이 결과를 바탕으로 한 개별적인 반구조화된 면담을 실시하여 학생들의 사고 과정을 심층적으로 분석하였다. 면담 과정에서는 학생들의 각 문항에 대한 풀이 과정에 대한 설명과 자신의 풀이에 대한 수정, 다른 방법을 이용한 풀이 등을 하도록 하였고 이 과정에서 학생들이 무한급수 개념을 어떻게 구성해 나가는지를 세부적으로 관찰하였다. 이 면담과정 또한 동영상 촬영을 하였다. 면담 후에 학생들의 문제 풀이와 면담 내용을 전사한 자료를 바탕으로 학생들의 무한급수 개념 구성 과정에 대한 분석을 실시하였는데 이 과정에서 수열 스키마로부터 두 가지 과정을 거쳐 구성되는 부분합 스키마, 부분합 스키마와 수열의 극한 스키마의 조절을 통한 무한급수 스키마의 구성이 이루어짐을 볼 수 있었다. 또한 이 각각의 과정에서 학생들이 개념 구성에 어려움을 느끼고 그것이 문제 풀이 과정에서 오류의 형태로 드러남을 확인할 수 있었다.

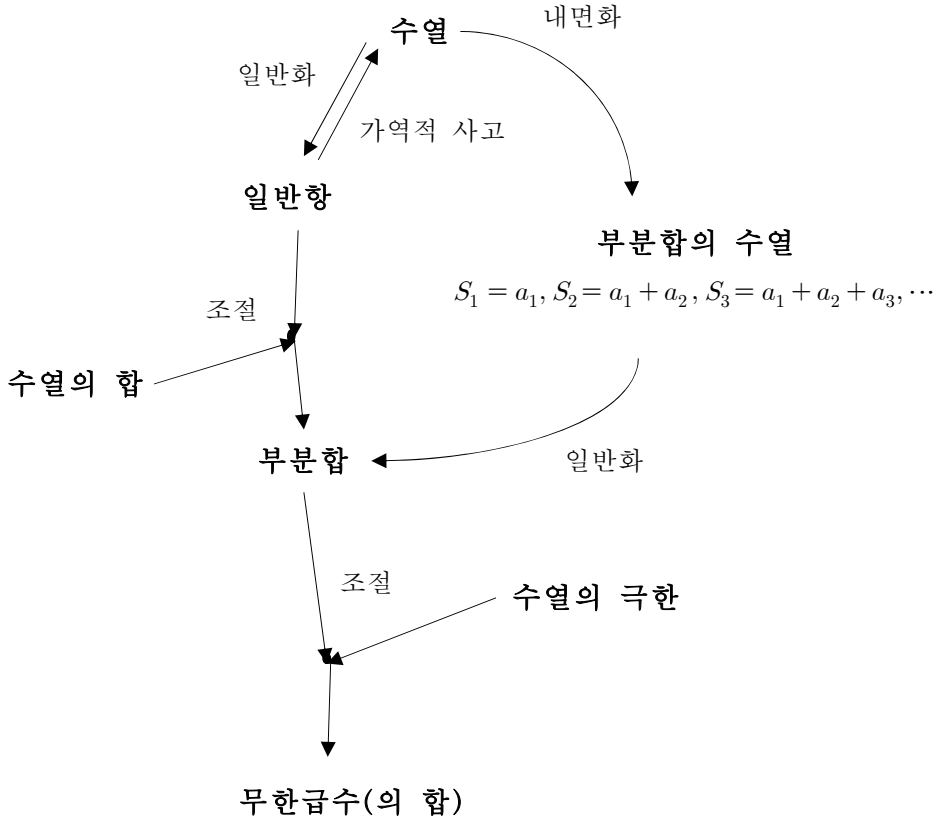
본 연구의 목적은 학생들의 무한급수 개념 구성 과정이 어떠하고, 이 과정에 주요한 영향을 미치는 요인인 부분합 스키마와 수열의 극한 스키마가 무한급수 개념에 어떠한 영향을 미치는지를 APOS이론의 관점에서 분석하는 것이다. 이에 대한 연구 문제는 다음과 같다.

1. 학생들이 구성하는 무한급수 개념의 발생적 분해는 어떠한가?
2. APOS이론의 관점에서 학생들의 부분합 개념 구성에 따른 무한급수 개념의 행동, 스키마는 어떠한가?
3. APOS이론의 관점에서 학생들의 수열의 극한 개념 구성에 따른 무한급수 개념의 과정, 대상은 어떠한가?

자료를 분석하고 해석한 연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

[연구문제1] 학생들의 무한급수 개념 구성 과정은 다음과 같이 간단하게 설명할 수 있다. 무한급수는 무한수열의 각 항을 + 기호로 연결한 식을 말하고 무한급수의 합은 부분합의 수열의 극한(값)으로 정의할 수

있다. 따라서 무한급수의 개념은 수열 스키마로부터 시작된다. 수열 스키마로부터 무한급수에서의 각 항을 수열의 항으로 파악하고 그 항들의 규칙성을 찾는다. 규칙성을 찾고 일반항을 구하는 일반화 과정을 거쳐 수열의 일반항 a_n을 구할 수 있는 경우에 수열 스키마에서 일반화 과정을 거쳐 일반항 스키마를 형성한 것으로 볼 수 있다. 그리고 이 일반항과 수열의 합에 대한 스키마가 조절 과정을 통해 부분합 스키마를 형성하게 된다. 하지만 부분합 스키마를 형성하는 과정은 이 과정 외에도 또 다른 과정이 가능한데 무한급수에서 새로운 수열인 부분합의 수열 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 을 생성하는 과정이다. 부분합의 수열 스키마를 구성하기 위해서는 $a_1 = S_1$, $a_1 + a_2 = S_2$, $a_1 + a_2 + a_3 = S_3, \cdots$ 등과 같이 무한급수의 무한히 더하는 과정에 대한 대상화를 거쳐 부분합 $S_1, S_2, S_3, \cdots$ 을 대상으로 인식하여 새로운 수열을 생각할 수 있게 되고, 이 수열의 규칙성을 찾아 일반항을 구하는 일반화 과정을 거쳐 부분합 S_n에 대한 스키마를 형성하게 되는 것이다. 이러한 두 가지 과정 중 하나의 과정을 통하거나 두 과정 모두를 통해 부분합 스키마를 형성하고 나면, 부분합 스키마와 극한 스키마의 조절을 통해 무한급수 또는 무한급수의 합에 대한 스키마를 형성할 수 있다. 이러한 무한급수 개념의 발생적 분해를 다음과 같이 나타내었다.



<그림 Ⅴ-1> 무한급수 개념의 발생적 분해

[연구문제2] 부분합 스키마는 수열 스키마로부터 두 가지 과정을 거쳐 구성된다. 첫 번째 과정은 무한급수의 각 항들을 수열의 항들로 생각하여 수열의 일반항을 구하고, 이 일반항을 합의 기호인 시그마 기호와 함께 나타내어 결국 부분합 $\sum_{k=1}^{n} a_k$를 구성하는 과정 또는 주어진 무한급수를 부분분수의 분해 등을 적용하여 직접 몇 개의 항들을 더하는 연산을 통해 규칙성을 찾고 그 결과 남게 되는 항들을 정리하여 결과적으로 부분합을 구성하는 과정이다. 이것은 결국 수열의 스키마에서 일반화를 통해 일반항 스키마를 구성하고 일반항 스키마와 수열의 합 스키마의 조절

을 통해 부분합 스키마를 구성하는 과정으로 설명할 수 있다. 두 번째 과정은 무한급수에서 부분합의 수열을 생성하고 부분합의 수열의 일반항으로서 부분합을 구성하는 과정이다.

부분합 스키마의 구성이 첫 번째 과정으로만 이루어지는 경우 학생들은 부분합의 수열에 대한 인식을 직접적으로 하지 못하여 일반항이 하나의 식으로 표현되지 않는 무한급수의 경우 무한급수의 수렴과 발산을 조사하거나 무한급수의 합을 구하는데 있어서 곤란함을 느끼게 된다. 따라서 무한급수를 부분합의 수열의 극한으로 이해하는 것도 불가능하게 된다. 부분합의 개념을 괄호의 유무와 관계없이 이해할 수 있고, 부분합의 수열을 생성할 수 있어야 진정한 무한급수 개념의 이해가 가능하다. 그런데 무한급수에서 일반항을 구하는 과정이 학생들에게 익숙하여 자연스러운 접근인 반면에 부분합의 수열을 생성하는 것은 낯설고 의도적인 교수학적 장치가 필요하다는 것을 연구 과정을 통해 알 수 있었다.

따라서 학생들에게 부분합의 수열을 행동 관념에서 조작할 수 있도록 지도할 필요가 있다. 예를 들어, 주어진 무한급수에 대해 S_1, S_2, S_3, S_4를 직접 구해보도록 하는 발문은 무한급수에 대한 행동 관념을 자극할 수 있다. 다양한 무한급수에 대해 부분합의 수열을 직접 구해보는 활동을 통해 학생들은 행동 관념이 내면화되어 과정 관념을 가질 수 있게 된다. 또한 교환법칙이나 결합법칙에 관하여 부분합의 수열을 구성하는 과정에서 경험해 보도록 함으로써 유한한 부분합에서 성립하는 법칙이 무한히 항을 더하는 무한급수에서는 성립하지 않을 수 있다는 것을 알 수 있는 기회를 제공해야 할 것이다. 부분합 개념을 구성하는 두 가지 과정의 연결성을 이해하는 것은 무한급수 개념에 대한 스키마 관념의 형성에 큰 영향을 준다고 볼 수 있다.

[연구문제3] 수열의 극한 스키마는 여러 가지 수학적 내용을 담고 있지만 그 중 무한에 관하여 잠재적 무한 개념 또는 실제적 무한 개념을 가지고 있는지에 따라 무한급수 개념 형성에 큰 영향을 미치는 것으로

볼 수 있다. 학생들은 교육과정에 의해 만들어진 교과서를 사용한 수업에서 극한 개념을 학습하므로 교육과정에서 제시하고 있는 대로 잠재적 무한 개념을 자연스럽게 가지게 되는 반면에 실무한의 개념은 가지기 힘들다.

따라서 이러한 잠재적 무한 개념을 바탕으로 하는 극한 개념은 무한급수의 대상화 과정에도 영향을 미친다. 예를 들어 무한등비급수의 합 공식을 이용하여 무한등비급수의 합을 구하지만 그 값이 무한등비급수가 한없이 다가가는 근삿값이라고 생각하고, 수렴하는 두 무한급수를 각각 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \alpha, \sum_{n=1}^{\infty} b_n = \beta$라고 놓으면서도 이것을 등식이 아닌 근사를 나타내는 기호인 $\fallingdotseq$으로 인식하는 것이다. 이러한 대상화는 무한급수의 완전한 대상화를 방해하고 무한급수를 대상으로 다루는데 있어서 곤란함을 초래한다. 또한 이러한 불완전한 대상화는 무한급수의 합이 두 개 이상이 될 수 있다고 생각하게 되는 결과를 가져온다. 이것은 잠재적 무한 개념으로부터 구성된 수열의 극한 스키마가 부분합 스키마와의 조절을 통해 무한급수 스키마를 구성하게 될 때, 무한급수의 과정으로서의 측면을 지나치게 지지하게 되어 올바른 대상화를 방해하여 무한급수를 대상으로 보기 어렵게 하였다고 볼 수 있다. 따라서 무한급수의 적절한 대상화를 위해 실무한 개념도 함께 이해하면서 수열의 극한 스키마를 구성할 수 있도록 할 필요가 있다고 본다. 특히, 도형을 이용한 무한등비급수 수업을 통해 무한등비급수의 합이 근삿값이 아니라 어떤 특정한 하나의 수가 된다는 것을 감각적으로 인지하고 그것을 인지적으로도 이해할 수 있도록 하는 것을 제안한다. 이를 통해 무한급수를 대상으로서 인지할 수 있게 되면 무한등비급수의 수렴조건을 고려할 수 있게 되고, 무한급수에 관한 성질들도 무한급수를 대상으로서 조작하면서 적용할 수 있게 될 것이다.

5.2. 의의 및 제언

본 연구는 학생들의 무한급수 개념 구성 과정을 발생적 분해를 이용하여 밝히고 이를 바탕으로 이 과정에 주요한 영향을 미치는 요인인 부분합 스키마와 수열의 극한 스키마가 무한급수 개념에 어떠한 영향을 미치는지를 APOS이론의 관점에서 분석하는 것이다. 본 연구의 의의는 다음과 같다.

첫째, 무한급수의 발생적 분해 중 가능한 한 가지 형태를 밝힘으로써 무한급수 개념 구성에 관여하는 다른 수학적 개념들과 그들 사이의 반영적 추상화의 관계에 대해 설명할 수 있게 되었다. 이는 무한급수에 대한 학생들의 이해의 이면을 드러냈다는 의의를 가진다.

둘째, 발생적 분해에서 드러나는 무한급수 개념 형성 과정을 반영한 수업 또는 교재를 통해 무한급수를 학습하게 되는 학생들이 자신이 이전에 가지고 있던 수학적 개념들을 바탕으로 자연스럽게 반영적 추상화 과정을 거쳐 무한급수 스키마를 형성할 수 있도록 하는데 도움이 될 것이다.

셋째, 특히 학생들이 무한급수 개념을 구성할 때, 부분합과 수열의 극한 스키마가 각각 어떤 영향을 미치는지를 APOS이론의 관점에서 분석한 결과는 발생적 분해의 과정을 반영한 무한급수 개념 지도에서 구체적으로 학생들에게 행동, 과정, 대상, 스키마 중 해당 단계에서 필요한 관념을 형성할 수 있도록 할 수 있다. 예를 들어 무한급수를 무한히 더하는 과정으로만 인식하는 학생이 있다면 대상화를 할 수 있는 지도가 필요하다는 것을 알 수 있다.

이러한 의의를 바탕으로 본 연구의 후속 연구를 다음과 같이 제안한다.

첫째, 본 연구는 무한급수 개념을 이미 학습한 학생들을 대상으로 무한급수 개념을 재구성하도록 하고 그 과정을 분석하였다. 따라서 무한급수 개념을 처음 배우는 학생들을 대상으로 하여 발생적 분해에 의한 지도를 통해 자연스럽게 무한급수 개념을 형성하게 되는지를 살펴보는 연

구가 필요하다. 수열, 수열의 합, 수열의 극한에 대한 개념을 학습한 학생들을 대상으로 발생적 분해에서 드러난 반영적 추상화 과정을 적절한 과제수행 또는 교사의 안내를 통해 경험하게 하여 자연스럽게 부분합 스키마를 구성하고 무한급수를 대상화 할 수 있는 단계까지 가능한지를 살펴볼 필요가 있다. 또한 그 과정에서 발생적 분해를 수정하고 보완하여 보다 일반적인 무한급수 개념의 발생적 분해를 만들 수 있을 것이다.

둘째, 무한급수 개념을 지도하는 수업에서 발생적 분해를 바탕으로 특히 반영적 추상화 과정을 학생들이 충분히 경험하도록 하고, APOS이론에서의 행동, 과정, 대상, 스키마 관념을 형성할 수 있는 다양한 활동을 할 수 있도록 설계하여, 실제 수업을 진행하는 과정에서 학생들의 무한급수 개념의 형성 과정을 알아보는 연구가 필요하다. 이 연구는 발생적 분해가 수업 설계에 어떠한 의미가 있는지, 발생적 분해를 통해 새로운 수학 개념 형성이 실제로 자연스럽게 이루어지는지에 대한 확인이 될 수 있을 것이다.

셋째, 무한급수와 같이 복합적인 수학적 개념으로 볼 수 있고, 과정과 대상의 측면을 동시에 고려할 필요가 있는 미분, 적분 등의 개념도 발생적 분해와 APOS이론을 바탕으로 학생들의 개념 구성에 대한 분석을 해볼 필요가 있다. 이를 통해 관여하고 있는 다른 수학적 개념들을 어떻게 지도해야 하고, 미분과 적분 수업을 어떻게 설계하고 지도해야 할 것인가에 대해 구체적인 제언이 가능할 것이기 때문이다.

참 고 문 헌

고지현 (2012). **수열의 극한과 무한급수 단원에서 발생하는 오류 유형 분석**. 석사학위 논문. 아주대학교 교육대학원.

교육과학기술부(2008). **고등학교 교육과정해설 5 수학**. 교육과학기술부.

교육부(1997). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제1997-15호. 교육부

곽부진 (2006). **무한급수의 특별한 수렴판정에 관한 연구**. 석사학위 논문. 인제대학교 교육대학원.

김가영 (2007). **실수의 무한급수**. 석사학위 논문. 동국대학교 교육대학원.

김미경 (2003). **무한급수의 수렴 및 판정법에 관한 연구**. 석사학위 논문. 인제대학교 교육대학원.

김성덕 (2010). **무한급수**. 석사학위 논문. 동국대학교 교육대학원.

김성준 (2004). **대수의 사고 요소 분석 및 학습-지도 방향 탐색**. 박사학위 논문. 서울대학교.

김채지 (2010). **무한급수 학습에서 발생하는 오개념 분석**. 석사학위 논문. 한국외대 교육대학원.

김윤경 (2006). **고등학교 학생들의 수학적 귀납법에 관한 개념 형성**. 석사학위 논문. 건국대학교 교육대학원.

김응태, 박한식, 우정호 (1997). **수학교육학개론**. 서울대학교출판부.

김현정 (2002). **무한급수의 수렴판정에 관한 연구**. 석사학위 논문. 한양대학교 교육대학원.

김효정 (2008). **엑셀을 이용한 합성함수와 역함수 개념 이해에 관한 사례연구(APOS이론을 중심으로)**. 석사학위 논문. 한국교원대학교 대학원.

남윤희 (2006). **무한 개념의 학습과 지도에 관한 연구: 고등학교 교육과정을 중심으로**. 석사학위 논문. 고려대학교 교육대학원.

류희찬, 류성림 역 (2006). **수학의 철학과 역사**. W. S. Anglin의 Mathematics: concise history and philosophy. 서울: 경문사.

박선화 (1993). 무한 개념의 이해. **수학교육학연구, 3**(2). 대한수학교육학회.

_____ (1998). **수학적 극한 개념의 이해에 관한 연구**. 박사학위 논문. 서울대학교.

박배훈, 김원경, 조민식, 김두성, 김원석, 정원진, 이대현 (2002). **고등학교 수학 I 교사용지도서**. 서울: 법문사.

박혜숙, 김서령, 김완순 (2005). 수학적 개념의 발생적 분해의 적용에 대하여(추상대수학에서의 Z_n의 경우). **한국수학교육학회지 시리즈 A, 수학교육, 44**(4), 547-563.

양영오, 조윤동 역 (2011). **수학의 역사·하**. C. B. Boyer & U. C. Merzbach의 A history of mathematics. 서울: 경문사.

이승연 (2007). **함수의 무한급수**. 석사학위 논문. 동국대학교 교육대학원.

임정대 (1985). **수학적 존재와 인식**. 서울: 청문각.

정성미 (2008). **도형을 활용한 무한급수 지도**. 석사학위논문. 한양대학교 교육대학원.

정은선 (2010). **극한개념의 이해와 미분개념 획득과정의 연결에 관한 사례 연구**. 석사학위 논문. 이화여자대학교 교육대학원.

조영혜 (2008). **무한급수 개념의 이해에 관한 연구 : 고등학교 3학년 학생을 중심으로**. 석사학위 논문. 건국대학교 교육대학원.

지영조 (2006). **무한수열의 극한과 무한급수에 대한 개념이미지 및 오류**. 석사학위 논문. 고려대학교 교육대학원.

최정윤 (2012). **「2007 개정 교육과정」에 따른 『수학Ⅰ』교과서 무한급수 단원 분석 및 제안 : 무한등비급수를 중심으로**. 석사학위 논문. 경희대학교 교육대학원.

최용준, 김서령, 이정례, 선우하식, 이진호, 조동석, 이한주, 김덕환, 김민정, 박효정 (2010). **고등학교 수학Ⅰ**. 서울: 천재교육

황우형, 지영조 (2008). 고등학생의 무한에 대한 개념정의와 개념이미지. **한국학교수학회논문집, 11**(2), 249-283.

허민, 오혜영 역 (2009). **수학의 위대한 순간들**. H. Eves의 Great moments in mathematics-before 1650 & Great moments in mathematics-after 1650. 서울: 경문사.

홍진곤 (1999). **반영적 추상화와 조작적 수학 학습-지도**. 박사학위 논문. 서울대학교.

Asiala, M., Brown, A., Devries, D. J., Dubinsky, E. Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, & E. Dubinsky (Eds.), *Research in collegiate mathematics education II* (pp. 1-32). Providence: American Mathematical Society.

Bagni, G. T. (2000). Difficulties with series in history and in the classroom. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.), *History in Mathematics education: The ICMI study*(pp.82-86). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Bagni, G. T. (2005). Infinite series from history to mathematics education. *International journal for Mathematics Teaching and Learning* [on-line journal] posted June 30, 2005, University of Plymouth, U.K. http://www.cimt.plymouth.ac.uk/journal/default.htm.

Borgen, K. L., & Manu, S. S. (2002). What do students really understand?. *Journal of Mathematical Behavior, 21*, 151-165.

Clark, J., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D., John, D. S., Tolias, G., & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule. *Journal of Mathematical Behavior, 16(4),* 345-364.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K.,

& Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning with a Coordinated Process Schema, *Journal of Mathematical Behavior, 15(2),* 167-192.

Dubinsky, E. & Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness, *Journal of Mathematical Behavior, 5,* 55-92.

Dubinsky, E. (1991). Reflective Abstraction in Advanced Mathematics Thinking, In Tall, D. (Eds.), *Advanced Mathematics Thinking*, Kluwer Academic Publishers, 류희찬·조완영·김인수 역 (2003). 고등수학적사고. 경문사. 127-165.

Dubinsky E., & MacDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research, In D. Holton et.(Eds.), *The teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study*, Kluwer Academic Publishers, 273-280.

Fishbein, E., Tirosh, D., & Melamed, U. (1981). Is it possible to measure the intuitive acceptance of a mathematical statement? *Educational Studies in Mathematics, 12,* 491-512.

McDonald, M. A., Mathews, D., & Strobel, K. (2000). Understanding sequences: A tale of two objects. In E. Dubinsky, A. H. Schoenfeld, & J. Kaput (Eds.), *Research in collegiate mathematics education IV* (pp. 77-102). Providence: American Mathematical Society.

Martinez-Planell, R., Gonzalez, A. C., DiCristina, G., & Acevedo, V.

(2012). Students′ conception of infinite series, *Educational Studies in Mathematics*, *81(2)*, 235-249.

Piaget, J. (1980). Adaptation and intelligence (S. Eames, trans). University of Chicago Press, Chicago (original published 1974).

Sfard, A. (1991). On the Dual Nature of Mathematical Conceptions: Reflections on Processes and Objects as Different Sides of the Same Coin. *Educational Studies in Mathematics, 22,* 1-36.

Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (1999). What is the object of the encapsulation of a process?. *Journal of Mathematical Behavior*, *19,* 223-241.

Tziritas, M. (2011). *APOS theory as a framework to study the conceptual stages of related rates problems*. Concordia University, M.A.

İbrahim, ÇETİN (2009). *Students' understanding of limit concept: an APOS perspective*. Doctor's degree dissertation. Middle East Technical University.

<부록> 검사 문항지

검 사 문 항 지

다음은 무한급수에 대한 여러분의 이해를 조사하기 위한 검사 문항입니다. 여러분의 응답 결과는 소중한 수학 교육 연구 자료로 활용될 예정입니다. 잘 읽고 성실한 답변을 부탁드립니다.

각 문항에 대한 답을 자세히 서술해 주세요. 가급적 지우개를 사용하지 말고 풀이과정을 남겨주시기 바랍니다.

____학년 _____반 이름: _____

1. 다음 물음에 자세하게 자신의 생각을 서술하세요.

(1) 무한급수란 무엇인가요?

(2) 무한급수는 수열과 어떤 관계가 있나요?

(3) '무한급수' 하면 떠오르는 용어, 기호, 개념 등 모든 것을 써라.

(4) 무한급수의 예를 3가지 이상 써라.

2. 선분 $1cm+\frac{1}{2}cm+\frac{1}{4}cm+\cdots$는 무한일까? 어떤 값에 가까이 다가가는가? 어떤 값이 되는가?

3. 다음 무한급수의 수렴, 발산을 조사하고, 수렴하면 그 합을 구하여라.(풀이과정 자세히)

(1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}+\frac{4}{5}+\cdots$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$

4. 두 무한급수 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$이 수렴하고,

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-3b_n)=10$, $\sum_{n=1}^{\infty}(3a_n-2b_n)=9$일 때, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)$의 값을 구하여라.(풀이과정 자세히)

5. 무한급수 $\frac{1}{1 \cdot 3}+\frac{1}{3 \cdot 5}+\frac{1}{5 \cdot 7}+\cdots$의 합을 S라 하자. 다음 물음에 답하여라.

(1) S를 구하시오.

(2) 다음 두 가지 풀이 (a), (b) 각각에 대한 자신의 생각을 설명해보시오.

(a) $S=\left(\frac{1}{1}-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{7}\right)+\cdots$

$=1+\left(-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(-\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\right)+\left(-\frac{4}{7}+\frac{4}{7}\right)+\cdots$

따라서 $S=1$이다.

(b) $S_1=1-\frac{2}{3}$

$S_2=\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)=1-\frac{3}{5}$

$S_3=\left(1-\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)+\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{7}\right)=1-\frac{4}{7}$

부분합은 $S_n=1-\frac{n+1}{2n+1}$으로 쓸 수 있으므로 $\lim_{n\to\infty} S_n=S=\frac{1}{2}$이다.

6. 다음 각각의 무한급수의 합에 대해 생각해 보자.

$x+x^2+x^3+\cdots=\dfrac{x}{1-x}$, $1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\cdots=\dfrac{x}{x-1}$

두 개의 등식을 변끼리 더하면 다음과 같다.

$x+x^2+x^3+\cdots+1+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}+\cdots=0$

위의 과정에 대해 자신의 생각을 자세하게 정당화해 보자.

감사합니다.

ABSTRACT

Analysis on the concept of an infinite series of high school students

Kim A-mi
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

Infinite series is defined as the sum of an infinite sequence of terms. As is evident from the definition, infinite series contains several complex mathematical concepts such as infinity, sequence, sum, and limit. Understanding infinite series is important because it is foundational to calculus concepts in advanced mathematics learning. However, because developing an intuitive and correct understanding of the concept of infinity is difficult, it follows that teaching and learning the concept of the infinite series can also be a challenge.

In the context of intuitive thinking about infinity, students initially accept that an infinite series is an infinite adding process. However, to develop an accurate understanding of the infinite series, an infinite series has to be recognized as an object, so as to apply its property and the theory properly. Dubinsky's APOS theory reported the formation of mathematical concepts and understanding as an

interactive process between the process and the object. This transition of the process to the object is described by the behavior, process, object, and schema. In this study, the analysis of students' formation and understanding process of the concept of the infinite series is framed by the APOS theory.

The sample consists of five 2nd grade high school students. Students solved problems and engaged in semi-structured interviews for an in-depth analysis of the thinking process of the students.

Genetic decomposition of the concept of an infinite series begins with the sequence schema. Sequence schema forms a general term schema through a process of generalizing, this general term and the sum of the sequence's schema forms partial sum's schema through a process of coordination. In addition to this process, the process of forming the other partial sum schema can generate a new progression, partial sum from infinite series such as $a_1 = S_1$, $a_1 + a_2 = S_2$, $a_1 + a_2 + a_3 = S_3, \cdots$ through the process of adding an infinite series of infinitely internalized, partial sums $S_1, S_2, S_3, \cdots$ is recognized as objects and being able to think of a new sequence, finding a generalized process to obtain a general term for this sequence of rules. The schema is formed via S_n. After forming partial sum schema, through either one or both processes, the coordination of the partial sums schema and the schema of limit schema form the schema for the infinite series or its sum.

The findings from the study suggest that students are familiar with the process of obtaining a general term in the infinite series of the partial sums, bot unfamiliar with sequence of partial sum, which indicates the need for a didactical approach. On the other hand, understanding the connection between the two courses that comprise

partial sum seems it would have a significant impact on the schema of an infinite series.

The limit schema of sequence contains several mathematical content, but findings from this study suggest that depending on the kinds of connection about infinity a student has, the trajectories for learning about infinite series could differ significantly. Infinite concepts about potential infinity or actual infinity, depending on the concept of infinite series in the formation have a significant impact. This study shows that students intuitively understand the concept of potential infinity, bot not necessarily the concept of the practice of infinity. Causing limit concept of the infinite series to encapsulation process is also affected in dealing with difficult and interfere with the complete encapsulation of the infinite series. To correct encapsulation, there is a need to understand an infinite series as a practical concept that consists of the limit schema of sequence.

This study describes students' reflective abstraction and other mathematical concepts involved in the conceptual construct of an infinite series, by identifying the genetic decomposition of the concept of an infinite series. Using such findings in pedagogy and textbook development may provide more opportunities for students to reflect on genetic decomposition of the concept of an infinite series.

Keywords : infinite series, partial sum, limit of sequences, APOS theory, reflective abstraction

Student number : 2011-21558

감사의 글

2007년 3월부터 수학교사로서 학생들 앞에 서면서 좀 더 수학을 잘 가르치는 교사, 학생들이 수학을 좋아할 수 있는 계기를 줄 수 있는 교사가 되기 위해 노력했습니다. 4년이라는 시간이 흐르면서 수학교육에 대해 더 공부를 하면 좀 더 나은 수학교사가 될 수 있지 않을까 기대하며 대학원에 지원을 했고, 2011년 3월에 정말 행복하게도 경기도 교육청 파견연수 대상자로 선정되어 2년 간 온전히 대학원생으로서 공부할 수 있는 기회를 가질 수 있었습니다. 학부생 때와는 또 다른 느낌의 학생 신분으로 돌아와 지난 2년간은 배우는 입장으로 살아온 것 같습니다. 2011년 대학원생으로서 모든 시간을 나의 성장을 위해 쓸 수 있다는 기대감에 부풀어 새출발했던 것이 엊그제 같은데 벌써 졸업을 앞두고 있다는 것이 믿어지지 않습니다.

길다면 길고 짧다면 짧은 지난 2년 간, 그토록 바랐던 파견 교사로서의 대학원 생활을 하면서 학문적으로도, 한 개인으로서도 많은 것을 경험하고 그 속에서 배우고 느꼈던 것 같습니다. 그러한 모든 경험의 중심에는 학부생 때부터 저에게 멘토와 같은 존재로, 때로는 부모님과 같은 존재로 항상 자리를 지켜주시고 저를 안내해 주신 권오남 지도교수님이 계셨습니다. 평생 교수님과의 소중한 인연을 가꾸어가고 싶습니다. 감사하다는 말로는 부족할 만큼 많이 감사합니다. 그리고 항상 따뜻한 미소로 격려해 주시고, 수업 시간엔 학생들과 공감하며 우리나라의 수학교육에 대한 생각을 깊게 할 수 있도록 해주신 이경화 교수님께 감사드립니다. 많은 시간 함께 하지는 못했지만 교수님의 수학교육에 대한 사랑과 열정, 학생들을 존중하시는 마음이 고스란히 전해졌습니다. 또한 항상 새로운 것에 도전하시고 창의적인 아이디어를 실현하시는 조한혁 교수님, 제가 학부생 때부터 지금까지도 변치 않는 교수님의 그 열정, 닮고 싶습니다. 그리고 학부 시절 수치해석을 가르쳐 주셨던 정상권 교수님, 제가 많이 부족하지만 그래프 이론과 논리적인 사고에 관해 지도해 주신 김서령 교수님, 수학교육 연구에서 통계에 대해 처음 눈을 뜨게 해주신 유연

주 교수님, 학부 시절 은사님이신 최영기 교수님께도 진심으로 감사드립니다. 교수님들을 뵐 수 있다는 것만으로도 영광이었고, 감사했습니다.

지난 2년 간 같은 파견 교사 신분으로 늘 함께하고 많은 것을 공유할 수 있었던 친구 지희야, 정말 너 없었다면 어쩔 뻔 했니...정말 고맙다. 옆에 있어줘서. 처음 석사과정을 시작하면서 함께 연구실 생활을 했던 지희, 경진이, 영복이, 진형이, 지우, 다른 연구실이었지만 동기인 안성이, 동조, 수연이, 우리 함께 봄소풍도 가고 엠티도 갔던 정말 소중한 시간들이 생각한다. 그리고 두 번째 해에 함께 연구실을 썼던 아라언니, 예쁜 아기 낳으신 거 축하드려요. 그리고 동환이, 임용고시 준비하느라 열심히 공부하고 노력하는 모습이 참 보기 좋았어. 최종 합격까지 파이팅! 또 많은 교류는 하지 못했지만 동문수학했던 많은 샘들, 선후배님들과 점모로 다져진 인연인 기돈 오빠, 민하 오빠, 의태 오빠, 모두 대학원이 맺어준 소중한 인연입니다. 모두 좋은 결실을 맺으시길 바래요^^

우리의 특별한 대학원팀! 같은 팀에 석사 과정과 박사 과정으로 과정은 다르지만 함께 들어와 같이 고생도 하고 힘이 되었던 형미야, 네가 있어서 맘 둘 곳이 있었어. 함께 중국 학회에서 보냈던 그 시간이 계속 새록새록 생각이 난다. 연구자로서의 형미의 성장에 항상 박수 보내고 있는거 알지? 정말 능력이 출중하신 박정숙샘, 박지현샘, 오혜미샘, 나미영샘, 이지은샘, 눈코 뜰 새 없이 바쁘셔도 여러 가지 일을 훌륭하게 해내시고 팀원들 챙기시는 샘들을 보면서 많이 배우고 존경합니다. 따뜻한 샘들의 한 마디 한 마디 그 격려에 다시 힘을 냈었습니다. 그리고 잃어버린 한 학기가 참 아쉬운 생각이 자꾸 들게 하는 유정언니, 영기샘, 은지샘, 미혜샘, 앞으로도 우리 끈끈한 정 계속 이어가요^^ 샘들께 배울 것도 많고, 함께 하고픈 것도 참 많은데 먼저 떠나게 되어 아쉬움이 큽니다. 힘들 때 절 감싸주었던 유정언니의 그 따뜻한 맘 잊지 못할 거예요. 후배인데도 항상 든든하고 배울 점이 많은 국환이, 이쁘고 솔직하고 능력 있는 미주샘, 대학원 첫 학기 함께 했던 재훈샘, 대학원 지원할 때 따뜻한 도움말을 주었던 예쁜 엄마 수경 언니, 마지막 학기에 다시 볼 수 있어서 반가웠던 이지연샘, 모두 모두 제겐 정말 소중한 인연입니다. 이

런 훌륭하신 분들과 함께 할 수 있다는 것이 행복합니다. 지금 팀 모임은 함께 하지 못하지만 항상 멀리서도 따뜻한 격려를 해 주시는 경은샘께도 감사합니다.

그리고 교사로 첫 발을 내딛으며 만난 저의 멘토이신 정경조 수석교사님과 신동일 교장선생님께도 감사드립니다. 또한 대학원에 지원할 수 있도록 적극적인 지원을 해 주신 이상덕 교장선생님께도 감사드립니다. 논문에 필요한 인터뷰를 할 수 있도록 적극적으로 도와주신 유복종 선생님께 진심으로 감사드리고, 인터뷰에 흔쾌히 응해주었던 계남고등학교 김지훈, 박정윤, 이진섭, 채강욱, 최민근 학생에게도 감사합니다.

언제나 나의 편, 힘들 때 기댈 곳이 되어주는 대학 친구들, 소연이, 혜영이, 영진이, 은주, 나의 꼬꼬마 어린 시절을 기억하는 유일한 친구 지혜, 나의 소울메이트 솔잎이, 지구반대편 칠레에서도 항상 응원해 줘서 정말 고마워^^ 너희가 있어서 앞으로의 삶이 더 기대돼.

마지막으로 항상 저를 믿어주시고 사랑해주시는 부모님, 정말 감사합니다. 엄마, 아빠의 딸인 것에 감사하고 행복하며 진심으로 사랑합니다. 그리고 일 년 전 새로 태어난 나의 소중한 하나 뿐인 동생 다미야, 너로 인해 그동안 보지 못했던 것을 보고 느끼게 되었단다. 언니에게 힘이 되어 줘서 정말 고마워. 사랑해.

힘들고 지칠 때 옆에서 다독여주고 힘이 되어 주었던 가족들과 멀리서도 힘찬 응원을 아끼지 않았던 친척들, 특히 영문초록에 큰 도움을 주신 작은 외숙모, 정말 감사해요! 그리고 친구들, 선배 교사분들, 논문 수정에 도움을 준 크리스틴 양을 비롯하여 제 곁에 함께 했던 모든 분들의 기를 받은 덕분에 부족하나마 석사 학위논문을 마무리 할 수 있었습니다.

지난 2년 간 다시 한 번, 사람은 혼자 살아가는 것이 아니라 더불어 살아가는 것임을 깨달았습니다. 앞으로도 제자들에게 부끄럽지 않은 교사가 되기 위해 노력하고, 앞에서 끌어주시고 뒤에서 밀어주시는 많은 소중한 분들에게 성장하는 모습을 보여줄 수 있는 아미가 되겠습니다. 감사합니다.