교육학석사학위논문

확률 문제를 해결하는 수학 영재 수업에서의 담론에 관한 연구

2014년 2월

서울대학교 대학원

수학교육과

구 나 영

확률 문제를 해결하는 수학 영재 수업에서의 담론에 관한 연구

지도교수 이 경 화

이 논문을 교육학석사학위논문으로 제출함

2013년 10월

서울대학교 대학원

수학교육과

구 나 영

구나영의 석사학위논문을 인준함

2013년 12월

위 원 장 ______________ (인)

부 위 원 장 ______________ (인)

위 원 ______________ (인)

국문초록

확률 문제를 해결하는 수학 영재 수업에서의 담론에 관한 연구

수학 영재에게 확률 분야의 모호한 현상을 제공하고 비형식적 추론에 근거해 추측과 정당화하는 경험은 유의미하다. 토론은 수학 영재 수업을 위한 좋은 틀로 강조되고, 토론 중 나타나는 담론은 그 질과 역할이 다르므로 토론의 유의미성을 이해하기 위해서는 실제 토론 과정에서의 담론을 분석하는 것이 필요하다. 이로부터 교사들은 수학 영재의 확률 문제해결 과정에서 담론에 대해 깊은 이해를 해야 한다.

본 논문에서는 토론 중심의 수학 영재 수업 중 확률 문제해결 과정에서 먼저 문제해결에 기여한 상호작용의 양상과 담론의 특징은 무엇인지, 다음으로 확률 문제해결 과정에서 나타난 담론적 갈등은 문제해결에 어떻게 작용하는지를 살펴보았다. 이를 위해 확률 교수학습과 사회적 구성주의에 관한 선행 연구들을 분석하고 수업의 틀을 갖추었다. 그 후 담론을 촉진할 수 있는 과제를 설계해 토론 중심의 수학 영재 수업을 실시하였으며, 이를 Cobb과 그의 동료들의 발생적 접근, 인지에 대한 의사소통적 접근, 교실 상호작용 및 담론에 관한 연구를 바탕으로 분석하였다.

수학 영재들은 확률 문제를 해결하는 동안 모호하고 불완전한 풀이를 반성하고 수정하며, 동료의 사고를 유도해 생산적인 기여를 하는 모습이 나타났다. 또한 확률 영역에 내재된 특수성을 반영하는 메타 규칙의 차이에 따라 담론적 갈등이 발생하였다. 담론적 갈등의 해결은 그 세계에 대한 다른 사람의 생각을 이해하는 것으로부터 출발한다는 것이 확인되었다. 확률 문제해결에 기여한 담론에서는 교사의 개방형 질문이나 분석, 일반화, 추측을 유도하는 질문, 이전 발언에 대한 보충 질문과 수학 영재의 수학적 정당화 및 추론과 관련된 발언이 자주 나타나는 경향이 있었다. 이러한 연구 결과를 바탕으로 후속 연구 방향에 대하여 제안하였다.

주요어 : 수학 영재, 확률, 문제해결, 담론, 담론적 갈등
학번 : 2012-21409

목 차

표 목 차

그 림 목 차

I. 서론

1. 연구의 목적 및 필요성

나귀수(1999)에 의하면 수학 영재[1]교육은 크게 두 관점에서 의미를 갖는다. 첫째, 수학 영재 개인적 측면에서 갖는 의미로써, 수학 영재들이 가지고 있는 잠재적인 수학적 능력을 발휘할 수 있도록 도와줌으로써 학생들 각자의 수준에 맞는 수학적 힘을 양성할 수 있도록 하는 것이다. 둘째, 사회적 측면에서 갖는 의미로써, 미래 사회를 이끌어 갈 주역인 수학 영재들에게 내실 있는 수학교육을 제공함으로써 선도적인 과학・기술 문명이 싹틀 수 있는 토대를 마련하는 것이다.

개인적 측면에서의 당위성뿐만 아니라 사회적 측면의 목표를 위해 영재교육의 중요성이 강조되고 있다. 우리나라에서는 각 지역별로 영재교육원을 운영하고, 과학영재학교를 설립해 적극 지원하며, 관심 있는 교사들이 연구회를 조직해 교수학습 자료를 개발하고 보급하려는 노력이 이루어지고 있다. 이에 영재교육을 위한 다양한 연구가 진행되고 있는데, 특히 수학 분야에서의 연구를 범주화하면 다음과 같다.

수학 영재에 관한 연구로는 첫째, 수학 영재의 판별 및 선발에 관한 연구(김홍원, 김명숙, 송상헌, 1996; 송상헌, 1998; 이경화, 2003a; 황동주, 2005; 조석희, 황동주, 2007), 둘째, 수학 영재를 위한 교수학습 자료 개발 및 교수 방안에 관한 연구(김홍원, 2003; 박은영, 강이철, 2003; 이경화, 2003b; 서동엽, 2005; 최종헌, 송상헌, 2005; 이종희, 김기연, 2008; 김우현, 2009; Koshy, Ernest & Casey, 2009; 류창우, 송영무, 2010; 이윤영,

---

1) 본 논문에서의 수학 영재는 김홍원, 김명숙, 송상헌(1996), 송상헌(1998), 이경화(2001), Renzulli(2003; 이종희, 김기연, 2008, 재인용), 최병훈, 이경화(2007)의 연구에 기반하여, 일반 아동에 비해 지적 능력, 과제 집착력, 창의성이 높은 성취 수준을 갖고 있으며 수학 문제를 창의적으로 해결할 수 있는 잠재적 가능성을 가진 자로서 별도의 판별 절차를 거쳐 선발 되어 영재 교육을 받은 자이다.

송상헌, 2013), 셋째, 수학 영재의 인지적·정의적 특성을 알기 위한 연구(Krutetskii, 1976; 권오남, 방승진, 송상헌, 1999; 최영기, 도종훈, 2004; 김지원, 송상헌, 2004; 송상헌, 허지연, 임재훈, 2006; 송상헌, 장혜원, 정영옥, 2006; 신인선, 김시명, 2006; 류현아, 정영옥, 송상헌, 2007; 홍진곤, 강은주, 2009; 김우현, 2009; 나귀수, 2011; 황동주, 이강섭, 2011)가 있다. 이와 같은 연구들은 수학 영재의 선발 방법과 선발 후 교수학습을 위한 자료 개발 및 그의 적용을 통해 나타나는 수학 영재들의 특성에 초점을 두고 있다(최병훈, 이경화, 2007).

선행 연구에서는 수학 영재들의 인지적·정의적 특성의 발현을 위해 적절한 교수학습 방법과 교육 환경을 제공해야함을 지적한다. 이에 따라 다수의 연구에서는 사회적 구성주의에 기반하여 수학 영재를 위한 수업에서 토론[2)]이 활발히 일어나는 환경을 조성해야함을 강조하고 있다(김홍원, 2003; Koshy 외, 2009; 서동엽, 2005; Renzulli, 1977; 박은영, 강이철, 2003; 김우현, 2009).

선행 연구에서는 수학 영재 수업을 위한 좋은 틀로 토론이 활발히 일어나는 수업을 제시하고, 이를 적용하여 학생들의 사고를 진전시키는 데 토론이 효과적임을 보인다. 특히 문제를 해결하는 과정이나 추측과 정당화를 하는 과정에서 학생들이 발표와 토론을 진행하면서 다른 학생들의 의견과 교사(연구자)의 발문을 듣고 사고가 어떻게 바뀌었는지를 확인하고 있다. 그러나 교실 상호작용 및 담론에 관한 많은 연구에서는 활발한 담론이 반드시 유의미한 수학 학습을 보장하지는 않음을 지적한다(Sfard & Kieran, 2001; Kieran, 2001; Empson, 2003; Soter, Wilkinson, Murphy, Rudge, Reninger & Edwards, 2008; Imm & Stylianou, 2012).

토론이 장려되는 수업에서는 교사와 학생 사이의 담론이 지식 구성과 수학적 발달의 가장 핵심적인 수단이며, 수업이 진행됨에 따라 교사와 학생은 역동적으로 상호작용하여 그들의 담론은 점차 변화한다. 선행 연구에서는 수학 영재 수업에서 토론의 유의미성에 대해 논하지만 실제 토

2) 본 논문에서의 토론(discussion)은 Cobb, Boufi, McClain & Whitenack(1997)의 연구에 기반하여, 수업 시간에 학생들이 의사소통 과정에 참여해 다양한 의견을 제시하는, 상호작용이 일어나는 수업 상황이다.

론의 과정에서 드러나는 담론[3], 특히 문제해결 과정에 기여하는 상호작용의 양상과 담론의 특징에 초점을 맞춘 연구는 많지 않다.

또한 선행 연구에서는 확률 교육이 확률 문제를 해결하는 데에 필요한 확률의 수학적 정의와 공식을 강조하고, 형식적인 계산 능력에 초점을 맞추고 있음을 지적한다(이경화, 1996; Castro, 1998; 이정연, 2005; Jones, Langrall & Mooney, 2007; 이동환, 이경화, 2010). 특히 다수의 연구자들은 확률이 수학적 개념으로 받아들여지고 활용되는 동안 많은 논쟁을 일으켰고, 확률적 사고는 논리적 사고와는 달리 주관적인 측면과 객관적인 측면이 혼합되어 있으며, 반직관적이고 오류 가능성이 높다는 측면에서 수학적 사고와는 다르다고 주장한다(우정호, 1998; Shaughnessy, 1992, 김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤, 2006, 재인용; Watson, Collis & Moritz, 1997; Jones, Langrall, Thornton & Mogill, 1999; 이경화, 2010). 또한 기존 연구자들은 수학 영재에게 모호한 현상을 제공하여 비형식적 추론에 근거해 추측하고 정당화하는 경험은 수학 영재 교육의 좋은 모델이 될 수 있음을 강조한다(Byers, 2007; 이경화, 2010; 이동환, 이경화, 2010; 이정연, 이경화, 2010; 오택근, 이경화, 2012).

따라서 본 논문에서는 토론 중심의 수학 영재 수업에서 관찰되는 상호작용과 담론에 초점을 맞춰 연구한다. 특히 수학 영재에게 확률의 현상을 제공하는 것은 좋은 모델이 될 수 있다는 점과 토론 과정에서 드러나는 담론은 그 질(quality)과 역할이 다르다는 점에 주목한다. 이에 확률 문제해결 과정에서 문제해결에 기여한 상호작용의 양상과 담론의 특징을 살펴보도록 한다. 또한 토론 수업의 핵심 요소는 발생하는 담론들 사이에 갈등이 발생하고 사회적 합의 과정을 거쳐 갈등이 해결되며 수학화가 이루어지는 것이다. 이에 따라 기존 연구에서 학습에 필수적이라 언급되는 현재 담론과 새로운 담론 사이의 담론적 갈등(discursive conflict; Cobb, 2009), 즉 현재 담론에서 지금까지 적용되었던 규칙과는 다른 규칙을 따라야 하는 새로운 담론이 등장하였을 때 발생하는 담론적 갈등

3) 본 논문에서의 담론(discourse)는 Sfard(2008)의 연구에 기반하여, 일부 다른 사람들을 배제하고, 어떤 개인들을 하나로 모으는 다른 형태의 의사소통이다. 토론을 통한 수업에서 나타나는 의사소통을 담론이라 규정한다.

(Sfard, 2007)을 확률 문제해결 과정에서 분석한다.

이에 따라 전통적인 확률 교육의 한계를 극복하고자 한 기존 연구(Castro, 1998; Jones 외, 1999)와 사회적 구성주의의 지향과 그 맥락을 같이 하는 Cobb, Yackel, Wood(1993)의 연구에 기반하여 수업의 틀을 갖추고, 담론을 촉진할 수 있는 과제를 설계해 확률 문제해결 과정에서 문제해결에 기여한 상호작용의 양상과 담론의 특징, 확률 문제해결 과정에서 나타난 담론적 갈등은 문제해결에 어떻게 작용하는가에 대해 고찰해 보고자 한다. 본 연구의 목적은 확률 문제를 해결하는 수학 영재들의 토론 과정에서 문제해결에 기여하는 상호작용과 담론의 양상을 살펴보고, 담론적 갈등이 문제해결에 어떻게 작용하는지 확인하는 것이다. 이로부터 확률을 지도하는 교사들에게 교실 상호작용 양상에 대한 정보, 확률 지식의 교수학적 변환, 교수학습에 대한 시사점을 제공하고자 한다.

이상의 연구 문제를 중심으로 본 논문에서 고찰한 내용과 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어 Ⅱ장에서는 수학 영재, 발생적 접근(emergent perspective), 인지에 대한 의사소통적 접근, 교실 상호작용 및 담론에 관한 연구에 대해 문헌 연구를 하였다. 먼저 기존 수학 영재에 관한 연구에서는 수학 영재의 정의에 대해 다양한 연구자의 의견을 살펴보고, 본 연구에서의 수학 영재의 정의에 대해 규정한다. 그리고 수학 영재의 사고 특성을 6가지로 정리해 간략히 살펴본다. 다음으로는 교실 참여 구조를 서술하고 교실 수학 미시문화를 분석하는데 도움을 제공하는 Cobb과 그의 동료들의 발생적 접근에 관한 연구에 대해 살펴본다. 발생적 접근의 기본 전제에 대해 살펴보고, 그들이 바라보는 수학 학습, 교실의 사회적 규범과 사회수학적 규범, 그리고 교실의 수학적 관행에 대해 확인한다. 이후 인지에 대한 의사소통적 접근, 특히 Sfard의 이론을 중심으로 그녀가 수학과 수학 학습을 어떻게 바라보는지, 메타 수준의 학습을 위한 담론적 갈등은 무엇인지 살펴보기로 한다. 마지막으로 교실 상호작용 및 담론에 관한 연구에서는 활발한 상호작용의 필요성을 강조한 선행 연구를 교실 문화의 개선, 교사의 역할 변화, 학생의 역할 변화로 나누어 어떻게 상호작용을 촉진시켜야하는지에 관해 살펴본다. 그리

고 교실 상호작용 및 담론의 특징에 관한 연구와 상호작용의 패턴에 관한 연구에 대해서도 살펴본다.

Ⅲ장에서는 연구 방법에 대해 논한다. 먼저 본 연구에서 택한 연구 방법인 사례 연구의 의미와 특징에 대해 살펴보고, 연구 대상인 교사의 지향(orientation)에 대해 분석한다. 또한 연구가 진행되는 현장에 대해 간략히 기술하고, 연구 대상인 수학 영재들의 특성을 살펴본다. 이후 토론을 촉진하기 위한 수업 설계에 대해 소개하고, 연구 절차에 대해 정리한다. 마지막으로 자료 수집 절차와 수업에서 다룬 주요 내용 요소를 소개하고 담론을 생생하게 기술하는 귀납적 분석의 틀을 살펴본다. 특히 본 연구에서 주로 분석하고자 하는 토론 과정 중 교사와 담론의 특징의 의미와 예를 살펴본다.

Ⅳ장에서는 각 연구 문제의 결과를 분석한다. 먼저 확률 문제해결 과정에서 문제해결에 기여한 상호작용의 양상과 담론의 특징을 살펴보고자 한 연구 문제 1의 결과는 모호하고 불완전한 풀이를 반성하고 수정하기와 사고를 유도하고 생산적인 기여를 하는 것으로 나누어 분석한다. 담론을 제시하고 담론에 대한 상세한 기술을 하며 상호작용 양상을 관찰하고, 앞서 소개한 자료 분석 틀에 따라 담론의 특징을 분석한다. 다음으로 확률 문제해결 과정에서 나타난 담론적 갈등은 문제해결에 어떻게 작용하는지를 살펴보고자 한 연구 문제 2의 결과는 확률 문제해결 과정에서 나타난 담론적 갈등의 양상을 분석하는 것과 담론적 갈등의 해결 여부와 그 양상을 분석하는 것으로 나누어 기술한다. 담론적 갈등의 양상의 분석은 귀납적 분석을 하며, 담론적 갈등의 해결 여부와 그 양상의 분석은 연구 문제 1에서 적용한 자료 분석 틀에 따라 수행한다.

Ⅴ장에서는 본 연구의 결과로부터 기존 연구와의 연계를 통해 도출된 논의와 시사점에 대해 살펴보고, 연구 결과를 요약한 후 연구의 제한점 및 후속 연구 방향에 대해 제안한다.

2. 연구 문제와 연구의 중요성

위에서 언급한 바와 같이 본 논문에서는 토론 중심의 수학 영재 수업 중 확률 과제의 문제해결 과정에서 먼저 문제해결에 기여한 상호작용의 양상과 담론의 특징은 무엇인지, 다음으로 확률 문제해결 과정에서 나타난 담론적 갈등은 문제해결에 기여한다면 어떻게 해결되는지, 기여하지 못한다면 그 양상은 어떠한지 살펴볼 것이다. 이를 위한 연구 문제를 다음과 같이 기술할 수 있다.

2.1 확률 문제해결 과정에서 문제해결에 기여한 상호작용의 양상과 담론의 특징은 무엇인가?

2.2 확률 문제해결 과정에서 나타난 담론적 갈등은 문제해결에 어떻게 작용하는가?

2.2.1 문제해결에 기여한 담론적 갈등은 어떻게 해결되는가?

2.2.2 담론적 갈등이 문제해결에 기여하지 못한다면 그 양상은 어떠한가?

본 연구는 수학 영재를 위한 수업에서 좋은 틀로 강조된 토론 중심 수업 중 확률 문제해결 사례를 포착하여, 문제해결에 기여한 상호작용과 담론을 분석하고 담론의 역할을 고찰함으로써 기존의 연구에 새로운 의미를 부여할 수 있다. 또한 교사와 학생 간 상호작용의 역동적인 특성을 부각시켜 확률 문제해결 과정에서 나타난 갈등이 어떻게 문제해결에 기여하는지, 혹은 기여하지 못하는지를 관찰함으로써 토론 중심 수학 영재 수업에서의 학습의 양상을 관찰할 수 있다는 점에 의의가 있다. 이로부터 확률을 지도하는 교사들에게 교실 상호작용 양상에 대한 정보, 확률 지식의 교수학적 변환, 교수학습에 대한 시사점을 제공하고자 한다.

Ⅱ. 문헌 연구

여기에서는 본 논문의 연구 대상인 수학 영재에 관한 연구에 대해 첫 번째로 살펴본다. 특히 기존 수학 영재에 관한 연구에서 아직까지 합의된 정의는 없지만 수학 영재의 정의에 대해 다양한 연구자의 의견을 살펴보고, 본 연구에서의 수학 영재의 정의에 대해 규정한다. 그리고 수학 영재의 사고 특성을 6가지로 정리해 간략히 살펴본다. 두 번째로는 교실 참여 구조를 서술하고 교실 수학 미시문화를 분석하는데 도움을 제공하는 Cobb과 그의 동료들의 발생적 접근에 관한 연구에 대해 살펴본다. 발생적 접근의 기본 전제에 대해 살펴보고, 그들이 바라보는 수학 학습, 교실의 사회적 규범과 사회수학적 규범, 그리고 교실의 수학적 관행에 대해 확인한다. 세 번째로는 인지에 대한 의사소통적 접근, 특히 Sfard의 이론을 중심으로 그녀가 수학과 수학 학습을 어떻게 바라보는지, 메타 수준의 학습을 위한 담론적 갈등은 무엇인지 살펴보기로 한다. 마지막으로는 교실 상호작용에 관한 연구에서는 활발한 상호작용의 필요성을 강조한 선행 연구를 교실 문화의 개선, 교사의 역할 변화, 학생의 역할 변화로 나누어 어떻게 상호작용을 촉진시켜야하는지에 관해 살펴본다. 그리고 교실 상호작용 및 담론의 특징에 관한 연구, 상호작용의 패턴에 관한 연구에 대해서도 살펴본다.

1. 수학 영재에 관한 연구

1.1. 수학 영재의 정의

수학 영재 교육에 있어 가장 먼저 부딪히는 문제는 수학 영재를 어떻게 정의할 것이며, 어떻게 수학 영재를 판별한 것인가의 문제이다. 기존 수학 영재에 관한 연구에서는 수학 영재의 정의에 대해 많은 의견이 있었으나 아직까지 합의된 정의는 없으며, 사회의 가치관이나 문화, 시대

의 흐름에 따라 수학 영재의 정의는 수정을 거듭하고 있다. 그러나 수학 영재에 대해 조작적 정의를 규명하는 것은 수학 영재의 판별 뿐만 아니라 수학 영재를 위한 교수학습 자료 개발 및 교수 방안의 개발, 수학 영재의 인지적·정의적 특성을 파악하기 위한 안목을 기르기 위해 반드시 필요하다.

송상헌(1998)은 자기 나이 또래에서 이미 탁월한 성취를 보이고 있으며, 특별한 재능이 있다고 인정된 재능아와 재능아는 물론 아직 성취를 보이지 않았지만 그러한 성취를 보일 가능성을 지닌 영재아를 구분하였다. 이에 따라 그는 수학 영재란 선천적으로 타고난 소질과 적성 및 후천적으로 학습한 수학에 대한 기초 지식을 배경으로 하여 수학적인 문제를 해결하고자 하는 지적, 정의적인 행동 특성이 수학적 사고 기능과 긍정적으로 조화롭게 작용하여 수학적 과제를 창의적으로 수행할 수 있는 잠재적 가능성을 가진 자라고 하였다.

이경화(2001)는 수학 영재와 수학 우수아를 구분하여 정의하였다. 수학 영재를 이미 상당 수준의 수학적 사고력 또는 창의력, 과제집착력, 문제해결력 등을 갖추고 있으며 별도의 판별 절차를 통하여 소수의 아동으로, 수학 우수아를 해당 학급에서 비교적 수학 성취도가 높은 아동들, 수학에 관심을 가지며 수학 학습에 비교적 성공적이고 적극적인 아동으로 정의한다. 이는 수학 우수아를 수학 영재보다 넓은 범위의 의미로 고려하였으며, 별도의 판별 절차를 통하여 영재 교육을 받는 이가 수학 영재임을 시사한다.

김홍원, 김명숙, 방승진, 황동주(1997)는 광범한 문헌 연구를 종합하여 수학 영재를 정의하고 있는데, 수학 영재는 수학 영역에서 뛰어난 업적을 이루었거나 이룰 것으로 예상되는 사람으로 수학적 사고 능력, 수학적 과제 집착력, 수학적 창의성, 배경 지식의 요인에서 평균 이상의 높은 능력을 지닌 아동을 말한다(나귀수, 1999). 특히 김홍원, 김명숙, 송상헌(1996)은 수학 영재에게 정규 학교 프로그램 이상의 특별한 교육 프로그램과 서비스가 필요하다는 점을 강조하였다.

Renzulli와 Reis(2003)은 영재성의 세 요소인 평균 이상의 능력, 창의성,

과제집착력으로 영재성 판단을 시도하였다. 특히 인간 능력과 그 안에 포함되어 있는 자신의 산출물을 독창적, 유목적적으로 고안하고 개발하여 청중에게 표현해낼 수 있는 능력으로, 창의적 생산력과 같은 의미를 지니는 것으로 제시한 Renzulli(2004)의 창의적-생산력 영재성 (creative-productive giftedness) 정의는 창의성을 영재성의 바탕이 되는 핵심적인 특성으로 간주했다는 점을 시사한다(이종희, 김기연, 2008). 또한 이는 Sheffield(1994)의 수학적 영재성을 정의하는데 수학적 창의성이 핵심이라는 주장과도 연결된다고 볼 수 있다.

지금까지 수학 영재의 정의를 살펴본 바에 의하면 수학 영재를 “일반 아동에 비해 지적 능력, 과제 집착력, 창의성이 높은 성취 수준을 갖고 있으며 수학 문제를 창의적으로 해결할 수 있는 잠재적 가능성을 가진 자로서 별도의 판별 절차를 거쳐 선발 되어 영재 교육을 받은 자”라고 할 수 있다.

1.2. 수학 영재의 사고 특성

김홍원 외(1996)은 수학적 문제를 이해하고 해결하는데 기본적으로 요구되는 수학 영재의 사고 특성으로 직관적 통찰 능력, 정보의 조직화 능력, 공간화・시각화 능력, 수학적 추상화 능력, 수학적 추론 능력(연역적 사고 능력, 귀납적 사고 능력), 일반화 및 적용 능력, 반성적 사고 능력을 제시한다. 이는 수학 창의적 문제해결 능력과도 관련된 인지적 요인이다.

Krutetskii(1976)는 수학 영재의 특성으로 형식화된 인식과 문제의 형식적인 이해, 양적이고 공간적 관계에 대한 논리적 사고와 기호를 이용한 사고 능력, 수학적 대상, 관계 그리고 연산에 대한 신속하고 광범위한 일반화, 정신적(암산) 과정의 유연성, 수학적 추론 간략화와 단축된 구조를 이용한 사고 능력, 해의 명확성, 단순성, 경제성, 합리성 추구에 대한 노력, 수학적 추론의 가역성, 정신적(암산) 과정의 신속함과 자유로운 재구성, 수학적 관계, 특성, 주장, 증명, 해법 및 문제해결의 원리에 대한

일반화 기억 등과 그 외에도 특별히 수학적 성향이 있음을 밝혔다(홍진곤, 강은주, 2009: p.567).

이러한 선행 연구를 종합하여 수학 영재의 사고 특성을 여섯 가지로 정리하면 다음과 같다. 수학 영재의 사고 특성으로는 첫째, 문제에 대한 직관적 통찰, 둘째, 정보의 조직화와 단축, 셋째, 시각적 추론, 넷째, 일반화 및 귀납적 추론, 다섯째, 형식적 조작과 수학적 추상화, 여섯째, 반성적 사고가 있다.

1.2.1. 문제에 대한 직관적 통찰

직관은 분석적, 논리적 추론 과정 또는 형식적인 정당화 과정을 거치지 않고 즉각적으로 문제해결 아이디어나 그 결과를 떠올리는 사고이다. 우정호(1998)에 따르면, 직관적 사고는 수학의 이해에 중요한 역할을 하며, 행동적인 참여와 실제적인 문제 상황에 몰입하여 해결하는 과정에서 직관적 표상의 구성과 통찰이 가능해진다.

선행 연구에서는 번뜩이는 통찰력의 경험(Wormald, 1998), 문제해결에서의 통찰(Keating, 1974), 새로운 자료의 빠른 파악, 자료를 체계화하는 능력(Greenes, 1981) 등을 수학 영재의 사고 특성으로 다루고 있다(홍진곤, 강은주, 2009; p.567).

1.2.2. 정보의 조직화와 단축

남승인(1998)에 의하면 수학 영재는 전통적인 학습 내용을 보다 빨리 숙달하며, 일반적 수준의 문제해결에서 적용되는 알고리즘을 빨리 일반화하고, 문제해결 과정에서 중간 단계를 생략하는 경향이 있고, 수학적 추론 과정을 단축할 수 있다.

선행 연구에서는 해의 명확성, 단순성, 경제성, 합리성 추구에 대한 노력, 정신적(암산) 과정의 신속함과 자유로운 재구성(Krutetskii, 1976), 뛰어난 정보처리 속도(Stanely, 1984; 홍진곤, 강은주, 2009, 재인용)를 수학

영재의 사고 특성으로 다루고 있다.

1.2.3. 시각적 추론

시각화 능력은 그래프, 차트, 그림 등에 사용된 시각적 정보를 읽고 이해하고 해석하는 능력과 시각적으로 주어지지 않은 정보를 시각적으로 표현하거나 나타내는 시각적 처리 능력으로 구별된다(홍진곤, 강은주, 2009).

여러 연구에서는 수학 영재가 시각적 추론을 하려는 특성이 있음을 지적하였는데, 양적이고 공간적 관계에 대한 논리적 사고와 기호를 이용한 사고 능력(Krutetskii, 1976), 주어진 도형을 생생하게 머릿속으로 상상하는 능력(Kolmogorov, 2004; 홍진곤, 강은주, 2009, 재인용), 도표, 표, 그래프를 통하여 현재의 정보를 표현하기 좋아하는 것(Sousa, 2003) 등이 그러한 특성이라 할 수 있다.

1.2.4. 일반화 및 귀납적 추론

김남희 외(2006)에 따르면 일반화는 수학적 사고에서 중요한 의미를 가진다. 귀납적 추론이란 이미 알고 있는 정보로부터 그들 사이에 성립하는 귀납적 패턴을 통해 일반화된 명제를 만드는 추론을 의미한다.

Krutetskii(1976)에 의하면 수학 영재는 정보 처리 과정에서의 수학적 대상, 관계 그리고 연산에 대한 신속하고 광범위한 일반화뿐만 아니라 정보 파지 과정에서도 수학적 관계, 유형적 특성, 논증의 골격, 문제 풀이 방법, 접근 방법 등에 대한 일반화된 기억을 한다. 이 외의 여러 연구에서는 문제를 해결할 때 규칙성과 관계를 발견하기를 즐겨하는 능력(남승인, 1998), 일반화 및 적용 능력(김홍원 외, 1996) 등을 수학 영재의 사고 특성으로 다루고 있다.

1.2.5. 형식적 조작과 수학적 추상화

수학 영재는 직관적 통찰과 정보의 단축, 시각적 추론, 일반화 능력 이외에도 수와 공간적 관계에 대한 논리적인 사고 능력을 가지고 있다. 또한 수학 영재는 가설·연역적 사고를 통해 현실적인 것에 얽매이지 않고 모든 가능한 가설을 설정하며, 이 가설을 다시 현실에 비추어 점검할 수 있다.

여러 연구에서는 수학적 개념, 과정과 해를 언어적으로 잘 표현하는 능력 및 효과적인 추론 능력(Feldhusen, Hoover & Sayler, 1990), 양적이고 공간적 관계에 대한 논리적 사고와 기호를 이용한 사고 능력(Krutetskii, 1976), 대수적 조작을 수행하는 능력, 즉 복잡한 문자식을 변형하고 일반적인 방법으로 접근하는 능력(Kolmogorov, 2004), 변수의 분리와 조절의 형식적 조작, 추상적 사고력(Keating, 1974) 등을 수학 영재의 사고 특성으로 다루고 있다(홍진곤, 강은주, 2009).

1.2.6. 반성적 사고

수학은 자신이나 다른 사람의 실제적 정신적인 수학적 활동을 반성하는 것이며, 그렇게 하는 것은 무엇보다도 중요한 수학적 사고 태도이다(우정호, 1998). 수학 영재는 수학적 사고 능력을 갖추고 있으며, 문제 및 학습한 지식에 관해 통찰을 할 수 있고 이로부터 학습 과정의 반성을 거쳐 점진적으로 형식화하는 능력을 갖고 있다.

선행 연구에서는 수학적 관계, 특성, 주장, 증명, 해법 및 문제해결의 원리에 대한 일반화된 기억(Krutetskii, 1976), 건설적인 목적을 위하여 비판과 평가를 자주하고 즐기는 능력 및 독서, 토론, 언어 학습을 하고 싶어하는 능력(송상헌, 1998), 하나의 문제를 해결하기 위해 다양한 방법을 찾는 능력(Feldhusen 외, 1990) 등을 수학 영재의 사고 특성으로 언급하고 있다.

2. 발생적 접근에 관한 연구

2.1. 발생적 접근에서의 수학 학습

수학 교수학습에 관한 관점은 구성주의적 관점(constructive perspective)과 사회학적 관점(social perspective)으로 구분할 수 있다. 구성주의적 관점에서는 개별 학생들이 교실에서의 공유된 활동에 참여하고, 학생들이 공통된 과정으로의 발달에 기여하는 것으로서의 수학 교수학습을 바라본다. 사회학적 관점에서는 학습 공동체로서의 교실에서 규범이 되는 행동, 추론, 논증의 방법 등이 형성되고 조정되는 상호작용적 또는 사회적 본질을 강조하는 것으로서 수학 교수학습을 바라본다. Cobb과 그의 동료들에 의하면, 수학 교수학습에 관한 구성주의적 관점과 사회학적 관점은 학생들의 학습 과정을 설명하는데 있어서 상호보완성을 가진다는 측면에서 서로 조정된다(Cobb, 1994; Cobb & Bauersfeld, 1995; Cobb & Bowers, 1999; 방정숙, 2001, 재인용). 이로부터 Cobb과 그의 동료들은 구성주의적 관점과 사회학적 관점을 실용적으로 조정해 자신들의 이론을 발생적 관점(emergent perspective)라 명명한다. 발생적 관점은 수학 교수학습에 관한 사회적학 관점과 인지적(cognitive) 관점을 조정하려는 겸손한 시도에서 출발하였으며, 이는 교사와 학생의 조율된 행동으로부터 발생하는(그리고 계속적으로 재생산되는) 교실의 사회적 맥락 또는 소집단 문화(microculture)를 강조한다(Yackel, Gravemeijer & Sfard, 2011).

이로부터 그들은 수학 학습을 개인의 능동적인 구성 과정과 문화화(enculturation)과정으로 간주한다. 구성주의적 관점에서는 학습 과정에서 드러나는 사회적 양상의 본질을 설명하지 못하고, 사회학적 관점에서는 개별 학생의 수학적 이해를 완전하게 기술하지 못하기 때문에, 그들은 교실 참여 구조를 서술하고 교실 수학의 미시문화의 본질적 측면을 분석하기 위해 서로 다른 두 가지 이론을 연계하여 논의한다.

방정숙(2001)에 의하면 Cobb과 그의 동료들은 개별 학생의 수학적 개념에 관한 분석은 그 학생이 사회적 상호작용과 학습에 관련된 대화를 통한 교실문화 속에 참여한 양상에 관한 분석과 병행되어야 함을 강조한다. 특히 그들은 수학 교실의 과정에 참여하는 것은 수학을 사용하는 문화에 참여하는 것이라 보는 상징적 상호작용론으로부터(나미영, 2006), 개별 학생이 수학적 의미를 만드는 과정은 사회적 과정에 관여되며 의미를 협상하는 과정은 개인의 인지와 그 인지가 내재되어 있는 사회나 문화를 중재하는 대화과정 속에 나타난다고 강조한다. 또한 그들은 의미를 포함한 사회적 관례는 그 구성원의 해석 또는 설명과 함께 존재함을 전제하고, 이를 기술하기 위해 평범한 대화나 행동을 상세하게 분석하는 민속방법론으로부터 개인적인 양상과 집단적인 양상간의 관계를 설명하기 위해 반사성(reflexivity)의 개념을 활용한다(방정숙, 2001). 이는 개별 학생의 수학적 활동과 교실의 미시적 문화는 둘 다를 고려하지 않고서는 어느 하나로써 적절하게 기술될 수 없다는 것을 시사한다.

2.2. 발생적 접근에서의 교실의 사회적 규범과 사회수학적 규범

수학 학습을 개인의 능동적인 구성 과정과 문화화과정으로 간주하고 교사와 학생들이 해당 교실에 특정한 규칙성을 정립하고 계속되는 상호작용을 통해 재협상하는 과정을 분석하는데 초점을 둔 Cobb과 그의 동료들은 교실에서 개별, 집단의 수학적 활동과 학습을 분석하기 위한 틀을 <표 Ⅱ-1>와 같이 제시한다.

<표 Ⅱ-1> 교실에서 개별, 집단의 수학적 활동과 학습을 분석하기 위한 틀(Cobb & Yackel, 1996, p.177)

사회적 관점	심리적 관점
교실의 사회적 규범(classroom social norms)	자신과 타인의 역할, 학교에서 수학적 활동의 전반적인 본질에 관한 신념
사회수학적 규범(sociomathematical norms)	수학적 신념과 가치
교실의 수학적 관행(classroom mathematical practices)	수학적 개념과 활동

그들은 사회적인 관점으로부터 교실에서의 수학적 활동과 학습을 분석하기 위한 세 가지 주요 개념으로 교실의 사회적 규범, 사회수학적 규범, 교실의 수학적 관행을 제안하고 이에 대응되도록 심리적 관점으로부터 자신과 타인의 역할, 학교에서 수학적 활동의 전반적인 본질에 관한 신념, 수학적 신념과 가치, 수학적 개념과 활동을 제시한다.

교실의 사회적 규범은 수업의 참여 구조를 구성하는 특징이며 교실의 참여 구조를 서술하는데 도움이 된다. 교실의 사회적 규범은 공동체 혹은 교실 활동 속에 있는 규칙을 특성화하고, 교실 공동체의 일원으로서 교사와 학생들에 의해 확립되는 교실 활동에서의 규칙성을 보여준다(나미영, 2006, p.17). 교실의 사회적 규범의 예로는 교실 활동의 일반적인 패턴, 교사나 학생의 기대, 의무, 역할 등을 들 수 있다. 한편, 사회수학적 규범은 학생들의 수학 활동에 독특한, 전체수업 토론의 규범적인 양상(Cobb & Yackel, 1996)으로 분석의 초점이 수학 활동으로 옮겨갔다는 특징이 있다. 요약하면, 교실의 사회적 규범은 어떤 교과 영역에서도 적용되는 일반적인 개념인데 반해, 사회수학적 규범은 수학적 활동, 수학적 설명과 정당화에 관련된 규범이라 볼 수 있다.

학생중심의 수학교실문화에서 형성될 수 있는 일반적인 교실의 사회적 규범의 예는 학생들이 자기 자신의 문제해결방법을 창안하여 발표하고 정당화하는 것이다. 좀 더 특수한 상황을 예로 들자면, 전체 토론에 참

여하는 학생들이 이전에 발표된 해결 방법과는 ‘다른’ 아이디어를 제시할 것이라는 기대도 포함될 수 있다. 하지만, 하나의 해결 방법을 다른 해결 방법과 비교하여 볼 때, 무엇이 ‘수학적으로 다른’ 해결 방법을 만드는 지를 이해하는 것은 사회수학적 규범과 관련된다. 유사하게, 무엇이 한 교실 공동체내에서 수학적으로 받아들여질만한 설명인지에 대한 이해, 또는 수학적으로 정당화될 수 있는, 쉬운, 분명한, 효과적인, 또는 세련된 설명인지에 대한 이해는 사회수학적 규범의 예이다(Bowers, Cobb & McClain, 1999; Cobb, Gravemeijer, Yackel, McClain & Whitenack, 1997; 방정숙, 2004, 재인용).

Cobb과 Yackel(1996)에 의하면, 교실에서 교사는 교실의 사회적 규범의 재협상 과정을 시작, 안내, 조직하는 행동에서 권위를 나타낸다. 학생들 역시 교실의 사회적 규범이 발달하도록 하는 과정에서 나름대로 역할을 담당한다. 학생들은 자신들과 다른 사람들의 역할, 학교에서 수학의 일반적인 성질에 대한 그들의 개인적 신념을 재조직한다. 그들의 신념이 교실의 사회적 규범과 연결되어 있다는 점에서, 교실의 사회적 규범이 정립될 때 교사는 학생들이 이런 신념을 재조직할 수 있도록 지원한다고 볼 수 있다.

Cobb과 Yackel은 학생들이 교실 활동에 참여하면서 어떻게 수학에서 지적 자율성(intellectual autonomy)을 발달시키는지 설명하는데 있어서 사회수학적 규범을 중요한 개념으로 부각시켰다(방정숙, 2004, p.285). 그 후 많은 후속 연구에서는 사회수학적 규범의 차이로부터 학생들의 지적 자율성에 놀라운 차이가 있다는 점을 밝혀냈다. 탐구학습 중심의 수업에 참여한 학생들은 무엇이 수학적으로 정당한 방법으로 간주되는지, 무엇이 수학적으로 다른 해결 전략으로 간주되는지에 관련된 사회수학적 규범의 차이로 인해 전형적인 수업을 들은 학생들에 비해 지적 자율성이 더 높은 것으로 나타났다. 사회수학적 규범에 관한 연구는 학교급별, 내용 영역별, 내용 수준을 뛰어넘어 확대되었는데 이는 수학 교수학습, 특히 탐구 중심 수업이나 수학교육개혁에 기초한 교실 수업을 분석하는데 유용하다는 것을 시사한다.

2.3. 발생적 접근에서의 사회수학적 규범과 교실의 수학적 관행

앞서 교실의 사회적 규범은 어떤 교과 영역에서도 적용되는 일반적인 개념인데 반해, 사회수학적 규범은 수학적 활동, 수학적 설명과 정당화에 관련된 규범임을 살펴봤다. 특히 사회수학적 규범은 학생들의 수학 활동에 독특한, 전체 수업 토론의 규범적인 양상으로 개별 학생뿐만 아니라 교실에서의 집단적인 의사소통 양식과 상호작용을 분석하는데 유용하다. 그럼에도 불구하고 사회수학적 규범에 관한 사전 연구를 살펴보면, 일반적인 교실의 사회적 규범과 함께 학생들의 수학적 발달 정도를 분석하기 위한 일종의 무대 또는 배경으로써 비교적 간단하게 기술되는 경향이 있다(방정숙, 2004, p.286). 따라서 교실의 수학적 관행은 개별 학생뿐만 아니라 교실 공동체의 수학적 발달을 말할 수 있도록 하는 현실적인 맥락에 의해 등장했다(나미영, 20006, p.19). 사회수학적 규범과 교실의 수학적 관행은 교실의 사회적 규범과 달리 수학에 관련되기 때문에 함께 살펴본다.

Cobb과 Yackel(1996)에 의하면, 사회수학적 규범의 분석은 교사가 교실 공동체 내에서 지적 자율성을 발달시키는 과정을 이해하는데 유용하다. Cobb(1999)을 따르면, 사회수학적 규범은 무엇이 수학적으로 다른, 정교화된, 효율적인 풀이인지, 무엇이 수학적으로 받아들여질만한 설명인지에 관한 일반적인 판단 기준과 관련되며 특별히 수학적 내용 또는 주제에 제한 받지 않는다. 예를 들어, 무엇이 수학적으로 명료한 설명인가에 관한 기준은 초등학교 수준의 단순한 계산 문제에도 적용될 수 있고, 상대적으로 복잡한 수학적 아이디어에 대해서 토의할 때에도 적용될 수 있겠다(방정숙, 2004, p.286).

이와 달리 교실의 수학적 관행은 학생들의 발달을 위한 즉각적이고 직접적인 상황을 구성해 주는 것으로써 토론과 활동에 관련하여 특정한 수학적 내용을 다룬다(Bowers 외, 1999; Stephan, 1998; 방정숙, 2004, 재인용). 교실의 수학적 관행은 학생들이 교실 공동체에 참여하고 학습해가는 사회적 상호작용을 자세히 기록한다는 점에서 즉각적이고, 국소적인

상황을 분석하는데 사용될 것으로 보인다. Cobb(1999)에 의하면 교실의 수학적 관행은 특정 수학적 아이디어를 토론하는 중 형성되며 공유된 것으로 간주된 추론의, 논증의, 기호화의 방법에 초점을 두고 교실의 수학적 활동과 학습을 분석하는 것이다.

이상의 논의로부터 사회수학적 규범은 수학적 활동에 구체화된 것이라면, 교실의 수학적 관행은 특정 수학적 아이디어에 구체화된 것임을 알 수 있다.

3. 인지에 대한 의사소통적 접근에 관한 연구

3.1. 인지에 대한 의사소통적 접근에서의 수학

본 절에서는 Sfard(2008)에 제시된 내용을 토대로 인지에 대한 의사소통적 접근의 등장 배경과 이 관점에서 바라보는 수학에 대해 알아보도록 한다.

Sfard는 행동주의(behaviorism)는 인간의 복잡성을 고려하지 않았으며, Piaget의 인지발달이론은 개인 간의 차이와 상황의 차이를 고려하지 못하였고, 인류의 변화과정을 설명할 수 없음을 비판한다. 또한 Wittgenstein의 논의는 인간 행동의 복잡성을 수용하고 인간 활동의 모든 것을 공적으로 검토할 수 있는 가능성을 드러내며 이로부터 활동이 드러나는 모습 그대로를 다루어야함을 지적한다. Sfard는 인간의 복잡성을 논의하기 위해 핵심 단어를 조작적 용어로 정의할 필요가 있음을 강조하는데, 이는 의사소통의 결함을 최소화하고 대화의 유용성을 최대화하려는 노력 중 하나이다.

Vygotsky의 사회 문화적 접근, 인지주의를 비판하고 참여로서의 학습을 제시한 Lave, 사회적으로 조직된 활동들에 적절한 주변적 참여로서의 학습을 제시한 Wenger의 논의로부터 Sfard는 참여주의(participationism)를 지지한다. 이의 기본 전제는 인류의 행동 형식 중 유형화되고 집단적 행동 형식이 개인의 활동보다 발달적으로 우선한다는 것이다. 참여주의에서 인간의 발달은 인간의 행동 형식의 변화이며, 발달적 변형은 집단의 개인화와 개인의 집단화, 두 상보적인 과정의 결과이다. 개인화는 집단 활동에 대하여 개인적으로 수정된 모습을 유도하며, 개인적 변화 중 일부는 집단의 행동 형식에 영향을 주어 영구성을 갖게 되며, 한 집단에서 다른 집단으로 시공간적으로 옮겨진다.

Sfard는 이로부터 인간의 삶을 다른 동물과 차별화 시키는 것이 의사소통임을 강조한다. 이는 개인 간 의사소통에 의해 우리의 활동을 조정

하는 능력은 우리를 사회적인 존재가 되도록 하는 토대가 되기 때문이다. 이로부터 Sfard는 사고를 집단적 행동의 개인화로, 즉 '(개인 간) 의사소통((interpersonal) communication)의 개인화된 형태'로 정의한다. 따라서 인지적 과정과 개인 간 의사소통 과정은 같은 현상에 대한 서로 다른 표현일 뿐이다. 따라서 본 논문에서는 Sfard의 연구를 인지에 대한 의사소통적 접근으로 규정한다.

Sfard는 반복적인 개인의 행동 양식은 오직 집단적 수준에서 보일 수 있는 패턴을 통해 유의미성과 효과성을 획득하므로 의사소통을 집단적 활동으로 설명할 수밖에 없다고 강조한다. 또한 공동체가 특정한 형태의 반응을 통해 어떤 행동에 대해 반응하는 패턴화된(patterned) 습관을 갖게 되는 것으로부터 의사소통은 가능해 진다. 다른 도구를 사용하며, 다른 규칙에 따라 이루어지는 많은 게임이 있는 것과 마찬가지로, 대상이 서로 다르고, 사용된 매개체의 형태가 다르며, 참여자가 따라야 할 규칙이 다른 다양한 형태의 의사소통이 존재한다. 이로부터 Sfard는 담론을 '일부 다른 사람들을 배제하고 어떤 개인들을 하나로 모으는 다른 형태의 의사소통'이라 정의한다.

또한 Sfard는 수학이 그 말 자체와 말하는 대상을 포함하고 새로운 대상이 추가될 때에는 안에서부터 끊임없이 성장하는 체계인 자기발생적(autopoietic) 체계임을 강조한다. 이로부터 수학은 담론이라는 주장을 하며, 수학적 담론은 핵심어와 그 사용(keywords and their use), 시각적 매개체(visual mediators), 승인된 내러티브(endorsed narratives), 루틴(routines)에 의해 다른 담론과 구분된다. 수학적 담론의 특징을 살펴보면 다음과 같다.

담론이 구별되는 성질 중 하나는 핵심어의 사용이다. 대화자(interlocutor)가 세상에 대해 무엇을 이야기 할 수 있고 무엇을 볼 수 있는지를 결정하므로 단어 사용은 중요하다. 수학적 담론에서는 양과 형태를 나타내는 단어, 수와 관련된 단어 등이 많이 사용된다. 수학적 담론에 사용되는 핵심어의 예로는 미분, 함수, 삼각형 등이 있다.

시각적 매개체는 의사소통 과정의 일부로 조작되는 시각적 대상이다.

수학적 담론에서는 의사소통의 목적을 위해 특별히 창조된 상징물(symbolic artifacts)이 포함된다. 또한 의사소통에서 시각적 매개체와 관련된 조작은 대개 자동화되고 체화(embodied) 된다. 수학적 담론에 사용되는 시각적 매개체의 예로는 $\frac{1}{4}$, x^2, $\frac{dy}{dx}$, 그림 등이 있다.

내러티브는 대상, 대상들 사이의 관계, 대상에 의한 과정으로 표현된 발언의 연속물(sequence)로 담론에 한정된 실증(substantiation)의 절차에 의해 승인(endorsement) 또는 거절의 대상이 된다. 승인된 내러티브는 종종 진실(true)이라 일컬어진다. 수학적 담론에서 내러티브의 승인은 연역적 관계에 영향을 받는다. 수학적 담론에서 승인된 내러티브의 예로는 $2+2=4$, $(x^2)'=2x$, 이등변 삼각형의 두 밑각의 크기는 서로 같다 등이 있다.

루틴은 주어진 담론의 반복적 패턴이다. 이러한 반복적 패턴은 대부분의 수학적 담론에서 나타난다. 수학적 담론에서 루틴의 예로는 어떻게 보는지, 어떻게 확신시키는지, 어떻게 쓰는지, 어떻게 증명하는지 등에 관한 규칙성(regularity)이다.

이상에서 인지에 대한 의사소통적 접근을 따르는 Sfard는 사고를 (개인 간) 의사소통의 개인화된 형태로 정의하며, 담론을 일부 다른 사람들을 배제하고 어떤 개인들을 하나로 모으는 다른 형태의 의사소통으로 정의한다. 이로부터 수학은 담론이며, 수학적 담론의 특징을 4가지로 구분하고 있다. 이제 인지에 대한 의사소통적 접근에서 바라보는 수학 학습에 대해 살펴보고자 한다.

3.2. 인지에 대한 의사소통적 접근에서의 수학 학습

수학을 담론으로 정의한 논의로부터 Sfard 이론에서의 수학 학습은 학생이 수학적 담론에 참여하고, 이로부터 수학적 담론이 변화하는 것이다. 학교에서 배우는 수학적 담론은 학생들의 일상적 담론을 수정하는 것이므로, 수학 학습은 상처를 내서 새롭게 하나를 짓는 것이라기보다는

자연스럽게 학습된 일상적 담론을 변환하는 것으로 이해될 수 있다(Sfard, 2007). Sfard가 수학 학습을 특별한 담론 안에서 더 강한 참여자가 되는 것으로 규정한다는 점에서 이는 James Gee(1997)의 연구와 관련이 있다(Cobb, 2009). 두 연구자 모두는 학습 과정에서 담론에 완전히 참여하고 있는 사람들과 함께하는 상호작용이 매우 중요하다고 강조한다.

Sfard는 수학적 담론의 참여자가 되는 과정과 담론에 참여한 후, 수학적 담론의 변화에 대해 외부자의 관점으로 엄밀하게 분석한다. 수학적 담론이 변화한다는 것은 앞서 언급한 수학적 담론의 4가지 특징이 변화한다는 것을 의미한다. 즉, 이는 새로운 단어, 새로운 시각적 매개체, 새로운 승인된 내러티브, 새로운 루틴이 생기는 것이다.

담론에 대해 논의하는 연구자들은 인간의 의사소통적 행동의 규칙, 즉 특정 유형의 담론이 가능하도록 하는 적절한 규칙에 관심을 갖는다. 수학적 담론의 규칙에는 대상 수준 규칙(object-level rule)과 메타 (담론적) 규칙(meta-discursive rule 또는 meta-rule)이 있다(Sfard, 2000). 대상 수준 규칙은 담론의 내용을 통제하는 규칙이며, 메타 규칙은 대상 수준 규칙보다 상위에 있으며 담론의 흐름을 조정하는 규칙이다. 메타 규칙은 담론에서 암묵적으로 존재한다. 또한 메타 규칙의 학습은 교사의 계획이 아닌, 학생의 의도가 아닌, 그 어느 누구도 의식적으로 고려하지 않고, 자연적으로 일어난다. 이러한 눈에 보이지 않는 규칙은 우리가 행동을 하는 방식 뿐 아니라 우리가 행동을 하는 것 그 자체에도 영향을 미친다.

Sfard에 따르면, 수학 학습에는 두 가지 수준이 존재한다. 즉, 수학적 담론은 두 가지 방식으로 변화한다. 대상 수준(object-level) 학습은, 현재 존재하는 대상이나 내러티브에 현재 적용되는 메타 규칙을 따라 수학적 담론의 승인된 내러티브가 추가되는 것이다. 이는 단어 확장하기, 새로운 루틴 구성하기, 새로운 승인된 내러티브 생성하기 등을 통하여 얻어지는 대상, 곧 기존 담론의 확장으로 표현하는 것이다(Sfard, 2007). 예를 들면, 자연수에 대해 이미 알고 있는 학생이 자연수의 성질을 학습하는 것과 같다. 메타 수준(meta-level) 학습은 수학적 담론에 새로운 대상이

추가되거나, 수학적 담론의 메타 규칙이 변화하거나, 핵심어의 사용 방식이 변화하는 것이다. 이는 어떤 익숙한 과제들이 이제는 다르고 낯선 방식으로 다루어지는 것을 의미한다(Sfard, 2007). 예를 들면, 자연수에 관한 담론에서 음수에 관한 담론으로의 전환이 일어나는 학습과 같다. 메타 규칙의 암묵성과 우발성을 고려한다면, 학습자가 스스로 메타 수준 학습을 할 수 있을 것이라 쉽게 기대할 수 없다. 두 수준의 학습의 차이는 Gregory Bateson(1973)이 언급했던, 확립된 맥락 안에서의 학습(대상 수준 학습)과 새로운 맥락에 대한 학습(메타 수준 학습)에 대응되는 1수준 학습과 2수준 학습의 차이와 유사하다(Cobb, 2009).

3.3. 인지에 대한 의사소통적 접근에서의 담론적 갈등

지금까지 인지에 대한 의사소통적 접근의 등장 배경과 인지에 대한 의사소통적 접근에서 바라보는 수학, 수학 학습에 대해 살펴보았다. 여기서는 인지에 대한 의사소통적 접근에서의 담론적 갈등의 중요성에 대해 살펴보고, 이는 인지적 갈등과 어떤 차이가 있는지 비교해 본다. 본 절에서는 Sfard(2007)을 바탕으로 살펴본다.

대상 수준 학습의 메타 규칙에 비해 메타 수준 학습의 메타 규칙은 학생들에게 친숙하지 않다. 따라서 학생들은 그들 스스로 메타 수준 학습을 시작할 수 없다. 또한 메타 수준 학습을 위한 학생의 개인화는 이미 그 담론에 충분히 참여할 수 있는 누군가에 의해 지원받게 된다(Cobb, 2009). 메타 수준 학습은 학생들이 새로운 담론에 직접 맞닥뜨리도록 하는 것에서 시작한다. 이때 학생들은 지금까지 수학적 담론을 규제했던 메타 규칙과 다른 메타 규칙을 따라야하기 때문에 담론적 갈등(discursive conflict)에 부딪히게 된다. 담론적 갈등은 다른 참여자들이 다른 메타 규칙에 의해 행동함으로써 의사소통이 방해 받는 상황을 뜻한다. 덧붙여, 이는 같은 단어를 다른 방법으로 사용하는 것으로부터 발생하는 갈등을 포함한다.

담론적 갈등은 두 의견 중 어떤 하나의 의견이 옳을 수 있기 때문에

발생하는 비동의(disagreement)로 이해되어서는 안 된다. 담론적 갈등은 상충하는 내러티브가 사실에 기반하고 있으며(즉, 잘 정의된 메타 규칙에 따라 승인될 수 있는), 구성이나 실증의 과정에서 실수의 가능성이 제거되었을 때 발생하는 갈등이다. 따라서 담론적 갈등은 발견해내기 쉽지 않다.

담론적 갈등은 획득으로서의 학습을 강조하는 연구자들이 언급하는 인지적 갈등(cognitive conflict)와 혼동되어서는 안 된다. 인지적 갈등과 담론적 갈등 사이의 차이점은 다음과 같다.

첫째, 인지적 갈등과 담론적 갈등은 갈등 발생의 원인이 다르다. 어떤 사람이 세계(the world)에 관해 두 개의 모순된 신념을 갖고 있다면, 이 두 신념 중에 하나는 필연적으로 사건의 실제 상황과 부합하지 않는다. 즉, 개인의 신념과 세상 사이의 충돌에서 발생하는 것이 인지적 갈등이다. 이와 반대로 담론적 갈등은 학습, 즉 담론의 변화로서의 학습이 다른 사람과의 상호작용에서 유래된다는 가정에 기반하고 있는 아이디어이다. 이 접근에 따르면 메타 수준의 학습은 개인의 승인된 내러티브와 특정한 외부적 증거 사이의 불일치에 의해서가 아니라 대화자들의 의사소통 방식의 차이에서 비롯되는 것이다. 따라서 담론적 갈등은 세계와 담론 사이의 전통적인 관계에 반해, 우리가 말할 수 있는 것과 우리가 인지하고 승인할 수 있는 것 사이의 재귀적 관계를 주장한다. 대부분의 경우, 우리의 담론은 실재에 대한 우리의 경험과 일치하지만, 새로운 가능성을 인식하고 사물에 대한 새로운 시각에 도달하기 위해서 담론적 변화가 필요하다. 즉, 우리가 보는 것의 변화를 경험하기 전에 말하는 방법에 있어서의 변화가 필요하다.

둘째, 인지적 갈등과 담론적 갈등은 학습에서의 역할에 차이점이 있다. 인지적 갈등은 선택적인 교수학적 결정에 의해 학습에서 역할을 한다. 특히 학생들이 오개념(misconception)을 보이고 이를 제거하는데 유용하게 사용될 수 있다. 반면, 담론적 갈등은 메타 수준의 학습에서 필수적이다. 학생 자신에게 익숙하고 유창한 담론은 주변 세상을 이해하는 도구로 충분하다고 생각된다. 따라서 다른 사람들의 담론이 없다면 학생은

자신의 담론적 방법(discursive ways)의 변화를 위한 동기를 부여받지 못한다. 교실 수업에서 담론적 갈등은 교사나(Cobb, 2009) 동료의 도움을 통해 유발되고 이를 통해 담론적 방법이 변화할 수 있다.

셋째, 인지적 갈등과 담론적 갈등은 갈등의 해결 과정에 차이점이 있다. 인지적 갈등이 일어나는 상황에서는 상호 모순되는 것처럼 들리는 두 내러티브가 서로 배타적이며, 그 둘 중 하나는 승인되고 하나는 거부되어야 한다. 이와 달리, 담론적 갈등은 단어 사용이나 내러티브를 입증하기 위한 규칙이 서로 다른 담론들이 나타날 때 발생한다. 이러한 담론들은 양립할 수 없는 것이 아니라 서로 비교할 수 없는 것(incommensurable)[4]이다. 비교할 수 없는 두 담론에서 나타나는 내러티브는 비록 상호 모순적으로 들리더라도 상호 배타적인 것으로 간주될 수는 없다. 두 담론은 내러티브가 승인될 수 있는 기준을 공유하지 않는다. 따라서 인지적 갈등과 같이 담론적 갈등은 하나는 승인되고 하나는 거부하는 방식으로 경험적 증거에 의해 해결될 수 없다. 인지적 갈등의 해결은 세계를 이해하는 것이지만, 담론적 갈등의 해결은 그 세계에 대한 다른 사람의 생각(즉 이야기(talking))을 이해하는 것이다. 이는 점진적 동의, 관습화(customization), 그리고 다른 사람들의 담론의 내부에 있는 논리를 이해하는 것으로서의 합리화(rationalization)를 의미한다.

4) Sfard(2007)은 Rorty(1979)의 비교 가능(commensurable)의 개념으로부터 비교 불가능이란 하나의 틀이 옳으며 다른 틀은 반박되는 판단 기준을 제공하는 거대 이론이 존재하는 것이 아니라, (어휘에 대한)기약성을 수반하는 것이지 양립 불가능성을 수반하는 것이 아니라고 언급한다.

<표 Ⅱ-2> 인지적 갈등과 담론적 갈등의 비교(Sfard, 2007, p.578)

개념	인지적 갈등	담론적 갈등
존재론 : 무엇 사이에서의 갈등	대화자와 세계	(서로 완전히 달라서) 비교할 수 없는 담론들
학습에서의 역할	오개념을 제거하는 데 선택적 수단	메타 수준의 학습을 위해 실제적으로 필수적
어떻게 해결되나?	학생의 합리적 노력에 의해	전문가(expert interlocutor)의 담론적 방법의 수용과 합리화(개인화(individualization))

4. 교실 상호작용 및 담론에 관한 연구

4.1. 교실 상호작용 촉진의 조건에 관한 연구

상호작용은 한 사람의 사고와 행동은 다른 사람과의 사고 및 행동과 불가분하게 얽혀 서로 영향을 끼친다는 생각에서 출발한다(강현희, 2008, p.34). 최근 수학 교육에서는 교실 문화의 변화, 교사와 학생들 사이에서 발생하는 상호작용과 담론에 대한 분석이 전통적 수업에서 벗어나 학습자가 스스로 지식을 구성할 수 있는 학습 환경을 만들어낸다는 것에 유의미함을 강조하고 있다. 많은 연구에서는 교실 속에서 교사와 학생 간의 상호작용, 학생과 학생 간의 상호작용을 활발히 일으켜야 함을 언급하면서 상호작용의 촉진에 관해 다양한 목소리를 내고 있다. 이러한 여러 선행 연구 중 중 본 절에서는 교실에서의 상호작용, 담론을 촉진하기 위한 교실 문화의 개선, 교사의 역할 변화, 학생의 역할 변화를 강조한 연구들을 살펴보도록 한다.

이런 관점으로부터 Cobb 외(1993)는 사회적 상호작용을 통해 수학적 의미는 사회수학적 규범을 포함한 교실의 사회적 규범을 협상하는 과정 속에서 나타난다는 것을 확인했다. 또한 그들은 학생들의 사고를 존중하고, 그들이 생각한 것을 자유롭게 말할 수 있도록 하는 교실의 사회적 규범의 틀이 정립되면 사회적 상호작용이 활발히 일어나는 것을 확인해, 교실의 사회적 규범이 정립될 필요가 있다고 언급했다.

또한 White(2003)는 모든 학생들을 교실 담론에 참여시키는 것이 중요하고, 이는 학생들의 수학적 사고의 발달에 유의미한 영향을 끼친다는 점을 주장한다. 특히 그는 초등학교 3학년 학생들과 교사 2명을 대상으로 교사가 학생의 아이디어를 평가하고, 학생의 답을 탐구하도록 하며, 학생이 가진 배경 지식을 조정하는 과정, 학생들 사이의 의사소통을 격려하는 과정이 생산적인 수학 교실 담론(productive mathematical classroom discourse)을 촉진한다고 강조했다. Chapin, O’Cornor, Anderson(2003)은 교실에서 생산적인 말하기 활동을 위해 교사는 학생들이 수정하여 재진술하도록 요구해야하며, 급우의 추론을 재진술하도록 요구하고, 자기 자신의 추론을 다른 사람의 추론에 적용하도록 요청하며, 더 많은 참여를 위해 학생들을 격려하고 기다리는 시간을 충분히 사용해야함을 강조한다.

Ben-Yehuda, Lavy, Linchevski, Sfard(2005)는 장기간 학습 부진을 겪은 18세의 두 소녀를 대상으로 진행한 사례연구에서 그들의 산술 담론을 살펴보았다. 관찰을 통해 연구자들은 학습자에게 적절한 담론 양식(discursive mode)이 제공된다면 비록 학습 부진아일지라도 산술 담론에 능숙한 참여자가 될 수 있음을 밝혀냈다. Lau, Singh, Hwa(2009)는 말레이시아의 16~17세 학생 4명으로 구성된 그룹의 수업을 관찰한 사례연구에서 이미 완성된 발달 영역이나 실제적 발달 수준(actual development level)과 교사의 안내나 주변의 동료들과의 협동으로 문제를 해결함으로써 도달할 수 있는 잠재적 발달 수준(level of potential development)를 논의한 Vygotsky의 연구에 기반하여 동료와의 협력을 강조한다. 즉, 학습이 일어나기 위해서는 학생이 자신의 환경 속에서 동료들과 협동하여 상호작용을 해야하고, 교사가 중재하고 동료들의 협동이 촉진되면 학생의 역할은 수동적인 지식의 수용자에서 공동의 구성자, 공동의 조사자, 공동의 증명자로 변화하게 됨을 주장한다.

4.2. 교실 상호작용 및 담론의 특징에 관한 연구

Radford와 Roth(2011)는 9~10세의 4학년 학생들이 3명씩 소그룹을 이루도록 학급을 구성하고 대수 영역의 문제를 학습하는 과정을 관찰해 사회문화적 관점에서 교실 상호작용을 분석하는 사례 연구를 수행했다. 연구자들은 학생들이 친숙한 맥락에서 효과적인 수학적 방법으로 모델링 할 수 있는 과제를 제시하고 교사-학생, 학생-학생 사이의 상호작용을 관찰했는데, 그들 사이의 상호작용은 집단적 현상처럼 일어나며 모든 참여자는 개인 간의 차이에도 불구하고 서로 조율하는 윤리적 책무를 가지

고 있다는 것을 밝혀냈다. Radford와 Roth는 교사와 학생이 만드는 관계의 공간을 공동 행동의 공간(space of joint action)이라 명명하였으며, 더 나은 수학적 맥락을 필요로 할 때 교사가 개입해 교사-학생 간의 관계를 형성하고 조율해가는 윤리적 방식을 설명하는 분석적 범주를 함께하기(togethering)라 칭하였다.

Sfard와 Kieran(2001)에 의하면 효과적인 의사소통(effective communication)이란 관련된 참여자 모두가 그들의 기대를 충족하여 의사소통하는 상태를 말하며, 이는 담론의 초점(discursive focus)이 명확한 정도에 의존한다. 연구자들은 담론의 세 가지 초점을 제시하는데 첫째는 발화된 초점(pronounced focus)로 이는 공적인 초점이다. 두 번째 초점은 수행된 초점(attended focus)로 사람이 지각하는(혹은 상상하는) 이미지들을 포함할 뿐만 아니라, 이 이미지를 스캔하는 동안 그가 수행하고 있고 다른 요소들로부터 이 둘을 매개하는 수행 절차(attending procedure)를 포함한다. 마지막 초점은 의도된 초점(intended focus)로 이는 사적인 초점이며 은유하여 표현하자면 주어진 발화된 초점을 미래의 담론에 사용하도록 지시하는 요소라고 묘사된다. 특히 연구자들은 두 참여자가 의도된 초점의 차이 때문에 의사소통이 효과적으로 일어나지 못하는 상황들을 제시한다.

Kieran(2001)은 13세의 두 명의 학생이 한 쌍을 이뤄 함수에 관한 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 담론을 관찰하고 그들 사이의 상호작용을 분석하는 사례 연구를 진행하였다. Sfard와 함께 수학 학습에서 일어나는 대화적 특징에 주목해 많은 연구를 진행한 Kieran은 학생들 사이에 일어나는 상호작용을 대상 수준(object-level)과 메타 수준(meta-level)으로 나누어 설명했다. 대상 수준의 발언은 담론의 수학적 차원을 변화시키는데 필수적이라 생각되는 담론적 요소에 관한 것인데, 예를 들면 문제 읽기, 이전 제안을 반박하기, 수학적 내용과 관련된 새로운 제안 제시하기, 수학적 성질과 관련된 정보 찾기 등이 있다. 메타 수준의 발언은 단순히 대화가 진행되는 것과 관련된 담론적 요소뿐만 아니라 대화자들 사이의 관계를 반성하는 담론적 요소와 연관된 발언이다. Kieran은

상호 간에 생산적인(mutually-productive) 담론에서는 대상 수준의 발언이 많았고, 비생산적인 담론에서는 대화자 간의 상호작용 보다는 개인 내적인 의사소통이 많다는 것과 대상 수준의 발언이 적다는 것을 밝혀냈다.

김동중, Sfard, Ferrini-Munday(2010)는 인지에 대한 의사소통적 접근을 따라 4명의 미국 학생과 4명의 한국 학생에게 무한과 극한에 관한 구어적 표현과 수학적 표현으로 구성된 질문지를 제공하고 30~40분의 인터뷰를 진행하였다. 그들은 무한의 단어 사용은 그것이 사용되는 맥락, 적용대상, 학생의 대상화(objectification)의 정도에 따라 달라짐을 알아냈고, 미국 학생들은 실세계의 맥락에서 무한이라는 단어를 사용하는데 비해 한국 학생들은 추상적이고 수학적인 맥락에서 무한이라는 단어를 사용함을 관찰했다. 극한 역시 무한과 비슷한 연구 결과를 보여준다. 미국 학생들에 비해 한국 학생들은 무한을 수학적 담론에서 먼저 접한다. 따라서 한국 학생은 미국 학생들에 비해 무한과 극한의 단어 사용이 구조적(structural)이고, 엄격(rigorous)하며, 일반화되어(general) 있고, 수에 기반해 구조적(number-based structural)이다. 이로부터 연구자들은 일상적 담론이 수학적 담론에 영향을 준다는 결론을 내린다.

박정은(2011)은 미적분학 강사와 학생의 담론을 인지에 대한 의사소통적 접근에 따라 분석하였다. 연구자는 3명의 강사와 12명의 학생의 수업을 관찰하고, 인터뷰하는 과정을 통해 미분계수, 도함수, 함수의 관계에 대한 학생과 강사의 발언을 범주화하였다. 그 후 강사의 담론의 명확성의 정도와 학생의 수행을 비교하여 세부 사례별로 교수(teaching)를 위한 제언을 했다. 연구자는 미분에 관한 학생의 사고를 파악하고, 관련된 단어 사용에서 강사는 주의를 기울여야하며, 명확한 수학적 용어의 사용이 필요함을 주장했다.

Empson(2003)은 분수 학습 상황에 관한 사례 연구에서 학생들에게 적극적으로 장려된 참여의 기회로부터 두 학생이 어떻게 참여하였는지를 분석한다. 토론 과정에 적극적으로 참여한 결과 이는 학생들이 적절한 수학적 활동을 수행할 수 있도록 도움을 제공하고(scaffold) 분수 개념에 관한 이해를 촉진한다. 참여와 이해는 동의어라는 입장에 기반하여 그들

은 교사와 학생 사이의 상호작용으로 학습을 설명한다. 특히 선행 연구로부터 참여 틀(participation framework)을 제시해, 그룹에서 생산적 기여(productive contribution)를 하는 지, 일대일 또는 그룹 안에서의 상호작용에서 불완전한 추론(problematic reasoning)을 해결하는지, 일대일로 사고를 이끌어내는지의 빈도와 해결되지 않은 실수의 빈도를 측정해 두 학생이 교실 토론에 어떻게 기여하였는지를 분석한다. 이때 구성원들은 문제해결자(problem solver)가 되기도 하고 수학적으로 정당화하는 사람(mathematical justifier)이 되기도 한다는 참여 틀이 나타났다. 또한 수학적으로 합리적인 추론을 하는 사람은 수학적 권위(mathematical authority)를 갖고 담론에 참여한다는 것이 관찰되었다.

Imm와 Stylianou(2012)는 5명의 교사와 그들의 학생이 진행하는 수업을 관찰한 후 각 공동체에서의 담론의 역할을 분석한 사례 연구를 수행했다. 연구자들은 담론의 힘은 단지 지식을 전달하는 것에 그치는 것이 아니라 사고하는 도구(thinking device)라는 점을 강조한다. 그들은 인지적으로 고도의 능력이 요구되는 과제와 수학적 담론 사이에는 중요한 관계가 있다는 것을 밝혀냈다. 그들은 담론이 일어나는 특성을 파악해 low discourse, high discourse, hybrid discourse로 교실에서 발생하는 담론을 분류했다. hybrid discourse의 경우 low discourse와 high discourse의 중간 정도 수준의 담론으로 일반적인 수학 교실에서 발생하는 담론은 이에 해당한다. 그들은 분류된 담론 마다 학생의 참여 역할이 다르고, 대화의 구조가 다르다는 것을 밝혀냈다. low discourse에서는 전통적 상호작용 패턴인 IRE 패턴[5]이 나타나는데 비해 high discourse에서는 학생의 의견 표현이 권장된다. 그 결과 high discourse에 참여하는 학생은 더 소속감을 느끼고 현재 수학 교실에서 발생하는 상황에 더 관심을 가진다. 또한 학생들은 교실에서 일어나는 작용(agency)에 더 좋은 감각을 갖게 되고 교사, 동료들과 아이디어를 공유할 수 있는 더 높은 가능성을 갖게 된다. 그들은 지식의 수동적인 수용자가 아닌 국소적 권위자(local

5) IRE 패턴(Initiation-Response-Evaluation) : 교사가 이미 알고 있는 사실이나 사고에 대한 물음에서 시작하여, 학생들이 대답하고, 교사가 그 대답에 대한 옳고 그름을 평가한다(나미영, 2006, p.15).

authorities)로서 담론에 참여한다. high discourse와 hybrid discourse에 참여하는 학생들은 스스로 담론에 참여할 수 있는 기회를 획득함으로써 그들 사이의 담론은 사고의 도구로, 새로운 아이디어를 만드는 도구로 사용된다.

Soter 외(2008)은 9개의 토론 집단에서 일어나는 토론 중 어떤 발언이 생산적인 토론에 기여하는지를 분석했다. 그들은 9개의 집단에서 발생한 담론을 코딩해 특정 발언의 빈도 수를 조사하여 논의를 하였다. 수학적 담론이 아닌 일반 교과에서의 담론에 관한 분석이 이루어졌지만 그들이 특히 관심 있게 분석한 요소들을 살펴보면 이를 수학 교육에도 적용할 수 있을 것이라 생각한다. 연구자들은 교사와 학생의 질문, 정교한 설명의 존재 여부, 추론의 핵심 단어의 존재 여부, 설명적 대화의 존재 여부에 따라 담론을 코딩하였다. 그 결과 소그룹 토론에서 생산적 토론에 기여하는 발언들은 개방형 질문, 보충 질문(uptake), 추론 단어의 사용의 정도, 정교한 설명임을 확인하였다.

지정은(2006)은 수학적 토의의 개념을 어떻게 구성할 것인지를 규정하기 위해 수학 교실에서 일어나는 토의 담론의 특징을 분석하였다. 중학교 1학년 한 학급과 2학년 한 학급을 각각 5, 10회 관찰한 결과를 통해 수학 교실에서 일어나는 토의 담화의 요소로 목적, 방식, 주체, 형태를 유도했다. 교실 내의 물리적 배치, 교사와 학생의 역할, 규범이라는 조건에 기반하여 주제의 확인, 전략 또는 원리 찾기, 정당화, 정교화, 정의하기 등의 목적을 바탕으로 수학 교실의 토의 담론는 구성된다. 또한 요구, 유도, 반복, 확인, 제시, 합의하는 방식에 따라 질문, 대답, 진술, 머뭇, 침묵의 형태로 토의 담론이 나타나게 됨을 밝혀냈다. 연구자는 이러한 4가지 요소를 바탕으로 담론 분석 틀을 개발했는데, 분석의 예로는 교사(주체) - 정당화(목적) - 요구(방식) - 질문(형태)와 같이 코딩하는 것을 살펴볼 수 있다.

김우현(2009)은 초등학교 4~6학년의 수학 영재를 대상으로 문제를 제시하고 반응을 관찰해 수학 영재들의 사고 특성을 분석하였다. 개방형 문제를 사용해 토론을 유도한 결과 집단적 사고 특성의 변화와 개인별

사고 특성의 변화가 나타남을 확인할 수 있었다. 다른 사람의 의견을 듣고 자신의 의견을 나누는 토론 수업과 여러 번의 재고가 진행되는 동안 다른 유형의 사고로 옮겨가는 집단적 사고 특성의 변화과정이 나타났고, 자신의 풀이에 대한 재고와 토론 수업은 수학 영재가 자신의 사고를 반성하고 높은 수준의 사고로 도약할 수 있도록 하는 개인별 사고 특성의 변화과정을 보여줬다.

4.3. 교실 상호작용의 패턴에 관한 연구

교실에서 반복적으로 일어나는 상호작용의 패턴은 상호작용의 양상을 반영하고, 교사-학생 사이의 담론 또는 학생-학생 사이의 담론의 양상을 파악할 수 있다는 점에서 많은 연구에서 분석의 대상이 되어 왔다. 이들의 연구는 교실에서 발생하는 상호작용의 본질을 탐구하고, 교실의 사회적 규범, 사회수학적 규범, 교실의 수학적 관행을 분석하려는 흐름을 반영한다.

Wertsch와 Toma(1995)는 사회문화적 접근에서 교실 담론의 역동성과 학습을 이해하기 위해, Lotman의 주장을 수용하여 교실 담론을 분석하였다. 그의 주장은 모든 텍스트는 두 가지 기능, 화자와 청자 사이에 어떻게 정보를 받아들이고 부호화하며 저장하는 것이 가능한가에 초점을 둔 '일방적(univocal)' 기능과 어떻게 새로운 의미를 창출하는 것이 가능한가에 초점을 둔 '대화적(dialogic)' 기능을 가지며, 의사소통은 일방적 또는 대화적 모형 중 어느 하나에 의해서는 이해될 수 없고, 모든 텍스트는 두 가지 측면을 모두 포함한다는 것이다. 그 결과 교실 담론에서 대화적 기능이 지배적일 때 학생들은 능동적으로 자신의 발언과 다른 사람들의 발언을 사고의 도구로 다루게 된다. 즉, 대화적 기능이 지배적일 때는 기존의 아이디어에 대한 이해에 초점을 맞추거나 참여자들이 텍스트를 이해하고 질문, 평가, 거부하는 과정을 통해 얻게 된 새로운 아이디어의 구성에 초점을 맞추게 된다. 일방적 기능이 지배적일 때는 당연히 그 반대의 경우가 있다는 것을 분명히 하였다(강현희, 2008). Imm

와 Stylianou(2012)는 Wertsch, Toma의 연구에 기반하여 일방적 담론(univocal discourse)와 대화적 담론(dialogic discourse)의 예를 제시하고 분석한다. 일방적 담론에서는 학생의 수학에 비해 교사의 수학이 더 강요되는데 비해 대화적 담론에서는 여러 명의 학생들이 참여해 교사에 의해 강요된 수학적 의미를 수용하는 것이 아니라 직접 정당화하고 설명하는 모습을 보여준다.

나미영(2006)은 수학 교실의 문화 차이는 참여자들의 상호작용의 패턴으로 드러나고 상호작용의 패턴은 타인의 행동에 대한 개인의 해석과 교사와 학생들 사이에 일어나는 상호간의 적응으로부터 일어난다는 가정으로부터 논의를 시작한다. 그녀는 선행 연구를 분석하여 상호작용의 패턴의 종류를 3가지로 분류했는데, 이는 아래 <표 Ⅱ-3>에 제시된 것과 같다.

<표 Ⅱ-3> 상호작용 패턴(나미영, 2006, p.14)

상호작용 패턴의 종류	특징
Funnel Pattern (깔때기 패턴)	교사가 의도한 답을 학생이 답할 수 있도록 질문의 범위를 좁혀 여러 개의 하위 문제로 나누어 교사가 학생에게 질문하는 상호작용의 패턴. 학생은 수동적인 역할을 함.
Focusing Pattern (집중 패턴)	학생들이 대화에 동등하게 참여함으로써 학습하는 상황을 만들어 학생들이 과제에 집중하고 참여하여 해결할 수 있도록 교사가 격려하는 상호작용의 패턴. 학생들은 적극적인 역할을 함.
Cyclic Pattern (순환적 패턴)	ERE 패턴(유도-반응-정교화하기) - PD 패턴(제안-토론)이 순환하는 상호작용의 패턴

Bauersfeld(1988), Voigt(1985)가 제안한 깔때기 패턴은 교사가 학생들이

정답에 도달할 수 있게 하기 위해 범위를 좁혀가면서 일련의 질문을 만들어 답하게 하는 상호작용 패턴이다(나미영, 2006, p.14). 이 패턴에서는 교사의 의도에 따라 상호 작용이 진행되기 때문에 학생의 수학적 사고 과정이 반영되지 않는다. 따라서 교사가 학생들에게 기대하는 의도와 실제 학생이 학습하고자 하는 의도 사이에 괴리가 있을 수 있다. 깔때기 패턴에서는 교사에 의해 이미 정해진 해결 과정이 학생들에게 부여됨으로써 학생들은 학습 과정에서 수동적인 역할을 하게 된다.

집중 패턴은 학생들이 과제에 집중하여 참여하고 문제를 해결할 수 있도록 교사가 주의를 이끌어주는 상호작용 패턴이다(나미영, 2006, p.14). 집중 패턴은 문제해결 과정 중 가장 핵심적인 과정에서 나타나는 상호작용 패턴이다. 여기서 교사는 학생들이 이해하지 못한 문제의 주요 요소를 암시하는 언급을 하며, 이로부터 학생들은 이해하지 못한 상황에 대해 토론하기 시작한다. 즉, 집중 패턴에서 교사는 학생들이 문제를 해결할 수 있게 하고, 공유된 것으로 생각되는 부분을 요약하며 아직 이해되지 못한 중요한 점을 부각시키면서 학생들의 주의를 이끌어 주는 역할을 한다(나미영, 2006). 따라서 집중 패턴에서 학생은 적극적으로 교사가 이끌어준 초점에 따라 문제를 해결하는 과정에 참여한다고 볼 수 있다.

Wood(1994)와 Civil(1998)에 의하면 깔때기 패턴과 집중 패턴은 모두 학생들이 스스로 수학적 의미를 구성하도록 하는 학습 상황에 교사의 의도가 작용한다는 점을 기반하고 있다. 다만 깔때기 패턴이 교사의 의도에 따라 정해진 답을 찾아가는 과정으로 학생들을 이끄는 것이라면, 집중 패턴은 학생들의 이해를 위해 중요한 문제 상황을 만들어 이에 집중하도록 하며 학생들이 적극적으로 참여하여 스스로 문제를 해결할 수 있도록 이끄는 것에 차이점이 있다.

Mehan(1979)은 IRE 패턴을 제안하였고, Civil(1998)은 이러한 전통적인 상호작용 패턴을 상술 패턴(recitation pattern)이라 칭하기도 하였는데 이는 Bowers와 Nickerson(2001)의 후속 연구에서 ERE(Elicitation-Response-Elaboration) 패턴으로 다시 명명되었다(나미영, 2006). IRE 패턴이 교사가 학생에게 질문을 하고, 학생은 이에 답하며,

교사가 학생의 짧은 반응을 다시 평가하여 좀 더 정확한 답을 유도하는 패턴인데 비해 ERE 패턴은 교사가 유도하고 학생이 반응한 것을 평가 혹은 정교화 함으로써 깊은 토론을 장려하도록 하는 패턴이라 볼 수 있다. Bowers과 Nickerson은 개념적 지향의 개인적인 구성과 집단적 지향의 사회적 구성사이의 상호작용을 개발하는 것을 목표로 두고 연구를 수행했는데 집단적인 맥락 내에서 개인의 성장을 ERE 패턴 - PD(Proposition-Discussion) 패턴에서 살펴보았다. ERE 패턴은 교사가 반응을 이끌어내고 학생이 반응하며, 다시 교사가 그러한 반응을 정교하게 다듬어가는 상호작용이다. 교사는 반응을 유도하고 개념적 지향의 중요성을 암시적으로 나타내는 학생들의 설명에 귀를 기울인다. 이러한 ERE 패턴 뒤에 수학적 아이디어가 학생들 사이에 공유되면, 학생들은 서로 상호작용하며 PD 패턴이 나타난다. 이는 교사 혹은 학생이 의견을 제안하고(proposition) 다른 구성원들이 그것에 대해 토론하는(discuss) 상호작용이다. ERE 패턴 - PD 패턴의 반복적인 상호작용 패턴은 학생들의 사고가 변화하는 모습을 분석하려 했다는 점, 학생들과 교사가 집단적인 개념 지향의 성립을 위해 노력하려한다는 점을 드러낸다는 점에서 의미가 있다. 고상숙, 강현희(2007)는 중학교 1학년 1학급을 대상으로 한 사례연구에서 담론에 참여한 학생들이 서로 피드백을 주고 받으며, 상호작용 할 때, 수학적 개념이 잘 형성됨을 밝혀냈다. 특히 수학적 담론을 통해 개념이 형성될 때에는 ERE 패턴이 형성된 후, PD 패턴이 나타나는 순환적 패턴이 관찰되었다.

Ⅲ. 연구 방법

1. 연구 방법 : 사례 연구

우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수 외(2006)에 의하면, 사례란 연구하고자 하는 일정한 현상을 대표하는 하나의 예이며 사례 연구란 사례에 집중함으로써 연구하려는 현상의 특징을 보여줄 수 있는 중요한 요소들 사이의 상호작용을 밝히면서 사례가 속해있는 부류의 특징적 양상을 파악해내는 연구이다. 사례 연구는 제한된 체계 또는 하나의 단위에 대한 집중적 묘사와 분석이라는 점에서 다른 정성적 연구(민족지학적 연구, 근거이론)와 구별된다. 사례 연구는 상황과 그 안에 포함된 의미에 대한 심층적인 이해를 얻기 위해 설계되며 결론보다는 과정에, 특정의 변수보다는 맥락에, 확증보다는 발견에 관심이 많다. 따라서 본 연구에서는 확률 문제를 해결하는 수학 영재들의 토론 과정에서의 상호작용과 담론의 양상, 담론적 갈등에 관한 실재(reality)를 최대한 있는 그대로 보고 해석하는 사례 연구 방법을 택한다.

우정호 외(2006)는 Merriam(1998)과 Gall, M. D., Gall, J. P., Borg(2003)의 연구로부터 사례 연구의 특징을 6가지로 정리하였다. 첫째, 사례 연구는 특정한 예를 통한 현상에 대한 연구이다. 즉 사례 연구는 특정적이다. 둘째, 사례 연구는 사례에 대한 심층 연구이다. 셋째, 사례 연구는 자연스러운 맥락에서 이루어지는 현상에 대한 연구이다. 넷째, 사례 연구는 참여자의 내부자적 관점과 연구자의 외부자적 관점을 통합한 연구이다. 다섯째, 사례 연구는 서술 중심으로 표현된다. 여섯째, 사례 연구는 발견을 중시하는 연구이다. 이러한 특징을 갖는 사례 연구로부터 얻은 지식은 좀 더 구체적이고, 맥락적이며, 독자의 해석에 의해 더욱 발전할 수 있다.

교육 현장은 익숙하고, 쉽게 접할 수 있는 현장이기 때문에 ‘낯선 것을 익숙하게 만들기(make the strange familiar)’ 대신에 ‘익숙한 것을

낯설게 만들기(make the familiar strange)'(조용환, 1999)를 제안한다. 익숙한 것을 낯설게 만든 후에는 다시 친숙하게 하는 것이 필요한데 이를 위해서는 텍스트를 맥락과 연관시켜 특정한 현상을 주목하는 과정이 필요하다. 특정 현상을 주목한 이후에는 발견과 해석의 과정에서 교육적 가치를 염두에 둔 재구성이 필요하다.

교육 현장에서 접할 수 있는 익숙한 현상을 낯설게 만들고 다시 친숙하게 하기 위해서는 자료의 분석이 가장 먼저 필요하다. 사례 연구에서 자료 분석은 이해에 초점을 두고 유용한 자료에 대한 광범위한 자료 분석을 함으로써 특정한 형태로 나타나는 현상에 대해 설명할 수 있어야 한다(우정호 외, 2006, p.123). 많은 사례 연구에서는 귀납적 분석 과정이 많이 적용되었는데, 귀납적 분석은 연구사례에 대한 어떤 개념적 틀 또는 그에 따른 사전의 분명한 이론적 전제(명제) 등이 없이, 수집된 자료를 분석함으로써 연구현상에 관해 체계적으로 기술하거나 또는 의미 있는 이론적 결론을 유도하는 것이다(이지훈, 2000).

사례 연구의 분석에서 제일 중요시되고 가장 높은 사용 빈도를 나타내는 기법은 기술적 분석과 패턴 탐색이다. 기술적 분석은 연구대상 즉, 연구사례가 갖는 일체의 특징적 양상을 있는 그대로 정확하게 묘사하는 것을 말한다. 패턴 탐색은 수집·정리된 자료로부터 연구현상에 관한 일정한 패턴 즉, 자료들 간에 나타나는 일정한 규칙성 등을 체계적인 가시적 분석과정을 통해서 유도하는 것을 말한다(우정호 외, 2006. p.125). 본 연구는 확률 문제를 해결하는 수학 영재들의 토론 과정에서 문제해결에 기여하는 상호작용과 담론의 양상, 담론적 갈등을 좀 더 심층적으로 이해하고자 하기에 사례 연구의 분석 방법 중 기술적 분석과 패턴 탐색을 택하였다.

2. 연구 설계

2.1. 교사의 지향

본 연구의 대상인 교사는 경력 5년차의 교사로 일반계 고등학교에 3년 동안 근무를 하고, 수도권 내의 과학고등학교에서 근무한지 2년차에 접어들었다. 참여자인 교사는 본 연구가 진행된 2013년에는 1학년의 담임교사이면서 1학년의 수학 수업을 맡는 교과 담당 교사였다. 1학기에는 1학년 전 학급(총 7개 학급)의 매주 1시간 씩 수업을 맡았으며 수업 관찰이 진행된 2학기에는 1학년 전 학급에 매주 2시간 씩 수업을 맡아 진행했다.

연구를 진행하기 전 연구자와 교사는 비구조화된 면담을 진행하였다. 사전 면담은 분석을 위해 노트 되었으며, 주로 교사가 평소 자신의 수업에 대해 갖고 있는 지향[6]을 파악하는 것과 연구 참여자인 수학 영재들의 특성을 파악하는데 초점을 맞추었다. 특히 Schoenfeld(2010)의 연구에 의하면, 수업 시간 교사의 생각과 행동의 대부분은 첫째, 수학, 따라서 학생들이 어떠한 수학을 배워야하는지에 대한 것, 둘째, 학생들이 수학에 적절히 지속적인 관심을 갖도록 하기 위해 수업이 어떻게 조직되어야 하는지를 포함한 교수와 학습에 관한 것, 셋째, 학생이 어떻게 해야 하는지, 학생들이 수학적으로 또는 인간적으로 발전하도록 도울 수 있는 교사의 역할이 어떠해야 하는지에 대한 것에 대한 교사의 지향에 의해 결정된다. 본 연구의 참여자인 교사와의 면담 결과를 정리하면 다음과

6) Schoenfeld(2010)는 지식 집약적이며, 목표 지향적이고, 상호작용이 활발한, 역동적으로 변화하는 환경에서 내리는 의사결정에 대해 설명하고자 하였다. 그에 따르면, 교수 활동(teaching)은 이런 모든 차원(지식 집약적, 목표 지향적, 상호작용, 환경의 역동적 특성)과 관련된다. 교수 활동은 목표 지향적 구조에 의해 비교적 명확하게 모델링될 수 있다. 또한 의사결정의 요인은 특정 맥락에서 발생하는 교사의 자원(resources), 목표(goal), 지향(orientation)이다. 어떤 목표를 우선시해야하는가는 근본적으로 그들의 지향과 가능한 자원들을 지각하는 것에 의해 형성된다. 이런 가운데 모니터링과 자기조절처럼 메타인지의 측면들은 진보를 위한 피드백을 제공하며, 목표와 계획들이 수정될 수 있는 투입요인이 되기도 한다. 일상적이지 않은 결정이 나오는 상황에서 주관적인 기댓값 계산을 사용하여 이러한 결정이 나오는 것을 시뮬레이션 할 수 있다. 이때, 자원은 교과 내용, 정서와 관련된 주제, 교재, 직접해보는 재료 등을 다루는 기술이며, 목표는 한 교사가 달성하기 원하는 어떠한 것, 지향은 신념(beliefs), 성향(dispositions), 선호(preferences), 가치(values), 그리고 자세(stances)와 유의어로 다양한 상황에서 교사가 무엇을 인지하는지와 스스로 이러한 상황들의 틀을 어떻게 잡는지에 영향을 준다.

같다.

첫째, 수학에 대한 교사의 지향을 살펴보면, 교사는 수학을 수학적 개념 아래 수학적 성질, 정리 등이 전개되어가는 학문으로 보고 있다. 특히 교사는 수학적 개념의 이해를 중요시한다. 그는 수학적 개념에 대한 관계적 이해로부터 수학적으로 사고하는 능력을 기를 수 있으며, 이로부터 답을 구하는 문제이건 증명하는 문제이건 실제적인 문제해결에서 유용한 전략을 만들 수 있다고 믿는다.

둘째, 교수와 학습에 대한 교사의 지향을 살펴보면, 교사는 일반 학생과는 다른 수학 영재에게 적절한 교수 학습이 필요하다고 생각한다. 따라서 수업 시간에는 다양한 학생들에게 발표할 수 있는 기회를 제공하고 있으며, 수학 영재에게는 토론이 이루어질 수 있는 기회도 필요하다고 생각하여, 평소 토론 위주의 수업도 진행한 경험이 있다. 평소 교사가 시도하던 토론 수업에 관해 교사는 제한된 시간과 학생들에게 지도해야 할 많은 내용의 수학적 지식 때문에 스스로 충분히 만족하지 않았다. 하지만 교사 스스로 수학 영재에게는 교사의 지식 전달 위주의 수업이 아니라, 주도적으로 수업에 참여하여 수학적 의사소통이 활발히 이루어지는 수업이 필요하다는 것을 느끼고 있었다. 또한 교사는 자신의 경험에 기반하여 수업 시간에 수학 영재들이 귀납적 추론을 할 수 있는 기회를 제공해야한다고 생각한다. 교사는 기존 지식을 바탕으로 지식을 확장할 때, 새로운 개념을 학습할 때에는 이미 알고 있는 정보로부터 그들 사이에 성립하는 일반화된 명제를 만드는 추론이 효과적이라고 생각한다. 덧붙여 교사는 수학 영재는 문제에 대한 직관적 통찰 능력이 뛰어나고, 정보의 조직화 및 단축 능력이 뛰어나기 때문에, 도전 정신을 느낄 수 있는 다소 어려운 문제를 학생들이 수업 시간에 다룰 필요가 있다고 생각한다.

셋째, 교사의 역할과 학생의 역할에 대한 교사의 지향은 다음과 같다. 교사는 수학 영재들에게 지도할 교수학적 내용 지식을 정확히 파악하고 있어야 하며, 이를 충분히 이해하여 교수학적 변환을 통해 학생들에게 적절히 지도해야 한다고 생각한다. 또한 수학 영재의 뛰어난 수학적 능

력이 지속적으로 함양될 수 있도록 교사는 적절한 문제를 선정하여 제공하는 역할을 수행해야 한다고 생각한다. 이를 위해, 교사는 평소 1차시(50분) 수업을 진행하기 위해 약 7~8시간 정도의 시간 동안 수업을 준비한다. 교사는 직접 활동지를 제작하며, 활동지의 내용은 과학고등학교의 교과과정을 반영하고 국내외 전공 서적을 참고하여 '내용 소개-연습문제-심화문제'의 순으로 구성한다. 특히 교사는 학생들 대다수가 여러 기회를 통해 선행학습을 하였기 때문에 수업을 준비하는 교사로서 학생들이 흥미를 느낄 수 있는 내용을 선별하고, 그 속에서 수학적 개념에 대한 관계적 이해를 할 수 있도록 하는데 초점을 맞춘다. 이로부터 학생은 수학 영재의 사고 특성을 발현하여 수학적 발견을 하고, 그것이 답을 구하는 문제이건 증명하는 문제이건 문제를 해결한다.

2.2. 연구 현장

본 연구의 참여 대상이 모집되고 연구가 진행된 학교는 수도권 소재의 과학고등학교이다. 1, 2학년은 약 20명씩 7개 학급으로 구성되어 있고, 많은 학생들은 2년 동안의 학교 생활 이후 조기 졸업을 하여 대학에 진학해 3학년은 약 30명의 학생들로 구성되어 있다. 과학고등학교의 특성상 재학생들은 학교에 마련된 기숙사에서 생활하며, 매주 월요일에 입소하여 금요일에 퇴소한다. 학생들은 정규 수업이 끝난 이후에는 방과후 활동에 참여하기도 하며, 학사 일정에 따라 다양한 연구 대회, 탐구 대회에도 적극적으로 임한다. 남녀 성비를 조사한 결과 남학생의 수가 여학생의 수보다 월등히 많았는데, 각 반마다 남녀 성비가 4:1 정도의 분포를 보이는 것으로 나타났다.

재학생들은 상당수가 초등학교와 중학교 시절부터 영재 교육을 받은 경험이 있었다. 대학교 부설 영재 교육 센터를 비롯해 각 자치 단체에서 운영하는 영재 수업을 받은 풍부한 경험이 있었고 이에 수업을 준비하는 교사들은 수학 영재의 특성을 반영한 수업을 설계해야 한다는 어려움이 있었다. 수학 영재들은 자신들이 흥미를 느끼고 지적 탐구력을 자극시킬

수 있는 과제에 더 적극적인 관심을 보이기 때문에 교육과정에 제시되어 있는 내용보다 심화된 내용, 그러면서도 수학적 의미가 있는 내용을 지도해야한다는 부담감이 있었다.

본 연구에서는 확률 문제를 해결하는 수학 영재들의 토론 과정에서 문제해결에 기여하는 상호작용과 담론의 양상, 담론적 갈등을 좀 더 심층적으로 이해하고자 하기에 연구에 참여하는 교사와 학년 초부터 수학 수업에 참여한 담임 반의 학생들 중 연구 대상을 모집했다. 이 반의 구성을 살펴보자면, 입학 때부터 학급 재적은 20명이며 그 중 남학생은 16명, 여학생은 4명이다. 이 반의 학생들은 전체적으로 활동적이다. 수업을 진행하는 교과 담당 교사들도 이 반의 분위기는 활발하며, 수업에 적극적으로 참여한다고 언급한다. 또한 학생들이 호기심이 많고 지적 탐구력이 높아 학교 행사나 교내 과학 탐구 대회나 연구 대회에 참가하는 것을 좋아한다. 남학생의 수가 여학생의 수에 비해 훨씬 많기 때문에 여학생들은 여학생들끼리 친밀도가 높으며 일반 인문계 고등학교에서는 학급의 분위기를 여학생들이 주도하는 경우가 많은데, 이 학급의 경우에는 남학생들이 주도하는 경향이 있다. 학생들은 주중에는 기숙사 생활을 하면서 학교에서 방과후 활동과 자기주도 학습에 참여하고, 주말에는 다수의 학생이 수학 학원, 과학 학원에 다니며 선수 학습을 하는 것으로 나타났다.

2.3. 연구 절차

본 연구는 수학 수업에서 교사와 학생들의 상호작용의 양상과 담론의 특징에 초점을 맞춘 선행 연구들(방정숙, 2001; 방정숙, 2004; 지정은, 2006; 나미영, 2006; 김우현, 2009; 박정은, 2011; Cobb & Yackel, 1996; Cobb, 1999; Sfard & Kieran, 2001; Kieran, 2001; Empson, 2003; Sfard, 2007; Sfard, 2008; Soter 외, 2008; 김동중 외, 2010; Radford & Roth, 2011; Imm & Stylianou, 2012), 확률 교수(teaching)에 관한 연구들(Castro, 1998; Jones 외, 1999; Cobb 외, 1993; Pijls, Dekker & Hout-Wolters, 2007; Ron, Dreyfus & Hershkowitz, 2010; Nilsson & Ryve, 2010; Chernoff & Zazkis, 2011; Pantziara & Phillippou, 2012; Ryve, Nilsson & Pettersson, 2013; Francisco, 2013)을 문헌 검토 하는 것으로부터 출발했다.

확률 교육에서 확률 문제를 해결하는 데에 필요한 확률의 수학적 정의와 공식이 강조되고, 형식적인 계산 능력에 초점을 맞추는 현상은 많은 선행 연구에서 확률 교육의 한계로 지적되어 왔다. Chernoff와 Zazkis(2011)는 학습자의 초기 추론 방식을 고려하여 개인적인(personal) 확률에서 수학적으로 중재된(mathematically conventional) 확률로 나아가는 교수 학습 관점인 desirable pedagogical approach의 중요성을 강조한다. Castro(1998)는 확률 이론의 준경험적 특성을 부각시킬 수 있으며 개념의 변화(conceptual change)를 유도할 수 있는 교수학습 과정이 반영된 학습 내용과 교수 방법을 제시하고 실제 적용한 결과 유의미한 효과가 있음을 밝혀냈다. Jones 외(1999)은 기반-연구의 틀(research-based framework)로부터 교수 프로그램(instructional program)을 적용하였고, 이는 표본 공간에 대한 오개념을 극복하고 부분-부분, 부분-전체 추론을 가능하게 하였으며, 확률적 사고를 하는 데 확률에 대한 언어를 사용한다는 것에 유의미함을 밝혀냈다. 더욱이 그들의 교수 모델을 적용한 학생 중 상당수는 확률적 사고에서 뚜렷한 성장을 보여주기도 하였다.

본 연구에서는 학습자의 초기 추론으로부터의 확률 교육을 강조한 Chernoff와 Zazkis(2011)의 관점과 Castro(1998)의 교수 모델과 Jones 외(1999)의 교수 모델을 응용하여 수업을 설계하고 적용한다. 또한 학습은 대상 수준 학습과 메타 수준 학습으로 구분되며 메타 수준의 학습이란 새로운 메타 규칙이 도입되고, 기존에 다루던 방식대로 대상을 다루는 것이 아닌 새로운 방식으로 다루는 학습을 말한다(Sfard, 2007). 메타 수준 학습을 위해서는 담론적 갈등이 필요한데, 이는 기존 수업에서 도입부분이나 학습이 이루어진 후 그 속에 숨겨진 의미를 알아낼 때 필요한 과정과 유사하다고 볼 수 있다. 따라서 연구자는 현재 고등학교 교과서에 제시된 확률 문제는 본 연구에서 주된 관찰의 대상인 문제해결 과정

에서의 상호작용과 담론, 담론적 갈등을 일으키는데 한계가 있다고 생각하여 기존 연구들을 기반하여 주요 단원의 도입 부분이나 학습이 이루어진 후 그 속에 숨겨진 의미를 알아내는 과정에서 관찰하고자 하는 양상이 잘 드러날 수 있는 확률 과제를 설계했다.

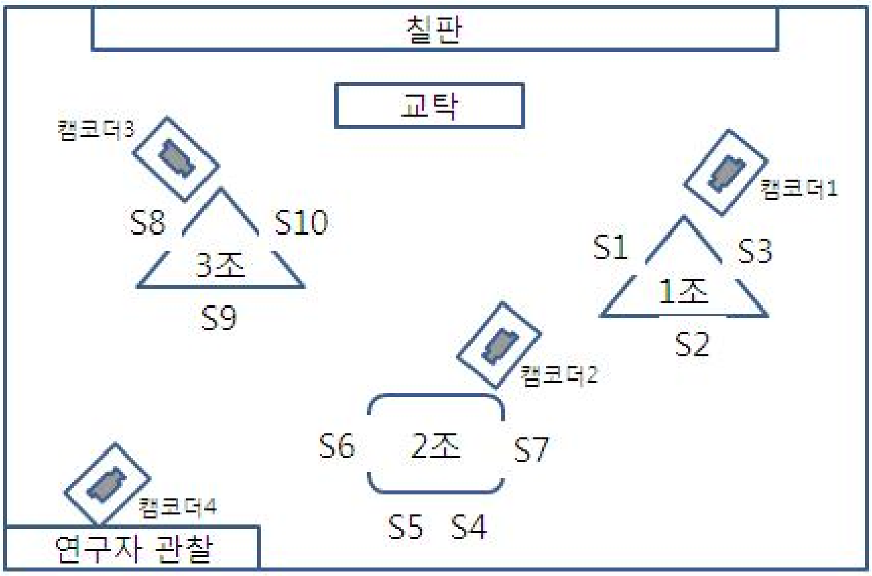
본 연구는 확률 문제를 해결하는 수학 영재들의 토론 과정에서의 상호작용과 담론의 양상, 담론적 갈등에 관한 실재를 최대한 있는 그대로 보고, 연구 사례가 갖는 일체의 특징적 양상을 있는 그대로 정확하게 묘사하고 자료들 간에 나타나는 일정한 규칙성을 분석과정을 통해 유도하고자 한다. 이에 따라 연구 대상을 연구 참여자인 교사와 함께 과학고등학교 입학 이후 수업을 해 온 담임 학급의 학생 11명으로 모집했다. 또한 연구 참여자는 해당 문제와 관련된 내용 영역을 미리 선수 학습하지 않은 학생으로 제한해 교사와 학생, 학생과 학생 간 상호작용의 역동적인 특성을 부각시키도록 했다. 연구 참여자인 교사와의 면담 후에 11명의 학생을 성적과 개인 성향을 파악해, 3~4명으로 구성된 3조로 소그룹을 만들었다. 소그룹별로 지적 권위가 한 쪽으로 치우쳐 상호작용과 담론적 갈등을 방해할 우려가 있어 각 조의 조원은 비슷한 성적을 갖는 참여자로 구성하였다. 연구를 진행하던 중 1, 3차시의 수업에는 모집한 연구 대상이 S1~S10이 모두 참여했지만, 2차시에는 S3 대신 S11가 참여하였으며, S4는 개인 사정으로 참석하지 못하였다.

본 연구가 진행된 과정을 살펴보면 아래 <표 Ⅲ-1>와 같다.

<표 Ⅲ-1> 연구 절차

날짜	연구 내용
2012. 03 ~ 2013. 07	문헌 연구
2013. 08 ~ 2013. 09	연구 참여자(교사)와의 면담 및 과제 설계
2013. 10 ~ 2013. 11	예비 관찰 및 수업 관찰
2013. 11 ~ 2013. 12	결과 정리 및 해석

수업은 토론 중심 수학 영재 수업에서의 학습의 양상을 관찰하기 위해 100분씩 3회 진행되었다. 과제 설계 이후 예비 관찰은 1차시 수업과 2차시 수업 중 일부 과제에 대해 연구 참여자인 교사가 수업을 담당한 7학급 중 두 학급에서 진행되었다. 예비 관찰 이후 교사와 연구자는 면담을 통해 과제 중 어색한 문장, 문제 해석의 오류 가능성 등을 파악하고 개선하는 과정을 거쳤다. 이후 수업 관찰은 과학고등학교 내의 수학과 연구실에서 이루어졌다. 매 수업마다 연구자는 참여 관찰을 하였고, 각 조별로 캠코더와 녹음기를 설치해 전 과정을 녹화 및 녹음하였다. 그리고 교실 전체의 모습을 담기 위해 연구자는 교실 뒷부분에 캠코더를 설치하고 이동하면서 양상을 관찰하였다. 처음에는 연구 참여자들이 캠코더와 녹음기를 의식하였지만, 1차시 수업 중 약 20분 정도가 지나자 평소와 같이 자연스러운 담론이 진행됨을 관찰할 수 있었다. 연구가 진행된 교실의 배치는 아래 [그림 Ⅲ-1. 교실 배치]와 같다.



[그림 Ⅲ-1] 교실 배치

매 수업 시간 마다 각 조 앞에는 캠코더 1~3을 설치하여 학생들의 얼굴 표정이나 행동을 포착하였다. 그리고 각 조마다 책상 위에 녹음기를 설치하여 담론이 보다 잘 녹음되도록 하였다. 교실 뒤에는 캠코더 4를

설치해 학생들의 발표와 칠판에 판서된 내용뿐만 아니라 교사의 움직임 등을 주로 잡았다. 캠코더 4는 연구자가 직접 촬영하며 주목할 만한 장면들이 포착되면 줌 인하여 카메라에 담았다. 연구자는 촬영을 하며 각 조에서 일어나는 상황과 인상적인 장면들에 대해 필드 노트를 작성했다. 매 수업 후에는 캠코더에 녹화된 내용과 녹음기에 녹음된 내용을 분석하고, 다음 수업을 위해 개선책을 찾고, 연구 대상인 교사와 함께 면담을 진행했다. 이를 통해 연구자의 눈으로 관찰한 내용은 교사의 의견과 공유되면서 자료의 객관성을 획득할 수 있었다.

3. 자료 수집 및 분석

3.1. 자료 수집

본 연구에서는 자료 수집을 위해 교실 관찰, 교사 면담, 학생 면담, 수업 녹화, 연구자의 기록 방법, 학생이 제출하는 문서자료 수집 등을 수행한다.

교실 관찰은 1명의 교사의 3차시 분의 수업 관찰을 시행한다. 확률 문제를 해결하는 수학 영재들의 토론 과정에서의 상호작용과 담론의 양상, 담론적 갈등에 관한 실재를 보고자 하기 때문에 각 차시별로 수업은 100분 동안 진행한다. 연구 대상 학생들은 1학년 1학기에 수학에 제시되는 경우의 수, 순열, 조합의 내용은 학습한 상태였다. 따라서 내용영역은 교육과정에서 지도되는 확률 부분 중 순열, 조합, 중복순열, 중복조합, 확률의 정의, 독립성에 초점을 맞추도록 한다. 특히 단원의 도입 부분이나 학습이 이루어진 후 그 속에 숨겨진 의미를 알아내는 과정에 초점을 맞춰 수업을 진행한다. 각 차시별 주요 내용 요소를 정리하면 <표 Ⅲ-2>과 같다.

<표 Ⅲ-2> 각 차시별 주요 내용 요소

차시	수업 시행 날짜	주요 내용 요소
1	2013. 10. 8	순열, 조합, 중복순열, 중복조합, 수학적 확률, 통계적 확률
2	2013. 10. 11	확률의 정의, 확률의 계산
3	2013. 11. 5	독립성, 독립시행

교실 관찰에서는 연구 목적에 따른 연구 문제에 답하기 위해 확률 문제해결에 기여한 상호작용과 담론의 양상, 확률 문제해결 과정에서 나타난 담론적 갈등이 어떻게 문제해결에 기여하는지, 혹은 기여하지 못하는지를 중심으로 관찰한다. 모든 관찰 수업의 과정을 캠코더로 녹화하고, 수업관찰 후에는 사후관찰을 위하여 교사, 학생과 면담을 실시한다. 문서자료 수집을 위해서는 관찰된 모든 수업과 관련된 학생들의 학습지를 수집하고 교실 수업 자료와 면담 자료를 전사한 자료를 구성해 분석의 기초자료로 활용한다. 수업 관찰 중 본 연구의 목적에 맞는 현상을 대표하는 예를 선택하여 분석한다.

3.2. 자료 분석

본 연구의 자료 분석은 수업 과정 속에서 분석을 요하는 중요한 현상을 포착하여 교사와 학생간의 상호작용하는 담론을 생생하게 기술하는 귀납적 분석을 한다. 우정호 외(2006)에 따르면 귀납적 분석은 연구사례에 대한 어떤 개념적 틀 또는 그에 따른 사전의 분명한 이론적 전제(명제) 등이 없이, 수집된 자료를 분석함으로써 연구현상에 관해 체계적으로 기술하거나 또는 의미 있는 이론적 결론을 유도하는 것이다. 본 연구에서는 사례 연구 분석에서 제일 중요시되고 가장 높은 사용빈도를 나타내는 기법 중 기술적 분석과 패턴 분석을 한다.

교수학습 상황에서의 상호작용과 담론에 관한 선행 연구에서는 담론을

코딩(coding)[7]할 때, 일방적 또는 대화적 틀, IRE 패턴, ERE - PD 패턴, 교사의 질문(TQ) - 학생의 질문(SQ), 절차적 질문(P), 개념적 질문(C)의 틀 등 연구 목적과 연구 문제에 적합한 분석 틀을 적용해 코딩한다.

본 연구에서는 확률 문제를 해결하는 수학 영재들의 토론 과정을 살펴본다. 또한 본 연구의 두 번째 연구 문제와 관련된 현상인 담론적 갈등은 (서로 완전히 달라서) 비교할 수 없는 담론들 사이의 갈등이며 전문가의 담론적 방법의 수용과 합리화(개인화)를 통해 해결될 수 있다. 따라서 본 연구에서의 자료 분석은 특히 교사와 학생 사이의 토론에 초점을 맞춰 진행한다.

Soter 외(2008)는 일반 교과와 관련된 다양한 토론 중 고차원의 학습과 이해에 생산적인 토론을 분석하기 위해 교사와 학생의 질문, 정교한 설명의 존재, 추론의 핵심 단어의 존재, 설명적 대화의 존재에 따라 담론을 코딩하고 분석했다. 본 연구에서는 확률 문제해결 과정에서 문제해결에 기여한 상호작용의 양상과 담론의 특징을 살펴보고 담론적 갈등이 문제해결에 어떻게 작용하는지를 살펴보고자 한다. 이에 따라 그들의 연구에 기반하여 담론의 특징(discourse features)을 살펴보며 분석 틀에 따라 자료의 분석을 수행하고자 한다. 연구자들이 선행 연구에 기반해 코딩한 담론의 특징은 고차원의 사고(일반화, 분석 및 추측)를 유도하는 교사와 학생의 개방형 질문(authentic questions), 보충 질문(uptake), 그 외 질문들(questions)과 외적 연결(정서적, 텍스트 간의 관계, 공유된 지식)을 유도하는 교사와 학생의 질문, 학생의 상세한 설명(elaborated explanations), 학생의 탐구하는 대화(exploratory talk), 추론하는 맥락에서 사용하는 추론 단어(reasoning words)인데, 교사와 학생에게 관찰된 담론의 특징을 정리하면 아래 <표 Ⅲ-3>와 같다.

7) ‘코딩(coding)’은 연구하는 현상의 내면적 구조를 분석하기 위하여 자료에서 반복적으로 등장하는 어휘, 주제, 장면 등을 조사하여 일정한 코드를 부여함으로써 자료를 체계화하는 작업을 말한다(조용환, 1999, p.53).

<표 Ⅲ-3> 교사와 학생에게 관찰된 담론의 특징

교사 담론의 특징	학생 담론의 특징
개방형 질문	개방형 질문
시험하는 질문(test question)	시험하는 질문(test question)
다른 질문(other question)	다른 질문(other question)
보충 질문	보충 질문
고차원의 사고와 관련된 질문(high-level thinking question)	고차원의 사고와 관련된 질문(high-level thinking question)
정서적 반응을 유도하는 질문(affective response question)	정서적 반응을 유도하는 질문(affective response question)
텍스트 간의 관계에 관한 질문(intertextual reference question)	텍스트 간의 관계에 관한 질문(intertextual reference question)
공유된 지식에 관한 질문(shared knowledge question)	공유된 지식에 관한 질문(shared knowledge question)
	상세한 설명
	탐구하는 대화
	추론 단어(예 : 왜냐하면/만약/따라서/내 생각에는/동의와 비동의 등)

그리고 이의 자세한 의미와 예를 살펴보면 <표 Ⅲ-4>과 같다.

<표 Ⅲ-4> 담론의 특징의 의미와 예(Soter 외, 2008, p.381)

코드	특징	의미	예
AQ	개방형 질문(Authentic Question)	개방형 질문: 화자는 상대방이 어떻게 대답하는지 아는 것에 관심이 있다. 대답은 미리 구체화되지 않는다.	“어떻게(How)“를 사용하는 질문이 정교한 질문으로 기능할 수 있다.
TQ	시험하는 질문(Test Question)	구체적인 답을 요구하는 질문	이 소설의 주인공은 누구니?
OQ	다른 질문(Other Question)	수사 의문, 담론의 운영(management)에 관한 질문, 교실의 운영에 관한 질문	다른 사람의 대화를 들을 때에는 어떻게 해야 하죠?
UT	보충 질문(Uptake)	이전에 발화된 것에 대한 보충 질문. 종종 인칭대명사로 등장하기도 한다.	그 일은 어떻게 된거야? 이것의 원인은 뭐야?
HLT	고차원의 사고와 관련된 질문(High-level Question)	분석, 일반화, 추측을 유도하는 질문	(분석)어떻게? 왜? (일반화)무슨 의미가 있느냐? (추측)~라면 어떻게 될까?
AR	정서적 반응을 유도하는 질문(Affective Response Question)	글과 상대방의 감정 또는 상대가 겪은 사건을 연결하는 발언	내 느낌은... 내가 어릴 때에는...
JR	텍스트 간의 관계에 관한	글과 미디어, TV, 신문 등에 소개된 다른	다른 책에서 내가 읽었는데...

	질문(Intertextual Response Question)	글 사이를 연결하는 발언	
SK	공유된 지식에 관한 질문(Shared Knowledge Response Question)	현재 일어나는 토론과 과거의 토론 또는 공유된 지식을 연결하는 발언	지난주, 우리는 ~에 대해 말했지. 우리가 ~ 했던 걸 기억해보자.
EE	상세한 설명(Elaborated Explanation)	학생의 사고가 확장(extension) 단계별로 아이디어를 구성하는 것, 진술에 근거를 부여하는 것과 같이 다소 상세하게 설명된다.	저는 ~~해서 Joseph의 의견에 동의하고 제 생각에 그는 ~~하려는 것 같아요.
ET	탐구하는 대화(Exploratory Talk)	학생들이 몇몇 발언을 통해 지식을 구성하고 공유해가며 근거를 평가해 함께 추론한다. 아이디어에 관해 지속적인 질문을 하고 집단적으로 생각하도록 하는 언어를 사용한다. 대개 추론 단어가 집중적으로 사용되기도 한다.	S1: 넌 왜 그녀가 아이가 되고 싶어 한다고 생각하니? S2: 그녀는 수영하기를 좋아하고 아이들과 함께 있는 걸 좋아하기 때문이야. S3: 그리고 그녀는 아이들과 노는 것을 정말 좋아해. S1: 맞아. S4: 맞아. 만약 그녀가 수영을 하지 않았다면 인생의 흥미를 잃었을 거기 때문에 동의해.

			그리고 그녀는 수영을 할 때, 아이처럼 너무 좋아해.
RW	추론 단어(Reasoning Words)	추론 과정을 나타내는 접속사나 구(phrases)	왜냐하면/만약/따라서/내 생각에는/동의와 비동의 등

본 연구에서 관찰한 확률 문제해결에 기여한 상호작용과 담론, 확률 문제해결 과정에서 나타난 담론적 갈등과 관련된 주요 사례는 토론 과정 중 교사와 학생의 질문이 활발하며, 학생들 사이의 설명과 정당화 과정이 자주 나타난다. 따라서 고차원의 학습과 이해에 생산적 기여를 한 담론의 특징에 초점을 맞춰 상세히 분석한 <표 Ⅲ-4. 담론의 특징의 의미와 예>의 분석틀을 사용하여 본 연구의 수학적 담론을 살펴본다. 또한 연구 참여자 중 교사는 T, 연구자는 R, 학생은 S1부터 S11까지로 코딩해 구분한다.

Ⅳ. 연구 결과

1. 연구 문제 1의 결과

본 연구의 첫 번째 연구 문제는 토론 중심의 수학 영재 수업에서 ‘확률 과제의 문제해결 과정 중 문제해결에 기여한 상호작용의 양상과 담론의 특징은 무엇인가?’ 이다. 수학 영재를 대상으로 한 총 3차시의 수업 중 문제해결에 기여한 특징적인 상호작용은 모호하고 불완전한 풀이를 반성하고 수정하는 양상과 사고를 유도하고 생산적인 기여를 하는 양상으로 구분할 수 있다는 결과를 얻게 되었다. 따라서 본 절에서는 이상의 두 가지 범주를 기반으로 각 사례에서 확률 문제해결에 기여한 상호작용의 양상을 살펴보고, 담론의 특징을 분석한다.

1.1. 모호하고 불완전한 풀이를 반성하고 수정하기

본 연구의 연구 문제와 관련된 확률 과제의 문제해결 과정 중 문제해결에 기여한 첫 번째 상호작용은, 수학 영재들이 확률 문제를 개인적으로 해결하고 소그룹 내에서 풀이에 대한 담론을 진행하는 동안 모호하고 불완전한 풀이를 성공적으로 해결하는 모습이었다. 이 과정에서 수학 영재는 불완전하게 문제를 풀이해 담론을 통해 풀이를 개선하는 문제해결자와 문제를 해결하였으나 그 과정이 불완전해 동료들과의 상호작용을 통해 자신의 풀이를 개선해가는 수학적으로 정당화하는 사람으로서 담론에 참여하였다(Empson, 2003). 특히 담론이 진행되는 동안에는 주어진 상황에 따라 참여하는 양상이 바뀌는 모습도 나타났다. 본 절에서는 확률 문제해결에 기여한 첫 번째 상호작용인 모호하고 불완전한 풀이를 반성하고 수정하는 사례를 살펴보고, 각 사례마다 나타나는 담론의 특징을 분석하도록 한다.

1.1.1. 사례 1

확률 문제해결 과정에서 문제해결에 기여한 첫 번째 상호작용의 양상 중 사례 1은 1차시 중 [문제 5]을 해결하는 1조의 에피소드이다. 연구 대상인 수학 영재들은 1학기에 수학에 제시된 순열, 조합은 학습한 후 연구에 참여하였다. 따라서 순열, 조합에 관한 [문제 1]과 [문제 2]를 해결하는 과정에서는 모든 조에서 간단한 계산 실수 이외에는 어려움 없이 문제를 해결하였다. 그러나 아직 학습하지 않은 중복순열에 관한 [문제 3]을 해결하는 과정에서 2조와 3조는 중학교때 학습한 경우의 수에 관한 지식을 사용해 어렵지 않게 해결했다. 1조 역시 짧은 상호작용으로 중복 가능한 상황임을 깨닫게 된 이후에는 쉽게 문제를 해결했다. [문제 4] 역시 중복순열에 관한 문제이다. 지나치게 일반화하여 풀이를 시작한 3조를 제외하고 1조와 2조는 모두 바로 문제를 해결하였고, 이를 일반화할 수 있는 풀이에 대해 담론을 진행하기 시작했다. 그 후 제시된 [문제 5]는 중복조합에 관한 문제로, 이를 소개하면 다음과 같다.

[1차시 과제 중 문제 5]
한결이는 최근 꽃꽂이의 매력에 빠져있다. 특히 한결이는 장미꽃을 매우 좋아해 빨간 장미, 노란 장미, 녹색 장미, 분홍 장미가 4송이씩 들어있는 바구니에서 꽃을 임의로 선택해 한 화병에 꽂으려고 한다. 한결이가 꽃 두 송이를 화병에 꽂는 경우는 모두 몇 가지인가? 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해보아라.

1조의 수학 영재들은 [문제 1~4]를 해결하는 동안 항상 문제 이해 과정에서 주어진 조건을 점검하고, 모호하게 설명되어 있는 부분은 교사에게 질문해 확인했다. 또한 문제에 주어진 조건은 실제 일상적 맥락에서 이해가 가능한 것인지에 대해서도 논의하였다. 예를 들면, 중복순열에 관한 [문제 4]는 3개의 깃대에 다섯 종류의 깃발을 중복하여 달 수 있고, 이를 이용해 신호를 만들 때 만들 수 있는 신호의 가짓수를 구하는 문제

인데, 깃발을 매는 위치에 따라, 깃발을 보는 각도에 따라 신호가 같아지는지 달라지는지에 대한 논의를 진행하고, 교사에게 질문한 후 문제해결에 대한 계획을 하였다.

수학 영재들은 [문제 5]를 접하고 문제 이해에서 역시 조건에 짧은 담론 이후 바로 문제해결을 위한 계획을 세우고, 실행하였다. [문제 5]를 해결하는 1조의 첫 번째 실행 과정을 살펴보면 다음과 같다.

번호	화자	전사
349	S2	근데 아까 전이랑 비슷한 거 같지 않아?
350	S3	네 송이니까
351	S1	네 송이씩 들어있다. 바구니, 바구니가 몇 개야, 화병이 상관 있나. 화병. 꽃 두 송이를, 네 송이. 음. 한 개씩 뽑는다고 그러면 $\frac{4\times4}{2}$. 아까 한 거지? 두 개를 뽑으면은 무조건 두 개가 배열되니까 근데 이거 순서 상관없으니까 $\div2$를 해야 한다.
352	S2	어? 그런데
353	S2	그래서 장미가 빨간 장미, 노란 장미, 녹색 장미, 분홍 장미가 아! 네 송이씩이구나. 내가 잘못 읽었어.
354	S1	그래 두 개씩 뽑았어. 두 개만 뽑았어. 두 개를 한 개 뽑았어. 4개지?
355	S2	어. 4개.
356	S1	답 12가지.
357	S2	어? 왜?
358	S1	답은 12가지야.
359		(침묵-8초)
360	S2	8가지 아니야?
361	S1	왜? 한 개씩 뽑는 경우는 아까 4개잖아. 아까 두 개를 뽑으면, 중복해서 할 수 있잖아. 한번 뽑은거 또 못 뽑는다는 게 없어.
362	S2	어.
363	S1	$\frac{4\times4}{2}$지?

번호	화자	전사
364	S2	응. 됐어 그럼 8개 아니야?
365	S1	아까 8개고, 어 4×4, 16, $\div2$는 8
366	S2	8
367	S1	그리고 두 개를 뽑아서 넣는 경우는
368	S2	응?
369	S1	(빨, 빨이라 적힌 풀이에 동그라미를 하며)두 개, 두 개, 두 송이 뽑는 거잖아.
370	S2	그, 아까 전에 4×4
371	S1	아, 그렇구나.
372	S2	포함되는거 아니야?
373	S1	아, 그렇네. (12를 지우며)그럼 8개인가? 답?
374	S2	내 생각엔 그래. 어떻게 생각해?
375	S3	아직 못 풀었어.
376	S1	꽃을 뽑는 순서도 관계있나?
377	S2	순서보다도 이거는 배치가 상관 있을 것 같은데?
378	S3	꽃을 뽑을 확률이 바뀌는 거 아닌가

[문제 5]를 접하고 S2는 이전에 풀었던 문제와 비슷한 맥락이라고 이해했다(번호 349). 이후 S1은 화병에 넣을 수 있는 꽃은 중복이 가능하기 때문에 4×4가지 경우가 가능하지만, 화병에 넣는 것은 순서에 상관이 없기 때문에 $\div2$를 한다고 풀이한다(번호 351). 이후 S1은 두 가지 모두 같은 색의 꽃을 뽑는 4가지 경우를 더해 답은 12가지라 풀이한다(번호 354, 356). 이에 S2는 S1의 풀이를 불완전하다 생각해 답은 8가지라고 주장한다(번호 357, 360). S1은 자신의 실행 과정을 다시 자세히 설명하고(번호, 361, 363, 365, 367), S2는 두 가지 모두 같은 색의 꽃을 뽑는 경우가 중복되어 세어지고 있다는 점을 지적한다(번호 368, 370). 이후 S1과 S2는 답이 8개라는 것에 동의를 하고(번호 373, 374), S3의 풀이를 확인하기 위해 발언한다(번호 376). 그러나 아직 S3는 실행 과정 중에 있어 담론에 적극적으로 참여하지는 못했다. 1조에서는 순서를 고려한 수 세기의 경우에서 선택한 결과가 순서가 있느냐 뿐만 아니라 선택한 시간적 순서까지 고려해야하는지에 담론이 진행되었는데, [문제 5]에서도 꽃을 뽑는 시간적 순서를 고려해야하는지에 대해 S1이 질문한다(번호 376). S2

는 꽃을 뽑는 시간적 순서보다 배치된 결과가 관계있다는 의견을 내놓았고(번호 377), S3는 꽃을 뽑는 시간적 순서를 고려하면 각 꽃을 뽑을 확률이 바뀐다는 의견을 내놓았지만 더 이상 시간적 순서에 대한 담론은 진행되지 않았다(번호 378).

이상의 첫 번째 실행 과정에서 담론의 주요 참여자는 S1과 S2이다. 특히 S1은 담론을 주도적으로 이끌어가고 있지만, 불완전하게 문제를 풀이해 S2와의 담론을 통해 풀이를 개선하고 있다. 이때 S1과 S2는 모두 문제해결자로 담론에 참여하고 있다. 다만 아직까지 이들은 문제해결을 올바르게 하지 못하였고, 이를 모든 조원이 인식하지 못한 상태였다.

이후 교사는 1조의 진행 상태를 점검하기 위해 1조의 담론에 참여하였고, [문제 5]의 실행 결과 조원들의 답이 어떻게 나오는지를 확인하였다. 그러나 조원들이 오답을 이끌어낸 것을 확인하고 문제해결의 반성 과정을 주도적으로 이끌며 기존 풀이의 오류를 찾고, 올바른 풀이를 새롭게 생각할 수 있도록 기다리는 모습도 보여주었다.

특히 위 담론의 특징을 자세히 살펴보면 다음과 같다. S2의 HLT(번호 357)로부터 S1의 EE(번호 361)가 유도되고, S1, S2, S3는 ET(번호 363~375)로부터 기존 S1이의 풀이의 근거를 평가하고 풀이를 수정하게 된다. 이후 1조의 담론을 살펴보면 아래와 같다.

번호	화자	전사
401	T	세 명 다 답이
402	S1	아니 이거는 아니
403	T	8가지가 어떻게 나온 거에요? 한 번 설명을 해주세요.
404	S1	아니 이거는 그냥 빨강 4개, 여기 앞에 문제에서도 있었는데 뭐였더라. (문제 3을 가리키며)네 가지 과일 중에서
405	S2	4번? 3번
406	S1	하나를 선택해서 아이스크림에 넣는 과일의 가지 수는 뭐였더라
407	T	그럼 지금 3번이랑 5번이 똑같은 문제에요?
		(중략)
417	T	지금 결과물만 보는 상태에서
418	S2,	그건 8개인데

번호	화자	전사
	S1	
419	T	8개가 어떻게, 나열을 한 번 해봐.
420	S2	(펜으로 세며)빨빨, 빨노, 빨분, 노 어, 뭐지?
421	S3	아까 빨노를 했으니까
422	S1	그러니까 ÷2를 한 이유가 아까는 1번에서는 다 뺐단 말이야. 이게 12가지에서 아 뭐였냐 2번에서는 12가지에서 중복된 걸 다 뺏어요. 그냥 6가지 다 따져서. 근데 이건 경우의 수가 좀 많아졌나?
423	S2	아! 이걸 ÷2로 하면은 좀 이상한게 빨빨이라는 경우가 있잖아. 빨빨이라는 경우는 두 가지 경우가 안 나오고 한 가지 경우가 나오거든. 이 그림에서 그래서 ÷2로 하는 건 약간 문제가 있는 것 같아.
424	S1	아니 빨빨이 하나밖에 안 나오지 않냐? 아, 아니야, 아니야.
425	S2	5번, 5번.
426	T	4×4에 뭐뭐가 지금 세어지고 있어?
427	S2	(손으로 세며)빨빨, 빨노, 빨분, ...
428	S1	색깔 같은 것도 다 세지고 있잖아
429	S2	다 세지고 있는데? 빨노 뭐 이런거는 두 가지 경우가 나오지. 그렇지?
430	S1	빨빨이 두 번 나온다고 여기서?
431	S2	한 번 나오지.
432	S1	아니, 아닌가? 아 아니네.
		(중략)
446	T	자 어떻게 결론이 났어요. 그래서?
447	S2	어~ 우선 각자 하고 있는데,
448	T	각자 하고 있어? 결론을 셋이서 내야 될 것 같은데?
449	S1	4, 4, 4
450	S2	한번 얘기를 해보고,
451	T	얘기를 해 보세요.
452	S2	어, 저 같은 경우에는 아까
453	S1	답은 10, 10가지.
454	S2	아까 전에 ÷2 같은 경우를 했을 때는
455	T	들어봐 한 번 S2가
456	S2	(활동지를 보며 S1에게)전체 케이스를 그림으로 그려봤을

번호	화자	전사
		때, 똑같은 개수가 2번 나온다는 전제 하에 ÷2를 한 건데, 지금 우리가 그려봤을 때 어, 4×4로 했을 때 16가지가 나온 거는 빨빨, 노노, 녹녹, 분분 이거는 다르게 나올 거니까 다르게 해서 나올 수 없는 경우, 그러니까 유일한 케이스 나눈 얘기인데, 그 유일한 케이스를 나눠버리면 맞지 않는다라고 해가지고 일단 그림을 그릴 때 같은 색깔 두 개를 고른 경우는 일단 배제하고 그림을 그리면은 (수형도를 가리키며)어, 빨강을 했을 때 노, 녹, 분, 노랑을 했을 때 빨, 녹, 분, 녹색을 했을 때 빨, 노, 분, 분홍색을 했을 때 빨, 노, 녹이 나오는데, 그러면은 4×3해서 12가지가 나오고, 그거는 모든 케이스에서 2가지 경우가 나오니까 ÷2를 해서 우선 6가지가 나오는데, 아까 전에 배제해놓았던 빨빨, 노노, 녹녹, 분분의 케이스를 더해서 그럼 4가지 더하는 거니까 그래서 10가지가 나온다라고 생각하고 있어요.
457	S1	그러니까 우리가 아까 뭐였더라. (문제 2번의 활동지에 ab를 적으며)ab를 뽑으면은 이거 2개로 나열할 수 있는 경우의 수가 ba, ab 2가지 경우야, 다. 그래서 2로 나누면은 그 중복된 걸 다 뺄 수 있다. 근데 하지만, (문제 5번에 aa를 쓰며)여기서는 아까 문제하고 다르게
458	S2	중복이 안 되는 경우가 있다.
459	S1	그 중복되는 것도 생긴단 말이지. aa도 나와. 그래서 헷갈린 거 같아. 그래서 aa가 얘는 만들 수 있는 경우의 수는 1가지란 말이지. 그래서
460	S2	(안 들림)를 더해준다.
461	S1	그래서 얘는, 얘는 ÷2하면은 0.5가 되는 거잖아. 1개 밖에 안 나오는데, 그래서 맞지 않는 거지.
462	S2	그래서 애초에 2개가 나오지 않기 때문에 2로 나누는 게 안 맞는다.
463	S1	응.

번호	화자	전사
464	T	S3이 이해되고 있어?
465	S3	네.
466	S1	그래서 답은 무조건 해 보면
467	S2	10가지.

교사는 8가지라는 잘못된 답이 나온 것을 확인하고 8가지의 경우를 모두 나열하고(번호 403, 419), 4×4의 경우를 모두 나열하도록 해 $\div2$의 과정이 올바른 것인지 판단하도록 한다(번호 426). 특히 교사는 스스로 직접 문제해결의 핵심 아이디어를 제공하지 않고, 직접 깨우치도록 하는 유도하는 모습을 보여줬다(번호 451, 455). 이에 S2는 화병에 모두 같은 색을 넣는 경우 4가지와 다른 색을 넣는 경우 $\frac{4\times3}{2}$가지를 더해 10가지라는 올바른 실행을 하게 된다(번호 456). 그 후 S1과의 상호작용으로 이전의 풀이에서 어떤 부분이 잘못 되었는지를 분석하고 반성한다(번호 457~463).

교사에 의해 반성이 주도된 두 번째 실행 과정의 주된 참여자는 S1, S2이다. 이에 반해 S3는 소극적인 성격으로 토론 내내 적극적으로 참여하는 모습은 자주 보여주지 않았는데, 교사는 계속 S3에 관심을 보이며 담론에 참여하도록 유도하고 있다. 특히 기존 해결 과정의 반성 이후 새로운 실행이 이루어진 담론에서는 S2가 문제를 해결하고 문제를 해결했지만 직접 경우의 수를 모두 세는 방법으로 해결한 S1과의 상호작용을 통해 자신의 풀이를 개선해가는 수학적으로 정당화하는 사람으로 참여했다.

이 담론의 특징을 살펴보면 먼저 교사의 AQ(번호 403)와 HLT(번호 407)로 기존의 풀이가 왜 틀렸는지가 인식되고 있다. 이후 S1과 S2는 ET(번호 408~416)에 참여하여 기존 풀이의 정당성을 고찰하지만, 잘못되었다는 것을 직관적으로 인식할 뿐 논리적으로 설명하지 못한다. 이에 교사가 UT(번호 417)를 제시해 S1과 S2는 EE(번호 422, 423), ET(번호 427~432)로 기존 풀이가 잘못 되었음을 깨닫게 된다. 이후 교사의 합의된 결론을 이끄는 OQ(번호 446, 448) 이후 S2는 EE(번호 456)으로 새로

운 풀이를 설명한다. 이후 S1와 S2는 ET(번호 457~463)을 통해 기존의 풀이가 중복된 경우를 잘못 고려해줬기 때문이라는 결론을 내린다.

1.1.2. 사례 2

확률 문제해결 과정에서 문제해결에 기여한 첫 번째 상호작용 중 사례 2는 1차시 중 [문제 6]을 해결하는 2조의 에피소드이다. 2조의 조원들은 아직 학습하지 않았지만 중복순열에 관한 [문제 3]과 [문제 4]를 쉽게 해결하고, 일반화를 시켜 그 과정에서 시각화하는 모습을 보여주기도 하였다. 그 후 제시된 [문제 5]를 접한 2조는 답이 1조와 마찬가지로 8가지인지 10가지인지에 대한 논쟁이 진행되었으나 교사의 개입으로 자신의 문제해결 과정을 반성하여 올바른 답을 얻었다. [문제 6] 역시 중복조합에 관한 문제로, 이를 소개하면 다음과 같다.

[1차시 과제 중 문제 6]
한결, 은결, 나영이는 야구를 매우 좋아해 경기를 직접 보기위해 야구장을 찾았다. 그런데 한결이가 이벤트에 당첨되어 한 음료수 회사에서 5개의 음료수를 받았다. 이 음료수를 한결, 은결, 나영이에게 남김없이 나눠주는 경우는 모두 몇 가지인가? 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해 보아라.

2조의 수학 영재들 역시 [문제 1~5]를 해결하는 동안 문제 이해 과정에서 주어진 조건을 점검하고, 모호하게 설명되어 있는 부분은 교사에게 질문해 확인했다. 2조의 조원들은 [문제 6]를 음료수의 종류가 모두 같은 것인지, 한 사람이 음료수를 못 받아도 되는 건지에 대해 교사에게 질문하고 확인했다. 그 후 생성 전략(generative strategy)[8)]이 답을 구하는 더

8) Polaki(2002)에 의하면 생성 전략(generative strategy)은 어떤 시행의 결과를 논리적이며(logical) 유의미한(meaningful) 구조로 모두 나열하여 경우의 수를 구하는 전략이다. 예를 들면, 동전 1개와 주사위 1개를 던졌을 때 나오는 결과를 “앞면-1, 앞면-2, 앞면-3, 앞면-4, 앞면-5, 앞면-6, 뒷면-1, 뒷면-2, 뒷

빠른 방법이라 제안했지만, 학급 전체에 수학적 정당화란 구조화된 수학적 근거를 통해 논리적으로 이루어져야한다는 사회수학적 규범이 있기에 수학적 관계를 고려한 실행 과정에 도입한다. [문제 6]를 해결하는 2조의 첫 번째 실행 과정을 살펴보면 다음과 같다.

번호	화자	전사
978	T	노동이 싫을 땐 생각을 하면 되겠죠.
979	S6	3+3+3+ 다섯 번 하면 되는 거니까. (S7에게)아니야? 맞지?
980	S7	아니지. 근데 결국에. 아 잠깐만
981	S6	그러니까 이 음료수가 위에서부터 떨어진다 하면, (활동지에 수형도를 그리며)이건 누구한테 갈지 3가지 경우, 다음 건 누구한테 갈지 +3, 다음 거 누구한테 갈지 +3, 그래서 5번 더해가지고 이렇게 되는 거지 5×3.
982	S5	15가 맞긴 해.
983	S7	이제 나 방법,
984	S4	설명으론 납득되기는 하는데 나는 왜 이거
985	S7	(S6에게)이거 왜 (음료수 5개를 ○로 표현하고)하나하나가 음료수라 하고 (각 ○사이에 |와 양 끝에 |를 넣으며)여기 공간이 아니 하나, 둘, 셋, 6개가 있어.
986	S5	그냥 한결이를 5개 주면, 은결이는
987	S4	(웃음)그냥 나 그렇게 할 일을 이렇게 하고 있어
988	S7	여기 칸막이를 치는거야. 두 개를 쳐. 그럼 공간이 세 개로 나뉘잖아.
989	S6	아 칸막이?
990	S7	어. 알아들어?
991	S6	그래서 6개? ${}_6C_2$? 아 아니다. 6
992	S7	둘, 넷, ${}_6C_2$
993	S6	${}_6C_2$ 맞네. ${}_6C_2$!
994	S5	음.
995	S7	2!
996	S6	칸막이를 두 개 치면

면-3, 뒷면-4, 뒷면-5, 뒷면-6” 과 같이 나열하여 총 12개 경우가 가능하다는 것을 아는 것 과 같다.

번호	화자	전사
997	S7	세 개 공간으로 나눈다고
998	S5	(S7의 활동지를 보며)아~ 칸막이.
999	S6	아 근데 중복하면 안 돼. 그러니까 C맞네. 중복하면 안 되니까.
		(중략)
1013	S4	아니, 아니 잠시만
1014	S5	중복되도 되는 거 아니야?
1015	T	(S6에게)그게 그러면 덧셈의 관계가 있어요?
1016	S5	중복되도 되지.
1017	S4	중복된다는 의미가 뭐야?
1018	S6	(T에게)중복되지 않기 때문에 어느 거를 먼저 나눠준다, 그런 의미가 없잖아요.
1019	S5	중복되게 하나를 뽑으면 그냥 나영이가, 은결이가 0개 받는거 아니야?

S7은 [문제 6]을 해결할 아이디어로 칸막이를 세우는 것을 계획해 구하려는 경우의 수가 ${}_6C_2$하는 것을 제안한다(번호 985, 988, 992). S6은 먼저 S7과 다르게 3+3+3+3+3로 경우의 수를 구하지만(번호 979, 981), 시각화되고 수학적 구조를 반영했다고 생각하는 S7의 계획을 들으며 이에 동의한다(번호 993, 999). 실제 S7의 ${}_6C_2$는 0개의 음료수를 받는 경우를 모두 고려한 것이 아니지만, S5는 ${}_6C_2$이 모든 경우를 고려한 결과라고 생각하고 동의한다(번호 998, 1019). 여기서 S5, S6, S7은 모두 [문제 6]을 해결하는 문제해결자로 담론에 참여하고 있다.

이 담론의 특징을 살펴보면, 문제를 해결하는 새로운 아이디어를 제시한 S7은 EE(번호 985, 988, 992)를 통해 자신의 아이디어에 근거를 부여하며 자세히 설명한다. 한편 S4는 이 담론에서 중복의 의미에 초점을 맞춘 참여자지만(번호 1017), 이러한 분석과 추측을 요하는 HLT는 여기에서 깊게 탐구되지 않는다.

번호	화자	전사
1039	T	다 같이 15개 나와요?
1040	S4,	(함께)네. 15개가 맞는데

번호	화자	전사
	S5	
1041	T	15개가 어떻게
1042	S5	(S7에게)이거 칸막이를 다시 설명해주라.
1043	S4	칸막이가
1044	S7	(활동지의 그림을 보며)여기 보면, 5개 물병이 있어.
1045	S4, S5	응.
1046	S7	그럼 이제 어디든 여기 6개 중에 아무데나 칸막이 2개를 설치하는 거야. 칸막이 2개를 하면 공간이 3개로 나뉘잖아.
1047	S5	응.
1048	S7	만약에 같은, 그 다음에 맨 왼쪽에 있는 공간을 한결이 것, 중간에 있는 걸 은결이 것, 나중이 나영이 것이라고 해. 근데 좀 의심가는 경우, 좀 헷갈리는 경우 있잖아. 같은 것을 뽑는 경우 있잖아.
1049	S5	응.
1050	S7	그러면은 은결이는 음료수를 못 받는 거지.
1051	S5	응.
1052	S7	이런 경우에는, 여기 그냥 한결이가 하나 갖고 나영이가 네 개를 갖는 거지. 그러니까 이런 식으로 해서 ${}_6C_2$지. 이거 6개 중에,
1053	S5	${}_6C_2$라고 하면 15가 어떻게 나와?
1054	S7	아 잠깐만.
1055	S6	${}_6C_2$ 맞는데?
1056	S5	아 나오나? 아 그래? 아 그렇구나.
1057	S5	${}_6C_2$
1058	S6	(S7에게)뭐 문제 있어?
1059	S7	같은 거 뽑는 거
1060	S6	응. ${}_6C_2$. (S7의 그림을 가리키며)같은 거 뽑을 수 있는 거지.
1061	S5	그럼 이건가?
1062	S7	아니지.
1063	S6	응?
1064	S7	$6 \times 6 = 36$아니야?

번호	화자	전사
1065	S6	그렇네~
1066	S5	그런데 같은 곳에 들어갈 수 있는 거니까 (S7의 그림을 가리키며)
1067	S4	이 칸막이도 6개 칸 들어갈 수 있고, 이 칸막이도 6개 들어갈 수 있고
1068	S7	그러니까
1069	S4	36

교사는 2조의 담론에 개입하여 모든 참여자들의 답이 15개로 통일된 것을 보고 이에 대한 설명을 유도한다(번호 1041). 이전에 S7이 설명했던 문제해결 아이디어를 잘 이해하지 못한 S5는 다시 설명해줄 것을 요구하고(번호 1042), S7은 자신의 아이디어를 상세하게 설명한다(번호 1046, 1048, 1050, 1052). S5는 중복될 수 있다는 것과 음료수를 0개 받는 사람이 있다는 것도 알았지만, 직접 세는 절차 중 실수가 있었고, ${}_6C_2$도 15와 같은지 의문을 갖는다(번호 1053, 1056). 그런데 S7은 S5에게 설명을 하던 중 자신의 아이디어에 미처 고려하지 못한 경우가 있음을 깨닫고(번호 1054), 칸막이가 같은 곳에 들어갈 수 있기 때문에 6×6을 하여 전체 경우의 수가 36개라는 결과를 얻게 된다(번호 1059, 1064, 1068). S4는 S7의 수정을 보완하는 모습을 보인다(번호 1067). 여기서 모든 참여자는 적극적인 문제해결자로 담론에 참여해 자신들의 문제해결 전략에 대해 의문을 갖고 개선해가는 모습을 보여준다.

이 담론의 특징을 살펴보면 다음과 같다. 교사가 개입하여 설명을 유도하는 AQ(번호 1041)로부터 S7은 EE(번호 1046, 1048, 1050, 1052)로 자신의 풀이를 설명하며, 이에 S5는 RW(번호 1047, 1049, 1051)로 S7의 의견을 지지한다. 그런데 자신의 풀이의 오류를 깨달은 S7의 RW(번호 1062)로부터 S6, S4의 RW(번호 1065, 1067)이 이어지며 기존의 풀이는 중복되는 경우를 제대로 고려하지 않았음을 깨닫는다. 하지만 6×6 역시 칸막이를 세우는 순서까지 고려한 경우를 고려한 것이기에 한계가 있다.

이후 2조에서는 생성 전략을 이용해 구하고자 하는 경우의 수가 21임을 알지만 그 전에 구한 6×6과 21이 왜 차이가 나는지를 알지 못하고 더 이상 개선되지 않는 모습을 보였다. 그러나 교사가 개입하면서 상황은 다른 국면을 맞게 되었다.

번호	화자	전사
1156	T	(S5 활동지의 칸막이 그림을 가리키며)여기서는 칸막이를 설치하는 순서가
1157	S6	상관이 없죠.
1158	T	상관이 있는 거야? 없는 거야?
1159	S4	없잖아요. 없는 거 아니야?
1160	S5	없지. 이건 없지. 우린 있게 하는 거 아니야?
1161	S4	아. 그러니까. 우린 있게
1162	S7	C는 없는 거지.
1163	S4	6×6
1164	S7	6×6은 아니지.
1165	S5	얘가 얘가 1번이고 2번이라고 그러면, 1번이 여기 있을 때가
1166	S7	(책상을 치며)아, 알았다.
1167	S5	이거랑, 아 잠깐만. 이걸 빼줘야 되잖아. 1이랑 2일 때랑 2이고 1일 때랑
1168	S4	아, 상관이 없으니까?
1169	S7	(활동지의 칸막이를 가리키며)얘에서 얘 뽑은 거랑, 이렇게 이렇게 뽑은 거랑, 이렇게 이렇게 똑같은 거 세었네.
1170	S5	그렇네. 21개가 맞는데?
1171	S4	아 그런데, 그러면은 21개가 (S5의 칸막이 그림을 가리키며)이걸로

교사는 칸막이를 설치하는 순서가 상관이 있는지 질문한다(번호 1156, 1158). 이후 S4, S5, S7은 담론을 진행하면서 왜 6×6이 생성 전략으로 구한 21과 다른지를 인식하게 된다(번호 1159~1168). 이때 이전 담론과 마찬가지로 S4, S5, S7은 문제해결자로 참여하고 있다.

교사의 TQ(번호 1158)로부터 S4, S5, S7는 ET(번호 1159~1168)을 진행하면서 칸막이를 설치하는 순서가 상관없기 때문에 6×6이 잘못된 전략

이라는 것을 깨닫게 된다. 이때, RW(번호 1164, 1168, 1170)을 통해 발언들은 동의의 과정을 거쳐 정당화되는 모습이 나타났다.

번호	화자	전사
1244	S7	이것도 되네. 좀 그렇긴 한데. 그 칸막이가 0명 아니 뭐야 아니 안 받는 경우 제외하는 거 있잖아. 무조건 1개씩은 받는 경우
1245	S5	응.
1246	S7	그렇게 하면은 ${}_6C_2$는 맞잖아. 그런데 안 받는 경우가 있잖아.
1247	S5	그걸 더하자고? 아~
1248	S7	두 명이 안 받는 경우. 그러니까 세 경우밖에 없잖아. 18+3하면
1249	S6	안 받는 경우?
1250	S7	아니. (S6에게)${}_6C_2$해서 아까 18나왔잖아.
1251	S6	15인데?
1252	S5	아 그러면 답 나와.
1253	S6	15잖아.
1254	S7	아 15 맞아.
1255	S5	중복이 안 될 경우에는 ${}_6C_2$가 맞잖아.
1256	S6	15야, 18이야?
1257	S5	얘가 나오면 15잖아. 그런데 중복이 될 경우에는, (활동지의 칸막이 그림을 가리키며)여기 중복될 때랑은 여기, 여기, 여기, 여기 그래서 6가지가 나오잖아. (중복된 경우를 가리키며)이거랑 이거랑 더하면
1258	S4	(S5에게)다시, 다시, 다시.
1259	S7	잠깐만
1260	S5	중복이
1261	S4	어. 될 때,
1262	S5	(${}_6C_2$를 가리키며)중복이 얘는 안 될때고,
1263	S4	어. 될 때
1264	S5	될 때는,
1265	S4	(칸막이의 위치를 가리키며)그러니까 여기 중복될 때, 여기 중복될 때?

번호	화자	전사
1266	S5	그러면 6개잖아.

S7은 $_6C_2$에서 0이 되는 경우를 고려하자는 아이디어 제시를 제시한다(번호 1244). 이후 S5, S6과 대화를 주고받으며 자신의 아이디어를 구체화하여 설명하고(번호 1245~1254), S5는 0개, 즉, 칸막이가 중복될 수 있는 경우를 고려한 $_6C_2+6$을 보완된 풀이로 제시한다(번호 1255, 1257). 이는 S4, S7와의 짧은 확인 절차를 거쳐 인정된다. 이때 S5는 생성 전략으로 정답은 구했지만 기존 풀이의 개선을 위해 노력하던 참여자들의 도움으로 수학적으로 정당화하는 사람으로 담론에 참여하는 양상이 나타났다. 이전 장면에서 S5는 문제해결자로 담론에 참여했지만, 여기서는 참여 양상이 바뀌는 모습이 나타났다.

S5, S6, S7은 몇몇 발언을 통해 의견을 평가하고 함께 추론하며 집단적으로 사고하는 ET(번호 1245~1254)를 거쳐 S5는 보완된 문제해결 아이디어를 생각해내고 이를 상세히 설명한다(EE-번호 1255, 1257). 이후 개선된 문제해결 아이디어는 S4의 RW(번호 1261, 1263, 1265)를 통해 집단 내에서 인정된다.

1.1.3. 종합

확률 문제를 해결하는 수학 영재의 토론 중심 수업에서 문제해결에 기여한 첫 번째 상호작용은 모호하고 불완전한 풀이의 오류를 찾고 개선된 풀이를 통해 문제를 해결하는 것으로 나타났다. 이 과정에서 수학 영재는 불완전한 풀이를 제시해 반성 과정을 통해 풀이를 개선하는 문제해결자가 되기도 하였으며, 올바르게 문제를 해결하고 다른 참여자들과의 상호작용을 통해 풀이를 정교화해가는 수학적으로 정당화하는 자로서도 담론에 참여했다. 주어진 문제 상황과 사례에 따라 동일한 수학 영재가 문제해결자가 되기도 하였으며, 국소적 권위를 부여받아 수학적으로 정당화하는 자가 되기도 하였다.

사례 1과 사례 2를 통해 본 담론의 특징은 다음과 같이 요약할 수 있다. 먼저 소그룹 내에서는 자신들의 풀이가 모호하고 불완전한 것이라는 것에 대한 인식이 공유되어야 다음 담론으로 진행되었다. 불완전함에 대한 인식의 공유는 교사의 AQ, HLT, UT, TQ, OQ와 동료의 HLT에 의해 이루어졌다. 이후 수학 영재의 사고가 확장되고 자신의 아이디어를 구체적으로 진술하는 EE와 수학 영재들이 몇몇 발언을 통해 올바른 실행 과정을 공유해가며 수학적 정당성을 평가하는 추론 과정이 집단적으로 이루어지는 ET를 통해 문제가 해결되는 모습이 나타났다. 이때, EE와 ET는 EE → ET 즉, 상세한 설명 이후에 참여자들이 서로 상호작용하여 탐구하는 대화가 이루어지기도 하며, ET → EE 즉, 참여자들이 서로 상호작용하여 아이디어에 관해 지속적인 질문을 하는 중 개선된 문제해결 방법을 생각해내 기여하는 모습이 나타났다. 따라서 담론에서 나타나는 순서에 특정한 방향성이 있다고는 할 수 없지만 EE와 ET는 서로 밀접한 연관이 있음을 알 수 있다.

1.2. 사고를 유도하고 생산적 기여하기

본 연구의 연구 문제와 관련된 확률 과제의 문제해결 과정 중 문제해결에 기여한 두 번째 상호작용은 다른 참여자의 사고를 유도하고 그룹 토론에 생산적인 기여를 하는 모습이었다. 수학 영재들이 소그룹 내에서 풀이에 대한 담론을 진행하는 동안 성공적으로 풀이를 한 참여자에게 국소적 권위가 부여되고, 사고하도록 유도하는 다른 참여자들과 함께 수학적 아이디어가 통합되어 수학적 진술이 만들어지기도 했다(Empson, 2003). 본 절에서는 확률 문제해결에 기여한 두 번째 상호작용 양상인 사고를 유도하고 생산적 기여를 하는 사례를 살펴보고, 각 사례마다 나타나는 담론의 특징을 분석하도록 한다.

1.2.1. 사례 3

확률 문제해결 과정에서 문제해결에 기여한 두 번째 상호작용 중 사례 3은 1차시 중 [문제 6]을 해결하는 1조의 에피소드이다. 앞서 사례 1에서 살펴 본 바와 같이 1조에서는 교사의 개입 하에 잘못된 풀이를 개선하여 [문제 5]가 해결되는 모습을 보였다. [문제 6]을 처음 접했을 때에도 S1은 바로 생성 전략을 사용해 풀어 21가지라는 답을 얻었다. S1이 문제에 대한 직관적 통찰을 바탕으로 논리적이며 유의미한 생성 전략을 사용해 답을 얻었지만, 이에 만족하지 않고 보다 형식적이며 추상화된 문제해결을 하고자 하는 의도를 보였다. 이러한 문제해결 과정의 반성 이후 S1과 S2는 새로운 풀이에 관한 담론을 시작하는데 이를 살펴보면 다음과 같다.

번호	화자	전사
494	S1	(활동지를 보며)어? 5,0,0. 아니 그냥 노동, 노동을 한 건데, 노동이야, 그냥. 그냥 다 세 본거 같은데. 다 안 세고

번호	화자	전사
		어떻게 못하나? 귀찮아.
495	S2	지금 그래가지고 (안 들림)을 해봤는데 뭔가 이상해.
496	S1	뭐, 뭔데 이건?
497	S2	(활동지를 보며)일단 모든 나올 수 있는 케이스를 정리해 보면 5가지 나왔거든.
498	S1	(S2의 활동지를 보며)왜?
499	S2	그 뭐냐 그 순서를 안 정해놨을 때, 누가 한결인지, 은결인지, 나영인지 모르는 상태에서
500	S1	아 그래.
501	S2	그럼 5가지 나왔거든. 5가지 일단 수치적으로 생각해 봤을 때, 이 5가지를 3가지가 있으니까 3개 박스에 넣는 거야.
502	S1	응?
503	S2	3명이니까. 응?
504	S1	응
505	S2	일단 그렇다고 해. 순서를 안 정했지? 지금 순서를 정할 거야. 한결이, 은결이, 나영이 해가지고 줄을 세우는 거지. 그런 아이디어로 접근을 했고 또 그래서 겹치는 경우 있지? 왜냐면 0,0,1,1 같은 경우 겹칠 수 있으니까 그 경우 케이스를 빼가지고 계산을 하면 될 것 같아. 근데 수치가 좀 이상해.
506	S1	4로 나와?
507	S2	몰라 근데 좀 이상한 것 같아.
508	S3	어렵다, 어려워
509	S2	21가지가 맞기는 해.
510	S1	다 세 보면 21가지인데
511	S2	어, 다 세보면 21가지야.
512	S1	다 안 세고 구할 수 있는 방법 없나 이거지. 그러니까 5개가 아니고 500개야 음료수가, 그럼 어떻게 할 거야?
513	S2	일반적인 식을 찾아야지
514	S1	그러니까. 규칙을 발견을 해야겠지.
515	S2	아~
516	S1	3명인데 500개야. 500개.
517	S2	(S1에게)나 이렇게 생각해 봤거든. (활동지에 음료수를 ○

<table>
<tr><th>번호</th><th>화자</th><th>전사</th></tr>
<tr><td></td><td></td><td>로 그리며)음료수가 5개 있어. 5개 있는데 3명이 나눠가져. 그러면 칸을 일단 5개 놔두고 (활동지에 ○를 더 그리며)양쪽에 2개를 더 만들어 놓는 거야. 그래가지고, 어? 잠깐만, (혼잣말)그래가지고 뭐지 칸막이 같은 거를 생각하는 건데, 56에서 (S1에게)아, 7자리가 있어. 어, 5개 음료수가 있다. 7개 칸 중에서 5개의 음료수가 있다. 그리고 2개의 벽을 설치하는 거야. (7개의 ○를 가리키며)그러니까 7개의 자리에는 음료수가 있거나, 벽이 있거나 하겠지. 여기서 왜 벽을 2개를 했냐면 줄이, 그러니까 한 선이 있잖아. (|를 세워 나누며)벽 하나 놓으면 두 개가 되잖아, 두 개를 놓으면 세 개가 되지. 이걸 각자 가진다는 얘기거든. 난 그렇게 한 번 생각해 봤어. 그러면은 7개의 칸 중에서 2개의 벽을 설치하나 5개의 벽을 설치하나 개수가 같은 거니까 2개의 벽을 설치하는 개수. 여기서도 0개인 케이스가 나올 수 있는 게 (제일 끝의 ○에 |을 놓으며)이렇게 놓으면 여기 안 먹게 되잖아. 그렇게 해서 7개에서 2개를 계산을 해보면 이렇게 나와 가지고 21개가 나오더라. 이렇게 생각할 수 있다고 생각하거든.</td></tr>
<tr><td>518</td><td>S1</td><td>응. 그렇네.</td></tr>
<tr><td>519</td><td>S2</td><td>(S3에게)이해되지? 뭔 말인지 알 것 같아? 더 설명해줄까?</td></tr>
<tr><td>520</td><td>S1</td><td>(S2의 활동지를 보며)음료수가 어디 있는 거야?</td></tr>
<tr><td>521</td><td>S2</td><td>(활동지를 가리키며)그러니까 7개의 임의의 자리를 만들었어. 여기 7개의 임의의</td></tr>
<tr><td>522</td><td>S1</td><td>음료수가 5개 여기 있다는 거야?</td></tr>
<tr><td>523</td><td>S2</td><td>아니, 아니. 여기 있다고. (다시 ○ 7개를 그리며)여기 7개 자리 중에 5개 자리에 있다고, 그리고 5개 놓고 남은 2자리에는 벽을 설치한다고, 분리하게</td></tr>
<tr><td>524</td><td></td><td>(침묵-6초)</td></tr>
<tr><td>525</td><td>S1</td><td>음. 그러면은 500개면 자리가 502개겠네.</td></tr>
<tr><td>526</td><td>S2</td><td>어! 그렇지. 502개 중에서 벽 2개를 설치한다라고 하면 되</td></tr>
</table>

번호	화자	전사
		겠지.
527	S1	응. (활동지에 식을 쓰며)벽 2개가 들어갈 수 있는 경우의 수가 $\dfrac{502\times 501}{1\times 2}$
528	S2	(같이)1×2. 2개 또 나열하는 경우
529	S1	왜냐면 이렇게 되는 이유가 뭐냐면, 같은 자리를 선택할 수 없기 때문이지
530	S2	순서까지고 생각을 한다면, 이렇게 되는
531	S1	응?
532	S2	뭐 벽 a, 벽 b 이렇게 정해진 게 아니잖아.
533	S1	그러니까 같은 자리에 벽 2개를 세울 수가 없잖아. 같은 여기 아까 문제되었던 게 ab를 고르는 게 아니고 aa를 골랐을 때에는 문제가 된 단 말이지. 문제 5번
534	S2	(활동지의 칸막이 그림을 보며)그래서 정리를 하자면 왜 그런 식으로 식이 나온다고 하냐면 우선 이렇게 자리가 있을 때, 똑같은 자리는 올 수 없단 얘기지
535	S1	그래, 어 왜냐면 문제 5번에서
536	S2	여기는 아예 없는 거고, 여기에 음료수가 벽이 있다는 거니까, 그래가지고 502×501이 되고 또 거기서 $\div(1\times 2)$를 해주는 경우는 그 뭐지, 순서에도 상관 안 한다는 벽 a, 벽 b가 따로 있는 게 아니다. (칸을 손으로 그리며)어차피 나눠 갖는 칸을 갖다 얘기하는 거니까. 그래가지고 1×2를 나눠줘 가지고 거기서 나눠준 게 바로 콤비네이션 같은 거

S1은 생성 전략 외에 다른 문제해결 전략, 즉 일반화된 전략은 뭐가 있을지 질문한다(번호 512). 이에 S2는 5개의 음료수를 3명의 사람에게 주는 상황을 3개의 상자에 음료수 5개를 넣는 것으로 시각화하여 생각하다가 S1과 대화를 주고 받으며(번호 513~516), 새로운 아이디어를 생각하게 된다. 상자에 넣는 상황으로는 분할의 아이디어가 구체화되지 않자 분할해 줄 수 있는 2개의 칸과 음료수를 넣을 수 있는 5개의 칸, 즉 7개

의 공간 중 칸을 설치할 2개를 고른다는 아이디어를 만들어낸다(번호 517). 이후 S1과의 짧은 대화를 통해(번호 518~523) 이는 1조에서 승인되게 된다. 이후 S1과 S2는 더 일반화된 상황에서도 해당 전략이 사용될 수 있는지 확인한다(번호 525~536). 이 담론에서 중복조합 문제를 해결할 수 있는 새롭고 구조적인 아이디어를 생각한 S2는 국소적 권위자로 인정되고 있다. 또한 S1에게 하는 상세한 설명을 통해 자신의 아이디어를 평가하고 확신을 갖게 된다.

이 담론의 특징을 살펴보면 다음과 같다. 생성 전략이 아닌 더 일반화된 풀이를 추측하도록 하는 S1의 HLT(번호 512)로부터 S2와 S1은 규칙성을 찾으려 노력한다. 이후 새로운 아이디어를 생각한 S2는 EE(번호 517)를 통해 자신의 풀이에 근거를 부여하며 자세히 설명한다. 이는 S1의 RW(번호 518)으로 지지되고, ET(번호 525~535)을 통해 중복조합 문제를 해결할 수 있는 아이디어가 공유된다. 이후 이 아이디어가 일반화될 수 있음을 확신한 S2는 EE(번호 536)을 통해 자신의 사고를 확장시켜 아이디어를 설명하는 모습을 보여준다.

1.2.2. 사례 4

확률 문제해결 과정에서 문제해결에 기여한 두 번째 상호작용 중 사례 4는 1차시 중 [문제 7]을 해결하는 2조의 에피소드이다. 순열과 관련된 [문제 1], 조합과 관련된 [문제 2], 중복순열과 관련된 [문제 3, 4], 중복조합과 관련된 [문제 5, 6]을 해결하고 제시된 [문제 7]은 다음과 같다.

[1차시 중 문제 7]
문제 1~6을 가능한 다양한 방법으로 분류해보고, 그렇게 구분한 이유를 설명해보아라.

교사는 이 문제를 제시하며 수학적 구조에 따라 6개의 문제를 분류해보라고 제시하고 실제 토론이 진행되는 중에도 수학적 구조에 따라 분류

해보라는 언급을 반복했다. 수학 영재 학생들은 직관적 통찰력이 뛰어나고, 수학적 추상화 능력과 형식적 조작 능력이 뛰어나기 때문에 교사의 이러한 발언으로부터 사회수학적 규범을 유추할 수 있었다. 즉, 수학적인 논의에서는 수학적으로 근거 있는 내용을 바탕으로 주장이 제기되어야 하며, 보다 가치있는 주장은 수학적 구조를 반영하고 있는 것이라는 것이 이 교실의 사회수학적 규범임을 알 수 있었다.

실제로 [문제 7]을 접한 후 연구에 참여한 세 조는 서로 약간 다른 반응을 보였다. 1조는 수학적 구조에 초점을 맞춘 분류에서 풀이 방법에 따라 분류를 시도했다. 이에 순열, 조합은 구분이 되었지만, 중복순열과 중복조합을 분류하는 데에는 의견이 엇갈렸다. 특히 참여자들이 가장 어려워한 [문제 5, 6]의 경우 1조에서는 다른 풀이 방법을 적용해 해결했기 때문에 같은 범주 안에 분류되지 않았다. 3조는 순열, 조합의 특성을 파악해 가장 빨리 6개의 문제를 분류했다. 이후 이들은 다른 분류 방법을 찾는 등 논의의 초점이 옮겨가 담론이 진행되었다. 2조는 순서의 여부와 중복 가능성에 따라 6개의 문제를 분류하려고 시도했으나 [문제 6]을 분류하는데 어려움을 겪었다. 2조에서 겪은 어려움이 교사의 개입과 참여자들의 활발한 담론으로 사고가 유도되어 문제해결에 생산적 기여를 한 사례를 보기 전에, 교과서에서 제시된 순열과 조합의 정의(류희찬, 조완영, 조정묵, 임미선, 유익승, 한명주 외, 2010, p.376, 381), 교실에서 학생들의 순열, 조합의 문제해결 맥락과 '중복' 이라는 단어를 어떻게 사용하고 있는지 관찰해보고자 한다.

순열 : 서로 다른 n개에서 중복됨이 없이 r개를 택하여 일렬로 배열하는 것을 n개에서 r개를 택하는 순열이라 하고 그 순열의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{P}_r$와 같이 나타낸다.

조합 : 서로 다른 n개의 원소로 이루어진 집합에서 순서를 생각하지 않고 r개의 원소를 택하여 부분집합을 만드는 것을 n개에서 r개를 택하는 조합이라 하고, 이 조합의 수를 기호로 ${}_n\mathrm{C}_r$와 같이 나타낸다.

순열과 조합의 정의에는 ‘선택’이라는 뜻을 함의하는 용어가 포함되어 있다. 또한 학생들이 다룬 경우의 수, 순열, 조합의 다양한 문제들은 일상적 상황이 주어지고 이 맥락을 수학적으로 해석해 해결하는 문제들이 대다수이다. 이에 실제로 순열, 조합 문제를 해결하는 경우 많은 수학 영재들은 자신을 그 문제 상황에 투영시켜 선택의 과정에 참여하는 것처럼 인식했다. 실제 그러한 예를 살펴보면 다음과 같다.

<선택의 과정을 함의하는 예 1(1조의 담론)>

번호	화자	전사
17	S1	그러니까 내가 하는 말은 얘는, (문제 1을 가리키며)얘는 1위하고 2위의 자리가 있는데,
18	S3	응.
19	S1	네 명은, 네 마리가 다 들어갈 수가 있잖아. 근데 1위를 하면은 2위를 못 한단 말이지 다시 여기 조건에 1, 2위에 각각 다른 애완견을 뽑기로 했대. (중략)

<선택의 과정을 함의하는 예 2(2조의 담론)>

번호	화자	전사
702	S6	우리가 방금 한 게 이건데?
703	S7	두 송이를 화병에 꽂는 경우
		(중략)
714	S6	어차피 두 송이를 고르니까
715	S5	두 송이를 고르니까
		(중략)
755	S4	한 색깔이 4개지?
756	S7	그러니까 4
757	S6	네 저는. 그, 4개를 뽑을 수 있고, 4개를 뽑을 수 있기 때문에 4×4를 했어요. 그 다음에 빨강노랑, 노랑빨강이 들어간 경우 같은 것이기 때문에 2로 나눠서 8이 나왔어요.
		(중략)

번호	화자	전사
780	S7	한 곳에 똑같은 색깔 두 개가 들어간 건 4개밖에 없잖아. 그니까 이제 색깔이 다른 걸 뽑아야지.
781	S5	응.
782	S7	그러면은 ${}_4C_2$잖아. 네 개 중에 두 개, 두 개 색깔만 고르면 되잖아.
783	S4	응.
784	S7	그러니까 네 개 중에 두 개를 골라. 그러면 6가지 경우가 나오잖아. 그러니까

〈선택의 과정을 함의하는 예 3(3조의 담론)〉

번호	화자	전사
12	S8	(중략)(문제 1을 가리키며)여기서는 1위에 한 명이 오는 거잖아. 2위에 한 명이 오는 거고,
13	S10	응.
14	S8	왜냐면 문제가 1위를 두 명 뽑고, 2위를 두 명 뽑는다고 해봐. 전체가 뭐 10명 중에서

이와 같이 모든 조에서는 주어진 맥락으로 자신을 투입시켜 선택의 상황에 참여하는 주체처럼 생각하는 모습이 나타났다. 특히 선택할 수 있는 집합에서 선택을 하는 주체는 문제를 해결하는 참여자 자신이 되는 것으로 나타났다. 이에 문제의 맥락에 맞는 선택의 상황에 따라 선택되는 대상이 강아지, 꽃, 깃발 등 다양하게 변화하는 것을 관찰할 수 있었다.

또한 이 문제를 분류하는 과정에서 핵심어 중 하나인 순서와 중복에 관해 살펴보자. 모든 조에서는 ‘순서’의 사용에 있어 발화된 초점, 수행된 초점, 의도된 초점이 명확했다. 그러나 ‘중복’의 수학적 단어 사용에 있어서는 담론의 초점이 불안정한 모습이 나타났다.

중복이라는 단어는 중복순열, 중복조합을 학습하기 전에 이미 일상생활에서 많이 사용된다. 일상적 맥락에서 사용하는 중복의 뜻은 다음과

같다.

중복 : 거듭되거나 겹침[9]

수학적 단어로서 승인되기 전에 중복은 일상적 맥락에서 충분히 자주 사용되었기에 실제 수학 영재들의 토론 과정 중 나타난 중복은 수학적 의미가 아니라 일상적 의미로 사용되고, 담론의 초점도 지속적으로 변화하는 모습을 보여준다. 이 예를 잠시 살펴보면 다음과 같다.

번호	화자	전사
21	S1	문제 2에서는 아까 그런 식으로 그 답을 구하면, 그 뭐지 중복되는 경우가 생기지. 왜냐면은 순서가 상관없으니까, 서로 다른 두 종류의 과일만 들어가면 되는 거니까 딸기 키위랑, 키위 딸기랑 똑같아. 근데 이걸 경우의 수로 다 적어보면 12가지 중에 6가지가 중복돼. 그래서 12에서 6을 빼면 6가지가 나오지.
22	S3	그렇구나.
		(중략)
82	S2	아니 그래도 한 번 얘기해봐.
83	S1	아니 똑같은 얘기였어. 얘도
84	S3	(활동지를 가리키며)1위에, 그러니까 문제 1번의 1위에는 얘들이 4마리가 다 올 수 있잖아. 그런데 2위에는 중복 수상이 불가능하기 때문에 한 마리가 올 수 없으니까 세 마리가 남잖아.
85	S1	응.
		(중략)
225	T	어떻게 12가지가 나왔어요? (S1에게)설명해 줘봐. S2랑 S3 한테
226	S1	그러니까 아까 얘 뭐냐, (문제 1을 보며)얘, 얘인가? 얘지. 겹치는 거, 겹치는 거 빼서 빼는데, 얘는 사람이 다르니까

9) 국립국어원 표준국어대사전

번호	화자	전사
		겹치는 걸 뺄 필요가 없다는 거지. (문제 2를 보며)그런데 4가지에서 뭐야, 아니구나. 중복으로 선택 가능하니까 한결이가 딸기, 키위, 복숭아, 멜론, 은결이가 딸기, 키위, 복숭아, 멜론.

<표 Ⅳ-1> 번호 21의 담론의 초점

발화된 초점	수행된 초점	의도된 초점
중복	1. 4×3＝12가지를 구하기 2. 딸기, 키위와 키위, 딸기가 같은 것 3. 순서가 바뀌어도 같은 것을 제외해줘 12－6＝6가지 구하기	구하려는 경우의 수 = 순서가 상관없는 것을 제외한 경우의 수 중복되는 경우 = 겹치는 경우

<표 Ⅳ-2> 번호 84의 담론의 초점

발화된 초점	수행된 초점	의도된 초점
중복	1. 1위에 올 수 있는 강아지의 수는 4마리 2. 2위에 올 수 있는 강아지는 1위를 제외한 3마리	구하려는 경우의 수 = 순서를 고려해야 하는 경우의 수 중복되는 경우 = 거듭되는 경우

<표 Ⅳ-3> 번호 226의 담론의 초점

발화된 초점	수행된 초점	의도된 초점
중복	1. 한결이가 선택할 수 있는 경우의 수 4가지 2. 은결이가 선택할 수 있는 경우의 수도 4가지	구하려는 경우의 수 = 중복 가능하고 순서를 고려하는 경우의 수 중복되는 경우 = 거듭되는 경우

일상적 담론에서의 중복과 수학적 담론에서의 중복이 혼용되어 나타나는 1조의 담론을 살펴보면, 중복은 탈-담론적(extradiscursive)이고 스스로 지속되는 대상(self-sustained entity)을 나타내고, 인간 주체와는 독립적인 것처럼 사용되지 못했다는 것을 알 수 있다(Sfard, 2008). 이는 의사소통의 과정에서 송신자에서 수신자로 대상이 옮겨가더라도 그 의미가 손실되지 않고 스스로 유지되는 존재되지 못했다는 것을 뜻한다는 점에서 1조에서 중복은 대상화되지(objectified) 못했다는 것을 알 수 있다.

마찬가지로 2조에서도 중복의 의미에 관해 명확한 정의 없이 담론이 진행되었다. 그러나 [문제 7]을 해결하면서 중복의 의미를 추측하고 판단하는 담론이 진행되는 과정을 관찰할 수 있었다. 이때 문제를 해결하면서 문제 맥락 속으로 자신을 투영시켜 선택의 주체와 객체를 만들어내는 과정을 바탕으로 중복의 의미를 파악하여 생산적으로 기여하는 모습이 나타났다. 2조의 수학 영재들은 [문제 6]을 순서 여부와 중복 가능성에 따라 구분할 때 어느 범주에 들어갈지를 고민하였는데, 교사가 개입하면서 보다 활발한 논의가 진행되었다. 이를 살펴보면 다음과 같다.

번호	화자	전사
1316	S5	(문제 6을 보며)이게 뭐임? 6번은 뭐임?
1317	S6	6번은 좀 특이한데? 6번은 뭐지?
1318	S5	중복
1319	T	6번이 어디에 속하는 거야?
1320	S6	(T에게)6번은 다른 문제 아니에요?
1321	S5	다른 거는
1322	S4	여기에 안 들어가나?
1323	T	안 들어가?
1324	S6	여기 기준에 뭔가 이상한데
1325	S5	중복이
1326	T	왜 그렇게 생각해? 왜 6번이 그 기준에 안 들어가?
1327	S7, S5	중복
		(중략)
1348	S7	6번 중복 가능하고 순서 없다 아니야?
1349	S5	중복 가능하고 순서가

번호	화자	전사
1350	S7	잠깐만 순서가
1351	S6	6번이 중복가능하고 순서가 없다, 그랬지?
1352	S7	잠깐만, 잠깐만. 기다려.
1353	S6	어 맞아 맞아. 이거
1354	S5	중복가능? 중복가능?
1355	S7	잠깐만, 잠깐만, 잠깐만.
1356	S6	(S7에게)야. (문제 6을 가리키며)여기서 6을 왜 더하는 거야?
1357	S7	뭐가?
1358	S6	여기서 ${}_6C_2$.
1359	S7	지금 나 거기
1360	S4	음 뭐지? 중복은 계속 쓸 수 있다는 건가? 근데 얘는 숫자가 제한되어 있잖아.
1361	S6	어?
1362	S5	개념이 좀.
1363	S4	아 헷갈려.
		(중략)
1385	S5	중복인데 순서 상관이 없는 거 아니야?
1386	S7	잠깐만 왜 중복이지?
1387	S4	왜 중복?
1388	S5	이거 푸는 게 5번이랑 똑같잖아. 6번 푼 게 5번이랑 똑같잖아.
1389	S6	아 6번이 보니까 누가 누구를 고르는지 생각하는 게 약간 다른 것 같은데 (활동지를 보며)이 경우에는 음료수가 사람을 고른다고 봐야 되지 않을까? 왜냐면 사람이 안 받을 수도 있기 때문에 음료수가 사람을 고른다고 봐야 되는거 아니야?
1390	S4	아 뭐지? 그냥
1391	S6	어느 음료수를 고르는지는 상관이 없잖아. 그렇기 때문에 음료수가 어느 사람에게 갈 지를 고른다, 이렇게 하기 때문에
1392	S5	그러면 어떻게 돼?
1393	S6	한 사람한테 여러 음료수가 여러 번 고를 수 있기 때문에 사람을, 그렇기 때문에 중복이 가능하다라고 봐야 되지 않

번호	화자	전사
		나?
1394	S5	음료수가 사람을 둘 다 고를 순 없잖아.
1395	S4	중복이라는 것 자체의 개념이 뭐였지?
1396	S6	그 뜻이 아니라 중복이 이 뜻 아닌가? 두 개의 음료수가 서로 같은 사람을 고를 수 있다. 아닌가?
1397	S4	뭐지? 사람이 아이스크림 뽑을 때, 같은 아이스크림 계속 뽑을 수 있는 게 중복이잖아.
1398	S7	음료수가 주야? 사람이 주야?
1399	S6	아 그런가?
1400	S4	그런데 이걸 보면 음료수가 사람 뽑는데, 같은 사람을 여러 번 뽑을 수 있는 게 중복 아니야?
1401	S7	뭐가 선택을 받는지 알아야 되는 거지. 여기서 음료수가 선택 받는 건지, 사람이 선택 받는 건지.
1402	S4	사람이 선택 받는 거 아니야?
1403	S5	음료수가 선택한다고 하면 중복이 맞지 않아?
1404	S4	중복인거 같은
1405	S6	그러면 누가 선택 받는 거지?
1406	S4	사람이 선택 받는 건데 음료수 종류 하나고
1407	S7	어, 그렇네. 그럼 순서가 없
1408	S4	순서가 없지.
1409	S7	그럼 이 경우에 순서 없고 중복가능이 맞지.
1410	S4	이 경우는 그러면
1411	S6	그럼 순서 없고 중복가능?
1412	S4	어.
1413	S6	음료수가 선택 하는거라고 봤을 때
1414	S7	(문제 5와 문제 6을 가리키며)이거랑 이거랑랑 풀이 방법이 같아?
1415	S5	응. 같아.
1416	S6	어. 그게 다른 것뿐이야. 누가 누구를 선택하나
1417	S5	누가 누구를 선택한다고? 그래서? 지금?
1418	S4, S6	음료수가 사람을
1419	T	아 6번은 음료수가 사람을 선택하는 거야?
1420	S6	이렇게 생각하는 게 더 편할 것 같아요.
1421	S7	이게 일반화 되
1422	T	아 사람이, 그럼 중복되는 게 음료수인

번호	화자	전사
1423	S6	사람이 중복되는 거죠. 두 개의 음료수가 같은 사람을 고르는 거니까
1424	S4	(손으로 1을 그리며)그러니까 음료수 종류는 하나고, (1을 그린 손을 움직이며)이 음료수가 얘한테 계속 갈 수 있잖아요. 그럼 중복 되는 거 아니에요?
1425	S6	깃대 문제와 같이 중복이 가능한 거죠. 깃대 문제도 같은 색의 깃대를 여러 개의, (손으로 깃대를 그리며)여러 개의 깃대가 같은 색을 뽑을 수 있기 때문에 이것도 똑같이 여러 개의 음료수가 같은 사람을 뽑을 수 있는 걸로 해가지고 중복이 가능한 걸로
1426	S7	답이 21이지?
1427	T	깃대가 여기선 음료수가 되는거네.
1428	S6	네.
1429	T	깃대가 음료수가 된다.
1430	S6	(S4에게)아까 깃대 문제 중에서 (문제 4를 가리키며)무한히 있는 거 있었잖아. 색이 무한히 있는 거 그 문제에서 중복이 가능한 이유는 깃대가 여러 개의 깃대가 (손으로 뽑는 표현을 하며)똑같이 빨간 색을 뽑을 수 있기 때문에, 여기서도 똑같이 여러 개의 음료수가 같은 사람을 계속 뽑을 수 있기 때문에
1431	S5	(끄덕이며)아.
1432	S4	음료수가 하나로 고정되었을 뿐이지, 음료수 종류가 하나로.

교사는 2조의 담론에 개입하여 [문제 6]이 어느 범주에 들어가는지 질문한다(번호 1319). 그러나 S5, S6, S7은 [문제 6]이 순서 여부와 중복 가능의 범주 중 어느 곳에도 들어가지 않는다고 대답한다(발언 1317, 1318, 1320, 1321, 1322). 이후 담론의 초점은 다른 문제들로 잠시 옮겨가지만 S7은 [문제 6]이 순서 여부와 중복 가능의 범주 중 어느 곳에도 들어가지 않는다고 대답한다(번호 1348). 이는 S5, S6과의 담론을 통해 정당화를 거치게 되지만 조원들이 모두 동의하는 것에는 이르지 못한다(번호

1349~1359). 이에 S4는 중복이 계속하여 쓸 수 있다는 것인지를 질문하고, [문제 6]에서는 음료수가 제한되어 있기 때문에 중복이 되는 것인지에 대해 질문하는데(번호 1360), 이로부터 중복의 의미에 대한 탐구가 진행된다. 이후 S5는 [문제 6]이 [문제 5]와 풀이 방법이 유사하기에 중복 가능하고 순서 상관없는 범주에 속할 수 있음을 얘기하지만(번호 1385, 1388), 선택의 주체와 객체를 보다 분명하게 제시하여 항상 선택의 주체였던 사람 대신 음료수가 사람을 선택하는 경우로 중복의 의미를 제시한 S6의 발언(번호 1389, 1391) 이후 중복의 의미가 구체화되고 이는 담론의 초점이 된다. S4, S5, S7이 참여하면서 중복의 의미에 대한 담론을 진행하는데 여기에서는 음료수가 사람을 선택하는 것의 의미가 한 종류의 음료수 5개가 같은 사람을 중복하여 선택할 수 있다는 의미로 더 구체화된다(번호 1392~1418). 교사의 질문(번호 1419)에 이어 2조의 조원들은 중복의 의미를 선택의 주체와 객체로 나누어 생각하고, 기존 문제 맥락에서 자신을 투영해 선택의 주체가 사람이 되었던 상황과는 달리 음료수나 깃대도 선택의 주체가 될 수 있다는 생각을 정교화하게 된다(번호 1423~1425). 특히 [문제 4]와의 비교를 보완하는 교사의 질문(번호 1427)에 중복의 의미를 제대로 적용시켜 정당화하는 모습을 관찰할 수 있었다(번호 1430, 1432).

이제 이 담론의 특징을 살펴보자. 교사의 TQ(번호 1319)이후 [문제 6]이 순서 여부와 중복 가능의 범주 중 어느 곳에도 속하는지에 대한 담론이 진행된다. 이후 S7의 발언(번호 1348)은 S5, S6과의 ET(번호 1349~1358)를 통해 정당화를 거치게 된다. 그러나 S4의 HLT(1360)와 S5의 동의(RW)로부터 2조 전체에서는 중복의 의미에 대한 탐구가 진행된다.

S7의 중복의 의미를 묻는 HLT(번호 1386)로부터 S5는 근거를 제시한다(RW- 번호 1387). S6은 선택의 주체와 객체에 대한 관점을 전환시켜 자신의 아이디어를 상세히 설명한다(EE- 번호 1389, 1391). 이후 S4, S5, S7이 참여하면서 ET(번호 1392~1418)를 진행하는데 여기에서는 음료수가 사람을 선택하는 것의 의미가 한 종류의 음료수 5개가 같은 사람을 중

복하여 선택할 수 있다는 의미로 더 구체화된다. ET 과정 중 S4이와 S7이는 SK(번호 1397, 1414) 즉, 이전 문제에 관한 질문을 통해 그 유사성을 파악함으로써 정당화에 설득력을 얻고 있다.

교사의 AQ(번호 1419)로부터 중복의 의미가 보다 일반화되었고(번호 1421), EE(번호 1422~1425)를 통해 중복의 개념은 대상화된다는 것을 알게 된다. 이후 교사는 UT(번호 1427)을 통해 이전의 발언(번호 1425)에 대한 보충 설명(EE-번호 1430)을 들을 수 있는데 2조에서 중복의 개념을 적용했던 과정이 정적인 구조로 전환되어 전체로 볼 수 있는 능력을 갖게 되었다는 것을 알 수 있다(번호 1430, 1432).

1.2.3. 종합

확률 문제를 해결하는 수학 영재의 토론 중심 수업에서 문제해결에 기여한 두 번째 상호작용은 성공적으로 풀이를 한 참여자에 국소적 권위가 부여되어 사고하도록 유도하는 다른 참여자들과 함께 수학적 아이디어가 통합되어 수학적 진술이 만들어지는 것으로 나타났다. 수학 영재들은 경우의 수를 구하는 문제에서 생성 전략을 통해 답을 구할 수 있었지만, 일반화되고 문제의 수학적 구조를 반영하는 풀이를 통해 문제를 해결하길 원하는 모습을 관찰할 수 있다. 또한 연구가 진행된 교실에서는 수학적 정당화란 수학적으로 타당한 근거에 의해 설명하는 것이라는 사회수학적 규범이 형성되어 있음을 알 수 있었다. 따라서 다른 참여자들과 함께 정교화되며 일반화 가능한 수학적 진술을 만들기 위해 사고를 유도하는 과정이 관찰되었고, 이는 활발한 담론을 통해 수학적 정당화 과정을 거쳐 일반적인 문제해결 전략의 생성이나 수학적 개념의 대상화에 이르게 되었다. 이 과정에서 수학 영재는 수학적 권위를 부여받아 통합된 수학적 진술을 만드는데 적극적인 모습을 보였다.

일반적인 문제해결 전략이 만들어진 사례 3의 담론의 특징은 다음과 같이 요약할 수 있다. 생성 전략보다 고차원의 전략을 요구하는 수학 영재의 RW, HLT로부터 참여자들은 ET를 진행하게 된다. 더 일반화된 전

략을 찾기 위해 자신의 생각을 드러내고 동의하는 과정인 ET 이후, 수학 영재의 사고가 확장되어 새로운 아이디어를 찾아내고 자신의 수학적 진술에 근거를 부여하는 상세한 설명(EE)가 계속된다. 이후 일반화된 전략이 실제 적용 가능한 것인지 근거를 확인하고 집단적으로 사고하는 ET 정이 나타났다.

수학적 개념의 대상화에 이르게 된 사례 4의 담론의 특징은 다음과 같이 요약할 수 있다. 경우의 수와 관련된 문제 상황은 일상적 맥락과 밀접히 연관되어 있기 때문에 문제를 해결하는 과정 중 참여자는 자신을 문제 상황 속에 투영시켜 생각하게 된다. 또한 기존에 학습했던 순열과 조합의 정의에서는 '선택(뽑는다)'는 의미가 강조되기 때문에 수학 영재는 선택의 주체와 객체를 암묵적으로 의식하고 있으며, 선택의 주체는 문제 속이 투영된 자기 자신이 된다. 또한 '중복'이라는 용어는 일상적 맥락에서 '거듭되거나 겹친다'는 뜻으로 자주 사용되고 있는데, 이로부터 중복의 용어가 도입된 수학적 담론에서도 수학적 맥락에서의 중복과 일상적 맥락의 중복이 혼용되어 사용되는 양상이 관찰된다. 1조의 사례로부터 수학적 개념이 대상화되지 못했다는 것을 유도할 수 있었고, 2조의 사례에서는 수학적 개념이 대상화되어 중복이라는 용어가 사용되는 메타 규칙이 변화하는 담론의 변화가 이루어지는 과정도 관찰할 수 있었다. 특히 대상화가 이루어지는 과정에서는 교사의 AQ와 보충 설명을 요구하는 UT, 동료의 HTL로부터 중복의 의미를 탐구하는 담론이 본격적으로 진행되었다. 이후 중복의 의미가 발생되고 그에 대한 사고가 집단적으로 일어나는 ET, 중복의 의미가 선택의 주체와 객체를 적용해 제시되는 EE, 중복의 의미가 더 구체화되는 ET, 대상화됨을 확인할 수 있는 EE가 번갈아 나타남을 확인할 수 있었다.

이로부터 일반적인 문제해결 전략의 생성과 수학적 개념의 대상화는 교사의 AQ와 UT 또는 동료의 HTL로부터 출발하며, EE와 ET 과정이 반복되면서 사고가 유도되고 수학적 진술을 만들어내는 생산적 기여를 한다는 결과를 얻게 되었다.

2. 연구 문제 2의 결과

본 연구의 두 번째 연구 문제는 토론 중심의 수학 영재 수업에서 '확률 문제해결 과정에서 나타난 담론적 갈등은 문제해결에 어떻게 작용하는가?' 이다. 수학 영재를 대상으로 한 총 3차시의 수업 중 일상적 맥락에서 익숙했던 상황들을 낯선 방식으로 다루게 되면서 담론적 갈등이 일어나는 것을 관찰할 수 있었다. 따라서 본 절에서는 확률 문제해결 과정에서 나타난 담론적 갈등에 대해 살펴보고, 이러한 담론적 갈등은 문제해결에 어떻게 기여하는지, 만약 기여하지 못한다면 그 양상은 어떠한지를 분석한다.

2.1. 확률 문제해결 과정에서 나타난 담론적 갈등

수학적 담론에 새로운 대상이 추가되거나 수학적 담론의 메타 규칙이 변화되거나 핵심어의 사용 방식이 변화하는 것을 Sfard는 메타 수준 학습이라 칭했다. 이는 익숙한 과제들이 다르고 낯선 방식으로 다루어지는 것을 의미하는데 확립된 맥락 안에서의 학습이 아니라 새로운 맥락에 대한 학습을 뜻한다. 이러한 메타 수준 학습은 참여자가 새로운 담론에 직접 맞닥뜨리도록 하는 것에서 출발한다. 이때 참여자들은 지금까지 수학적 담론을 규제했던 메타 규칙과 다른 메타 규칙을 따라야하기 때문에 담론적 갈등에 부딪히며, 의사소통에 방해를 받는다.

본 연구에서는 많은 선행 연구에서 다뤄졌던 등확률성에 관한 과제를 수학 영재에게 제시하고, 토론을 유도하였으며 이로부터 활발한 상호작용이 이루어졌다. 특히 일상적 맥락에서 익숙했던 상황들을 낯선 방식으로 다루게 되면서 담론적 갈등이 일어나는 것을 관찰할 수 있었다. 먼저 수학 영재들에게 제시된 2차시의 과제 중 등확률성에 관한 문제는 다음과 같다.

[2차시 중 문제 5]

한결이와 은결이는 아래 세 종류의 두 개의 주사위를 사용하는 게임 중 하나에 참가하려 한다.

가. 같은 모양, 같은 크기의 두 개의 파란 주사위를 동시에 던진다. 나. 같은 모양, 같은 크기의 하나의 파란 주사위와 하나의 빨간 주사위를 던진다. 다. 하나의 파란 주사위를 두 번 던진다.

주사위를 던져 연속인 수가 나오면 한결이가 이기고, 그렇지 않으면 은결이가 이긴다고 한다. 당신이 한결이라면, 세 종류의 게임 중 어느 게임에 참여하는 것이 더 유리한가? 자신의 선택에 대한 이유를 설명하여라. (단, 연속인 두 숫자란 2와 3 같은 수를 의미한다.)

[2차시 중 문제 6]

한결이는 아래 두 종류의 상자에서 동시에 3개의 공을 꺼냈을 때, 흰 공 2개와 검은 공 1개가 나오면 상품을 획득한다고 한다.

가. 1～5의 숫자가 적혀있는 같은 크기와 같은 모양의 흰 공 5개와 A,B,C가 적혀있는 같은 크기와 모양의 검은 공 3개가 들어있는 상자 나. 같은 크기와 모양의 흰 공 5개와 검은 공 3개가 들어있는 상자

당신이 한결이라면, 두 종류의 바구니 중 어느 상자를 선택해 공을 꺼내는게 더 유리한가? 자신의 선택에 대한 이유를 설명하여라.

이 과제가 제시되었을 때 연구에 참여한 3조 중 1조와 2조는 [문제 5]에 정확한 답을 구하지 못했고, 3조는 [문제 5]에서 가, 나, 다의 경우는 차이가 없다는 것을 직관적으로 의식했으나 수학적 정당화에 이르지 못했다. [문제 5]에 대해 각 조마다 확률을 어떻게 구할 것인지, 구한 확률은 정당한 것인지에 대한 논의가 지속되자 교사는 [문제 6]을 제공하고

조별 토론 과정에 개입하기 시작했다. [문제 5]와 [문제 6]을 다루면서 각 조에서는 열띤 토론이 일어나기 시작했다. 이 중 등확률성에 대한 담론적 갈등이 나타난 1조와 2조의 사례를 자세히 살펴보고자 한다.

2.1.1. 사례 5

2조는 [문제 6]을 받았지만, [문제 5]에서 직관적으로는 어느 경우라도 같은 결과가 나올 것이라는 것을 인식했지만 자신들의 결과에 대해서도 확신을 갖지 못하고, 수학적 정당화에도 이르지 못하는 모습을 보여줬다. 이에 교사는 조원들에게 [문제 6]에서도 [문제 5]와 같이 확률을 구해보라고 유도했고, 조원들이 모두 [문제 6]에 참여하도록 이끌었다. 이후 담론을 살펴보면 다음과 같다.

번호	화자	전사
353	T	나의 확률은 얼마 나왔어?
354	S6	나의 확률이 얼마였지? $\frac{10}{56}$. 가의 확률이 $\frac{30}{56}$.
355	T	어떻게 그렇게 다르게 나왔어? 어떤 방식으로?
356	S5	왜 다른지 모르겠어요.
357	S6	그러게 이거 맹인이 뽑는다고 생각하고 어떻게 뽑는 거하고 같아야 하는데
358	T	맹인, 아 눈이 안 보이는 사람이 뽑는다고 하면 같아야 정상인거 같은데 지금 결과가 다르다.
359	S6	이거 뽑고 확인하는 (손으로 공 모양을 만들며)순간 만약에 숫자가 있는 반대 방향으로 본다. 그러면 숫자가 뭐가 적혀 있는지 모르는 상태잖아요.
360	T	그러면 제가 한 번 질문해 볼게요. 나의 전체 경우, 나올 수 있는 모든 경우는 뭐에요?
361	S6	나에 나올 수 있는 모든 경우의 수요?
362	T	모든 경우.
363	S6	경우
364	T	집합으로 표현한다면

번호	화자	전사
365	S6	그러네! 나에 나올 수 있는 모든 경우의 수는 흰, 흰, 까만 또는 흰, 까만, 까만, (교사를 보며)동시에 뽑으니까 순서도 없죠? 동시에 뽑았다고 하셨죠? 아까?
366	T	예. 동시에 뽑죠.
367	S6	그리고 까만, 까만, 까만. 흰, 흰, 흰 이거네 모든 경우의 수가 4개네.
368	S5	4개라고?
369	S6	이거 외에 있나?
370	S5	아니
371	S7	그렇네.
372	S6	나는 구분이 안 되니까
373	S5	어? 그런 거야?
374	S6	나는 구분이 안 되니까 이 4가지 밖에 없잖아.
375	S5	근데 각각
376	S7	다르지. 아 이거지.
377	S5	전체 경우가
378	S6	$\frac{1}{4}$? 그럼? 아닌가?
379	S5	그건 아니지 않아? 말이 안 되는 거.
380	S6	근데 선생님이 전체 경우의 수를 다 나열해 봐라 하니까 막상 이것밖에 안 나오네.
381	S7	(S6이 구한 4가지 경우를 하나씩 가리키며)그런데 이게 나올 확률, 이게 나올 확률, 이게 나올 확률이 다 다르잖아.
382	S5	그게 다르잖아.
383	S7	그러니까 $\frac{1}{4}$이 아니지.
384	S6	전체 경우의 수, 확률의 정의가 $\frac{\text{그 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}}$잖아.
385	S7	아니 이거 하나하나가 나올 확률이 같으면 하나, 하나가 $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}$가 맞는데 얘가 나올 확률이랑 얘가 나올 확률이랑 다르잖아.

교사가 2조의 조원들에게 가, 나의 확률을 구해보라고 유도했지만 구하지 못하는 수학 영재도 있었고, 잘못 구한 경우도 있었다. 이에 교사

는 다시 나의 전체 경우, 나올 수 있는 모든 경우는 무엇인지 집합으로 표현하도록, 즉, 표본공간을 구성하도록 유도한다. 이후 S6은 전체 경우의 수가 4이고, 그 중 한 가지 경우이므로 $\frac{1}{4}$라는 결과를 얻었지만, S7은 각각이 나올 확률이 다르기 때문에 $\frac{1}{4}$가 아니라고 반박한다. 그러나 S6은 확률의 정의에 따라 구한 확률값이므로 이것도 타당성이 있다고 주장한다.

이후 계속 2조에서는 가와 나의 상황이 같은 것 같지만 왜 그러한지 논리적으로 설명이 안 된다고 표현한다. 이에 교사는 확률의 정의를 생각해보라고 계속 언급하며, 특히 나의 전체 경우의 수를 구해보라고 유도한다. 그러나 여전히 등확률성을 수학적 정당화하는 것에는 어려움이 있는데 이는 앞선 예와 유사하게 다음과 같이 갈등 상황으로 드러난다.

번호	화자	전사
545	S6	(교사를 보며)경우의 수가 원래 정의가 뭐에요?
546	T	경우의 수?
547	S5	사건이 일어날
548	T	사건의 결과
549	S6	몇 가지의 결과가 일어날 수 있느냐에요? 그걸로 보면 1인데
550	T	경우의 수. 선생님도 잘 모르겠네? 경우의 수(웃음) 나올 수 있는 모든 결과. 나올 수 있는 서로 다른 모든 결과
551	S6	그럼 1이지.
552	S5	그러면 문제가 더 작아지지, 아니
553	S7	(S6이 쓴 4가지 경우를 보며)이걸 하나로 쳐야지.
554	S6	그럼 경우의 수는 4개 맞는데? 그럼?
555	S5	$\frac{1}{4}$이 맞아? 아니 잠시만
556	S7	그러게? 아 $\frac{1}{4}$이 아니지.
557	S6	확률의 정의대로 그렇게 하면 $\frac{1}{4}$이 나오는데

번호	화자	전사
558	S7	$\frac{1}{4}$이 아니지.
559	S6	$\frac{\text{그 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}}$. 응? 맞지? 전체 경우의 수 4개 맞잖아. 그 정의에 따르면, 나올 수 있는 경우 4가지 밖에 없으니까
560	S7	이건 아까 말했듯이 그 이유는 변하지 않지. 얘 나올 확률이랑 얘 나올 확률이랑 다르잖아. 구분이 검은색하고 흰색하고 구분 가잖아.

교사의 질문에도 수학적 정당화를 할 수 있는 논리적인 근거를 찾지 못하자 S6은 확률 정의에 포함되어 있는 경우의 수의 정의로 돌아가 교사에게 질문한다. 경우를 일어날 수 있는 서로 다른 모든 결과라고 정의하자, S6은 '결과' 라는 단어로부터 확률이 $\frac{1}{4}$이라는 것에 확신을 얻게 된다. 그 이유는 결과를 일상적 맥락에서의 결과라고 생각하여 '어떤 원인으로 인한 결말의 상태' [10]로 생각했기 때문이다. 즉, S6는 '결과'를 사용하는 방식이 변화하지 못했음을 알 수 있다.

또한 S6은 $\frac{\text{특정 사건의 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}}$라는 확률의 정의로부터 나의 확률이 $\frac{1}{4}$이라는 결론을 얻고 있다. S7은 S6의 왜 틀린지를 각 경우가 나올 확률이 다르기 때문이라고 계속 설명하지만, S6은 그것을 수용하지 못한다. 이러한 갈등은 앞선 상황에서부터 지속됨을 알 수 있는데 이는 S6이 가진 메타 규칙과 S5와 S7이 가진 메타 규칙의 차이로부터 발생한다고 생각할 수 있다.

메타 규칙이란 대화의 흐름을 조정하는 규칙이며, 발언의 절차, 수학적 발언, 구조, 관계에 관한 것이다. 의사소통 과정 중에 암묵적으로 존재한다. 메타 규칙의 학습은 교사의 계획도 아닌, 학생의 의도도 아닌, 그 누

10) 국립국어원 표준국어대사전

구도 의식하지 않고, 자연적으로 일어난다(Sfard, 2000).

실제 본 연구에서 진행한 교실 수업에서는 교사의 지향뿐만 아니라 수학 영재들의 성향이나 지향이 반영된 사회수학적 규범이 관찰되었다. 수학적 정당화는 수학적으로 타당한 논거를 기반으로 연역적이며 논리적으로 이루어져야한다는 것과 수학적으로 가치 있는 진술이란 일반화 가능하며 수학적 구조를 표현하고 있는 진술이라는 것이 관찰된 사회수학적 규범이다. 따라서 S6의 경우에는 수학이 갖는 고유의 연역적 특성과 논리성에 관한 메타 규칙에 따라 담론을 진행한다고 해석할 수 있다. 즉, 확률의 정의로부터 계산된 결과는 다른 직관이나 추측보다도 강력하며, 확률의 정의와 수학적 논증 방식에 따라 정당화를 해야한다는 것이 S6이 의사소통에 참여하는 메타 규칙이다. 반면, S5와 S7은 비록 수학적으로, 논리적으로 정당화하는 것에는 어려움이 있지만 직관과 추측이 확률의 정의보다 더 설득력 있는 근거가 될 수 있다는 메타 규칙에 따라 담론에 참여한다. 따라서 이들은 다른 메타 규칙에 따라 담론에 참여하기 때문에 담론적 갈등이 발생하게 되며 이는 교사의 개입에도 상당 시간 지속되는 것을 관찰할 수 있었다.

2.1.2. 사례 6

1조는 [문제 5]를 해결하면서 등확률성을 인식하지 못하고 가의 상황과 나, 다의 상황은 서로 다른 상황이라는 것에 잠정적으로 합의했다. 그리고 제시된 [문제 6]을 해결하면서 확률의 정의인 $\frac{\text{특정 사건의 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}}$에 따라 가의 확률과 나의 확률을 구하려고 시도했지만 어려움을 겪었다. 그 후 S2는 다음과 같은 의견을 제시하며 담론이 더 활발해졌다.

번호	화자	전사
349	S2	이거 나에서 전체 경우를 따질 때, 이런 식으로 접근하면

번호	화자	전사
		어떠냐? (활동지에 쓰며)어차피 3개를 뽑으니까, 3개를 뽑는 경우의 수에는 검은 색만 3개를 뽑느냐, 흰 색 하나 검은 색 두 개를 뽑느냐, 흰 색 둘, 검은색 하나를 뽑느냐, 흰 색 셋을 뽑느냐로 나뉘잖아. 이 전체 케이스를 보면 검은 색 세 개만 보면 1가지지. 이거 계산하면은. 그리고 흰 색 하나 검은색 두 개를 하면은 5개 중에 1개니까 ${}_5\mathrm{C}_1$이고 3개 중에 2개니까 ${}_3\mathrm{C}_2$지. 동시에 일어나니까 곱하기 이렇게 하고. 이렇게 똑같은 식으로 가면 이렇게 식이 나오거든. 이게 전체 케이스가 될 것 같아.
350	S11	이게 나가 뭐지?
351	T	결론이 어떻게 나왔어?
352	S11	아직 안 나왔어요.
353	T	막 엎치락뒤치락 하고 있어?
354	S11	네.
355	S2	아, 잠시. 그거일수도 있겠다. 이거를 한 개를 고른 경우가 있잖아. (${}_3\mathrm{C}_2$의 3가지 경우를 하나씩 가리키며)이거 고를 때, 이거 고를 때, 이거 고를 때 같은 경우잖아. 그래서 이걸 그냥 1로 정의할 수 있을 것 같아. 이것도 1.
356	S11	아니 근데 이러면 이렇게 너무 복잡할 것 같지는 않은데?
357	S2	아니 보면 이게 같은 케이스거든. 검은 2개를 이렇게 뽑는 경우 이렇게 뽑는 경우 같이
358	S1	아니 근데 전체 경우의 수니까 다르게 봐야하는 거 아니야?
359	S2	근데 이걸 막상 꺼내 봤을 때 구별이 가?
360	S1	아니 그거는 사건, 그니까 $\frac{\text{사건}}{\text{전체}}$이면은 다 따져야 되는 거 아니야? 공을 다 다르게 보고 따져야하나? 전체 경우의 수는?
361	S2	공을 다르게 보는 건가, 이거 같은데

S2는 나의 확률을 구하면서 검은 공 세 개를 뽑는 경우의 수는 1가지이고, 흰 공 하나와 검은 공 두 개를 뽑는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_2$임을 정

확히 계산할 수 있지만 전체 케이스는 4가지라고 주장하고 있다. S1은 전체 경우의 수이므로 4가지가 아니라 다른 것으로 봐야하는 것이 아니냐고 질문하지만 S2는 가의 경우에는 공이 구별되지만, 나의 경우에는 공을 꺼내고 난 후 구별되지 않기 때문에 전체 경우의 수가 4라고 강조한다. 이후 1조에서는 가의 확률을 구하는 것에 대한 담론이 진행되고, 여기서 교사가 개입해 문제해결의 아이디어를 유도하기도 한다. 이후 다시 나의 경우 전체 경우의 수를 질문하니 서로 논쟁이 시작되었는데 이는 다음과 같다.

번호	화자	전사
611	S2	(S1, S3에게)나 얘기해도 될까?
612	S1	어, 얘기 해봐.
613	S2	가 같은 경우에는 아까 전에 ${}_8C_3$이란 걸 얘기를 했었고, 나는 흰색하고 검은색 공을 따로 계산을 했는데 같이 하는 게 맞는 것 같아. 나 같은 경우를 보면 우선 전체 경우 케이스를 나눠 보면 검은 색 3개를 뽑는 경우하고, 검 2 흰 1, 검 1 흰 2, 흰 3의 경우가 있는데. 어차피 이 공은 아무런 구분이 안 가니까
614	S11	근데, 근데.
615	S2	한 번 얘기를 해볼게. 전체 케, (나의 공들을 그리고 뽑는 방법에 따라 묶으며)그러니까 어떻게 뽑든, 뭐 이렇게 뽑든, 이런 식으로 뽑든, 이런 식으로 뽑든, 뭐 이런 식으로 뽑든
616	S1	음. 구분이 안 가지.
617	S2	다 구분이 안 가거든. 다 같은 케이스로 본 거야. 그렇게 봤을 때 (4가지 경우를 가리키며)이거 하나, 이거 하나, 이거 하나, 이거 하나해서 총 4가지.
618	S1	아니지 확률은 다르지. 그러면 너는 검, 검, 검, 검 나오지. 그 뭐지 동전을 던졌어. 동전을? 어 동전
619	S2	그건 다르지.
620	S1	동전 되겠다.
621	S2	아니지, 다르지. 그건 하나가 앞, 뒷면이 있는 거고 그거는

번호	화자	전사
622	S1	뭐 중복된다는 개념이 없잖아. 아니 그러니까 뭐라고 그러지? (S2가 뽑는 방법에 따라 같은 경우라고 한 것을 가리키며)이게 그냥 같다고 해서 그냥 하나로 본 거잖아. 너는?
623	S2	구분이 안 가니까.
624	S1	응.
625	S11	그 뭐지? 그 표본공간이 다르잖아. 각각의 비중치가 다르니까 다른 거 아니야?

S2는 계속해서 확률을 구할 때, 나의 확률 계산에서는 뽑는 확률은 다를 수 있지만 결국 공을 꺼낸 후에는 구분이 되지 않기 때문에 역시 나의 전체 경우의 수는 4라고 강조한다. S1은 계속해서 확률이 다르기 때문에 4가지가 아니라고 주장하고, S11은 모든 결과를 다 나열한 표본공간을 고려했을 때 각 결과의 가중치가 서로 다르기 때문에 4가지가 될 수 없다고 S1의 주장을 보완한다. 그러나 계속해서 꺼낸 후의 결과에 관심을 갖는 S2의 주장은 달라지지 않는다. 이후 공을 꺼내는 상황에서는 더 이상 갈등이 해결되지 않자, 참여자들은 동전을 던지는 상황으로 바꿔서 담론을 진행한다. 그러나 동전 4개를 던져, 앞면이 4개 나오는 상황과 앞면 2개, 뒷면 2개 나오는 상황에서도 서로 결과의 해석이 다르고 갈등이 지속되었다. 이후 S11의 정리 발언과 함께 나타나는 담론은 다음과 같다.

번호	화자	전사
712	S11	궁금한 게 있어, 얘들아. 잠깐만 궁금한 게 있어. 얘들아. 너희 지금 결과와 과정을 따지는 것 같은데. 궁금한 게 (가를 가리키며)얘 같은 경우는 확실히 구분이 가잖아. 결과에서
713	S1	응.
714	S11	(나를 가리키며)근데 이건 결과가 구분이 안 돼.
715	S1	구분이 안 되지.
716	S11	근데 만약에 뽑는 과정에서 이렇게, 이렇게, 이렇게 있다?

번호	화자	전사
		이렇게, 이렇게, 이렇게 있잖아. 그러면 이거를 뽑고, 이거를 뽑잖아. 그럼 이렇게 뽑고 하는 거랑 분명히 다르잖아.
717	S1	응, 달라.
718	S11	다르다 할 수 있
719	S2	근데 구분이 안 가.
720	S1	(S2를 보며)구분이 안 가는데 확률은 달라지지.
721	S11	그러니까 그게 헷갈려.
722	S1	그러니까 눈으로는 구분이 안 가는데,
723	S2	그 과정은 우리가 알 수가 없어. (눈을 가리고 손으로 공을 꺼내는 표현을 하며)왜냐면 우리가 안 본 상태에서 찍어가지고 나온 결과를 보는 거니까.
724	S1	그래, 그래.
725	S2	이 결과를 보는 거니까.
726	S1	어, 결과 보잖아.
727	S2	이것도 결과 보면 1가지잖아.
728	S1	아. 그러니까 결과 보면 그 1가지라는 그 선입견을 일단 버려봐. 그러니까 내
729	S2	아니, 그러면 앞, 뒤 2개씩 나왔어.
730	S11	야 질문 좀 하자.
731	S2	우리가 봤을 때, 앞, 뒤 둘이 나오는 경우는 우리가 본 거 말고 또 어떤 경우가 있어?

S11은 담론이 진행되면서 S1의 의견에 동의하기도 하고, S2의 의견에 동의하기도 하는 모습을 보였다. 자신의 답에 수학적 확신이 없기 때문에 제대로 정당화를 하지 못하고 그 상황의 국소적 권위자에 동의하여 의견이 엇갈리는 모습을 보였다. S2는 계속해서 앞면 2개, 뒷면 2개가 나오는 상황과 앞면 4개가 나오는 상황은 똑같은 1가지 결과라고 주장한다. 역시 동전을 던져서 나온 그 시각적인 결과만을 보는 것이기 때문에 구별할 수 없기 때문이며, S1은 이에 계속 반박해 뽑는 과정에서 여러 번 다른 방식으로 나올 수 있기 때문에 S2의 의견을 반박한다.

[문제 5]와 [문제 6]을 해결하면서 1조에서 나타난 담론적 갈등의 양상은 이상에서 살펴본 바와 같다. 왜 S1과 S2가 담론적 갈등을 겪게 되는

지 그 이유에 관한 분석은 세 번째 장면에서 가장 잘 드러난다. 동전을 던지고 그 결과를 어떻게 볼 것이냐에 대한 S1과 S2의 메타 규칙은 서로 다르다. 조금 더 자세히 분석해보면, S1은 표본공간 즉, 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과들의 집합의 원소로 결과를 사용하는데 비해, S2는 일상적 맥락에서 사용하는 '어떤 원인으로 인한 결말의 상태'로 결과를 사용한다. '결과'라는 용어가 수학적 담론에서는 확률적 맥락에 따라 메타 규칙이 변화되어 표본공간의 원소로 인식되고 사용 방식이 바뀌어야하지만, S2는 아직 메타 규칙이 변화하지 못한 상태로 담론에 참여하고 있기 때문에 1조에서 담론적 갈등이 발생한다. 2조와 마찬가지로 1조 역시 교사가 개입해 확률의 정의를 유도하는 등 등확률성을 인식하도록 했지만, 실제 수학 영재들은 열띤 토론을 벌이며 갈등의 양상이 오랫동안 지속됨을 관찰할 수 있었다.

2.2. 담론적 갈등의 해결 여부 및 그 양상

2.2.1. 사례 5

S6은 다른 참여자들의 반대 의견에도 불구하고 $\frac{\text{특정 사건의 경우의 수}}{\text{전체 경우의 수}}$라는 확률의 정의로부터 [문제 6]에서 나의 확률이 $\frac{1}{4}$임을 계속 주장한다. 이러한 담론적 갈등의 원인은 S6의 메타 규칙과 S5, S7의 메타 규칙이 다르기 때문임을 앞에서 밝혔다. 즉, S6은 확률의 정의로부터 계산된 결과는 다른 직관이나 추측보다도 강력하며, 확률의 정의와 수학적 논증 방식에 따라 정당화를 해야한다는 메타 규칙에 따라 의사소통에 참여한다. 반면, S5와 S7는 비록 수학적으로, 논리적으로 정당화하는 것에는 어려움이 있지만 직관과 추측이 확률의 정의보다 더 설득력 있는 근거가 될 수 있다는 메타 규칙에 따라 담론에 참여한다.

2조의 담론에 교사가 개입하여 지속적으로 [문제 6]에서 나의 전체 경우의 수를 구해보라는 발언과 확률의 정의를 언급하는 의견이 반복되면서 S6은 확률의 정의에 기반한 자신의 의견이 S5, S7에 의해 반박되자 확률의 정의를 바꿔야하는지를 생각하기 시작했다. 이후 근처에 위치해 있던 연구자에게 질문하기 시작했다.

번호	화자	전사
582	S6	(R을 보며)확률을 수학에서 원래 어떻게 정의해요? $\frac{\text{경우의 수}}{\text{경우의 수}}$로 정의해요? 아니면
583	R	중학교 때 그렇게 배우지 않았어?
584	S6	중학교 때 그렇게 배웠는데, 아무리 이해해도 경우의 수는 4개고, 나올 수 있는 결과는 4가지고 원하는 결과는 그 중 1가지인데 그럼 $\frac{1}{4}$이, 아무리 생각해도 $\frac{1}{4}$이 나올 수가 없는데

번호	화자	전사
585	S5	이게 왜 틀린지, 아 뭐지? 틀린 건 알겠는데 왜 틀린지 모르겠다고 해야 하나?
586	R	그러면 우리가 알고 있는 거에서 뭔가 놓치고 있는 게 있지 않을까?
587	S6	그럼, (4가지 경우를 가리키며)아 사실 이게 같은 결과가 아닌가, 그럼? 얘랑 똑같이 하얀 색, 하얀 색 이 세 가지 있는 경우가 근데 표시를 안 해줬으니까 구별할 수 없는
588	S5	모르잖아.
589	S6	그러니까 모르면 같은 경우로 봐야 하는데. 음.

S6은 연구자에게 중학교에서 학습한 확률의 정의를 질문한다(번호 582). 연구자는 직접 등확률성을 언급하지 않고, S6이 어떻게 확률의 정의를 생각하는지 질문하지만(번호 583), S6은 등확률성을 인식하지 못한 채 여전히 결과가 4가지라는 것으로부터 확률을 $\frac{1}{4}$라 강조한다(번호 584). S5도 직관적으로는 $\frac{1}{4}$이 적절한 답이 아닌 것을 확신할 수 있지만 이를 정당화할 수 없기에(번호 585) 연구자는 이미 알고 있는 사실 중 보완이 필요한 것이 있을 수 있다는 점을 언급한다(번호 586). 이에 S6은 자신이 세어 본 4가지 결과가 같은 결과가 아닐지도 모른다는 의심을 하게 되지만(번호 587), S5와의 대화를 통해 다시 일상적 의미로 결과를 받아들이고 의문을 해결하지 못한다(번호 588, 589).

이후 연구자와 몇 차례의 담론을 통해 $\frac{1}{4}$을 정당화하기 위한 근거를 찾으려 노력했지만 여전히 S6은 이를 해결하지 못한 채 남아있었다. 그런데 3조의 조원들과 함께 토론을 진행하던 교사의 발언으로부터 2조의 담론적 갈등은 새로운 국면을 맞게 되었다.

번호	화자	전사
597	T	(3조와 대화 중)우리가 확률의 정의를 잘못 아는 게 아닐

번호	화자	전사
		까? 뭔가 확률의 정의에 숨겨진 가정 같은 거 없을까?
598	S7	(S6의 활동지를 가리키며)아까 이걸 조금 돌려 말하는 거긴 한데 (R을 보며)저기서 말하는 것 듣고 생각을 해 봤는데요. 확률에 경우의 수를 쓰는 게요. 그냥 이거랑 거의 같은 말인데 사건 하나하나가 모두 일어날 확률이 같다는 가정 하에서 무조건 일어나야 하잖아요. 그래서 전체 확률을 따질 수 있는 건데, 어, 음, 얘는 아, 잠시만요.
599	S5	(3조에서 확률의 정의에 관한 T의 발언-이거는 제대로 된 확률의 정의가 아닌거야?을 듣고)확률의 정의? 확률의 정의가 이거밖에 이게
600	S6	내 생각에 가장 깔끔하게 하는 방법은 (공을 뽑은 4가지 그림 옆에 각각 뽑힌 번호를 쓰며)경우의 수를 이거랑 이거를 여러 개를 적어 주는 게 이게 가장 깔끔하게 모두 다 같은 결과를 얻으면서도 (문제 5를 가리키며)여기에서도 주사위가 같은 색이고 구분할 수 없더라도, 이렇게 (2,1), (1,2)를 둘 다 적어 주는 게 가장 깔끔한 해결 방법이 되겠는데
601	S7	아니 잠깐만 (공을 뽑은 4가지 그림을 가리키며)이거 얘기하는 거야? 네가 아까 집합 만들려고 한 거에 흰, 흰, 흰에 여러 개 그 경우의 수만큼 적어 주라는 거야? 아니야?
602	S5	그 소리 아니야?
603	S6	음. (2,1), (1,2)를 다른 걸로 보자는 거지. 경우의 수를 따질 때
604	S5	그니까
605	S7	(2,1), (1,2)
606	S6	그걸 다른 걸로 보자는 거지. 그러면 다 똑같겠네. 다 똑같겠네.
607	S6	그렇게 하면 일단 해결은 되겠지. 그리고 상식에는 맞지.
608	S5	근데 이론적으로 다르
609	S6	상식에는 맞는데 그렇게. 어떻게 해야 되지?
610	S5	이렇게 있으면? 이게 원래 맞는 건데
611	S7	맞는 표현이라는 거지.

번호	화자	전사
612	S5	어, 맞는
613	S7	(공을 뽑은 4가지 그림을 가리키며)쟤는 아까 말했듯이 각각 확률이 다르고, 이렇게 해주면 이거 이거랑 이거 하나하나 같으니까 그 이제 여기선 설명을 할 수 있는 거
614	S5	응.
615	S7	그니까 저기서 말하는 가정이 결국 이거 아닐까? 진짜로 각각 경우마다 일어나는 확률이 무조건 같아야지만 그 각각의 독립적인 경우의 수라고 생각할 수 있다라고.
616	S6	그럼 확률의 $\frac{\text{경우의 수}}{\text{경우의 수}}$다, 로 정의 확률을 정의하려면 각각의 확률이 같아야 된다.
617	S7	그렇지
618	S5	그 경우의 수가 다 같아야 된다는 거지.
619	T	어떤 해결이 나오고 있어?
620	S7	아까 저기서 정의 얘기하는 거 있잖아요. 정의에서 그냥 단순하게 ($\frac{\text{경우의 수}}{\text{경우의 수}}$를 가리키며)이게 아니라 이걸 얘기하려면 아까 선생님이 얘기한대로, 이걸 설명하려고 생각을 했어요. 그 집합, 전체집합 만드는 거
621	T	응, 응.
622	S7	그래서 이거를 단순하게 여러 번 쓰는 걸로 생각을 했어요. 그러면 아까 (공을 뽑은 4가지 그림을 가리키며)이건 얘가 일어날 확률, 얘가 일어날 확률, 얘가 일어날 확률이 다 달랐잖아요.
623	T	응, 너희가 다르다고 했지, 아까.
624	S7	그러니까 이거를 하나하나 나열하게 되면 얘랑, 얘랑, 얘랑, 얘랑 다 같잖아요 일어날 확률이.
625	T	응.
626	S7	그러니까 ($\frac{\text{경우의 수}}{\text{경우의 수}}$를 가리키며)이걸 사용하고 싶으면 각각의 사건마다 일어날 확률이 모두 같아야지만 그 독립적인 경우의 수라고 볼 수 있는 거라고, 한 개 경우의 수라고

번호	화자	전사
627	S5	경우의 수의 정의가 다 확률이 같을 때에만 사용할 수
628	T	음. 그러니까 $\frac{\text{부분}}{\text{전체}}$할 때,
629	S5	그 경우의 수
630	T	그 밑에 전체 경우의 수는
631	S5	그 각각의 확률이
632	T	어, 각각의 확률이
633	S5	다 같아야 한다.
634	T	같아야 된다?
635	S7	거기 사용되는 경우의 수 라고 하거나 사건이라고 하는 그 거를 그니까 그 사건 1, 사건 2가 일어날 확률이 같아야지
636	S5	각각의 경우의 수로 보겠다.
637	T	음.
638	S7	그런 거죠.
639	T	S6 이해 됐어?
640	S6	네.

교사가 3조의 조원들에게 현재 알고 있는 확률의 정의에 숨겨진 가정이 있음을 암시하고, 이를 탐구하기를 유도하는 발언(번호 597)을 하자, S7은 직관과 추측으로만 짐작했던 자신의 논거를 뒷받침하기 위한 근거를 찾기 시작했다. S7은 확률의 정의에 사용된 경우의 수는 사건 하나하나가 일어날 확률이 모두 같다는 가정 하에서 고려되어야함을 지적하지만 확신을 갖지 못한다(번호 598). 이후 S6의 개입으로 S7의 의견은 지지를 받게 되며, 표본공간 구성에 대한 논의로 발전된다. 즉, S6은 가장 완전하다고 믿었던 확률의 정의에 생각하지 못했던 가정이 있음을 인식하게 되면서 같은 모양과 색깔의 주사위 두 개를 던져 나오는 결과 중 $(1,2), (2,1)$를 모두 표본공간의 원소로 생각해야한다고 언급한다(번호 600). 하지만 담론이 진행되는 중에도 여전히 이 결론이 직관적으로는 맞지만 이론적으로는 정당화되지 못한다고 생각한다(번호 601~609). 이후 S7은 앞서 언급된(번호 598)에 확신을 가지며 경우의 수를 셀 때에는 각각 일어날 확률이 같은 것들을 1가지로 세야한다는 것을 명확히 표현하고(번호 615), S6은 이를 수용해 표본공간 구성의 숨겨진 가정을 인식하

고 확률의 정의를 보완하게 된다(번호 616). 이후 교사는 2조의 담론에 개입하여 진행 상황을 점검한다(번호 619). S7은 직관적으로는 짐작할 수 있었지만 수학적으로 정당화되지 못했던 등확률성에 대해 논리적으로 설명하면서 자신의 추측에 확신을 얻을 수 있고(번호 622, 624, 626), S5 역시 S7과 교사의 담론에 참여하면서 등확률성을 인식했다(번호 627, 629, 631, 633). 이후 교사는 S6의 이해 여부를 확인하고(번호 639), S6 역시 이해되었다는 반응을 보인다(번호 640). 이후, 2조에서는 교사와 함께 [문제 5]에서의 등확률성에 대해 더 논리적으로 설명하는 모습을 보였다.

2조의 참여자들은 완전하다고 생각했던 확률의 정의에 의한 추론이 직관적으로 이해되지 않는 새로운 상황에 맞닥뜨리자 당황하며, 서로 다른 메타 규칙에 따라 담론에 참여하면서 담론적 갈등에 부딪혔다. S6은 자신의 메타 규칙 이외의 다른 메타 규칙의 가능성을 인식하지 못하고 다른 참여자들과 함께 계속 갈등 관계를 지속하였으나 동료의 발언, 연구자의 발언(번호 586), 교사의 발언(번호 597)으로 새로운 가능성을 인식하고 확률의 정의에 대한 새로운 시각에 도달하기 시작했다. S6과 S7의 내러티브를 입증하기 위한 규칙은 서로 달랐지만, 이 담론적 갈등은 S6이 교사의 발언(번호 597)와 S7의 발언(번호 615)에 내재되어 있는 그들의 생각을 이해하는 것과 이로부터 점진적으로 동의하는 과정, 그리고 S7의 담론에 내부에 있는 등확률성에 대한 논리를 이해하는 것으로부터의 합리화로 해결되었다. 이로부터 S6은 확률에 대한 새로운 시각을 갖게 되었으며 이는 수학적 안목의 향상으로 해석할 수 있다.

이때 나타나는 담론의 특징을 살펴보면 다음과 같다. 연구자에게 질문을 하고 [문제 6]의 나의 확률이 $\frac{1}{4}$임을 다시 한번 확신하던 S6은 S5의 RW(번호 585)와 연구자의 HLT(번호 586)으로부터 새로운 가능성을 인식한다. 이후 연구자보다 보다 자세한 교사의 HLT(번호 597)로부터 S6과 S7은 자신의 아이디어를 자세히 설명한다(EE-번호 598, 600). 이는 S7과 S5의 RW(번호 601, 602, 604)를 통해 더 구체화된다. 하지만 여전히 메타 규칙을 합리화하는데 어려움을 겪는 S6의 RW(번호 609)는 ET(번호 610~614)를 통해 S6의 의견을 공유하고 근거를 평가해 함께 추론하는 과

정을 거쳐 S7의 EE(번호 615)로 정리된다. 이를 수용하고 개인화한 S6의 RW(번호 616)으로부터 담론적 갈등은 해결되고, 이후 교사의 질문에 S7의 EE(번호 620, 622, 624, 626)와 S5와 S6의 RW(번호 629, 631, 633, 636, 640)로부터 모든 조원은 등확률성을 인식하게 됨을 알 수 있다.

2.2.2. 사례 6

1조의 담론적 갈등은 동전을 던지고 그 결과를 어떻게 볼 것이냐에 대한 S1과 S2의 메타 규칙이 서로 다르기 때문에 발생한다. 즉, S1은 어떤 시행에서 일어날 수 있는 모든 결과들의 집합의 원소로 결과를 사용하는데 비해, S2는 일상적 맥락에서 사용하는 '어떤 원인으로 인한 결말의 상태'로 결과를 사용한다. '결과'라는 용어가 확률적 맥락에서는 새로운 시각으로 인식되고 이로부터 담론의 규칙이 변화하여야 하지만, S2는 아직 자신의 내러티브를 입증하기 위한 규칙이 변화하지 못하고 있었다. 담론적 갈등이 지속되자 S11은 곁에 있던 연구자에게 현재 쟁점인 상황을 설명했다. 이에 연구자는 동전이 4개인 상황에서 1조의 조원들이 확률 계산에 어려움을 겪는 것을 확인하고, 동전을 2개로 줄여서 실제 확률 계산을 유도했고 이로부터 다음과 같은 담론이 진행되었다.

번호	화자	전사
773	S1	(활동지에 쓰며)결과는 앞 2, 앞 1 뒤 1, 뒤 2인데. (앞, 뒤/뒤, 앞을 가리키며)얘는 두 가지고 (앞, 앞을 가리키며)얘는 한 가지고, (뒤, 뒤를 가리키며)얘는 한 가지잖아. 그러니까 확률이 다르다고 내 말은
774	S2	그러니까
775	R	S2는 몇 가지 나왔어? 전체 경우의 수가?
776	S2	어. 나와 같은 상황은 어차피 뽑았을 과정은 모르는 거니까 나온 결과를 보고 판단해야 하는데 그 나온 결과는 총 3가지다.

번호	화자	전사
777	S1	그럼 $\frac{1}{3}$이라는 거야? 너는? 지금?
778	S2	우리가 봤을 때, 동전이 나온 결과를 봤을 때, (앞 2, 뒤 0을 쓰며)이렇게 나오는 경우가 있고, (앞 1, 뒤1을 쓰며)이렇게 나오는 경우가 있고, (앞 0, 뒤 2를 쓰며)이렇게 나오는 경우가 있다.
779	S1	그러니까 (앞 1, 뒤 1을 가리키며)이렇게 나올 확률은 $\frac{1}{3}$이라고?
780	S2	우리가 봤을 때
781	R	그럼 S2는 $\frac{1}{3}$이다.
782	S1	근데 저는 4개 중에 (앞 1, 뒤 1을 가리키며)얘가 2개니까
783	S2	너는 (S1이 쓴 앞, 뒤/뒤, 앞을 가리키며)이걸 본 거지.
784	S1	아 4개 중에 (앞, 뒤/뒤, 앞을 가리키며)이게 2개니까 당연히 확률이 얘가 더 높은 거죠.
785	R	그럼 S1이 말대로는 $\frac{1}{2}$이겠네. 이게 나올 확률이
786	S1	네, 그렇죠.
787	S11	뭔가 쉬운 문제 같은데, 왜 이렇게
788	S1	$\frac{1}{2}$이지. 당연히. $\frac{\text{사건}}{\text{전체 경우의 수}}$잖아.
789	S2	어.
790	S1	(S1이 쓴 4가지 경우를 가리키며)이건 결과야. 얘도 결과야.
791	S2	아니 얘는 순서가 있는 과정이지. 순서가
792	S1	(S2가 쓴 앞 1, 뒤 1을 가리키며)아니 얘도 앞 하나, 뒤 하나지? (S1이 쓴 앞, 뒤/뒤, 앞을 가리키며)얘도 앞 하나 뒤 하나야. 결과야, 결과, 결과. 앞 하나, 뒤 하나, 얘도 앞 하나, 뒤 하나. (S2가 쓴 앞 1, 뒤 1을 가리키며)얘 두 개야 두 개. 얘는 경우의 수가 2개라고.
793	S2	순서가 있잖아.
794	S1	아니 근데 결과가, 결과가 앞, 하나 뒤 하나잖아. 그렇지?
795	S2	그래.

번호	화자	전사
796	S1	그러니까 앞 하나, 뒤 하나 나올 수 있는 경우는 2가지라고.
797	S2	어. 그건 오케이 알겠어. 근데 이거는 우리가 어떤 애가 던진 걸 본 거지. 직접. 그렇지?
798	S1	아니 안 봤어.
799	S2	그럼 순서를 어떻게 알아?

S1은 동전을 2개 던졌을 때 나오는 결과는 S2이 말한 것처럼 3가지일 수 있지만, 앞면 1개, 뒷면 1개가 나오는 경우의 수는 2가지라 언급한다(번호 773). 이에 연구자는 S2에게 자신의 생각을 정당화하도록 요구하는데(번호 775), S2는 뽑는 과정은 알 수 없고 뽑고 난 이후의 결과를 보고 판단하는 것이기 때문에 나올 수 있는 결과는 총 3가지라고 강조한다(번호 776). S1은 S2의 의견대로 확률을 구하면 $\frac{1}{3}$이 나온다는 것을 반박하지만(번호 777, 779), S2는 우리가 본 결과를 세야한다는 메타 규칙에 의해 S1의 의견을 수용하지 않는다(번호 776, 778). S1은 등확률성을 인식하고 앞면 1개, 뒷면 1개가 나올 확률은 $\frac{1}{2}$임을 명확히 설명하지만(번호 782, 784, 786, 788, 790), S2는 계속 이는 순서가 있는 과정일 뿐 결과는 될 수 없다고 주장한다(번호 791). S1은 자신의 의견을 더 상세히 설명하지만(번호 792), 담론적 갈등은 해결되지 못한다(번호 793~799).

이후 교사는 1조의 담론에 참여하여 갈등을 중재하려고 노력한다. 이때 나타나는 양상은 다음과 같다.

번호	화자	전사
838	T	결론이 났어? 그래서? 아직 결론 못 내렸어? $\frac{1}{4}$이야? 아니야?
839	S11	그건 아닌 거 같은데.
840	T	아닌 이유

번호	화자	전사
841	S1	(S2를 가리키며)근데 얘 생각엔 $\frac{1}{4}$이에요.
842	T	근데 그럼 봐봐, 여기서
843	S1	아닌데 저는 못 구하는 그 $\frac{\text{사건}}{\text{전체 경우의 수}}$을 못 구하는
844	T	(S2에게)그런데 여기서 만약에 흰 공이 1000개 있다고 해봐.
845	S2	네.
846	T	그래도 $\frac{1}{4}$이야?
847	S2	흰 공이 1000개가 있을 때, 어차피 3개를 뽑으니까
848	T	아니면 예를 들어 흰 공이 1000개 있을 때, 검은 거 3개 나올 확률도 $\frac{1}{4}$이고, 흰 거 3개 나올 확률도 $\frac{1}{4}$이잖아. 이렇게 하면
849	S2	그런 식으로 접근한 거 아닌데
850	S1	저는 선생님 생각이에요. 확률이 다르다는 거지.
851	T	근데 현실적으로 흰 공이 1000개 있으면, 검은 공 3개 나오는 거랑 흰 공 3개 나오는 것 중에 뭐가 더 잘 일어나겠어?
852	S1	(S2에게)그러니까 네가 하는 말은 비가 온다, 안 온다, $\frac{1}{2}$다 하는 거랑 똑같아.
853	S2	오는 거, 안 오는 거 하면 $\frac{1}{2}$ 맞아.
854	S1	그러니까, 근데 그거 아니잖아. 지금. 이거 그거 뭐야, 뭐야 이거, 어느 게 더 유리한가 하는 거잖아. 비 올 확률이 더 있는지, 지금 뭘 더 지금 어느 상황에서 비가 더 확률이 있는지 계산하는 거 아니야. 비유하자면
855	S2	단순히 논리적으로 봤을 때, 비가 온다, 안 온다는 T, F의 문제니까 $\frac{1}{2}$거든. 그런데
856	S1	확률은 그렇게 계산하는 게 아니라고
857	S2	아니 근데 논리적인 확률은

번호	화자	전사
858	S11	아니야, 근데 아니야. 솔직히 나도 지금 헷갈리는데 비가 온다, 안 온다에
859	S1	얘는 지금 $\frac{1}{2}$이라고 하는 거랑 똑같아.
860	S11	그 $\frac{1}{2}$이라고 하는 건 아니야. 지금
861	S1	근데 그거랑 똑같다니까.
862	S11	내가 헷갈린 건 뭐냐면 그 과정이란 그런 게 헷갈렸거든. 근데 비가 온다, 안 온다의 확률이 $\frac{1}{2}$은 아니야. 맞아.
863	S2	그건 확률이라기보다는 방법의 차이거든.
864	S11	방법의 차이가 아니라
865	S1	비 온다, 안 온다 $\frac{1}{2}$이다 하고, (S2를 가리키며)얘 지금 $\frac{1}{4}$이다 하고 똑같지 않아요? 논리가?
866	T	그럼 그 논리가 왜 잘못 된 걸까?
867	S11	그러니까 그게 그 각각의 경우마다 그게 다르기 때문이잖아. 그 아까 내가 말한 거
868	S2	그건 다른 방법을 적용했을 때이고,

교사는 가장 쟁점이 되는 [문제 6]의 나의 확률이 $\frac{1}{4}$인지 아닌지를 질문하지만(번호 838), 조원들의 갈등이 해소되지 않았음을 알고(번호 839~841) S2의 메타 규칙을 변화시킬 수 있는 새로운 가능성을 제공할 것이라 기대되는 가정을 한다(번호 844, 846, 848). 이 발언은 3조에서 [문제 6]의 나의 확률이 왜 $\frac{1}{4}$이 아닌지를 정당화할 때 나온 예 중 하나이다. 교사는 3조에서 이러한 가정을 통해 등확률성이 인식되었기 때문에 1조에도 비슷한 질문을 했다. 이에 S2는 자신이 구한 $\frac{1}{4}$은 그렇게 얻어진 것이 아님을 언급한다(번호 849). 교사는 흰 공이 1000개와 검은 공 3개가 있을 경우 검은 공 3개가 나올 확률과 흰 공 3개가 나올 확률을 비교하는 앞선 상황보다 더 자세한 질문을 하고(번호 851) S1은 교사의

의견에 동의한다(번호 850, 852). 이어 S1은 S2의 메타 규칙이 인정될 수 없는 상황인 비가 오는 예를 들지만(번호 852, 854), 여전히 S2는 새로운 가능성을 받아들이지 못한다(번호 853, 855, 857). 이어 S11도 S1의 의견에 동의하지만(번호 858, 860, 862), S2는 받아들이지 못한다(번호 863). 이어 S1은 갈등이 해결되지 않자 교사에게 비가 오는 상황과 $\frac{1}{4}$이 나오는 상황이 논리적으로 틀리지 않느냐고 질문한다(번호 865). 이에 교사는 가치 판단을 해, S2의 메타 규칙이 변화해야함을 직접 언급하고 있지만(번호 866) 이후에도 1조의 담론적 갈등은 해결되지 못했다.

1조의 참여자들은 일상적 맥락에서 사용되는 ‘결과’라는 단어가 확률의 맥락에서는 새로운 시각을 가지고 해석되어야하는 담론적 변화가 필요한 상황에서 담론적 갈등에 부딪혔다. S2와 S1의 담론적 갈등이 지속되면서 S1은 S2의 메타 규칙의 변화를 유도하는 발언을 자주 했다(번호 773, 792). 교사 역시 S2의 메타 규칙이 변화해야 해석할 수 있는 상황을 제시하고(번호 844), 이를 구체적으로 제시하며(번호 848, 851), 마지막에는 판단까지 하지만(번호 866) 1조의 담론적 갈등은 해결되지 않는다. S1과 S2의 ‘결과’ 사용에 관한 메타 규칙은 서로 다르고 이는 담론적 갈등으로 나타난다. 교사와 동료가 S2의 담론적 방법이 변화하도록 동기를 부여하지만 S2는 결국 확률적 맥락에 대한 교사와 동료의 생각(즉 이야기)을 이해하지 못한다. S2가 타인의 담론적 방법을 수용하지 못하면서 2조에서는 나타났던 점진적 동의, 다른 사람들의 내부에 있는 논리를 이해하는 것으로서의 합리화가 1조에서는 나타나지 않고, 결국 담론적 갈등은 해결되지 못한 채 마무리되었다.

이때 나타나는 담론의 특징은 살펴보자. 연구자의 AQ(번호 775)로부터 S2는 자신의 생각을 상세히 설명한다(EE-번호 776, 778). 그러나 S1은 RW(번호 777, 779)으로 S2의 의견에 동의하지 않고, 이후 ET(번호 788~799)이 진행되면서 추론의 근거를 평가하고 지속적인 질문을 하지만 담론적 갈등은 지속된다. 교사의 HLT(번호 838, 844, 846)로부터 다시 한 번 담론적 갈등을 해결하기 위한 노력이 시작된다. 이후 S1과 S2, S11은 RW(번호 849, 850, 852~865)을 진행하면서 집단적으로 사고하고 추론한

다. 이후 교사는 UT(번호 866)를 제시해 이전의 S2의 발언에 대한 보충 질문을 하지만 이후에도 담론적 갈등은 해결되지 못하였다.

V. 논의 및 결론

1. 논의 및 시사점

본 연구에서는 토론 중심의 수학 영재 수업 중 확률 과제의 문제해결 과정에서 먼저 문제해결에 기여한 상호작용의 양상과 담론의 특징은 무엇인지, 다음으로 확률 문제해결 과정에서 나타난 담론적 갈등은 문제해결에 기여한다면 어떻게 해결되는지, 기여하지 못한다면 그 양상은 어떠한지의 두 맥락에서 이루어졌다. 이 절에서는 우선 이러한 맥락에서 이루어진 확률 문제를 해결하는 수학 영재 수업에서의 담론에 관한 연구 결과에 대해 논의하고자 한다.

첫째, 수학 영재들은 확률 문제를 개인적으로 해결하고 소그룹 내에서 풀이에 대한 담론을 진행하는 동안 모호하고 불완전한 풀이를 반성하고 수정하였다. 또한 성공적으로 문제를 해결한 참여자에게 국소적 권위가 부여되고, 사고를 유도하는 다른 참여자들과 함께 수학적 아이디어를 통합하여 수학적 진술이 만들어져 생산적인 기여를 하는 모습도 확인하였다. 이는 Empson(2003)이 교실 토론에서 두 학생이 상호작용에 기여한 특징을 파악하고 참여 틀의 유형을 분석한 연구 결과와 유사하다. 그들의 연구에서 두 명의 학생에 의해 불완전한 추론이 해결되고, 다른 학생들의 사고가 유도되며, 이로 인해 교실에 생산적인 기여를 했다고 하였던 것처럼, 본 연구에서도 비슷한 양상이 나타났다. 다만 본 연구에서는 수학 영재를 대상으로 연구를 진행한 만큼 Empson의 연구와 다소 차이점도 발견되었다. 수학 영재들은 활발한 담론을 통해 수학적 정당화의 과정을 거쳐 일반적인 문제해결 전략을 생성하거나 수학적 개념의 대상화에 이르는 모습도 관찰되었다. 이는 수학 영재의 문제해결에서의 통찰력(Keating & Fox, 1974), 수학적 대상들의 관계를 찾으려 하고 문제 풀이 방법을 일반화하려는 경향(Krutetskii, 1976)이 반영된 결과라고 볼 수 있다.

둘째, 수학 영재들의 확률 문제해결 과정에서의 담론을 분석한 결과 순열, 조합 단원의 중복 개념이 대상화에 이르는 과정을 확인하였다. 이는 인지에 대한 의사소통적 접근을 시도한 Sfard(2008)의 연구로부터 해석할 수 있다. 수학 영재들이 '중복'이라는 단어를 사용한 사례를 관찰한 결과, 연구 대상 중 한 조에서의 '중복'은 탈-담론적이고 스스로 지속되는 대상을 나타내지 못하였고 인간 주체와도 독립적인 것처럼 사용되지 못했다. 반면 다른 한 조에서의 '중복'은 활발한 상호작용을 통해 '중복'의 의미가 정교화 되었고, 의사소통 과정 중 송신자에서 수신자로 대상이 옮겨가더라도 그 의미가 손실되지 않는 모습이 관찰되었다. 이 조에서는 '중복'의 의미가 대상화되면서 '중복'의 개념을 적용했던 과정이 정적인 구조로 전환되어 전체로 볼 수 있는 능력을 갖게 되었다.

셋째, 수학 영재들의 확률 문제해결에 기여한 담론의 특징을 분석하면 불완전하고 모호한 풀이는 교사의 개방형 질문, 고차원의 사고와 관련된 질문, 보충 질문, 시험하는 질문과 동료의 고차원의 사고를 유도하는 질문으로부터 인식되었고, 이후 자신의 아이디어를 구체적으로 진술하는 상세한 설명, 추론 과정이 집단적으로 이루어지는 탐구하는 대화를 통해 해결되었다. 특히 상세한 설명과 탐구하는 대화는 진행 순서에 대한 규칙성이 특별히 발견되지는 않았지만, 서로 밀접한 관련을 맺으며 나타난다는 점이 확인되었다. 사고를 유도하고 생산적인 기여를 하는 과정에서의 담론의 특징은 일반적인 문제해결 전략이 생성되는 경우와 수학적 개념이 대상화되는 경우가 조금 달랐지만, 공통적인 특징은 교사의 개방형 질문 또는 보충 질문과 동료의 고차원의 사고와 관련된 질문으로부터 출발하여 상세한 설명과 탐구하는 대화 과정이 반복되면서 이루어진다는 것이 관찰되었다. 이는 여러 명의 학생들이 참여해 교사에 의해 강요된 수학적 의미를 수용하는 것이 아니라 직접 정당화하고 설명하는 모습을 대화적 담론으로 설명한 Imm과 Stylianou(2012)의 연구 결과와 유사하다. 한편, 일반 교과 영역에 관한 토론 중 어떤 담론적 특징이 생산적인 토론에 기여하였는지를 분석한 Soter 외(2008)의 연구와는 다소 차이점이

나타났다. 그들의 연구에서는 개방형 질문, 보충 질문, 추론 단어, 상세한 설명이 생산적인 토론에 기여했지만, 수학 영재들의 담론에서는 수학적 일반화와 추측, 분석을 유도하는 고차원의 사고와 관련된 질문과 학생들이 몇몇 발언을 통해 지식을 구성하고 공유해가며 근거를 평가에 함께 추론하는 탐구하는 대화도 생산적인 기여를 했음을 확인하였다.

넷째, 확률 문제를 해결하는 수학 영재의 담론에서의 담론적 갈등은 확률의 정의와 직관에 의한 추측을 수용하는 메타 규칙의 차이, 시행을 한 결과를 어떻게 볼 것인가의 메타 규칙의 차이에서 비롯되었다. 이는 Sfard(2007)의 학생들에게 친숙하지 않은 학습인 메타 수준 학습은 새로운 가능성을 인식하고 사물에 대한 새로운 시각에 도달하기 위해 담론적 변화가 필요하다는 주장이 확률 문제를 다루는 수학 영재에게도 유의미함을 의미한다. 특히 확률 영역은 공리와 공준, 정의로부터 엄밀하게 연역적으로 논리가 전개되는 다른 수학의 영역과 달리 직관과 일상의 경험, 일상적 맥락에서의 단어 사용에 영향을 받기 때문에 담론적 갈등의 양상도 이런 측면을 반영하고 있었다. 수학 영재들은 자신에게 익숙하고 유창한 담론은 확률 분야를 이해하고 확률 문제를 해결하는 도구로 충분하다고 생각하는 경향이 있었는데, 한계에 부딪히고 담론적 갈등이 발생하자 당황하는 모습을 보이기도 했다.

다섯째, 확률 문제를 해결하는 수학 영재의 담론에서 나타난 담론적 갈등은 동료의 발언과 교사의 발언으로부터 새로운 가능성을 인식하고, 그들의 발언에 내재되어 있는 생각을 이해하고 점진적으로 동의하는 과정, 동료의 담론 내부에 있는 등확률성에 대한 논리의 합리화로 해결되었다. 반면, 담론적 갈등이 해결되지 못하고 등확률성을 인식하지 못한 조에서는 동료와 교사가 지속적으로 메타 규칙의 변화를 유도함에도 불구하고, 동료의 담론적 방법을 수용하지 못하면서 점진적 동의와 합리화가 나타나지 않았다. 이는 담론적 갈등의 해결은 그 세계에 대한 다른 사람의 생각을 이해하는 것으로부터 출발한다는 Sfard(2007)의 연구 결과와 유사하다. 특히 본 연구의 결과는 담론적 갈등의 해결에서는 학생들이 교사를 믿고 따를 준비가 되어 있어야한다고 강조한 Cobb(2009)의 주

장과도 연결된다고 볼 수 있다. 한편 담론적 갈등이 해결된 경우와 해결되지 못한 경우에도 모두 담론의 특징은 유사하게 나타났다. 각 담론에서는 모두 교사의 고차원의 사고와 관련된 질문과 수학 영재들 사이의 이유의 분석을 요구하거나 동의와 비동의를 뜻하는 추론 단어가 자주 사용되었다.

이상의 논의로부터 본 연구의 시사점을 살펴보면 다음과 같다. 첫째, 교사의 개방형 질문과 고차원의 사고와 관련된 질문, 보충 질문으로부터 유도된 수학 영재의 상세한 설명과 탐구하는 대화가 확률 문제해결에 기여한 것처럼, 실제 교수학습 상황에서도 교사는 수업 시간에 개방형 질문이나 분석, 일반화, 추측을 유도하는 질문, 이전 발언에 대한 보충 질문을 활발히 할 필요가 있다. 또한 교사는 수학 영재에게 자신의 진술에 근거를 부여하여 정당화하도록 하는 경험과 수학 영재들끼리 지식을 구성하고 공유해가며 근거를 평가해 함께 추론하는 경험을 제공해야 한다.

둘째, 확률 영역에서 나타나는 담론적 갈등은 확률이 갖는 모호한 특성을 반영한 담론적 갈등이었다. 따라서 실제 교수학습 상황에서 교사는 확률의 맥락에서의 메타 규칙과 다른 수학 영역의 맥락에서의 메타 규칙의 차이를 미리 분석하고, 수학 영재가 겪을 수 있는 담론적 갈등을 예상하여 교수 설계를 해야 한다. 또한 수학 영재에게는 확률에서의 모호성이 곧 확률의 본질임을 지도하여 확률 영역에 대한 안목을 기를 수 있도록 지도하는 것이 필요하다.

셋째, 확률 영역의 문제해결에서 나타나는 담론적 갈등의 해결은 다른 사람의 생각을 이해하고 수용하는 것으로부터 시작되었다. 따라서 실제 교수학습 상황에서는 교사와 수학 영재 각각의 역할과 메타 규칙이 다름에서 오는 차이의 인정에 관한 교수학습 상의 합의가 필요하다. 수학 영재는 교사와 동료를 믿고 따를 준비를 해야함을 지도할 필요가 있다.

결국 수학 영재의 확률 문제해결에 기여하기 위해서는 교사의 개방형 질문이나 분석, 일반화, 추측을 유도하는 질문, 이전 발언에 대한 보충 질문과 수학 영재의 정당화와 추론의 기회부여가 필요하다. 이때 확률의 모호성으로 인한 담론적 갈등이 발생할 수 있는데, 이를 예상한 교수 설

계가 필요하며, 확률의 모호성이 곧 확률의 본질임을 인식할 수 있는 안목을 기를 수 있도록 해야 한다. 또한 담론적 갈등은 이해와 수용 없이는 해결될 수 없기 때문에 이에 관한 교수학습 상의 합의가 사전에 이루어져야한다.

2. 결론 및 제언

본 연구에서는 확률 문제를 해결하는 수학 영재 수업에서의 담론에 초점을 맞춰 크게 두 가지 측면을 살펴보았다. 하나는 확률 문제해결 과정에서 문제해결에 기여한 상호작용의 양상과 담론의 특징에 관한 것이고, 다른 하나는 현재 담론에서 지금까지 적용되었던 규칙과는 다른 규칙을 따라야 하는 새로운 담론이 등장하였을 때 발생하는 담론적 갈등에 관한 것이다. 특히 담론적 갈등에 관해서는 문제해결에 기여한 담론적 갈등과 문제해결에 기여하지 못한 담론적 갈등의 양상에 대해 살펴보았다.

이를 위해 전통적인 확률 교육의 한계를 극복하고자 하고, 사회적 구성주의의 지향과 그 맥락을 같이하는 선행 연구에 기반하여 수업의 틀을 갖추었다. 그 후 확률 영역의 주요 내용 요소의 도입 단계에서 담론을 촉진할 수 있는 과제를 설계에 토론 중심의 수학 영재 수업을 실시하였으며, 이는 수학 영재의 사고 특성과 Cobb과 그의 동료들의 발생적 접근, 인지에 대한 의사소통적 접근, 교실 상호작용 및 담론에 관한 연구를 바탕으로 분석하였다. 이하에서는 본 연구의 결과를 요약한 뒤, 연구의 제한점 및 후속 연구에 대한 제언을 덧붙이고자 한다.

첫째, 확률 문제해결에 기여한 상호작용과 담론의 양상은 모호하고 불완전한 풀이를 반성하고 수정하는 경우, 사고가 유도되어 문제해결의 일반화된 전략을 찾는 경우, 추상적인 수학적 개념이 대상화되어 존재론적 전환이 일어나는 경우의 세 가지로 나타났다. 특히 교사의 개방형 질문과 수학적 일반화와 추측을 유도하는 질문, 이전 발언에 대한 보충 질문을 통해 수학 영재들이 정당화하는 경험이 유의미함을 확인했다.

둘째, 확률은 영역에 내재된 특수성 때문에 다른 수학의 영역 또는 일

상적 맥락과의 메타 규칙에 차이가 있다. 따라서 확률 문제해결 과정 중 나타난 담론적 갈등 역시 이러한 특수성을 반영한 메타 규칙의 차이에서 비롯된 것으로 확인되었다. 담론적 갈등이 발생했을 경우, 수학 영재들은 수학적 활동의 주체가 될 수 있는 기회를 부여받으며 수학적 논쟁에 활발히 참여하는 모습이 관찰되었다.

셋째, 확률 영역의 문제해결에서 나타나는 담론적 갈등은 기존 연구에서 언급한 바와 같이 해결되기 쉽지 않았다. 그 세계에 대한 다른 사람의 생각을 이해한 경우에는 담론적 갈등이 해결되고 수학적 담론의 메타 규칙이 변화하였지만, 다른 메타 규칙의 존재성을 인정하지 않는 경우에는 다른 사람의 담론에 내재된 논리를 이해하는 것의 어려움이 확인되었다.

이상의 본 연구의 결과는 수학 영재를 대상으로 확률 영역을 지도하는 교사에게 교수학습 상황에서의 사례를 제시함으로써 지도상의 유의점을 시사한다. 특히 교사의 어떤 발언들이 확률 문제를 해결하는 수학 영재에게 생산적인 기여를 했는지를 제시하여 교사에게 교실 상호작용 양상에 대한 정보를 제공한다. 또한 담론적 갈등의 해결 조건을 제시함으로써 교수학습 상황에서 교사와 수학 영재간의 역할에 대한 합의가 필요함을 시사한다.

본 연구에는 몇 가지 제한점이 있다. 연구 대상이 수학 영재이며 연구 참여자의 수가 적고 한 명의 교사를 대상으로 진행하였기 때문에 결과를 일반화하는 데 한계가 있다. 또한 토론 수업을 진행한 횟수가 적기 때문에 상호작용의 양상과 담론의 특징을 분석하는데 충분한 타당도 검증이 이루어졌다고 보기는 어렵다. 특히 학습 요소를 확률의 몇몇 내용 요소에 초점을 맞추었기 때문에 확률의 다른 내용 요소 및 수학의 다른 내용 영역으로 결과를 일반화하는 것에는 한계가 있다. 덧붙여 문제해결 활동에 초점을 맞추어 관찰하였기 때문에 다른 수학적 활동에 적용하는 것에는 제한이 있을 수 있다. 그러나 본 연구의 이러한 제한점들을 보완하기 위한 후속 연구들이 계속된다면 수업 중 발생하는 담론에 대한 더 깊은 분석이 가능할 것이다.

본 연구에서 관찰한 확률 문제해결 활동에서의 상호작용과 담론의 특징의 타당성을 확인하는 후속 연구가 이루어질 필요가 있다. 많은 수학 영재를 대상으로 확률의 다른 내용 요소를 포함한 수업을 장기간에 걸쳐 관찰하고, 연구 결과를 수정 및 보완하는 과정을 반복함으로써 확률 문제해결에서의 담론에 대해 심층적인 이해가 가능할 것이다. 또한 확률뿐만 아니라 수학의 다른 영역, 문제해결을 넘어선 다른 수학적 활동에서의 담론을 관찰하고 분석한 연구 역시 필요하다. 앞으로 본 연구와 같이 구체적인 수업 장면에서의 담론을 관찰한 사례가 지속적으로 보고되어 교실 담론에 대한 깊은 이해가 이루어지기를 희망한다.

참고문헌

강현희(2008). **담론을 통한 수학적 개념 발달에 관한 사례연구**. 박사학위논문. 단국대학교.

고상숙, 강현희 (2007). 수학수업에서의 담론을 통한 수학적 개념 형성에 관한 연구. **수학교육** 46(4). 한국수학교육학회. 423-443.

권오남, 방승진, 송상헌(1999). 중학교 수학 영재아들의 다답형 문항 반응 특성에 관한 연구. **수학교육** 38(1). 한국수학교육학회. 37-48.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤(2006). **수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사.

김우현(2009). **변형된 상금 분배 문제의 해결과정에 나타나는 초등 수학 영재들의 사고 특성 분석.** 석사학위논문. 경인교육대학교.

김지원, 송상헌(2004). 한 수학영재아의 수학적 사고 특성에 관한 사례연구. **수학교육학연구** 14(1). 대한수학교육학회. 89-110.

김홍원, 김명숙, 송상헌(1996). **수학 영재 판별 도구 개발 연구(Ⅰ)**: 기초연구편. 한국교육개발원.

김홍원(2003). 영재 교수-학습 방법의 성격과 영재 교수-학습 자료의 개발. **수학교육논문집** 17. 한국수학교육학회. 1-16.

나귀수(1999). 수학 영재교육에 대한 개관. **학교수학** 1(2). 대한수학교육학회. 785-797.

나귀수(2011). 수학 영재 학생들의 발견과 증명에 대한 연구. **수학교육학연구** 21(2). 대한수학교육학회. 105-120.

나미영(2006). **풍부한 발표환경에서 상호작용에 관한 반성적 실행연구.** 석사학위논문. 서울대학교.

남승인(1998). 초등학교 수학 영재 지도에 관한 고찰. **수학교육세미나** 2. 한국수학교육학회. 35-57.

류창우, 송영무(2010). 흑백게임을 활용한 수학영재들의 R&E 연구 소재 개발. **학교수학** 12(3). 대한수학교육학회. 337-351.

류현아, 정영옥, 송상헌(2007). 입체 도형에 대한 6~7학년 수학영재들의

공간시각화 능력 분석. **학교수학** 9(2). 대한수학교육학회. 277-289.

류희찬, 조완영, 조정묵, 임미선, 유익승, 한명주 외(2010). **고등학교 수학**. 서울: 미래앤교과서.

박은영, 강이철(2003). 웹 기반 토론학습 환경에서 수학 영재들의 지식 구축 과정 분석 연구. **교육공학연구** 19(2). 한국교육공학회. 179-210.

방정숙(2001). 사회수학적 규범과 수학교실문화. **수학교육학연구** 11(2). 대한수학교육학회. 273-289.

방정숙(2004). 초등수학교실문화의 개선: 사회수학적 규범과 수학적 관행. **수학교육학연구** 14(3). 대한수학교육학회. 283-304.

서동엽(2005). 수학 영재 수업에서의 사회적 구성주의 적용 방안. **학교수학** 7(3). 대한수학교육학회. 237-252.

송상헌(1998). **수학 영재성 측정과 판별에 관한 연구.** 박사학위논문. 서울대학교.

송상헌, 장혜원, 정영옥(2006). 초등학교 6학년 수학영재들의 기하 과제 증명 능력에 관한 사례 분석. **수학교육학연구** 16(4). 대한수학교육학회. 327-344.

송상헌, 허지연, 임재훈(2006). 도형의 최대 분할 과제에서 초등학교 수학 영재들이 보여주는 정당화의 유형 분석. **수학교육학연구** 16(1). 대한수학교육학회. 79-94.

신인선, 김시명(2006). 개방형 문제해결 과정에서 수학 영재아와 수학 우수아의 행동 특성 분석. **수학교육논문집** 20(1). 한국수학교육학회. 33-59.

우정호(1998). **학교수학의 교육적 기초**. 서울: 서울대학교출판부.

우정호, 정영옥, 박경미, 이경화, 김남희, 나귀수 외(2006). **수학교육학 연구방법론**. 서울: 경문사.

이경화(1996). **확률 개념의 교수학적 변환에 관한 연구**. 박사학위논문. 서울대학교.

이경화(2001). 초등수학 우수아의 특성과 지도 자료의 예시. **수학교육학연구** 11(1). 대한수학교육학회. 37-50.

이경화(2003a). 수학 영재아 선발 과제 개발 사례. **청주교육대학교 과학교육연구소 논문집** 24. 93-104.
이경화(2003b). 수학 영재교육 자료의 개발과 적용 사례 연구. **수학교육학연구** 13(3). 대한수학교육학회. 365-382.
이경화(2010). 확률적 사고 수준과 영재교육. **영재교육연구** 20(1). 한국영재학회. 151-173.
이동환, 이경화(2010). 영재아들은 모호성에 어떻게 대처하는가?. **학교수학** 12(1). 대한수학교육학회. 79-95.
이윤영, 송상헌(2013). 디피(Diffy) 게임을 활용한 원격교육용 초등수학영재 프로그램 개발. **학교수학** 15(1). 대한수학교육학회. 121-136.
이정연(2005). **조건부확률 개념의 이해에 관한 연구**. 석사학위논문. 서울대학교.
이정연, 이경화(2010). Simpson의 패러독스를 활용한 영재교육에서 창의성 발현 사례 분석. **수학교육학연구** 20(3). 대한수학교육학회. 203-219.
이종희, 김기연(2008). 창의적 생산력의 하위 요소 탐색 및 수학영재의 창의적 문제해결 모델 개발. **학교수학** 10(4). 대한수학교육학회. 583-601.
이지훈(2000). **사례연구방법**. 서울: 대경.
조석희, 황동주(2007). 중학교 수학 영재 판별을 위한 수학 창의적 문제해결력 검사 개발. **영재교육연구** 17(1). 한국영재학회. 1-26.
지정은(2006). **수학 교실의 토의 담화 분석.** 석사학위논문. 서울대학교.
최병훈, 이경화(2007). 초등학교 5학년 수학영재와 일반아의 확률판단 비교. **수학교육학연구** 17(2). 대한수학교육학회. 179-199.
최영기, 도종훈(2004). 수학영재 학생들의 인지적, 정의적, 창의적 특성 분석. **학교수학** 6(4). 대한수학교육학회. 361-372.
최종헌, 송상헌(2005). 주제 탐구형 수학 영재 교수・학습 자료 개발에 관한 연구. **학교수학** 7(2). 대한수학교육학회. 169-192.
홍진곤, 강은주(2009). 사고구술법을 이용한 수학 영재의 사고 특성 연구.

수학교육학연구 19(4). 대한수학교육학회. 565-584.

황동주(2005). **수학 영재 판별의 타당도 향상을 위한 수학 창의성 및 문제 해결력 검사 개발과 채점 방법에 관한 연구.** 박사학위논문. 단국대학교.

황동주, 이강섭(2011). 고등학교 수학영재와 일반학생의 수학적 사고력 비교. **영재교육연구** 21(4). 한국영재학회. 847-860.

Ben-Yehuda, M., Lavy, I., Linchevski, L., & Sfard, A. (2005). Doing wrong with words: What bars students' access to arithemetical discourses. *Journal for Research in Mathematics Education* 36(3). 176-247.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy.* NY: Academic.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1991). Multimoda learning and the quality of intelligent behaviour. In Rowe(Ed), *Intelligence: Reconceptualization and measurement*. NJ: Erlbaum. 57-76.

Byers, W. (2007). *How mathematicians think: Using ambiguity, contradiction, and paradox to create mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Castro, C. S. (1998). Teaching probability for conceptual change. *Educational Studies in Mathematics* 35. 233-254.

Civil, M. (1998). Mathematical communication through small-group discussions. In H. Steinbring, M. G. B. Bussi, & A. Sierpinska(Eds.), *Language and communication in the mathematical classroom.* Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics. 207-222.

Chapin, S. H., O'Cornor, C., & Anderson, N. C. (2003). *Classroom discussions: Using math talk to help students learn.* CA: Math solutions publications.

Chernoff, E. J., & Zazkis, R. (2011). From personal to conventional probabilities: from sample set to sample space. *Educational Studies*

in Mathematics 77. 15-33.
Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1992). Interaction and learning in mathematics classroom situations. *Educational Studies in Mathematics* 23. 99-122.
Cobb, P., Yackel, E., & Wood, T. (1993). *Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. In Context for learning: Sociocultural dynamics in children' s development*. Oxford University Press.
Cobb, P., & Yackel, E. (1996). Constructivist, emergent, and sociocultural perspectives in the context of developmental research. *Educational Psychologist* 31. 175-190.
Cobb, P., Boufi, A., McClain, K., & Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and collective reflection. *Journal for Research in Mathematics Education* 28(3). 258-277.
Cobb, P. (1999). Individual and collective mathematical development: The case of statistical data analysis. *Mathematical Thinking and Learning* 1(1). 5-43.
Cobb, P. (2009). Learning as the evolution of discourse: Accounting for cultural, group and individual development. *Human Development* 52. 205-210.
Empson, S. B. (2003). Low-performing students and teaching fractions for understanding: A interactional analysis. J*ournal for Research in Mathematics Education* 34(4). 305-343.
Fledhusen, J. F., Hoover, S. M., & Sayer, M. F. (1990). *Identifying and educating gifted students as the secondary level.* NY: Trillium.
Francisco, J. M. (2013). Learning in collaborative settings: students building on each other' s ideas to promote their mathematical understanding. *Educational Studies in Mathematics* 82. 417-438.
Imm, K. & Stylianou, D. A. (2012). Talking mathematically: An analysis

of discourse communities. *The Journal of Mathematical Behavior* 31. 130-148.

Keating, D. P. & Fox, L. H. (1974). *Mathematical talent: Discovery, description, and development.* Baltimore: Johns hopkins university press

Kieran, C. (2001). The mathematical discourse of 13-year-old partnered problem solving and its relation to the mathematics that emerges. *Educational Studies in Mathematics* 46. 187-228.

Kim, D. J., Sfard, A., & Ferrini-Munday, J. (2010). Students' colloquial and mathematical discourses on infinity and limit: A comparison of U.S. and Korean students. *Journal of Korea Society of Educational Studies in Mathematics School Mathematics* 12(1). 1-15.

Koshy, V., Ernest, P., & Casey, R. (2009). Mathematically gifted and talented learners: theory and practice. International Journal of Mathematical *Education in Science and Technology* 40(2). 213-228.

Krutetskii, V. A.(1976). *The psychology of mathematical abilities in schoolchildren.* Chicago: The University of Chicago Press.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1997). A frameworkd for assessing and nurturing young children' s thinking in probability. E*ducational Studies in Mathematics* 32. 101-125.

Jones, G. A., Langrall, C. W., Thornton, C. A., & Mogill, A. T. (1999). Students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education* 30. 487-519.

Jones, G. A., Langrall, C. W., & Mooney, E. D. (2007). Research in probability: Responding to classroom realities. In Lester, F. K.(Ed). *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* VA: National Council of Teachers of Mathematics. 909-956.

Lau, P., Singh, P., & Hwa, T-Y. (2009). Constructing mathematics in an interactive classroom context. *Educational Studies in Mathematics*

72. 307-324.

Nilsson, P., & Ryve, A. (2010). Focal event, contextualization, and effective communication in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics* 74. 241-258.

Oh, T. K., & Lee, K. H. (2012). Creativity development in probability through debate. *Research in Mathematical Education Series D* 16(4). 233-244.

Pantziara, M., & Phillippou, G. (2012). Levels of students' "conception" of fractions. *Educational Studies in Mathematics* 79. 61-83.

Park, J. E. (2011). Calculus instructors and students' discourses on the derivative. *Journal for Educational Research in Mathematics* 21(1). 33-55.

Pijls, M., Dekker, R., & Hout-Wolters, B. v. (2007). Reconstruction of a collaborative mathematical learning process. *Educational Studies in Mathematics* 65. 309-329.

Polaki, M. V. (2002). Using instruction to identify key features of Basotho elementary students' growth in probabilistic thinking. *Mahtematical Thinking and Learning* 4(4). 285-313.

Radford, L., & Roth, M. W. (2011). Intercorporeality and ethical commitment: An activity persepctive on classroom interaction. *Educational Studies in Mathematics* 77. 227-245.

Ron, G., Dreyfus, T., & Hershkowitz, R. (2010). Partially correct constructs illuminate students' inconsistent answers. *Educational Studies in Mathematics* 75. 65-87.

Ryve, A., Nilsson, P., & Pettersson, K. (2013). Analyzing effective communication in mathematics group work: The role of visual mediators and technical terms. *Educational Studies in Mathematics* 82. 497-514.

Schoenfeld, A. H. (2010). *How we think: A theory of goal-oriented decision making and its educational applications*. New York & London: Routledge.
Sfard, A. (2000). On reform movement and the limits of mathematical discourse. *Mathematical Thinking and Learning* 2(3). 157-189.
Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: Looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational Studies in Mathematics* 46. 13-57.
Sfard, A., & Kieran, C. (2001). Cognition as communication: Rethinking learning-by-talking through multi-faceted analysis of students' mathematical interactions. *Mind, Culture, And Activity* 8(1). 42-76.
Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from commognitive standpoint. *The Journal Of The Learning Science* 16(4). 567-615.
Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating*. Cambridge university press.
Sheffield, L. J. (1994). *The development of gifted and talented mathematics students and the national council of teachers of mathematics standards*. US: Diane publishing.
Soter, A. O., Wilkinson, I. A., Murphy, P. K., Rudge, L., Reninger, K., & Edwards, M. (2008). What the discourse tells us: Talk and indicators of high-level comprehension. *International Journal of Educational Research* 47. 372-391.
Sousa, D. A. (2003). *How the gifted brain learns.* Thousands Oaks, CA: Corwin press, Inc.
Watson, J. M., Collis, K. F., & Moritz, J. B. (1997). The development of chance measurement. *Mathematics Education Research Journal* 9(1). 60-82.
Wertsch, J. V., & Toma, C. (1995). Discourse and learning in the

classroom: A sociocultural approach. In L. P. Steffe & J. Gale (Eds.), *Constructivism in education*. NJ: Lawrence Erlbaum Associates. 159-174.

Wood, T. (1994). Patterns of interaction and the culture of mathematics classrooms. In Lerman(Ed), *The culture of the mathematics classroom.* The Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic. 149-168.

Yackel, E., Gravemeijer, K., & Sfard, A. (2011). *A journey in mathematics education research: Insights from the work of Paul Cobb.* US: Springer Publishing.

[부록] 차시별 과제

〈1차시〉

문제 1.

건강하고 깜찍하면서 주인의 말을 잘 듣는 애완견 선발대회의 최종 라운드에 진돌이, 풍산이, 치돌이, 푸들이 4마리가 올랐다. 이 중에서 1위, 2위에 각각 다른 애완견을 뽑기로 할 때, 1위, 2위에 오르는 애완견을 결정할 수 있는 경우의 수는 몇 가지인가? 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해보자.

문제 2.

딸기, 키위, 복숭아, 멜론 네 가지 과일 중에서 두 가지를 선택하여 아이스크림에 넣어 먹으려고 한다. 아이스크림에 서로 다른 두 종류의 과일을 넣는 경우는 모두 몇 가지인가? 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해보자.

문제 3.

한결이와 은결이는 딸기, 키위, 복숭아, 멜론 네 가지 과일 중에서 하나를 선택해 아이스크림에 넣어 먹으려고 한다. 한결이와 은결이가 아이스크림에 과일을 넣는 경우는 모두 몇 가지인가? 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해보아라.

문제 4.

어느 선박회사에서는 모양과 크기가 같은 세 개의 깃발을 매달아 신호를 만드는데 깃발은 빨간색, 파란색, 노란색, 주황색, 보라색의 다섯 종류가 있고 깃발은 중복해 사용할 수 있을만큼 충분하다고 한다. 이때 선박회사에서 만들 수 있는 신호의 가짓수는 모두 몇 가지인가? 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해보아라.

문제 5.

한결이는 최근 꽃꽂이의 매력에 빠져있다. 특히 한결이는 장미꽃을 매우 좋아해 빨간 장미, 노란 장미, 녹색 장미, 분홍 장미가 4송이씩 들어있는 바구니에서 꽃을 임의로 선택해 한 화병에 꽂으려고 한다. 한결이가 꽃 두송이를 화병에 꽂는 경우는 모두 몇 가지인가? 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해보아라.

문제 6.

한결, 은결, 나영이는 야구를 매우 좋아해 경기를 직접 보기위해 야구장을 찾았다. 그런데 한결이가 이벤트에 당첨되어 한 음료수 회사에서 5개의 음료수를 받았다. 이 음료수를 한결, 은결, 나영이에게 남김없이 나눠주는 경우는 모두 몇 가지인가? 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해보아라.

문제 7.

문제 1~6을 가능한 다양한 방법으로 분류해보고, 그렇게 구분한 이유를 설명해보아라.

문제 8.

문제 7을 통해 알게 된 수학적 사실을 모두 말해보아라.

문제 9.

본인이 ‘확률’에 대해 들었던 다양한 경험을 떠올려보자. 확률의 의미는 무엇이라 생각하는지 자유롭게 이야기해보자.

문제 10.

다음은 ‘확률’이라는 용어가 사용되는 한 맥락의 예이다.

한결 : 은결아~내가 퀴즈를 내볼테니 한번 맞혀바.

은결 : 오케이. 준비됐어! 한결 : 은결이 네가 동전을 6번 던진다고 해봐. 동전을 던질때마다 너는 노트에 앞면이 나오면 H라 기록하고, 뒷면이 나오면 T라고 기록한다고 해보자. 은결 : 알았어. 앞면이면 H, 뒷면이면 T라... 한결 : 그럼 내가 말해주는 4가지 경우 중 가장 일어날 **<u>확률</u>**이 낮은 건 뭐라고 생각해? 첫째는 HTHTHT, 둘째는 HHHTTT, 셋째는 TTTHTT, 넷째는 TTTTTT야. 이해 됐어? 은결 : 응! 네 가지 경우 중 가장 일어날 **<u>확률</u>**이 낮은 거라....(중략)

이 맥락에서 사용되는 확률의 의미는 무엇이라 생각하는지 자유롭게 이야기해보자.

문제 11.

다음은 ‘확률’이라는 용어가 사용되는 다른 맥락의 예이다.

...(중략) 오늘 서쪽지방은 뜨거운 햇살에 기온이 크게 오르겠습니다. 동두천의 기온이 31도, 서울지방이 30도 등으로 중서부지방과 전라도지방에서는 30도 안팎의 불볕더위를 보이겠습니다. 반면 동해안 지방은 동풍의 영향으로 강릉이 23도에 머무는 등 선선한 날씨가 되겠습니다. 휴일을 맞아서 여행 계획이 있으시다면 이 점 참고하셔야겠습니다. 또 서쪽지방을 중심으로 기온이 크게 올라가면서 대기가 불안정해져 오후부터 저녁 사이에 중부와 호남지방에서는 소나기가 오는 곳이 있겠는데요. 강수**<u>확률</u>**은 60%가량으로 높은 편이니까 작은 우산 정도 챙겨나가시는 게 좋겠습니다. 지금 대부분 지방이 맑은 날씨를 보이고 있습니다. 오늘 전국적으로 화창한 날씨가 예상되지만 일부 지방에서는 소나기가 올 가능성도 있습니다.

한낮의 기온은 서쪽지방을 중심으로 어제보다 2에서 6도가량 높겠습니다. ...(중략)

이 맥락에서 사용되는 확률의 의미는 무엇이라 생각하는지 자유롭게 이야기해보자.

문제 12.

문제 1~3에서 사용되는 확률의 의미에 대해 자유롭게 자신의 의견을 이야기해보자. 그들 사이에 공통점 또는 차이점이 존재하는가? 존재한다면 그것은 무엇인가? 이로부터 알 수 있는 수학적 사실에 대해서도 이야기해보자.

<2차시>

문제 1.

네 사람 가영, 나영, 다영, 라영을 일렬로 세울 때, 다음을 구하여라.

(1) 다영이를 가장 앞에 세울 확률을 구하여라. 왜 그러한 확률값이 얻어졌는지 그 이유를 설명하여라.

(2) 나영이와 라영이를 이웃하지 않게 세울 확률을 구하여라. 왜 그러한 확률값이 얻어졌는지 그 이유를 설명하여라.

문제 2.

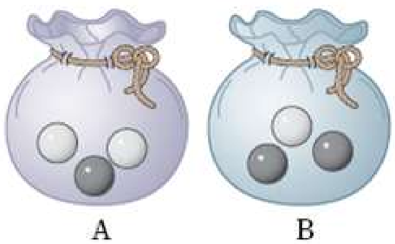
도넛 10개와 쿠키 8개가 들어있는 상자에서 3개를 동시에 꺼낼 때, 3개가 모두 도넛 또는 쿠키일 확률을 구하여라. 왜 그러한 확률값이 얻어졌는지 그 이유를 설명하여라.

문제 3.

1부터 20까지의 자연수가 각각 적혀 있는 20장의 카드가 있다. 이중에서 3장의 카드를 뽑을 때, 카드에 적힌 세 자연수의 곱이 짝수가 될 확률을 구하여라. 왜 그러한 확률값이 얻어졌는지 그 이유를 설명하여라.

문제 4.

흰 공 2개, 검은 공 1개가 들어있는 주머니 A와 흰 공 1개, 검은 공 2개가 들어있는 주머니 B가 있다. 무작위로 공을 한 개 꺼낼 때, 그 공이 흰 공일 확률을 구하여라. 왜 그러한 확률값이 얻어졌는지 그 이유를 설명하여라.



문제 5.

한결이와 은결이는 아래 세 종류의 두 개의 주사위를 사용하는 게임

중 하나에 참가하려 한다.

가. 같은 모양, 같은 크기의 두 개의 파란 주사위를 동시에 던진다. 나. 같은 모양, 같은 크기의 하나의 파란 주사위와 하나의 빨간 주사위를 던진다. 다. 하나의 파란 주사위를 두 번 던진다.

주사위를 던져 연속인 수가 나오면 한결이가 이기고, 그렇지 않으면 은결이가 이긴다고 한다. 당신이 한결이라면, 세 종류의 게임 중 어느 게임에 참여하는 것이 더 유리한가? 자신의 선택에 대한 이유를 설명하여라. (단, 연속인 두 숫자란 2와 3 같은 수를 의미한다.)

문제 6.

한결이는 아래 두 종류의 상자에서 동시에 3개의 공을 꺼냈을 때, 흰 공 2개와 검은 공 1개가 나오면 상품을 획득한다고 한다.

가. 1～5의 숫자가 적혀있는 같은 크기와 같은 모양의 흰 공 5개와 A,B,C가 적혀있는 같은 크기와 모양의 검은 공 3개가 들어있는 상자 나. 같은 크기와 모양의 흰 공 5개와 검은 공 3개가 들어있는 상자

당신이 한결이라면, 두 종류의 바구니 중 어느 상자를 선택해 공을 꺼내는게 더 유리한가? 자신의 선택에 대한 이유를 설명하여라.

문제 7.

문제 1과 2를 통해 알게 된 수학적 사실에 대해 모두 말해보아라.

〈3차시〉

문제 1.

같은 크기와 모양의 파란 공 5개와 빨간 공 3개가 들어 있는 주머니에서 공을 한 개씩 두 번을 꺼낸다고 하자. 주머니에서 꺼낸 두 공이 모두 빨간 공일 확률을 구하고자 한다. 아래 문제에 따라 답하여라.

(1) 첫 번째 꺼낸 공을 다시 넣을 때, 주머니에서 꺼낸 두 공이 모두 빨간 공일 확률을 구하여라.

(2) 첫 번째 꺼낸 공을 다시 넣지 않을 때, 주머니에서 꺼낸 두 공이 모두 빨간 공일 확률을 구하여라.

문제 2.

같은 크기와 모양의 파란 공 5개와 빨간 공 3개가 들어 있는 주머니에서 공을 두 개 꺼낸다고 하자. 주머니에서 꺼낸 두 공이 모두 빨간 공일 확률을 학생 A와 B는 다음과 같이 구하였다.

학생 A : 주머니에서 8개의 공 중 두 개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2$이고, 빨간 공 두 개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_3\mathrm{C}_2$이다. 따라서 구하는 확률은 $\dfrac{{}_3\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_2}$이다. 학생 B : 먼저 빨간 공을 뽑을 확률은 $\dfrac{3}{8}$, 그 다음에도 빨간 공을 뽑을 확률은 $\dfrac{2}{7}$이다. 따라서 구하는 확률은 $\dfrac{3}{8}\times\dfrac{2}{7}$이다.

학생 A와 B의 풀이에 대해 어떻게 생각하는가? 왜 그러한 생각을 하게 되었는지 그 이유를 설명하여라.

문제 3.

같은 크기와 모양의 파란 공 5개와 빨간 공 3개가 들어 있는 주머니에서 공을 한 개씩 두 번을 꺼낸다고 하자. 주머니에서 꺼낸 두 공이 파

란 공 1개와 빨간 공 1개일 확률을 구하고자 한다. 아래 문제에 따라 답하여라.

(1) 첫 번째 꺼낸 공을 다시 넣을 때, 주머니에서 꺼낸 두 공이 파란 공 1개와 빨간 공 1개일 확률을 구하여라.

(2) 첫 번째 꺼낸 공을 다시 넣지 않을 때, 주머니에서 꺼낸 두 공이 파란 공 1개와 빨간 공 1개일 확률을 구하여라.

문제 4.

같은 크기와 모양의 파란 공 5개와 빨간 공 3개가 들어 있는 주머니에서 공을 두 개 꺼낸다고 하자. 주머니에서 꺼낸 두 공이 파란 공 1개와 빨간 공 1개일 확률을 학생 A와 B는 다음과 같이 구하였다.

학생 A : 주머니에서 8개의 공 중 두 개의 공을 꺼내는 모든 경우의 수는 ${}_8\mathrm{C}_2$이고, 파란 공 1개와 빨간 공 1개를 꺼내는 경우의 수는 ${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1$이다. 따라서 구하는 확률은 $\dfrac{{}_5\mathrm{C}_1 \times {}_3\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_2}$이다.
학생 B : 파란 공 1개와 빨간 공 1개를 꺼낼 확률은 다음과 같이 구할 수 있다. 첫 번째, 먼저 파란 공을 뽑을 확률은 $\dfrac{5}{8}$, 그 다음에 빨간 공을 뽑을 확률은 $\dfrac{3}{7}$이다. 두 번째, 먼저 빨간 공을 뽑을 확률은 $\dfrac{3}{8}$, 그 다음에 파란 공을 뽑을 확률은 $\dfrac{5}{7}$이다. 따라서 구하는 확률은 $\dfrac{5}{8}\times\dfrac{3}{7}+\dfrac{3}{8}\times\dfrac{5}{7}$이다.

학생 A와 B의 풀이에 대해 어떻게 생각하는가? 왜 그러한 생각을 하게 되었는지 그 이유를 설명하여라.

문제 5.

문제 1~4를 통해 알게된 수학적 사실을 말해보아라.

문제 6.

어떤 양궁 선수는 2014년 아시안 게임에 대비해 훈련에 집중해 10점 과녁에 명중시킬 확률이 0.8까지 상승하였다고 한다.

(1) 이 양궁 선수가 다섯 번 연습을 한다고 할 때, 한 번도 10점 과녁에 명중시키지 못할 확률을 구하여라. 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해보아라.

(2) 이 양궁 선수가 다섯 번 연습을 한다고 할 때, 10점 과녁을 2번 명중시킬 확률은? 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해보아라.

(3) 이 양궁 선수가 다섯 번 연습을 한다고 할 때, 10점 과녁을 4번 명중시킬 확률은? 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해보아라.

문제 7.

프로야구 한국시리즈는 최대 7번의 경기를 해 먼저 4번 승리한 팀이 우승한다고 한다. 올해에는 A팀과 B팀이 한국시리즈에 진출해 경기를 앞두고 있다. 각 팀은 경기에서 이길 확률이 $\frac{1}{2}$이고, 비기는 경우는 없다고 한다. 한국시리즈가 4번째, 5번째, 6번째, 7번째 경기에서 종료될 확률은? 왜 그러한 결과가 나타나는지 설명해보아라.

문제 8.

문제 7을 해결하면서 들었던 의문점 또는 문제에 추가 혹은 삭제되어야 할 조건 등에 대해 자유롭게 이야기해보자.

Abstract

An Analysis of Mathematically Gifted Students' and Teacher's Discourse on Probability Problem Solving

Ku, Na Young
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

Dealing with ambiguity, making a conjecture by informal reasoning and mathematically justifying in the context of probability are good opportunities for mathematically gifted students. It is suggested that using discussion is appropriate for the mathematically gifted. The quality of discourse and the role of it differ between the cases. Thus, an analysis of discourse is necessary for understanding the meaningfulness of using discussion. As a result of this, teachers understand deeply mathematically gifted students' and teacher's discourse on probability problem solving.

In this study, I found out some aspects of interaction and discourse features which contributed to probability problem solving in the class of the mathematically gifted. Further, I analysed how discursive conflict arose and how it was resolved for probability problem solving. For the purpose of this study, I reviewed previous researches associated with teaching and learning probability and social constructivism, then I adjusted the structure of the sequence of teaching. After this, I designed the tasks that stimulate discussions between students, and observed in teacher's classroom. Collected data was analysed by Cobb and his colleagues' emergent perspective, commoginitive perspective and previous researches concerning classroom interaction and discourse.

Mathematically gifted students reflected incomplete solution and elicited other students' thinking so that they made productive contribution in group. Also, by the differences in meta-rules that regulated discourse in the context of probability, discursive conflict arose in the classroom. I observed that resolving discursive conflict was grounded in accepting the inner logic of other people's discourse. Authentic question, high-level question, uptake and the density of reasoning words associated with mathematically justifying and reasoning were useful measures of productive discussion for probability problem solving. From the result of this study, I suggested several directions for future research.

Keywords : mathematically gifted students, probability, problem solving, discourse, discursive conflict
Student Number : 2012-21409