교육학석사학위논문

문자와 식 영역에 대한 고등학교 초임 수학교사의 KAT

-고등학교 1학년 내용을 중심으로-

2014년 8월

서울대학교 대학원

수학교육학과

김 영 기

문자와 식 영역에 대한 고등학교 초임 수학교사의 KAT

-고등학교 1학년 내용을 중심으로-

지도교수 권 오 남

이 논문을 교육학석사학위논문으로 제출함

2014년 4월

서울대학교 대학원

수학교육학과

김 영 기

김영기의 석사학위논문을 인준함

2014년 6월

위 원 장 _____ 이 경 화 (인)

부 위 원 장 _____ 유 연 주 (인)

위 원 _____ 권 오 남 (인)

국문초록

문자와 식 영역에 대한 고등학교 초임 수학교사의 KAT

-고등학교 1학년 내용을 중심으로-

교사의 지식은 효과적인 수업의 핵심 요소로, 교사는 수업에 필요한 지식을 갖추고 있어야 하고 자신의 지식을 적절히 사용하여 수업 실천을 할 수 있어야 한다. 교사들의 초임 기간에 형성되는 지식이 앞으로의 교직 생활에 영향을 주기 때문에 초임 교사의 지식에 대한 특성을 알아볼 필요가 있다. 그러나 수학교육에서 교사의 지식에 대한 연구는 대부분 초등학교 교사를 대상으로 이루어졌으며 중등학교 교사를 대상으로 한 연구가 적었다. 이 연구는 고등학교 초임 교사를 대상으로 대수를 가르치는데 필요한 지식과 그것을 주어진 상황에서 어떻게 사용하는지를 이해하는 것을 목적으로 한다.

이 연구는 고등학교 초임 교사 7명을 연구 참여자로 섭외하여 사전 인터뷰, 설문 조사, 사후 인터뷰를 실시하였다. 사전 인터뷰에서는 교사의 경력, 근무하는 학교 배경, 지도 성향을 알아보았고, 사후 인터뷰에서는 설문지 분석을 확인하고 교사의 지식에 대한 신념을 알아보았다. 설문지 문항은 우리나라 교육과정과 교과서를 검토하고 국제 수학교육 연구에서 사용하였던 문항과 교과서 및 교사용 지도서를 바탕으로 세 개의 수학적 주제를 선택하여 18개의 문항을 개발하였다. 예비 검사와 전문가 검토 후 설문을 실시하였다. 문항은 대수를 가르치는데 필요한 지식을 조사하는 문항과 주어진 수업 상황에서 특정한 지식을 중심으로 지식의 사용이 어떻게 나타나는지를 조사하는 문항으로 구성된다. 지식에 대한 응답은

예시 답안을 기준으로 분석하였고 지식의 사용에 대한 응답은 분석틀을 따랐다. 이에 따라 얻은 연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

첫째, 교사들은 학생들이 배우는 학교 대수 지식(SK)은 기본적으로 갖추고 있던 반면, 대학 과정의 심화 지식(AK)과 교수를 위한 수학 지식(TK)은 부족한 것으로 나타났다. AK는 직접적으로 수업에서 자주 사용하는 지식이 아니기 때문에 예비 교사 때만큼 많이 알고 있지 않았으나 교사들은 심화 지식의 필요성을 인식하고 있었다. TK는 설문지 상에서는 어려움이 나타나지 않았지만 사후 인터뷰에서 교사들은 적은 경험과 경력의 한계로 부족함을 인식하고 있었다. 둘째, 세 지식은 서로 사용할 때 영향을 주고받는다는 것을 알 수 있었다. 특히 SK는 교사로서 갖추어야 할 가장 기본이 되는 지식이고, TK는 지도할 때 내용과 방향을 결정하는 가장 영향력이 있는 지식으로 이로 인해 SK와 AK의 사용 양상이 다르게 나타나게 됨을 알 수 있었다.

이 연구에서는 교과 내용 지식 간의 일방향적인 관계를 밝힌 연구와 달리 지식 간의 관계는 상호 의존적인 관계임을 알 수 있었다. 또한 교사들의 AK와 TK가 부족하다는 연구 결과로부터 실제 수업과 연계되는 연수가 필요하다는 시사점을 얻을 수 있다. 단순히 심화 수학 지식을 배우는 연수라면 얼마 지나지 않아 지금처럼 다시 잊어버리는 상황이 반복될 것이기 때문에 실제 수업에서도 어떻게 지도하고 사용할 수 있는지 연계성이 높은 연수가 필요하다. 또한 초임 교사는 다른 교사들과 소통하며 다양한 수업 방법 및 자료를 공유하고 실제로 체험하고 만들어보는 실제적인 교육의 장이 필요하다고 할 수 있다.

주요어: 교사 지식, 지식의 사용, KAT

학번: 2012-21413

목 차

표 목 차

그 림 목 차

I. 서론

1. 연구의 필요성과 목적

세계화 흐름 속에서 국가는 경쟁력을 확보하기 위해 다방면에서 인재를 요구하고 있으며, 교육에 거는 기대가 점점 커지고 있다. 학생과 학부모뿐만 아니라 지역사회, 산업체, 국가에서 요구하는 질 높은 교육은 실제 현장에서 교육을 이끌어가고 있는 교사의 전문성과 함께 생각해야 한다. 다시 말해, 교육의 질은 교육 실천 당사자인 교사에 의해 영향을 받기 때문에 질 높은 교육을 위해서는 교사의 전문성을 고려해야 한다는 것이다.

특히 수업이 교사의 주된 업무인 만큼 교사의 수업 전문성이 강조되고 있다(손승남, 2005; 유한구, 2001). 교사는 수업에 필요한 지식을 갖추고 있어야 하고 자신의 수학적 지식과 교수학적 지식을 적절히 활용하여 수업 실천을 할 수 있어야 한다. 교사의 지식은 수업뿐만 아니라 학생의 학습, 학업성취도와도 밀접한 관련이 있기 때문에(Baumert et al., 2010; Hill, Rowan, & Ball, 2005) 학생들의 학습이 제대로 이루어질 수 있는 효과적인 수업의 핵심 요소로써 교사 지식의 중요성을 인식하고 이에 대한 연구를 계속하여야 한다.

그렇다면 교사가 갖추어야 할 지식, 효과적인 수업을 위해 필요한 지식은 무엇인지 새로운 의문점이 제기될 수 있다. Shulman(1986)은 교사가 갖추어야 할 지식을 세 개의 영역으로 범주화하여 교과 내용 지식, 교수학적 내용 지식(pedagogical content knowledge, 이하 PCK), 교육과정 지식으로 제시하였다. 그러나 Shulman(1986, 1987)이 제시한 교사의 지식은 범교과를 전제로 하였기 때문에, 서로 다른 교과 사이에 있는 교사 지식의 차이를 드러내지 못했다. 이후로 각 교과에서의 교사 지식에 대한 연구들이 이루어졌다. 수학교과에서는 수학 수업을 연구하여 교사의 지식을 범주화한 연구(Marks, 1990), 교사의 교과 내용 지식과 대수를

가르치는데 필요한 지식 사이의 관계에 대한 연구(Black, 2007; Krauss et al., 2008), 교사의 지식과 학생의 학업성취도와의 관계에 대한 연구(Hill et al., 2005; Monk, 1994), 교사의 지식에 대한 국제 비교 연구(Ma, 1999) 등이 있다. 또한 Ball, Thames와 Phelps(2008)은 실제 수업에서 사용되는 교사의 수학 지식의 성격과 내용을 확인함으로써 Shulman(1986, 1987)의 교사 지식의 범주를 발전시켜 가르치기 위한 수학 지식(Mathematical knowledge for teaching, 이하 MKT)을 정립하였다.

이렇게 수학교과에서 교사의 지식에 대한 연구는 주로 초등학교 교사를 대상으로 하였고, 중등학교 교사를 대상으로 한 연구가 적다(Black, 2007; McCrory, Floden, Ferrini-Mundy, Reckase, & Senk, 2012). 학교급이 올라감에 따라 다루는 수학적 내용의 범위는 점점 넓어지고 교사는 더 많은 내용을 심도 있게 알고 수업에서 적절히 사용할 수 있어야 한다. 특히 가장 광범위하고 높은 수준의 내용을 가르치는 고등학교 교사들에게 적절한 교과 내용과 지도에 대한 교육이 필요한데, 그러한 교사 교육을 논하기에 앞서 그들의 지식을 밝힌 연구가 부족하다. 한편, 경력 만 5년 미만의 교사인 초임교사는 경력 교사에 비해 학생 이해에 대한 지식이나 이를 바탕으로 한 교수 활동에서 부족한 점이 있다는 것이 여러 연구를 통해 나타났다(Helen, 2004; Paul, Steven, Dean, & Matthew, 1998; Robinson, Even, & Tirosh, 1992). 그러나 초임 기간 동안 길러지는 능력과 태도, 지식은 앞으로의 교육 활동 전반에 결정적인 영향을 준다(박현주, 2005; 심상길, 2013). 초임 교사는 경력 교사에 비해 고착화된 수업 방식을 갖고 있지 않기 때문에 교육의 변화에 빠르게 반응하고 적응할 것이다. 따라서 이 연구는 초임 기간 동안 형성되는 교사의 지식의 특성을 이해하여 교사 재교육 측면에서 효과적으로 발전시킬 수 있는 방법에 대해 모색하고자 한다.

학교에서 대수 학습은 문제 해결과 관련된 일련의 조작에서 시작되어 구조의 학습을 위한 기초를 제공하고 대수 학습을 통해 학생들은 문제를 형식화하거나 일반화하는 능력, 문제를 구조적 관점에서 다룰 수 있는 능력을 기르게 된다(김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤,

2006). 그러나 지금까지 산술과 대수를 분리하여 가르침에 따라 학생들은 산술에서 대수로의 이행에 어려움을 겪고 문제의 본질과 양 사이의 관계를 이해하지 못하는 현상이 발생했다. 따라서 추상성이 강한 대수 영역의 교수·학습에서 학습자와 수학을 이어줄 교사의 역할이 중요하다고 할 수 있다. 따라서 대수 영역에서 교사의 지식과 수업 실제에 대한 연구가 필요하다. 대수 영역에서의 교사 지식에 대한 연구는 주로 함수 영역을 중심으로 이루어졌으나(Even, 1993; Llinares, 2000; Sherin, 2002) 최근에는 대수 학습의 중요성을 깨닫고 대수 전 영역에 대한 교사의 지식을 연구가 등장하였다. McCrory 등(2012)은 대수를 가르치는데 필요한 지식(knowledge of algebra for teaching, 이하 KAT)을 정립하여 교사가 성공적인 수업을 위해서는 필요한 지식을 갖추어야 함은 물론 지식을 적절히 사용할 줄 알아야 함을 주장하였다.

교사의 지식에 대한 연구가 교과에 대한 교사 지식의 연구로 구체화되면서 지식을 어떻게 측정하고 평가할 것인지에 대한 연구도 변화를 거듭하고 있다. 초기에는 교사의 지식을 측정하는 대안적인 방법으로 교사가 예비 교사 기간 동안 이수한 학점이나 성적, 표준화된 시험의 점수, 교사 자격증 등을 이용한 연구들이 대부분이었다. 그러나 이 연구들은 실제로 교사가 수업을 실행할 때 어떻게 지식을 사용하는지 대해서는 밝히지 못한 한계를 가지고 있다(McCrory et al., 2012; Somayajulu, 2012). 지식을 아는 것과 지식을 사용하는 것은 분명 차이가 있다. 따라서 성공적인 수학 교수·학습을 위해서는 내용 지식만으로 충분하지 않고(Even, 1993) 교사의 지식이 수업에서 어떻게 사용되는지에 대한 이해가 필요하다(Ball, 2003; Ball et al., 2001; Black, 2007).

이런 연구배경에 따라 이 연구는 고등학교 초임 수학교사의 대수 영역에 대한 지식과 주어진 수업 상황에서 그 지식을 어떻게 사용하는지 이해하는 것을 목적으로, 고등학교 1학년 '문자와 식' 영역에서의 초임 교사의 지식과 지식의 사용이 어떻게 나타나는지 분석하고자 한다. 기존의 연구가 행해진 미국과 우리나라의 사회, 문화, 교육적 맥락이 다르기 때문에 교육과정, 교사양성체계 및 교사의 수준도 달라 기존에 사용한

문항을 그대로 적용하기는 어렵다. 따라서 우리나라 교육과정과 교사의 수준에 맞는 문항이되, 대수 영역의 지식뿐만 아니라 수업에서 지식의 사용을 묻는 문항을 개발하여 초임교사들의 지향하는 수학 지식의 사용 방법을 파악하고자 하였다.

고등학교 초임 수학교사를 대상으로 대수를 가르치기 위해 필요한 지식을 밝히고, 지식의 사용 양상을 함께 탐색함으로써 지식 사이의 관계를 도출하여 앞으로의 교사 교육의 변화에 대한 함의점을 제공할 수 있을 것이다.

2. 연구 문제

이 연구에서는 고등학교 초임 수학교사를 대상으로 KAT 즉, 대수를 가르치는데 필요한 지식과 그것을 주어진 수업 상황에서 어떻게 사용하는지를 이해하는 것을 목적으로, 대수 영역 중 고등학교 1학년 내용에 초점을 맞추어 다음과 같은 연구 질문을 설정하였다.

1. 문자와 식 영역에서 고등학교 초임 수학교사의 대수를 가르치는데 필요한 지식은 어떠한가?
2. 문자와 식 영역에서 고등학교 초임 수학교사는 대수를 가르치는데 필요한 지식을 어떻게 사용하는가?

Ⅱ. 이론적 배경

1. 대수 교육

학교수학에서 대수 교육은 문자의 도입으로부터 시작된다. 문자를 도입하고 문장을 문자를 사용한 식으로 나타내며 방정식과 부등식과 같은 문제 해결 학습으로 나아간다. 또한 양 사이의 관계나 구조의 학습을 위한 기초가 되는 것이 대수이고 대수 학습을 통해 학생들은 형식화, 일반화 능력을 기를 수 있다. 뿐만 아니라 문제를 구조적 관점으로 다루는 능력을 기를 수 있다(김남희 외, 2006). 이러한 대수는 다양한 의미를 지니는데 Usiskin(1988)은 학교 대수의 정의를 문제 해결 과정의 학습, 산술의 일반화 학습, 여러 가지 양 사이의 관계 학습, 구조의 학습으로 구분하고 있고, 이는 대수의 다양한 측면을 고루 다루어야 함을 내포하고 있다.

NCTM(2000)은 <학교 수학을 위한 원리와 규준>에서 대수의 다양한 의미를 반영하여 대수 교육의 목표를 다음과 같이 두고 있다.

<표 Ⅱ-1> NCTM 대수 규준(NCTM, 2000)

유치원 이전부터 12학년까지 교육을 통해 학생들은 • 여러 가지 양상, 관계, 함수를 이해할 수 있어야 한다. • 대수적 기호를 사용하여 수학적 상황과 구조를 표현하고 분석할 수 있어야 한다. • 양적 관계를 표현하고 이해하기 위해 수학적 모델을 사용할 수 있어야 한다. • 다양한 문맥에서 변화를 분석할 수 있어야 한다.

위와 같이 NCTM에서는 학교 수학에서 다루는 대수 교육에서는 여러

가지 양상, 관계, 함수의 이해, 수학적 상황과 구조를 대수 기호로 표현하고 분석하기, 양 사이의 관계를 수학적 모델을 활용하여 표현하기, 다양한 문맥에서 변화 분석하기를 다루고 있으며 우리나라 교육과정에의 '문자와 식', '함수' 영역이 대수 교육 내용에 해당한다. 각 영역에서 다루는 내용은 <표 Ⅱ-2>와 같다.

<표 Ⅱ-2> 영역별 내용 체계(교육과학기술부, 2008)

영역	내용	
문자와 식	• 다항식의 연산 • 항등식 • 나머지정리 • 다항식의 인수분해, 약수와 배수 • 유리식, 무리식의 계산 • 이차방정식의 판별식, 근과 계수의 관계	• 간단한 삼차방정식과 사차방정식 • 연립방정식 • 부등식의 성질과 활용 • 절댓값을 포함한 일차부등식 • 이차부등식과 연립이차부등식 • 절대부등식
함수	• 함수의 뜻과 그래프 • 합성함수, 역함수 • 이차함수의 활용 • 유리함수, 무리함수 • 일반각과 호도법	• 삼각함수의 그래프의 성질 • 삼각함수의 성질 • 삼각방정식과 삼각부등식 • 사인법칙과 코사인법칙 • 삼각함수를 활용한 삼각형의 넓이

특히 [그림 Ⅱ-1]의 교육과정 해설서에 제시된 '문자와 식' 영역의 지도 의의에서 보듯이 문자와 문자를 사용한 식은 수학적 표현을 통한 의사소통을 도와주며, 문제 상황에 맞는 식을 세움으로써 이를 형식적으

로 계산할 수 있게 하여 문제를 효율적으로 해결하게 하는 하나의 도구가 된다. 다시 말해, ‘문자와 식’ 영역에서 학습하는 내용은 함수나 기하 영역 등 학교수학 전반에 걸쳐 다루어지고 있기 때문에 무엇보다 중요하다고 할 수 있다. 정영우와 김부윤(2011)은 문자와 문자를 사용한 식에 대한 이해와 조작은 대수학 분야의 수학적 개념들을 이해하고, 이들을 구조적 관점에서 다룰 수 있는 능력을 신장하는데 있어 중요하다고 말한다.

문자를 사용하여 나타낸 다항식의 집합은 수의 대수적 구조를 확장한 또 다른 대수적 구조를 갖는다. 다항식의 연산을 능숙하게 하는 것은 고등학교 수학 학습에서 필수적인 기능이다. 한편, 문자나 다항식, 방정식, 부등식은 일상적인 상황을 수학적으로 표현하는 데에도 활용된다. 문자와 식은 대부분의 수학에서 의사소통하는 데 사용되는 언어이기도 하며, 추상적인 단계에서 개념을 조작하고 적용하는 수단과 일반화와 통찰을 가능하게 하는 방법을 제공해 준다. 이런 점에서 문자와 식은 그 자체의 체계적 학습 이외에도 해석, 통계, 기하 등의 학습에 기본이 된다고 할 수 있다.

[그림 Ⅱ-1] ‘문자와 식’ 영역의 지도 의의(교육과학기술부, 2008)

한편 Sfard(1991)는 추상적인 수학적 개념의 형성은 대상으로서 구조적인 개념과 과정으로서 조작적인 개념으로 인식될 수 있다고 말하며 조작적인 개념에서 구조적인 개념으로의 이행은 빠르거나 쉽게 발생하지 않는다고 말한다. 이것을 산술에서 대수로의 이행으로 본다면 이는 단순한 과정이 아니라는 것이다. 지금까지 산술과 대수를 각각 초등과정과 중등과정으로 그 내용을 구분하여 지도함에 따라 학생들은 산술에서 대수로의 이행에 어려움을 겪게 되고(우정호, 김성준, 2007), 문제의 본질과 양 사이의 관계를 이해하지 못하고 오개념을 갖거나 오류를 범하는 경우가 많았다. 따라서 학습자와 수학을 이어줄 교사는 대수의 의미와 대수 교육의 중요성을 이해하고 대수 교수·학습을 위해 필요한 지식을 갖추고 수업 개발 및 실행에서 다양한 교육 조건과 배경을 고려하여 지식을 사용해야 한다.

2. 교사의 지식

2.1. PCK

20세기 후반부터 질 높은 교육을 위해 필요한 교사의 지식이 무엇인가에 대한 논의가 활발하게 일어났고, 이는 다른 교과교육뿐만 아니라 수학교육에서도 관련자들의 관심을 끌었다(Hill et al., 2005; Somayajulu, 2012). 교사가 전문가로서 갖추어야 할 지식이 무엇인가에 대한 논의의 토대를 마련한 Shulman(1986)은 교사만이 가질 수 있는 특수 지식인 교수학적 내용 지식(이하 PCK)을 처음으로 제안했다. 초기에 그가 제안한 교사 지식의 범주는 3가지로 교과 내용 지식, 교육과정 지식, PCK이다. 교과 내용 지식은 학생들에게 가르치는 내용에 대한 지식과 기술의 이해뿐만 아니라 교과의 구조, 원리, 규칙 등에 대한 지식이다. 교사는 수학적 명제의 참, 거짓을 아는 것뿐만 아니라 왜 그러한지를 이해해야 한다. 교육과정 지식은 특별한 교육과정 내용에 관한 지식으로 동일 학년에 제시되는 내용 간의 연결에 대한 지식, 교육과정 내에서 내용 간의 위계에 대한 지식을 말한다. PCK는 내용과 교수법을 혼합하여 특정 교과내용을 학습자의 다양한 능력과 배경에 맞추어 적절하게 변형하여 학생들에게 전달될 수 있는 지식이다. 다시 말해, 학생들이 가지고 있는 개념이 무엇인지 파악하고 오개념을 고려하며 교과 지식을 효과적으로 가르치는 교수 전략 등과 관련된 실제적 지식으로 교과의 내용 지식이 학습자의 이해를 위해 적절하게 변형되는 과정에 필요한 교사의 고유 지식이다.

이후 Shulman(1987)은 교사의 지식을 세분화하여 기존의 3개의 내용 영역 지식에 새롭게 4개 영역을 추가하여 교사 지식 영역을 7가지로 제시하고 재범주화 하였다. 이를 정리하면 <표 Ⅱ-3>과 같다.

<표 Ⅱ-3> Shulman(1987)의 교사의 지식 범주

- 교과 내용 지식 (content knowledge)
- 일반적인 교수학적 지식 (general pedagogical knowledge)
- 교육과정 지식 (curriculum knowledge)
- 교수학적 내용 지식 (pedagogical content knowledge)
- 학습자에 대한 지식 (knowledge of learners and their characteristic)
- 교육적 맥락에 대한 지식 (knowledge of educational contexts)
- 교육 목적과 가치, 철학적·역사적 배경에 대한 지식 (knowledge of educational ends, purposes, and values, and their philosophical and historical grounds)

(Shulman, 1987, p. 8)

새롭게 추가된 지식은 일반적인 교수학적 지식, 학습자에 대한 지식, 교육적 맥락에 대한 지식, 교육 목적 및 가치, 철학적 역사적 배경에 대한 지식으로 일반적인 교육적 지식이다. Shulman(1986, 1987)의 주된 초점은 기존의 3개의 내용 영역 지식에 있었다. 그러나 "단지 내용 지식만 있는 것은 내용이 없는 기술만큼이나 교수학적으로 쓸모없는 것과 같다." (Shulman, 1986, p. 8)라고 하며 일반적인 교육적 지식의 중요성을 언급하였다.

교수학적 내용 지식이 등장한 이후 교사의 지식에 대한 범주와 교사의 지식 중 교사만이 가지는 특수한 지식인 PCK의 정의 및 요소에 관한 논의가 계속되었다. Grossman(1990)은 교사의 지식을 교과 내용 지식(subject matter knowledge), 일반적인 교수학적 지식(general pedagogical content knowledge), PCK, 맥락에 대한 지식(knowledge of context)으로 구분하여 제시하였고, Marks(1990)는 수학 수업에 관한 사례연구를 통하여 교수·학습 상황을 고려하지 않은 교과 내용 지식과 교과를 고려하지 않은 교수·학습에 관한 일반적인 교수학적 지식, 그리고 이 두 지식이

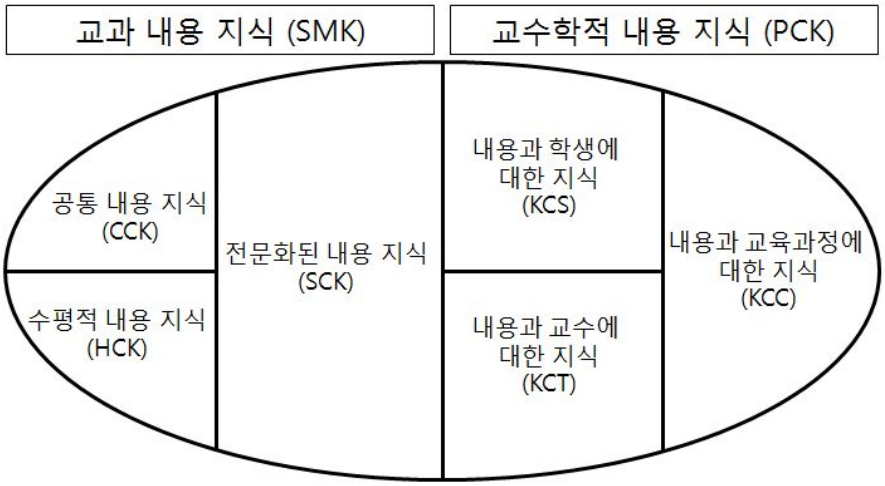
통합되어 변형된 교수학적 내용 지식으로 교사의 지식을 범주화하였다.

20여 년 동안 교사 지식에 관한 연구가 꾸준히 있어 왔으나 학자마다 교사의 지식에 대해 서로 다른 방식으로 분류하고 그 구성 요소에 있어 약간의 차이를 보였다. 또한 교사 지식의 연구 범위가 너무 넓어 특정 교과의 내용에 주의를 기울이지 못한 채 단순한 내용지식이나 일반적인 교수학적 지식과도 명확하게 구분되지 않은 경우도 있었다(박경미, 2009).

Ball 등(2008)은 각 교과에서 PCK에 대한 이론적이고 실제적인 연구들이 많이 이루어지고 있으나, 그러한 연구들이 교과에 특화된 내용에 관계없이 PCK를 인용하고 있으며 그마저도 수학교육에서는 연구가 매우 적다고 말한다. 이들은 이러한 문제에서 시작하여 수학교과에서 가르치기 위해 필요한 교사의 지식을 연구하였는데, 이는 다음 절에서 자세히 살펴보도록 한다.

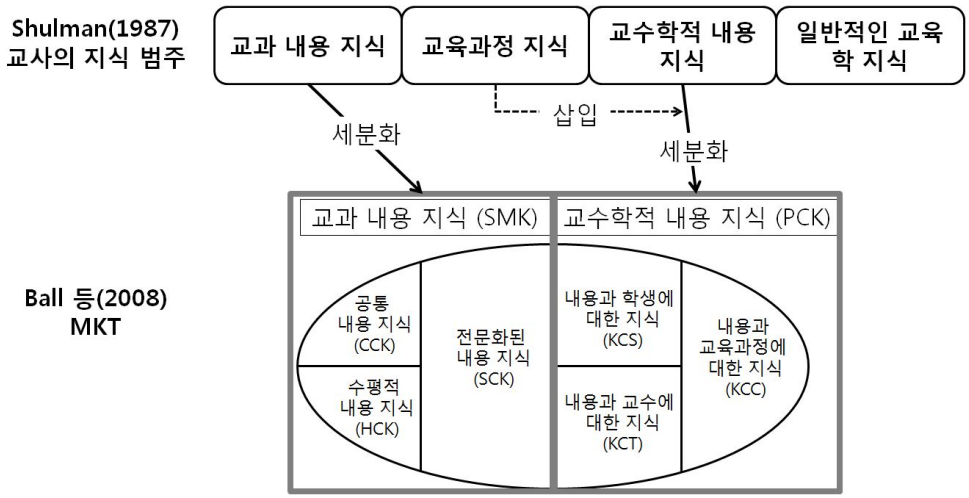
2.2. MKT

Ball 등(2008)은 수학교사의 수업 활동 자체를 분석하여 가르치기 위한 수학적 지식(mathematical knowledge for teaching, 이하 MKT)을 정립하였다. MKT는 범교과적인 성격을 지닌 PCK와 수학 교과의 특성을 고려한 수학교사들의 특정 PCK를 모두 포함한다(Ball et al., 2009). MKT를 도식화 하면 [그림 Ⅱ-2]와 같다.



[그림 Ⅱ-2] 가르치기 위한 수학 지식의 범주(Ball et al., 2008)

Ball 등(2008)은 Shulman(1986, 1987)의 아이디어에 기초하되 수학 교과에 초점을 맞추어 효과적인 수학 교수를 위해 필요한 교사의 지식을 재정립하였다. 크게 두 가지 범주, 교과 내용 지식(subject matter knowledge, 이하 SMK)과 PCK로 나누었다. Shulman(1986)의 교과 내용 지식을 공통 내용 지식(common content knowledge, 이하 CCK)과 전문화된 내용 지식(specialized content knowledge, 이하 SCK)으로 나누고 수평적 내용 지식(horizon content knowledge, 이하 HCK)을 추가하여 이 세 가지를 SMK의 하위 요소로 구성하였으며 PCK는 내용과 학생에 대한 지식(knowledge of content and students, 이하 KCS)과 내용과 교수에 대한 지식(knowledge of content and teaching, 이하 KCT)으로 나누고 교육과정 지식을 내용과 교육과정에 대한 지식(knowledge of content and curriculum, 이하 KCC)으로 명하여 이 세 가지를 PCK의 하위 요소로 구성하였다. Shulman(1986)의 교사의 지식의 범주와 Ball 등(2008)의 MKT를 비교하면 [그림 Ⅱ-3]과 같다. 교과 내용에 초점을 맞추어 교과 내용 지식을 3개의 하위 요소로 세분화 하였고 수학교과 특성에 다른 PCK를 정립한 것을 볼 수 있다.



[그림 Ⅱ-3] Shulman(1987)과 Ball 등(2008)의 연구 비교

MKT의 하위 요소들에 대해 자세히 알아보면, CCK는 가르칠 내용에 대한 지식으로 교사뿐만 아니라 다양한 분야의 사람들이 사용할 수 있는 지식이다. 학생들에게 가르치는 개념 및 알고리즘에 대한 지식, 수학적 기호와 언어에 대한 지식을 포함한다. HCK는 수학적 내용들의 배열, 관계를 더 큰 관점에서 바라 볼 수 있는 능력으로 교사는 현재 배우고 있는 수학이 더 큰 수학적 아이디어, 구조, 원리와 어떻게 관련되어 있는지 알 필요가 있다(Ball & Bass, 2009). SCK는 순수 수학적 지식이지만 다른 분야에서는 사용하지 않는, 교수에 있어 특수한 지식이다. 학생의 오류들에서 규칙을 확인하고 학생이 사용한 다양한 접근법을 탐구하며 그것이 수학적으로 옳은 것인지 판단할 수 있는 능력이다. 또한 교사는 수학적 언어와 일상 언어가 어떻게 다른가를 설명할 수 있어야 하며, 자신의 아이디어뿐만 아니라 학생의 아이디어도 설명할 수 있어야 한다.

한편 KCS는 학생이 수학적 내용을 어떻게 이해하는지에 대한 지식으로 교사는 학생들이 이해하기 쉬워하거나 어려워하는 개념을 예측해야 하고 학생의 수학적 아이디어를 해석하고 분석할 수 있어야 한다. KCC은 Shulman(1986)의 교육과정 지식과 동일한 것이고, KCT는 수학 내용과 교수에 대한 지식을 결합한 지식이다. 수업 개발 및 수업 전반에 걸쳐

이루어지는 교수학적 결정에 필요한 지식이다. 학습 주제를 적절하게 배열함으로써 학생이 주제 간의 연결성을 볼 수 있고 따라서 수학을 더 잘 이해할 수 있도록 해야 한다. 또한 적절한 예를 제시하여 학습자가 기본 원리를 깨닫게 하거나 더 깊게 이해하도록 해야 한다.

MKT은 기본적으로 초등학교, 중학교 수준에서 개발된 틀이다. 고등학교 수준에서 수학을 가르치는 것은 초등학교나 중학교 수준보다 훨씬 더 복잡하고 많은 범위의 수학 내용을 다루어야 하기 때문에(Somayajulu, 2012) 고등학교 수준의 수학 교수에서는 MKT가 적합하지 않을 수 있다. 고등학교 수준에서 교사의 지식에 대한 연구가 적었고, 동시에 국제성취도비교평가에서 미국 학생들의 대수영역에서의 낮은 성취도는 대수 영역에 대한 교사의 지식에 대한 연구로 이어졌다.

2.3. KAT

McCrory 등(2012)은 대수를 가르치는데 필요한 지식(knowledge of algebra for teaching, 이하 KAT)에 대한 틀을 개발하였다. KAT 연구에서 개발한 틀은 대수를 가르치는데 필요한 수학적 내용 지식과 수학적 지식의 사용 범주로 나누었다는 점이 주목할 만하다. 먼저 대수를 가르치는데 필요한 지식 범주를 살펴보면 <표 Ⅱ-4>와 같다.

<표 Ⅱ-4> 대수를 가르치는데 필요한 지식(McCrory et al., 2012)

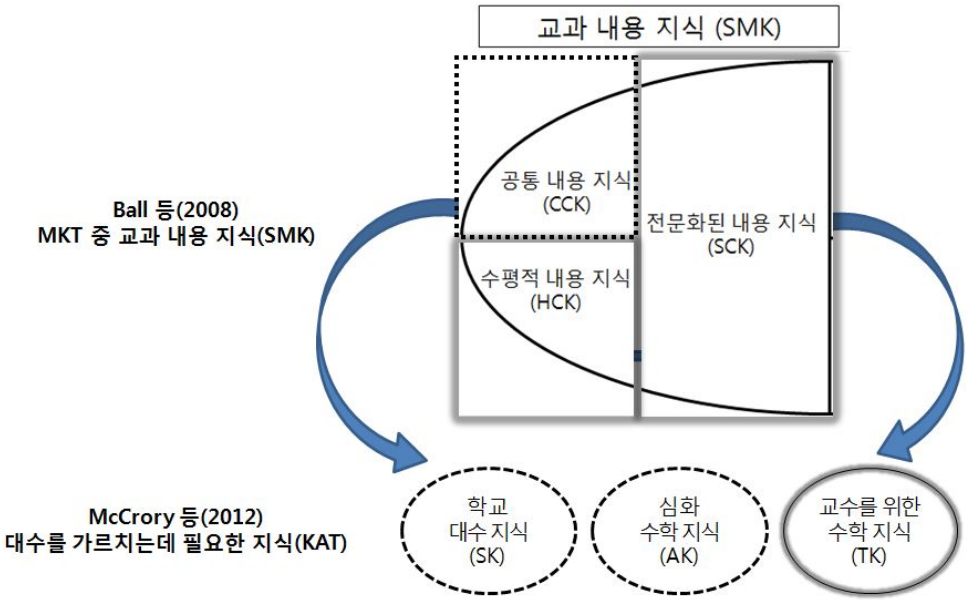
대수를 가르치는데 필요한 수학적 내용 지식 (mathematical content knowledge)
• 학교 대수 지식 (knowledge of school algebra)
• 심화 수학 지식 (knowledge of advanced mathematics)
• 교수를 위한 수학 지식(mathematics-for-teaching knowledge)

수학적 내용 지식의 범주에서 학교 대수 지식은 교사들이 수학을 가르치는데 기본이 되는 것으로 교육과정에서 의도한 대수 영역의 수학적 지식을 말한다. 즉, 학생들이 학교에서 배우는 대수 영역의 지식으로 이때 대수 영역은 이 연구의 배경이 되는 미국의 교육과정과 비교했을 때 우리나라 교육과정의 경우 '문자와 식', '함수' 영역이 해당된다.

심화 수학 지식은 다른 수학적 지식, 특히 대학수준의 수학을 포함한다. 심화 수학 지식은 학교에서 가르치는 것보다 더욱 폭넓고 깊이 있는 지식으로 일반적으로 교사가 대학 과정에서 배우는 미적분학, 선형대수학, 추상대수학, 정수론, 실해석학, 복소해석학, 수학적 모델링 등이 해당하며 중등학교에서 배우는 익숙한 정리의 확장이나 일반화, 수학적 내용의 적용이 포함된다. 교사들은 이러한 지식을 통해 학교 대수 지식의 수준을 뛰어 넘어 수학적 아이디어의 발전과정을 알고 전반적인 교육과정에 대한 통찰력을 얻을 수 있다.

교수를 위한 수학 지식(TK)은 가르치는데 유용한 수학적 지식으로, 학생들의 수학적 언어를 해석하고 수학적 오류나 오개념을 설명할 수 있으며 수학적 대상들의 연관성을 알고 학생의 수준에 맞는 것이 무엇인지 파악하는데 요구되는 지식을 말한다. 교사들이 고등학교 때, 혹은 대학 과정의 전공 수학 수업에서 배우는 형식적인 지식이 아니다. 교사들이 수업 실행을 하면서 익힐 수 있는 지식이다. 이는 교사가 수학을 가르치는데 필요한 지식에 대한 연구인 MKT(Ball et al., 2008)의 교과 내용 지식(SMK) 중 SCK(전문화된 내용 지식)와 일맥상통하는 것으로 교과 내용 지식 영역에 해당하는 만큼 순수 교육학 지식이 아닌 수학적 지식을 말한다.

[그림 Ⅱ-4]는 Ball 등(2008)의 MKT 중 교과 내용 지식(SMK)과 McCrory 등(2012)의 KAT를 비교한 것이다.



[그림 Ⅱ-4] MKT와 KAT의 내용 지식의 비교

수학 교과 중 대수 영역에 초점을 맞춘 KAT 연구는 Ball 등(2008)의 MKT 중 교과 내용 지식을 공통 내용 지식은 학교 대수 지식과 심화 수학 지식으로 나누고 수평적 내용 지식과 전문화된 내용 지식을 교수를 위한 수학 지식으로 재범주화 하였다. CBMS(2012)에서는 고등학교 교사는 심화 수학 지식뿐만 아니라 고등학교 수학 내용과 어떻게 관련이 있는지 이해해야 함을 강조하고 있고 Somoyajulu(2012)는 초·중학교보다 고등학교에서 가르치는 수학의 수준이 훨씬 더 복잡하고 교사는 더 넓은 범위의 수학적 내용을 알고 있어야 한다고 말한다. 따라서 이와 같은 의견으로 McCrory 등(2012)은 초등학교 교사를 대상으로 한 Ball 등(2008)의 MKT 연구의 내용 지식의 영역 보다 중등교사 특히 고등학교 교사를 대상으로 한 KAT 연구에서의 내용 지식의 영역은 심화 수학 지식을 추가한 것이다.

교사들은 이러한 지식들을 아는 것에 그치지 않고 수업을 실행하면서 학생들의 사고에 대응하여 적절하게 사용할 수 있어야 한다. <표 Ⅱ-5>은 수학적 지식의 사용에 대하여 각 하위 요소를 나타낸 표이다.

<표 Ⅱ-5> 수학적 지식의 사용(McCrory et al., 2012)

수학적 지식의 사용 (uses of mathematical knowledge)
• 수학적 내용을 구성 요소로 분해하기 (Decompressing)
• 수학적 내용의 엄밀성 조절하기 (Trimming)
• 수학적 내용들을 연결하기 (Bridging)

수학적 내용의 사용 범주에서 수학적 내용을 구성 요소로 분해하기(D)는 수학을 완성상태로 제공하는 것이 아니라 학습자가 원리를 탐구할 수 있도록 그 구성 요소들을 분해시켜 제공하는 것, 교사 자신의 수학적 지식을 덜 다듬어지고 덜 완성된 형태로 분해하는 것을 말한다. 학생들의 수학 학습을 분석하며 그들이 기계적으로 학습할 가능성이 있는 절차적인 부분은 그 원리를 깨달을 수 있게 지도하는 것을 말한다. 예를 들어 중학교 1학년 내용에서 일차방정식을 해결할 때, 일차항과 상수항을 각각 좌, 우변에 이항을 하여 정리를 하고 일차항의 계수로 양변을 나누어 일차방정식의 근을 구하는 일련의 절차를 학생들이 기계적으로 해결하는 것에서 그치지 않고 각 절차에서 등식의 성질이라는 원리가 사용됨을 설명하는 것이 해당된다.

또 다른 예로 <표 Ⅱ-6>과 같은 방정식을 해결하는 문제를 예로 들 수 있다.

<표 Ⅱ-6> 서로 다른 유형 해를 갖는 방정식 (McCrory et al., 2012)

(1) $4(x-1)-x=0$
(2) $4(x-1)-x=3x-4$
(3) $4(x-1)-x=3x+3$

전형적인 방정식의 풀이 절차를 이용하여 해결하면 방정식 (1)의 방정식 $x=\frac{4}{3}$와 동등하고 따라서 유일한 해를 갖고, 방정식 (2)는 항등식 $0 \cdot x=0$와 동등하고 따라서 모든 실수를 해로 가지며 방정식 (3)은 등식 $-4=3$과 동등하고 이를 만족하는 해가 없다. 수학적 내용을 구성 요소로 분해하여 설명하는 교사라면 방정식 (2)의 해를 $x=0$이라고 답하는 학생들의 오류에 적절하게 반응할 수 있을 것이다. 다시 말해, '방정식을 푼다'의 의미를 유일한 해를 구하는 것으로 이해하는 학생에게 방정식을 만족하는 값들의 집합을 찾는 것으로 설명함으로서 이해를 시킬 수 있고, 이렇게 간단한 단어 속에 함축되어 있는 다양하고 복잡한 의미를 설명하는 것 또한 D에 속한다.

수학적 내용의 엄밀성 조절하기(T)는 수학적 내용의 엄밀성이나 규모를 조절하는 것으로 수학적 내용은 유지하되, 학습자가 접근하고 받아들이기 쉽도록 맥락을 추가하거나 세부적인 요소를 늘리는 것뿐만 아니라 맥락을 제거하여 완성된 수학의 형태를 학습할 수 있도록 하는 것을 포함한다. 필수 요소는 유지한 채 학습자의 배경, 이해, 지식을 고려하며 그들이 접근하기 쉽도록 수학적 내용을 더 엄밀한 형태로 또는 덜 엄밀한 형태로 다듬는 것이다. 교과서에서 제시된 내용이나 문제를 학생의 수준을 고려하여 수정하고, 학생들 사이의 수학적 의사소통을 원활하게 하기 위하여 한 학생의 말을 다른 학생들에게 적절한 형태로 설명하는 것이 해당된다. 그런데 이 때 교사는 학생들이 이후에 접하게 될 수학적 아이디어를 예측하여 이후 학습에 방해가 되지 않도록 유의해야 한다. 수학적 내용의 엄밀성을 조절하는 것은 학교 수학뿐만 아니라 심화 수학 지식에 의해, 교육과정에 의해, 학생들의 어려움에 대한 지식에 의해, 그리고 교육 경험에 의해 영향을 받는다. 수학적 내용의 엄밀성 조절하기의 간단한 예로 다항식의 인수분해를 지도할 때 인수분해 할 다항식의 항의 개수나 계수를 조절하는 것이 해당된다. 또한 다음과 같은 문제를 보자.

주어진 방정식 $2x^2+4x=6$의 해를 그래프를 그려 나타내어라.

문제의 의도는 두 함수 $f(x)=2x^2+4x$, $g(x)=6$의 그래프의 교점의 x 좌표를 나타내는 것이지만, 만약 어떤 학생이 방정식의 양변을 2로 나누어 두 함수 $F(x)=x^2+2x$, $G(x)=3$의 그래프의 교점의 x좌표를 구했다면 의도한 것과 해는 같겠지만 그래프는 다르게 그려진다. 이 경우 교사는 일차변환에 대해 엄밀성을 조절하여 학생의 답을 설명할 수 있어야 한다. 즉, 두 함수 f, g에 대하여 x가 $f(x)=g(x)$을 만족하면 0이 아닌 실수 b에 대하여 $bf(x)=bg(x)$를 만족함을 엄밀하게 혹은 간단하게 설명할 것인지 결정해야 한다.

수학적 내용들을 연결하기(B)는 교육과정 상에 있는 수학적 내용들 간의 연결, 학교 수학과 더욱 심화된 내용 또는 대학 수학과의 연결, 학교 수학과 다른 학문과 연결 등이 포함된다. 수학의 각 내용들을 어떻게 연결된 그림으로 보여줄 수 있을지, 대학 수학을 학생들의 학습할 수 있는 범위에서 어떻게 합리적이고 감각적으로 받아들일 수 있게 할지, 그리고 학생들이 배우는 학교 수학 내용과 관련된 다양한 내용들을 어떻게 이해시킬 수 있을지에 대한 교사의 이해가 바탕이 된다. 수학적 내용들을 연결하기는 대수 영역 내에서 대수적 개념들의 공통적인 부분을 이해하는 것 또한 포함한다. 예를 들면 학생들은 종종 대수적 식을 등식처럼 연산할 경우가 있다.

식 $\dfrac{x-4}{x+3}-\dfrac{9}{x-2}$을 간단히 하여라.

이 식을 등식과 혼동하여 각 항에 $(x+3)(x-2)$을 곱하여 $x^2-6x+8-(9x+27)$으로 나타낼 수도 있다. 이 경우 일반적인 식과 등식을 명확하게 구분지어 설명하는 것은 같은 대수 영역 내의 서로 다른 수학적 내용들을 연결하기에 해당하는 것이다. 또 다른 예로 〈표 Ⅱ-6〉의 방정식 (3) $4(x-1)-x=3x+3$을 해결하는데 함수를 이용할 수도 있

다. 두 함수 $f(x)=4(x-1)-x$, $g(x)=3x+3$의 그래프의 교점의 x좌표가 방정식의 해가 되는데, 두 함수의 그래프의 교점이 없으므로 방정식의 해가 존재하지 않는다고 결론을 내릴 수 있다. 이 경우 '방정식'과 '함수'라는 서로 다른 두 수학적 내용을 연결한 것에 해당한다.

한편 Devlin(2000)은 학생들이 추상적인 개념을 좀 더 쉽게 이해하기 위해 구체적인 방식으로 학습하는 것이 중요하다고 말한다. 그럼으로써 학생들이 대수의 유용성과 중요성을 이해하도록 하는데 도움이 될 수 있다. 따라서 교사들은 추상적인 수학을 구체적인 단계 또는 요소로 분해하거나 방정식의 일부를 제거하는 것과 같이 엄밀성을 조절함으로써 개념을 변형하여 가르쳐야 한다. 추상성이 강한 대수의 본질로 인해 대수 교수실행에서 교사들의 지식의 사용을 <표 Ⅱ-5>의 틀로 분석하는 것은 자연스럽게 보인다.

McCrory 등(2012)은 효과적인 대수 수업은 수학적 내용 지식에 의존하면서 수학적 내용 지식과 수학적 지식의 사용 범주를 독립적으로 볼 것이 아니라 결합하여 연구해야 함을 강조하며 <표 Ⅱ-7>과 같은 틀을 제안했다.

<표 Ⅱ-7> 수학적 내용 지식과 지식의 사용(McCrory et al., 2012)

수학적 지식의 사용 / 수학적 내용 지식	수학적 내용을 구성 요소로 분해하기	수학적 내용의 엄밀성 조절하기	수학적 내용들을 연결하기
학교 대수 지식	①	②	③
심화 수학 지식	④	⑤	⑥
교수를 위한 수학 지식	⑦	⑧	⑨

예를 들어 '다항식'을 주제로 한다면 ①에는 ax^2+bx+c와 같이 기호적 표현을 사용하고 각 기호의 대상이나 조건을 이해하도록 지도하는 것이 속하고 ②에는 변수와 계수를 융통성 있게 사용하는 것, ③은 다항

식과 자릿값, 십진법 표현이 어떤 관련이 있는지 알도록 하는 것이 해당한다. ‘기울기와 도함수’를 주제로 한다면 ④는 기울기를 표현하거나 계산하는 서로 다른 공식들을 알게 하는 것, ⑤는 기울기를 대수적으로 계산하는 것, ⑥은 변화율로서의 기울기, 순간변화율로서의 기울기, 도함수로서의 기울기를 연결하는 것, ⑦은 기울기를 x값이 증가량에 대한 y값의 증가량으로 정의를 할 때, y값의 증가량이 음수일 때 생길 수 있는 혼란을 인지하고 일차함수의 기울기에 대한 아이디어를 제한적 설명하는 것, ⑧은 일차함수에서 기울기와 미적분학에서 기울기의 정의를 알고 학생들에게 적절한 정의를 선택하여 설명하는 것, ⑨는 기울기와 순간 변화율을 그래프로 그리는 여러 방법들을 연결하거나, 기울기에 대한 다양한 정의와 표현들을 서로 연결 지어 설명하는 것이 해당한다.

이처럼 교사가 대수를 가르치는데 필요한 지식과 수업에서의 효과적인 실행을 연구하기 위해서는 위의 세 가지 지식과 세 가지 실행 측면을 결합하여야 하고, 특히 예비교사 교육, 교사의 지식, 교수 실행, 학생의 학습 등에 대한 경험적 연구를 위해서는 실행과 지식을 결합한 평가가 필요하다(McCrory et al., 2012). 이 연구는 수학교사가 가르치는데 필요한 지식 중 대수 영역에 초점을 맞추었기 때문에 일반적인 관점에서 교사의 지식 분류보다 대수 영역에서의 지식을 분류한 위의 <표 Ⅱ-7>을 택할 것이다.

Ⅲ. 연구 방법

이 연구에서는 대수 영역, 특히 고등학교 1학년 문자와 식 영역에서 고등학교 초임 수학교사의 대수를 가르치는데 필요한 지식을 확인하고 주어진 수업상황에서 수학적 지식의 사용이 어떻게 일어나는지 알아보고자 한다. Merriam(1998)는 개인, 사건 등 하나의 단위에 대한 집중적인 묘사와 분석은 사례연구가 가지는 특징이라고 한다. Baxter와 Lederman(1999)은 사람의 지식은 복잡하고 파악하기 어려운 내적 구조이기 때문에 양적 도구만을 이용하여 그 구조를 보기 어렵다고 말한다. 따라서 이 연구는 교사 개개인에 집중하여 대수를 가르치는데 필요한 지식과 수업에서 지식의 사용이 어떻게 나타나는지 탐구하기 위하여 질적 사례 연구 방법을 활용한다.

1. 연구 참여자 및 절차

1.1. 자료 수집

이 연구에서는 고등학교 초임 수학교사 7명을 대상으로 설문 조사와 면담 조사를 실시하였다. 연구자가 탐구하고자 하는 과정에서 접근이 용이한 사례를 선택한 의도적 표집 방법을 사용하였다.

연구의 목적과 의도를 충분히 이해하고 동의한 교사에 한해 설문 조사와 면담 조사를 실시하였다. 사전 인터뷰를 통해 교사의 경력과 지도하는 학생들의 수준, 지도 성향에 대하여 조사하였다. 본 설문 조사를 실시한 후 설문지 분석 결과를 연구 참여자 본인에게 확인하고(member checking) 심층적으로 이해하기 위해 사후 인터뷰를 실시하였다.

1.2. 연구 참여자

이 연구의 참여자는 고등학교 초임 수학교사 7명으로 사전 인터뷰를 통해 연구 참여자들의 교육 경력, 지도하는 학생들의 수준과 지도 성향에 대하여 조사하였다.

성별과 경력은 <표 Ⅲ-1>과 같다. 연구 참여자는 현재 모두 고등학교 교사로 과거에 중학교에 근무했던 교사도 있기 때문에 고등학교 교육 경력과 총 교육 경력을 모두 표시하였다.

<표 Ⅲ-1> 연구 참여자 성별 및 경력

교사	성별	고등학교 교육 경력	총 교육 경력
Ⅰ	여	1년 8개월	2년
Ⅱ	남	2년 8개월	2년 8개월
Ⅲ	남	2년 8개월	2년 8개월
Ⅳ	여	8개월	4년 2개월
Ⅴ	여	4년 5개월	4년 5개월
Ⅵ	여	1년 8개월	1년 8개월
Ⅶ	여	1년 8개월	1년 8개월

1.2.1. 교사 Ⅰ

교사 Ⅰ은 고등학교 교육 경력은 1년 8개월이고 총 교육 경력은 2년이다. 교사 Ⅰ은 일반계 고등학교 1학년을 담당하고 있다. 학급은 다양한 수준의 학생들로 구성되어 있고 학생들의 수학에 대한 흥미도의 차이가 크다.

이 교사는 수학적 개념이나 공식을 지도할 때는 교과서에 명시적으로 쓰여 있는 용어와 식을 그대로 전달하는 것보다 개념을 유도하고 그와

관련된 예를 학생들이 직접 찾아보는 기회를 주기 위해 노력하고 있으며 특히 학생들의 수준차를 고려하여 개별적으로 질문을 받고 답해주는 개별지도를 위해 시간을 많이 할애한다고 한다.

1.2.2. 교사 Ⅱ

교사 Ⅱ는 총 교육 경력이 2년 8개월이고 지금까지 고등학교에서만 근무하였다. 교사 Ⅱ는 일반계 고등학교에서 2학년을 지도하고 있고 과거에 1학년을 지도한 경험이 있다. 학생들의 수업태도가 양호하며 다양한 수준의 학생들이 한 학급에서 공부한다.

평소 수업을 할 때 학생들의 수학적 이해를 돕기 위해 전 시간 수업에서 배운 내용을 정리하고 앞으로 배울 내용을 이전 학습 내용과 연결하여 발전되고 추가된 점을 밝힌다고 한다. 학생들에게 공식부터 암기하게 하고 문제에 적용한 후 증명은 수업 후반부에 하는 경향이 있고, 복잡한 식을 지도할 때에는 구조는 유지하되 가장 간단한 식으로 변형하여 풀이방법부터 설명하고, 풀이방법은 단계를 구분하여 절차적으로 설명한다고 한다. 대단원이 시작될 때마다 그 단원에 해당하는 역사적 사실이나 실생활에 적용되는 부분을 알려주고 단원을 개괄적으로 보여주기 위해 노력한다.

1.2.3. 교사 Ⅲ

교사 Ⅲ은 교육 경력이 2년 8개월이고 지금까지 고등학교에서만 근무하였다. 교사 Ⅲ은 일반계 고등학교에서 1학년과 3학년을 담당하고 있다. 지도하는 학생들의 수학 학습 수준은 모의고사 성적 중하위권 정도로 흥미와 열의를 갖고 수학 공부에 임하는 학생이 많지 않다.

복습하는 학생이 많지 않기 때문에 항상 수업의 도입부에서 5-10분가량은 이전 시간 수업 내용을 상기하는 기회를 주고 수업 중에는 개념을 설명할 때 학생들의 이름이나 학교에서의 에피소드를 많이 연계하여 설

명하려고 노력한다고 한다.

1.2.4. 교사 Ⅳ

교사 Ⅳ는 총 교육 경력이 4년 2개월로 연구 참여자들 중 두 번째로 경력이 많으나, 이전에는 중학교에서 근무하다가 2013년 3월에 고등학교로 부임 받아 연구 참여 시점까지 고등학교 교육 경력 8개월로 가장 적다. 교사 Ⅳ는 일반계 고등학교에서 1학년과 3학년을 담당하고 있다. 지도하는 학생들은 학업에 대한 흥미와 열의가 낮으며 대부분의 학생들의 기초 지식이 매우 낮은 수준이다.

이 교사의 말에 따르면 약 60% 이상의 학생들은 수학 과목을 초등학교 때부터 포기를 한 경우가 많아 모든 학생을 수업에 참여하기 힘들어 한다. 그러한 학생들에게 기초적인 문제를 따로 제시함으로써 수학 수업이 유의미한 시간이 되도록 노력하고 있다. 쉬운 내용이라도 이해할 수 있게끔 예를 많이 들어주고 기초적인 문제를 집중하여 다루면서 반복 학습으로 수업내용을 익힐 수 있는 기회를 주려고 노력한다.

1.2.5. 교사 Ⅴ

교사 Ⅴ는 총 교육 경력이 4년 5개월로 연구 참여자들 중 가장 경력이 많고 지금까지 고등학교에서만 근무하였다. 교사 Ⅴ는 취업중심의 특성화고등학교에서 근무하고 있다. 취업형 맞춤형 교육과정 연구학교를 운영하고 있어 다른 특성화 학교에 비해 보통 교과(국어, 영어, 수학, 사회, 과학)의 시수가 적은 편이고 실습교과(기계, 전기 등)의 시수는 많다.

현재 전문계 고등학교 1학년과 2학년을 담당하고 있고, 지도하는 학생들은 학습에 관심이 별로 없고 초등학교, 중학교 때 누락된 수학 학습 결손이 크다. 교육과정 상 고등학교 수학과 수학 Ⅰ을 가르치고 있지만 개념이해보다는 공식을 대입하거나 형식적인 계산, 혹은 1차원적인 사고를 통해 응용할 수 있는 정도의 문제를 유형별로 나누어 반복적으로 다

루고 있다. 시수가 적어 교과서에 제시된 내용을 모두 다루지 않고 수학 교사들의 협의 아래 교과서를 재구성하여 반드시 필요한 내용과 학생들 수준에 맞는 내용을 선정하여 지도한다고 한다. 수학적 개념을 설명할 때에는 문자를 사용한 증명보다 숫자를 사용한 다양한 예를 보여주면서 소개할 때가 많고 분수와 제곱근과 같이 학생들이 어려워하는 내용은 틈나는 대로 지속적으로 그 원리와 규칙을 설명하여 문제를 해결할 수 있도록 돕기 위해 노력한다고 한다.

1.2.6. 교사 Ⅵ

교사 Ⅵ은 총 교육 경력이 1년 8개월로 연구 참여자들 중 가장 경력이 적다. 교사 Ⅵ은 일반계 고등학교에서 2학년 자연계 학급을 담당하고 있으며 과거에 1학년을 지도한 경험이 있다. 이 고등학교의 학업 성취도는 관내 일반계 고등학교 중 가장 낮다.

대부분의 학생들의 학습수준이 높지 않아 교과서 문제와 모의고사 하 수준의 문제를 다루고 있다. 미분법과 같은 공식이 많이 나오는 단원의 경우 쪽지 시험을 자주 보고 기본 공식을 모두 암기할 수 있도록 지도한다고 한다. 이해가 되지 않는다면 암기라도 할 수 있게 하여 기초 문제를 해결할 수 있는 경험을 해주고자 노력한다고 한다. 교육과정과 교과서의 모든 내용을 알려주기보다 꼭 필요한 내용을 선정하여 지도한다고 한다. 또한 학생들은 모의고사, 수능시험 점수를 잘 받으려는 것보다 내신 성적 관리에 치중한다고 한다.

1.2.7. 교사 Ⅶ

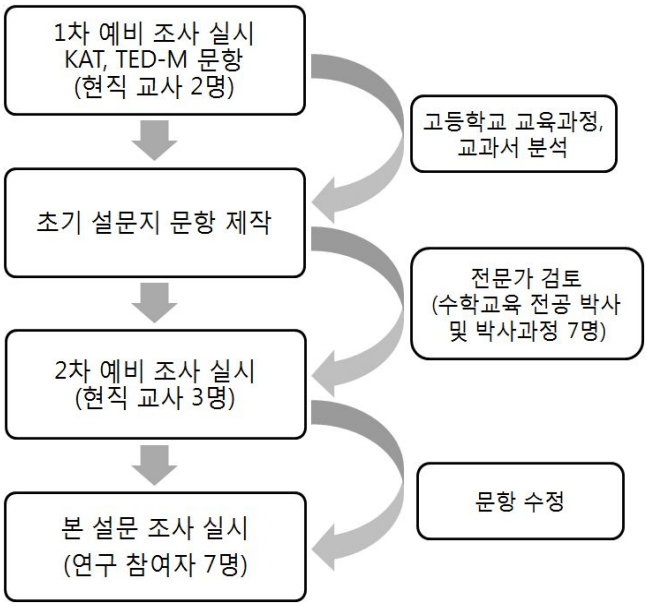
교사 Ⅶ은 총 교육 경력이 1년 8개월로 연구 참여자들 중 가장 경력이 적다. 교사 Ⅶ은 일반계 고등학교에서 1학년을 담당하고 있다. 이 고등학교의 성취도는 관내 일반계 고등학교 중 가장 높다. 학생들은 대체적으로 학습 태도가 의욕적이고 학습 수준이 높은 편이다.

학생들의 수학적 이해를 돕기 위해 학습 내용과 관련된 예를 되도록 많이 보여주며 설명하고 적용할 수 있는 문제를 제공하고 이전에 배운 학습 내용과 관련시켜서 반복 설명하려고 노력한다. 학생들의 수준이 높기 때문에 교육과정과 교과서에 제시된 내용은 물론 교육과정에서 벗어나지만 각종 심화문제에서 다루는 내용까지 지도한다고 한다.

2. 설문지 문항 개발

2.1. 설문지 문항 개발 과정

이 연구는 고등학교 초임 수학교사가 갖고 있는 대수를 가르치는데 필요한 지식을 알아보고 수업에서 지식을 어떻게 사용하는지를 조사하는 것을 목적으로 하고 있다. 설문지 문항 개발 과정은 [그림 Ⅲ-1]과 같다.



[그림 Ⅲ-1] 설문 문항 개발 과정

연구 초기에는 국제적인 수학 교육 연구에서 사용한 타당도와 신뢰도를 검증받은 문항을 사용하고자 하였다. 대수 영역에서 교사의 지식을 조사하기 위한 연구로 KAT(McCrory et al., 2012)와 TED-M(Tatto, Schwille, Senk, Ingvarson, Peck, & Rowley, 2008)연구를 참고로 1차 예비 조사를 실시하였다. 그러나 이 문항들은 교사의 내용 지식만을 묻는 것이었고, 또한 예비 조사 과정에서 참여 교사 2명 모두 100% 정답률을 보여 의미 있는 결과를 보기 힘들었다. 따라서 국제 수학교육 연구에서 사용된 문항들을 바탕으로 하되, 우리나라 교육과정과 교과서를 분석하고 교사들의 수준을 고려하여 초기 설문지 문항을 개발하였다.

복수의 수학교육 전문가(박사 및 박사과정 7명)에게 타당성을 검토 받았으며 문항의 진술 형태, 문항의 적절성을 검토받기 위해 수학교육을 전공하고 고등학교 1학년을 지도한 경험이 있는 현직 교사 3명을 대상으로 2차 예비 조사를 실시하였다. 예비 조사 결과 의도한 것과 전혀 다른 방향으로 응답을 한 문항, 애매모호한 표현으로 참여 교사들이 혼란스러워했던 문항들을 수정하였고 본 설문 조사를 실시하였다. 설문지는 연구 참여자들이 자필 또는 워드로 작성하여 우편 또는 이메일로 회수하였다.

2.2. 문항 구성

고등학교 1학년 ‘문자와 식’ 영역은 크게 식의 연산, 방정식, 부등식 등의 3개의 주제로 나눠진다. 식의 연산과 관련하여 다항식의 연산과 인수분해, 유리식과 무리식, 방정식과 관련하여 이차방정식과 고차방정식, 부등식과 관련하여 이차부등식과 절대 부등식으로 구성되어 있다. 각 주제에서 학생들이 오류를 범하기 쉽거나 교사가 다양한 지도 방식으로 접근할 수 있는 소주제를 택하였다. 이에 따라 다항식의 인수분해, 이차방정식의 근, 절대부등식 중 산술-기하평균 부등식을 선택하였고 문항을 개발하였다.

3개의 주제에 대하여 각각 6개의 문항으로 구성되어 있다. 문항 1, 3, 5는 수학적 내용 지식에 대한 것으로 각각 학교 대수 지식(이하 SK), 심

화 수학 지식(이하 AK), 교수를 위한 수학 지식(이하 TK)을 물어보는 문항이다. 문항 2, 4, 6은 바로 전 문항에서 확인한 지식을 주어진 수업 상황에서 어떻게 사용하는지를 조사하기 위한 것으로 수학적 내용을 구성요소로 분해하기(이하 D), 수학적 내용의 엄밀성 조절하기(이하 T), 수학적 내용들을 연결하기(이하 B)가 모두 가능한 문항으로 개발하였다. 그러나 교사는 대수를 가르칠 때 단일한 지식만을 사용하는 것이 아니라 서로 다른 지식들을 복합적으로 사용하기 때문에 지식의 사용 문항에서는 특정한 지식을 중심으로 세 지식이 어떤 관계를 나타내며 사용되는지 알아보고자 하였다. <표 Ⅲ-2>는 각 문항별 내용과 출처를 나타낸 표이다.

<표 Ⅲ-2> 설문 문항

주제	문항	내용	분류	출처
1 다항식의 인수분해	1.1	다항식의 인수분해	SK	김수환 외(2009a, 2009b) 김서령 외(2009a, 2009b)
	1.2	다항식의 인수분해 지도	SK의 사용 중심	
	1.3	정수 범위에서 다항식 인수분해 가능성 판단 (Eisenstein's criterion)	AK	김서령 외(2009c), 이준열 외(2010)
	1.4	다항식의 인수분해와 관련한 심화지식의 수업에 활용	AK의 사용 중심	
	1.5	학생의 수학적 언어 해석	TK	KAT project
	1.6	학생의 사고에 반응하기	TK의 사용 중심	

2 이차방정식의 근	2.1	이차방정식의 근의 판별	SK	김서령 외(2009a)
	2.2	이차방정식의 판별식 도입 지도	SK의 사용 중심	
	2.3	대수학의 기본정리	AK	김서령 외(2009c), 이준열 외(2010)
	2.4	추상대수학의 내용과 연결 (대수학의 기본정리)	AK의 사용 중심	
	2.5	학생의 수준에 맞는 수학적 대상 파악	TK	이동환 (2010), 이정희 (2013)
	2.6	이차방정식과 다른 수학적 내용의 연결 지도	TK의 사용 중심	
3 산술-기하평균 부등식	3.1	산술-기하평균 부등식	SK	황우형 외(2009a, 2009b)
	3.2	산술-기하평균 부등식의 의미와 증명 지도	SK의 사용 중심	
	3.3	일반화된 산술-기하평균 부등식	AK	김서령 외(2009c), 이준열 외(2010)
	3.4	산술-기하평균 부등식의 심화지도	AK의 사용 중심	
	3.5	학생의 수학적 오류 분석	TK	김수환 외(2009a, 2009b)
	3.6	학생의 오류 개선 지도를 위한 과제 개발	TK의 사용 중심	

2.2.1. 문항 1과 문항 2

SK는 학교 대수 지식으로 교육과정에서 의도한 대수 영역의 학습 내용 지식을 말한다. 각 주제별로 문항 1에서 SK를 조사하고, 문항 2에서

는 문항 1과 같은 수학적 내용으로 수업 상황에서 SK를 어떻게 사용하는지 알아볼 수 있도록 개발하였다. 각 문항에 대한 구체적인 설명은 다음과 같다.

1.1. 다음 다항식을 인수분해 하세요.

(1) $8a^3+27b^3$
(2) $x^4+3x^2y^2+4y^4$
(3) $x^4-4x^3-10x^2+28x-15$

1.2. 다항식의 인수분해를 학생들의 수준을 고려하여 어떻게 수업할 지 자세히 적어주세요.(수준별로 나누어 설명을 제시할 수도 있습니다.)

[그림 Ⅲ-2] 문항 1.1과 문항 1.2

문항 1.1은 다항식의 인수분해에 대한 SK를 알아보고 문항 1.2는 교사가 다항식의 인수분해라는 주제로 학생들의 수준을 고려할 때 어떻게 지도할지 묻는 문항이다.

문항 1.1은 교과서와 수학 익힘책에서 다루는 문제를 바탕으로 출제하였다. (1)은 인수분해 공식 $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$을 이용하여 풀 수 있고, (2)는 x^2y^2을 더하고 빼어 인수분해 공식 $x^2-y^2=(x+y)(x-y)$을 적용하며 (3)은 인수정리를 이용하여 해결할 수 있다.

문항 1.2은 학생들의 수준에 따른 지도에 대해 묻는 문항으로, 다항식의 형태를 단순 또는 복잡하게 변형하여 지도하는 T가 가능하다. 인수분해 공식을 외워서 바로 적용할 수 있도록 최고차항의 계수를 1 또는 -1로만 하거나, 교과서에서는 4차식까지 다루고 있지만 인수정리라는 같은 아이디어로 해결할 수 있는 차수가 높은 다항식을 다룰 수도 있다. 또한 인수분해의 뜻과 인수분해 공식의 원리를 설명하거나 학생이 직접 유도하도록 지도하는 D, 다항식의 인수분해를 방정식의 근과 연결하여 지도하는 B 등 다양한 응답이 가능하다.

2.1. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0(a,b,c$는 실수$)$에 대하여 $ac<0$일 때, 항상 서로 다른 두 실근을 가짐을 설명해보세요.

2.2. 선생님은 오늘 이차방정식의 판별식을 설명하려고 합니다. 어떻게 도입할지 선생님의 의견을 자세히 적어주세요.

[그림 Ⅲ-3] 문항 2.1과 문항 2.2

문항 2.1은 이차방정식의 근을 판별할 수 있는 지식을 알아보고 문항 2.2는 교사가 이차방정식의 판별식을 수업하는 상황에서 도입 지도에 대해 묻는 문항이다.

문항 2.1은 교과서 문제를 참고로 구성하였다. 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 판별식 b^2-4ac과 판별식의 부호에 따라 근의 형태를 알고 있다면 해결 가능하다.

문항 2.2는 이차방정식의 판별식의 도입 지도를 묻는 문항으로 판별식을 유도하는 과정을 설명하는 D가 가능하다. 이차방정식의 근의 공식으로부터 판별식을 도출하는 과정을 설명하고 판별식이라는 용어의 의미와 판별식을 구성하는 각 문자가 가리키는 대상을 설명할 수도 있다. 또한 처음부터 이차방정식과 판별식을 모두 제시하고 이차방정식 근의 개수와 판별식의 부호의 관계를 인식하게 하며 도입하거나, 근의 형태를 판별할 수 있는 식 즉 판별식을 구하게 하는 활동 등 T의 응답도 가능하다.

3.1. $a>0, b>0$일 때, 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$가 성립함을 증명하세요.

3.2. 산술-기하평균 부등식과 그 증명을 지도하기 위해 (1) 필요한 수학적 내용에는 어떤 것이 있는지를 쓰고, 그것을 이용하여 (2) 어떻게 지도할지 자세히 적어주세요.

[그림 Ⅲ-4] 문항 3.1과 문항 3.2

문항 3.1은 절대 부등식 중 산술-기하평균 부등식의 증명에 대한 지식

을 알아보고 문항 3.2는 교사가 산술-기하평균 부등식을 주제로 한 수업에서 필요한 수학적 내용을 파악하여 그것을 이용한 증명 지도를 조사하는 문항이다.

문항 3.1은 교과서 예제나 문제에서 제시된 두 양수에 대한 산술-기하평균 부등식의 증명문제이다. 다항식의 인수분해를 이용하여 대수적으로 증명할 수 있고 또는 원과 삼각형의 성질을 이용하여 기하학적으로 증명할 수도 있다.

문항 3.2는 산술-기하평균 부등식의 증명에 대한 지도에 대한 문항으로 부등식의 증명에 앞서 산술평균과 기하평균의 의미를 설명하고, 부등식의 성질과 다항식의 인수분해를 이용하여 절대 부등식을 증명하는 D가 응답 가능하다. 학생의 이해 정도를 고려하여 부등식의 증명을 직접 해보도록 기회를 주거나, 엄밀한 증명 지도가 어려운 경우 구체적인 수를 주고 관계가 성립하는지 직관적으로 받아들이도록 지도하는 T, 원과 삼각형의 성질을 이용하여 기하학적으로 증명하여 B와 D를 함께 사용하는 응답 등 다양한 답변이 가능하다.

2.2.2. 문항 3과 문항 4

AK는 심화 수학 지식으로 학교에서 가르치는 것보다 더욱 폭넓고 깊이 있는 지식이다. 교사가 대학 과정에서 배우는 미적분학, 선형대수학, 추상대수학, 정수론, 실해석학, 수학적 모델링 등이 해당하며 중등학교에서 배우는 정리의 확장이나 일반화, 수학적 내용의 적용이 포함된다. 각 주제별로 문항 3에서 AK를 조사하고, 문항 4에서는 수업 상황에서 AK를 어떻게 사용하는지 알아볼 수 있도록 하였다. 각 문항에 대한 구체적인 설명은 다음과 같다.

1.3. $P(x)=x^5-6x^4-3x^2-12$은 정수 범위에서 인수분해 가능한지 이유와 함께 설명하세요.
1.4. 다항식의 인수분해를 가르칠 때 위와 같은 내용을 어떻게 활용할 수 있을지 자세히 적어주세요.

[그림 Ⅲ-5] 문항 1.3과 문항 1.4

문항 1.3은 다항식의 인수분해와 관련된 심화 수학 지식을 조사하기 위한 문항이고 문항 1.4는 다항식의 인수분해를 주제로 심화 수학 지식을 사용한 수업에 대한 문항이다.

문항 1.3은 교사용 지도서와 대학 대수 교재 Fraleigh(2002)를 참고하였다. Eisenstein의 판정법은 다항식이 정수 범위에서 인수분해 가능한지 판단할 수 있는 방법으로 이것을 이용하면 주어진 다항식이 인수분해 불가능함을 알 수 있다. 또는 다항식이 (일차식)×(사차식) 또는 (정수 범위에서 인수분해 되지 않는 이차식)×(삼차식)으로 표현된다고 가정했을 때 모순을 보이면 된다.

문항 1.4은 문항 1.3의 내용을 수업에서 활용한다면 어떤 수업이 가능할지 묻는 문항이다. 교과서에 제시된 다항식의 인수분해 문제들은 대부분 인수분해가 되는 다항식만 주어지고 기계적으로 인수분해를 행하도록 한다. 그러나 문항 1.3의 문제유형과 같이 어떤 다항식의 인수분해 가능 여부를 묻는 것은 기계적으로만 인수분해를 하던 학생들에게 새로운 사고를 할 수 있는 가능성을 열어준다. 교과서의 문제를 문항 1.3과 같은 문제로 변형하여 제시하는 T가 가능한 응답으로 나타날 수 있다. Eisenstein의 판정법의 증명은 학생들의 수준에 맞지 않으므로 증명을 제외한 정리 자체는 학생들에게 언급해줄 수 있을 것이다. 이 경우 대학 수학과 학교 수학을 연결하는 B가 가능하다. 또한 다항식 $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$이 유리수범위에서 $x-\alpha$를 인수로 갖는다면 α의 값으로 가능한 수는 $\pm\dfrac{a_0\text{의 약수}}{a_n\text{의 약수}}$임을 유도하는 과정을 구체적으로 설명

하는 D도 가능한 응답이다.

2.3. 교과서에서는 '삼차방정식 $ax^3+bx^2+cx+d=0$이 서로 다른 세 근을 갖는다면'와 같이 n차방정식은 근의 개수는 n개임을 가정하고 있습니다. 이와 관련된 정리를 쓰고 간단히 서술하세요.

2.4. 소연이는 중학교 때는 실수 범위에서는 안 풀리던 이차방정식이 고등학교에서는 복소수 범위까지 배우면서 이차방정식이 풀리는 것을 보고 신기했습니다. 그런데, 중근을 포함하여 이차방정식은 늘 근이 2개임을 알았습니다. 그리고 교과서에는 삼차방정식의 근은 세 개, 사차방정식의 근은 네 개라는 것이 당연하게 언급되어 있는 것을 보고 의문이 생겨 이것을 선생님께 질문했습니다. 선생님은 어떻게 설명해주실지 자세히 적어주세요.

[그림 Ⅲ-6] 문항 2.3과 문항 2.4

문항 2.3은 대수학의 기본정리를 물어보고, 문항 2.4에서는 명시적으로 나타나있지 않지만 학생의 질문에 대한 답으로 문항 2.3의 지식을 사용할 수 있는지 조사하기 위한 문항이다.

문항 2.3은 교사용 지도서와 대학 대수 교재 Fraleigh(2002)을 참고하였다. 문항에서 언급한 것과 같이 교과서에서는 n차방정식의 근이 n개임을 은연중에 말하고 있다. 이와 관련된 정리는 "모든 복소 계수 다항식은 적어도 한 개의 근을 갖는다." 라는 대수학의 기본정리이다.

문항 2.4는 문항 2.3와 같은 내용을 학생의 질문에 어떻게 설명을 하는지 조사하는 문항이다. 학생들에게 대수학의 기본정리를 엄밀하게 증명하여 알려주지는 못하나, 대학에서 배울 수학적 내용과 관련지어 설명해주는 B 뿐만 아니라 삼차방정식을 예로 들어 직관적으로 알게 하는 T, 대수학의 기본정리로부터 삼차방정식의 근이 세 개, 사차방정식의 근이 네 개인 이유를 설명하는 D 등 다양한 답변이 가능하다.

3.3. n개의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대한 산술-기하평균 부등식을 쓰세요.
3.4. 학생들의 사고를 확장시키기 위해 교과서에서 제시하는 산술-기하평균 부등식의 내용에서 심화시켜 지도하려고 합니다. 어떻게 지도하실지 자세히 적어주세요.

[그림 Ⅲ-7] 문항 3.3과 문항 3.4

문항 3.3은 익숙한 산술-기하평균 부등식의 일반화를 묻는 것으로 익숙한 정리의 일반화 또한 AK에 해당한다. 문항 3.4는 학생들의 사고를 확장시키기 위한 심화 지도에 대한 문항이다.

문항 3.3은 교사용 지도서를 참고하였다. n개의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대하여 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$(등호 성립 조건: $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$)이 답으로 등호가 성립할 조건을 써야 정답으로 처리하였다.

문항 3.4는 산술-기하평균 부등식의 심화지도를 묻는 문항이다. 학생들에게 일반화된 부등식의 증명을 지도할 수 없더라도 3개의 양수에 대한 산술-기하평균 부등식은 증명과 응용을 지도할 수 있을 것이다. 이 경우 B와 T가 함께 쓰인다. 또한 실생활의 예를 사용하여 지도하는 B, 산술-기하평균을 잘못 사용하여 오류가 발생하는 상황을 제시하며 오류가 무엇이고 오류의 원인을 설명하는 D 등이 가능하다.

2.2.3. 문항 5와 문항 6

TK는 Ball 등(2008)의 MKT에서 SCK와 일맥상통하는 것으로 학생들의 수학적 언어를 해석하고 수학적 오류나 오개념을 설명할 수 있으며 수학적 대상들의 연관성을 알고, 학생의 수준에 맞는 것이 무엇인지 파악하는데 요구되는 지식을 말한다. 주제별로 문항 5에서 TK를 조사하고, 문항 6에서는 수업 상황에서 TK를 중심으로 지식의 사용이 어떻게 나타나는지 알아보도록 하였다. 각 문항에 대한 구체적인 설명은 다음과 같다.

(1.5~1.6)

김교사는 다항식의 인수분해 내용을 끝내고 학생들에게 차수가 10인 다항식 $P(x)=x^{10}+a_9x^9+\cdots+a_1x+12$이 0이 되는 10개의 서로 다른 정수해를 가질 수 있을지 질문 했습니다.

현호: 가능할 것 같아요. 곱해서 12가 되는 정수들을 나열해보면 $1\times12, 2\times6, 3\times4$로 음수까지 생각하면 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$ 12개가 나오니까 충분히 가능할 것 같아요.

예진: 아니지. 저 수들 중 10개를 뽑아 곱하면 12가 안되잖아. 서로 다른 정수이어야 하니까 최대한 다섯 개의 정수해를 가질 수 있어.

1.5. 예진이의 말을 수학적으로 해석해보세요.

1.6. 선생님은 현호에게 예진의 말을 이해시키려고 합니다. 현호의 생각을 고려하여 현호에게 할 수 있는 설명을 자세히 적어주세요.

[그림 Ⅲ-8] 문항 1.5와 문항 1.6

문항 1.5는 교사가 학생의 말을 수학적으로 해석할 수 있는지 알아보기 위한 것이고, 문항 1.6은 교사가 학생의 말을 다른 학생에게 이해시키기 위해 어떻게 재해석하여 설명하는지를 알아보기 위한 문항이다.

교사가 학생의 말을 이해하고 이를 수학적으로 해석할 수 있어야 학생들 사이의 수학적 의사소통을 원활하게 할 수 있도록 도울 수 있다. 문항 1.5는 이와 같은 의도로 KAT 문항과 Somoyajulu(2012)의 연구를 참고하여 구성하였다.

문항 1.6은 문항 1.5의 응답을 바탕으로 오류를 보인 학생에게 다른 학생의 말을 어떻게 표현하고 설명하는지 조사하는 문항으로 T를 의도로 하고 있다. 문항 1.5의 현호와 비슷한 오류를 보이는 예를 제시하여 지도하는 것은 T를 사용하는 다른 방법이다. 또한 학생의 오류가 무엇이고 오류의 원인을 설명하는 D가 응답으로 가능하다.

(2.5~2.6)

고등학교 1학년 학생인 주리는 중학교 3학년 때 $x^2=1$의 해는 $\pm\sqrt{1}=\pm1$임을 배웠고, 고등학교에 올라와서 복소수를 배우고 $x^2=-1$의 해는 허수 $\pm\sqrt{-1}=\pm i$임을 배웠습니다. 주리는 문득 이런 궁금증이 생겼습니다.

'$x^2=i$의 해는 뭐지? 전에 배운 것과 비슷하다면 $\pm\sqrt{i}$인가? 처음 보는 수인데, 복소수가 아닌 다른 수가 있나?'

2.5. 주리의 궁금증을 해소시켜주기 위한 적절한 설명을 자세히 적어주세요.

2.6. 교사는 주리와 같이 학생들이 수학에서 배운 내용들을 서로 연결지어 생각할 수 있도록 지도하고자 합니다. 고등학교 1학년에서 배우는 이차방정식과 다른 수학적 내용을 연결하여 지도한다면, 연결이 가능한 수학적 내용은 어떤 것이 있고 어떻게 지도할지 자세히 적어주세요.

[그림 Ⅲ-9] 문항 2.5와 문항 2.6

문항 2.5는 수학적 대상에 대한 다양한 설명 중 학생의 수준에 적절하게 설명하는지 조사하고, 문항 2.6은 이차방정식이라는 주제를 다른 수학적 내용과 어떻게 연결하여 지도하는지 알아보기 위한 문항이다.

문항 2.5, 2.6의 상황 글은 이동환(2010), 이정희(2013)의 논문을 참고하였다. $\sqrt{i}$는 복소수 지수 $z^{\frac{1}{n}}$(z는복소수, n은자연수)의 정의에 따라 구하면 $i^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}\log i}=e^{\frac{1}{2}(\log|z|+i\arg z)}=e^{\frac{1}{2}i(\frac{\pi}{2}+2k\pi)}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$이다. 그런데 여기에서 $\arg z$를 주분지($-\pi<\arg z<\pi$)로 제한하면 $\sqrt{i}$을 $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$로 유일한 값에 대응시킬 수 있지만 분지를 선택하는 방법은 무한히 많기 때문에 제곱하여 i가 되는 복소수를 계산하면 무엇을 $\sqrt{i}$로 정할지 쉽지 않다. 따라서 고등학교 교육과정에서 $\sqrt{\ }$안에 허수가 있는 경우를 배제하고 있는 것이다. 이러한 설명은 수준이 높고 복잡하기 때문에 학

생에게 모두 알려줄 수는 없지만 학생이 알고 있는 내용 즉, 복소수의 기본형 $a+bi$로부터 근을 구해보고 복소수가 가장 큰 범위의 수라는 것을 알려주는 것은 가능하다.

교사는 문항 2.5에서 학생이 복소수와 방정식을 연관 지어 생각한 것처럼, 수학적 내용들 간의 연관성을 학생들이 인식할 수 있도록 지도할 필요가 있다. 따라서 문항 2.6은 이차방정식과 다른 수학적 내용들의 연결을 목적으로 하는 수업에서 지도 방법을 알아보고자 하였다. 이차함수의 그래프와 $y=0$의 그래프의 위치 관계를 이차방정식의 근과 관련 지어 설명하는 D가 가능하다. 또한 이차방정식의 근을 지도하기 전에는 이차식의 인수분해가 정수 범위에서만 가능했지만 허근을 생각하여 복소수 범위에서의 이차식의 인수분해를 지도할 수 있기 때문에 이를 연결하여 지도하는 B가 가능하다. 그리고 학생들이 직접 수학적 내용을 찾아 연결을 지어보게 하는 기회를 제공하거나 과제를 제시하는 B와 T 등이 응답으로 가능하다.

(3.5~3.6) 다음은 정연이가 세 양수에 대한 산술-기하평균 부등식을 활용하여 식의 최솟값을 구한 과정입니다.

[문제] $x>0$일 때, $x^2+\frac{6}{x}$의 최솟값을 구하여라.

[정연의 풀이] $x^2+\frac{6}{x}=x^2+\frac{2}{x}+\frac{4}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{2}{x}\cdot\frac{4}{x}}=3\sqrt[3]{8}=6$

따라서 최솟값은 6이다.

3.5. 잘못된 부분을 찾고 왜 이런 실수를 하게 되었는지 분석하세요.

3.6. 고등학교 1학년에서는 두 양수에 대한 산술-기하평균 부등식을 활용한 식의 최솟값 문제가 등장합니다. 그런데 학생들이 문제를 해결할 때 정연이와 비슷한 오류를 종종 보입니다. 이와 같은 오류를 보이는 학생들에게 산술-기하평균 부등식을 이해시키기 위한 적절한 과제를 제시하고 과제를 선택한 이유도 함께 적어주세요.

[그림 Ⅲ-10] 문항 3.5와 문항 3.6

문항 3.5는 수학적 오류나 오개념을 설명할 수 있는 지식을 조사하고, 문항 3.6은 문항 3.5의 학생의 풀이와 같은 오류를 보이는 학생에게 오류의 원인과 수학적 내용을 이해시키기 위한 지도에 대하여 조사하기 위한 문항이다.

문항 3.5, 3.6의 상황 글은 교과서 및 수학 익힘책을 참고하여 구성하였다. 산술-기하평균 부등식을 적용하는 문제의 풀이에서 학생들이 자주 범하는 오류는 등호의 성립 조건을 간과하기 때문에 발생하는 오류이다. 예를 들어 식 $\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(\frac{8}{a}+b\right)$의 최솟값을 구하는 문제를 풀 때 등호의 성립 조건을 간과하고 다음과 같이 해결한다.

[잘못된 풀이]

$a+\frac{2}{b} \geq 2\sqrt{\frac{2a}{b}}$, $\frac{8}{a}+b \geq 2\sqrt{\frac{8b}{a}}$ 이므로

$\left(a+\frac{2}{b}\right)\left(\frac{8}{a}+b\right) \geq 4\sqrt{\frac{2a}{b} \cdot \frac{8b}{a}} = 16$

따라서 최솟값은 16이다.

그러나 이것은 $a=\frac{2}{b}$이고 $\frac{8}{a}=b$이어야 가능하지만 두 식을 모두 만족하는 양수 a, b가 없으므로 잘못된 풀이이다. 문항 3.5는 이러한 잘못된 풀이를 교사가 알고 오류를 분석할 수 있는지 조사하기 위해 구성한 것이다.

문항 3.6에서 문항 3.5와 연장선으로, 상황 글에 나와 있는 학생의 풀이와 같은 오류를 보이는 학생들에게 산술-기하평균 부등식과 등호 성립 조건을 이해시키기 위하여 각 문자와 기호들의 조건 등 부등식의 구성 요소를 하나씩 풀어서 설명하는 D, 식의 최솟값 문제를 간단한 것으로 제시하여 익숙해지면 복잡한 것으로 나아가도록 제시하는 T, 기하영역과 같은 수학의 다른 영역과 연결하여 지도하는 B 등의 응답이 가능하다.

3. 수학적 지식의 사용 분석틀

수학적 지식의 사용을 분석하기 위해 McCrory 등(2012)의 수학적 내용 지식의 사용 범주를 이용하였다. 초기 분석에는 '수학적 내용을 구성 요소로 분해하기(D)', '수학적 내용의 엄밀성 조절하기(T)', '수학적 내용들을 연결하기(B)'와 같이 크게 세 코드로 구성하였다. 그러나 세 코드로 분석하기에 자료를 구체적으로 해석할 수 없었다. 예를 들어 어떤 교사는 판별식의 유용성을 알려주고 식을 도입하기도 하고, 어떤 교사는 판별식의 유도과정에서부터 용어의 설명과 각 문자가 나타내는 대상에 대한 설명을 낱낱이 하였다. 두 교사는 모두 이차방정식의 판별식을 지도할 때 D 방법을 사용했지만 차이가 있었기 때문에 세분화하여 분석할 필요가 있었다. 따라서 선행연구(McCrory et al, 2012)에서 제시한 범주에서 D, T, B의 정의에 따라 코드번호를 붙여 하위 요소로 나누었다. 각 코드번호는 하위 요소의 이름을 붙인 명목 척도이다.

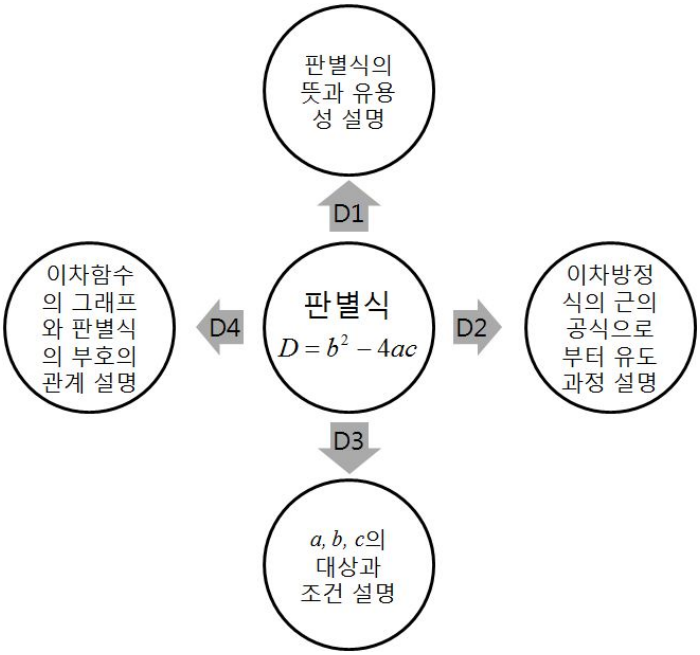
<표 Ⅲ-3>은 수학적 내용을 구성 요소로 분해하기(D)의 4가지 하위요소를 나타낸 표이다.

<표 Ⅲ-3> 수학적 내용을 구성 요소로 분해하기(D)의 하위 요소

하위 요소	• D1: 수학적 용어에 함축되어 있는 의미 설명하기 • D2: 공식의 유도과정, 식의 증명과정, 방정식의 풀이나 다항식의 인수분해와 같은 알고리즘에 대한 설명하기 • D3: 상징적 기호가 나타내는 대상과 조건 설명하기 • D4: 서로 다른 표상(그래프, 표, 식 등) 사이의 관계 설명하기

D1은 수학적 용어의 뜻과 함축되어 있는 의미를 설명하는 것으로 예를 들어 이차방정식의 '판별식'은 이차방정식의 근이 실근인지 허근인

지, 중근을 가졌는지 서로 다른 두 근을 가졌는지 판별할 수 있는 식이고 근을 직접 구하지 않고 근의 유형과 개수를 알 수 있는 편리한 식이라는 것을 알게 하는 것은 D1에 해당한다. D2는 공식의 유도과정이나 증명과정, 인수분해나 방정식의 풀이와 같은 알고리즘을 설명하는 것으로 예를 들어 이차방정식의 근의 공식으로부터 판별식을 유도하는 것이 해당된다. D3는 상징적 기호가 나타내는 대상이나 조건을 설명하는 것으로 예를 들어 판별식 $D=b^2-4ac$에서 각 문자가 나타내는 대상이 a는 이차항의 계수, b는 이차방정식의 일차항의 계수, c는 상수항임을 알려주는 것이 해당된다. D4는 서로 다른 표상들 사이의 관계를 설명하는 것으로 예를 들어 x축을 기준으로 이차함수의 그래프 위치와 판별식의 부호와의 관계를 설명하는 것이 해당된다[그림 Ⅲ-11].



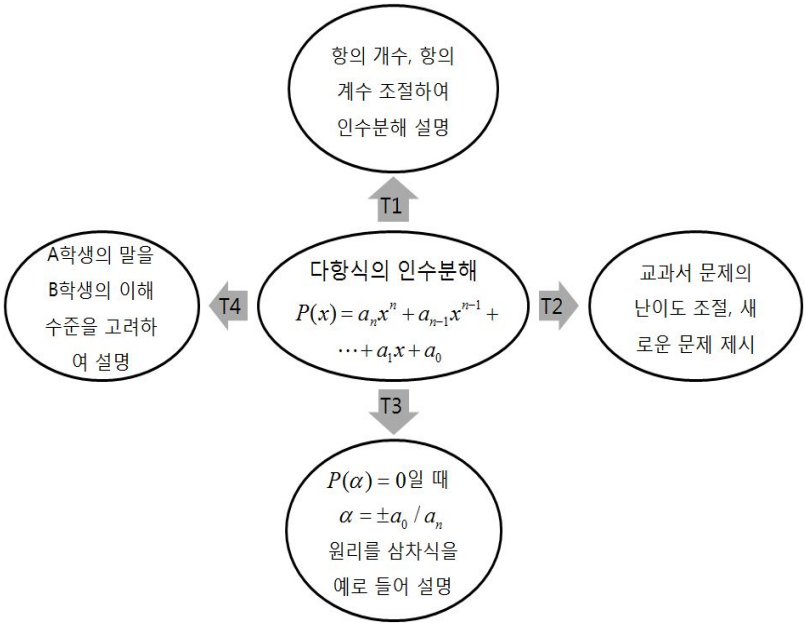
[그림 Ⅲ-11] D의 하위 요소 예(판별식 지도)

<표 Ⅲ-4>은 수학적 내용의 엄밀성 조절하기(T)의 4가지 하위요소를 나타낸 표이다.

<표 Ⅲ-4> 수학적 내용의 엄밀성 조절하기(T)의 하위 요소

하위 요소	• T1: 교과서의 내용 수준 조절 또는 새로운 예 제시하기 (상수준: T1a, 하수준: T1b) • T2: 교과서의 문제 수준 조절 또는 새로운 문제 제시하기 • T3: 학생이 이해할 수 있는 수준으로 표현하거나 설명하기(교과서 외의 추가적인 내용) • T4: 학생의 말을 다듬어 표현하기

T1은 교과서에 제시된 내용을 설명할 때 수준을 조절하거나 새로운 예를 제시하는 방법으로 예를 들어 '다항식의 인수분해'를 가르칠 때 항의 계수의 크기나 항의 개수를 조절하는 것이 해당된다. 이 요소에 해당하는 교사들의 답변은 가르치는 학생의 수준에 따라 차이를 보였기 때문에 자료 분석에서도 차이를 나타내기 위해 수준을 높인 경우는 T1a, 수준을 낮춘 경우는 T1b로 코딩하였다. T2는 교과서 문제의 수준을 조절하거나 새로운 문제를 제시하는 방법으로 예를 들어 복잡한 구조를 가진 다항식의 인수분해 문제를 제시하는 것이 T2에 해당된다. T3는 학생의 이해를 돕기 위해 교과서에 제시된 내용 외에 추가적인 설명을 하거나 학생의 질문에 대한 답을 할 때 대상인 학생이 이해할 수 있도록 표현하거나 설명하는 방법을 말한다. 예를 들어 인수정리를 활용한 다항식의 인수분해를 가르칠 때 다항식의 값이 0이 되는 정수는 $\pm\frac{(\text{상수항의 약수})}{(\text{최고차항의 계수의 약수})}$가 가능함을 학생들에게 익숙한 삼차식을 예로 들어 원리를 설명하는 것은 T3에 해당한다(이 경우는 T3와 D2가 함께 쓰인다). T4는 학생의 말을 다른 학생이 받아들일 수 있도록 표현하고 설명하는 방법으로 수업 상황에서 학생들 간의 의사소통을 원활하게 하기 위해 교사는 학생들의 말을 해석할 줄 알고 다른 학생들에게 이해하기 쉽도록 다시 표현할 수 있어야 한다[그림 Ⅲ-12].



[그림 Ⅲ-12] T의 하위 요소 예(다항식의 인수분해 지도)

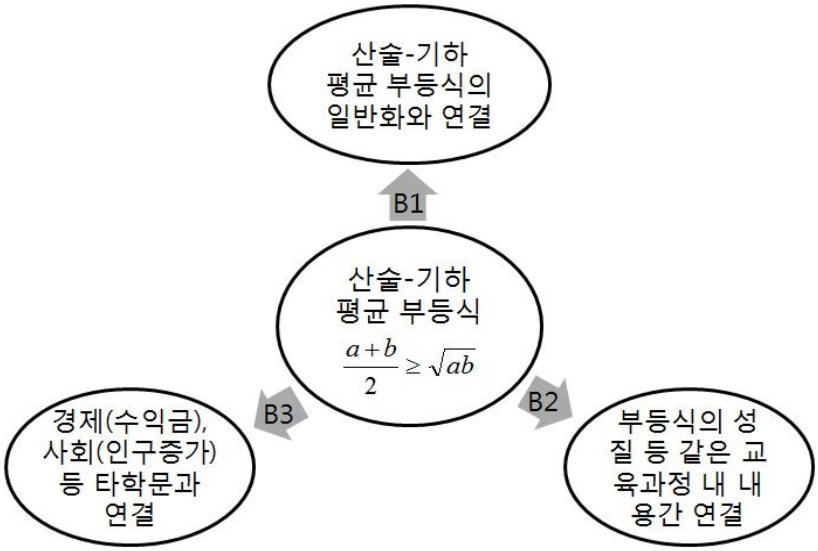
<표 Ⅲ-5>는 수학적 내용들을 연결하기(B)의 3가지 하위요소를 나타낸 표이다.

<표 Ⅲ-5> 수학적 내용들을 연결하기(B)의 하위 요소

하위 요소	• B1: 학교 대수와 대학 수학 등 심화 수학을 연결하기 • B2: 교육과정 상 수학적 내용들 연결하기 • B3: 학교 대수와 다른 학문을 연결하기

B1은 학교 교육과정 상 배우는 내용을 심화 수학과 연결하여 지도하는 방법으로 예를 들어 산술-기하평균 부등식을 지도할 때 교육과정에는 두 개의 양수에 대한 식을 다루지만 세 개의 양수에 대한 산술-기하평균 부등식과 증명 또는 일반화된 산술-기하평균 부등식을 소개하는 것은 B1에 해당한다. B2는 교육과정 내의 수학적 내용들을 연결하여 지도하는

것으로 예를 들어 산술-기하평균 부등식의 증명을 지도할 때 부등식의 성질, 다항식의 인수분해, 기하학적 증명 등과 연결하여 지도하는 것이 해당된다. B3는 수학 내용을 다른 학문과 연결하여 지도하는 것으로 예를 들어 산술-기하평균 부등식은 경제 분야와 연결하여 그 유용성을 알려줄 수 있다.



[그림 Ⅲ-13] B의 하위 요소 예(산술-기하평균 부등식 지도)

Ⅳ. 연구 결과

이 장에서는 고등학교 초임 수학교사를 대상으로 대수를 가르치는데 필요한 지식을 알아보고 주어진 수업상황에서 어떻게 사용하는지를 서술하였다. 설문 조사와 인터뷰로부터 수집한 자료를 바탕으로 분석한 결과는 (1) 대수를 가르치는데 필요한 지식에 대한 분석, (2) 대수를 가르치는데 필요한 지식의 사용에 대한 분석으로 나누어 서술하였다.

1. 대수를 가르치는데 필요한 지식에 대한 분석

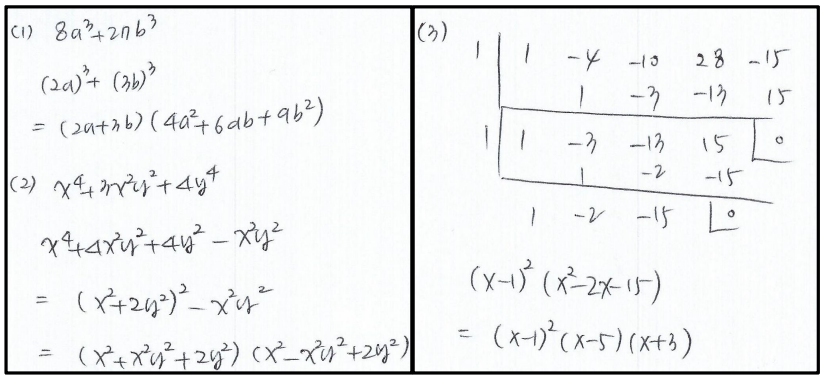
고등학교 초임 수학교사 7명을 대상으로 한 설문 조사는 대수를 가르치는데 필요한 지식과 그 지식의 사용으로 분류된다. 이 절에서는 대수를 가르치는데 필요한 지식의 문항에 대한 응답에 초점을 맞추어 분석한 결과를 서술한다. 대수를 가르치는데 필요한 지식은 학교 대수 지식(SK), 심화 수학 지식(AK), 교수를 위한 수학 지식(TK)으로 분류되는데, 주제별로 문항 1은 SK, 문항 3은 AK, 문항 5는 TK을 조사하는 문항으로 구성하였다.

1.1. SK 문항에 대한 분석

SK는 학생들이 학교에서 배우는 대수 지식으로 교육과정과 교과서에 명시되어 있는 지식을 말한다. 이 연구에서는 고등학교 1학년 ‘문자와 식’ 영역에서 학생들이 배우는 지식을 말한다. SK에 관하여 교과서 본문 내용과 문제를 바탕으로 문항 1.1, 문항 2.1, 문항 3.1을 구성하였다.

대부분의 교사는 이 문항을 해결하는데 어려움을 보이지 않았다. 교사 Ⅴ는 세 개의 SK 문항 중 문항 1.1에서 계산을 실수하여 부분적으로 틀렸지만 나머지 문항은 옳게 풀었고, 다른 교사들은 모두 SK 문항에서 정답률 100%을 보였다. 대부분의 교사가 SK 문항은 어려워하지 않고 옳게

해결하였기 때문에, 교사들은 교육과정과 교과서에 명시되어 있는 학교 수학 지식을 갖추고 있고 교사들 간 지식의 차이는 거의 없음을 알 수 있었다. 또한 교사가 갖추고 있어야 할 지식에 대한 사후 인터뷰에서 모든 교사들은 학생들이 배워야 할 내용에 대해서 교사가 기본적으로 알고 있어야 한다고 말하였다.



[그림 Ⅳ-1] 문항 1.1에 대한 교사 Ⅴ의 응답

1.2. AK 문항에 대한 응답

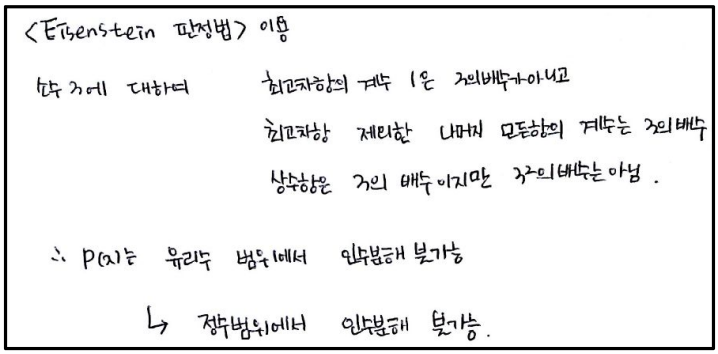
AK는 학교 수학 지식보다 폭넓고 깊이 있는 지식으로 대학 과정의 수학 지식이나 중등학교에서 배우는 정리의 확장과 일반화가 이 범주에 해당된다. AK에 관하여 교사용 지도서와 대학 대수 교재를 바탕으로 문항 1.3, 2.3, 3.3을 구성하였다.

문항 1.3에서 3명의 교사들은 정답, 3명의 교사들은 부분 정답, 나머지 교사 1명은 해결하지 못하였다. 교사들의 정답분포는 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 문항 1.3의 정답 분포

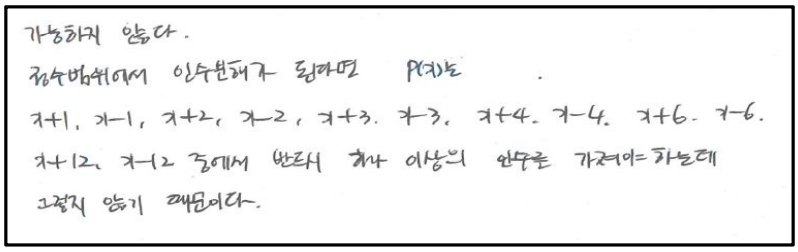
구분	교사
정답	교사 Ⅰ, Ⅴ, Ⅵ
부분 정답	교사 Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ
무응답	교사 Ⅶ

정답을 한 교사 3명은 [그림 Ⅳ-2]의 교사 Ⅵ과 같이 Eisenstein의 판정법을 이용하여 주어진 다항식 $P(x)=x^5-6x^4-3x^2-12$가 정수 범위에서 인수분해 불가능하다고 답하였다.



[그림 Ⅳ-2] 문항 1.3에 대한 교사 Ⅵ의 응답

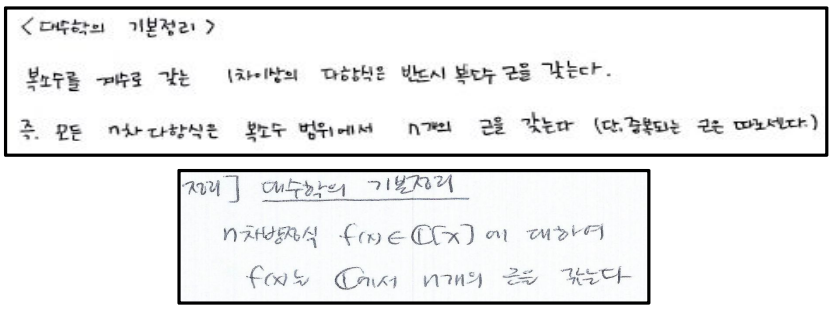
그런데 귀류법을 이용하여 부분적으로 문제를 해결한 교사들은 [그림 Ⅳ-3]의 교사 Ⅳ와 같이 응답하였다.



[그림 Ⅳ-3] 문항 1.3에 대한 교사 Ⅳ의 응답

주어진 5차식이 정수범위에서 인수분해가 된다면 (일차식)×(사차식) 또는 (이차식)×(삼차식)으로 표현될 수 있다. 그러나 이 교사들은 (일차식)×(사차식)으로 표현되는 경우만 생각하고 있었다. 즉 다항식이 일차식을 인수로 갖는다고 가정하고, 인수정리를 이용하여 인수분해를 시도했을 때 모순이 생기기 때문에 인수분해가 불가능하다고 답하였다. 인수정리를 이용하기 위한 가정 '다항식이 일차식을 인수로 갖는다면'을 신중하게 고려하지 못하고 있는 것으로 보인다.

문항 2.3에서는 7명의 교사 모두 옳은 응답을 하였다. 이 문항의 답은 <대수학의 기본 정리> '상수가 아닌 모든 복소 계수 다항식은 적어도 한 개의 근을 갖는다'으로 즉, 복소 계수 다항식 $P(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0(n\geq 1, a_n\neq 0)$은 $P(\alpha)=0$인 복소수 α가 적어도 한 개 존재한다는 것이다. 이에 대해 '모든 n차$(n\geq 1)$ 복소 계수 다항식은 중근을 포함하여 n개의 근을 갖는다'라는 따름 정리가 나온다.



[그림 Ⅳ-4] 문항 2.3에 대한 응답

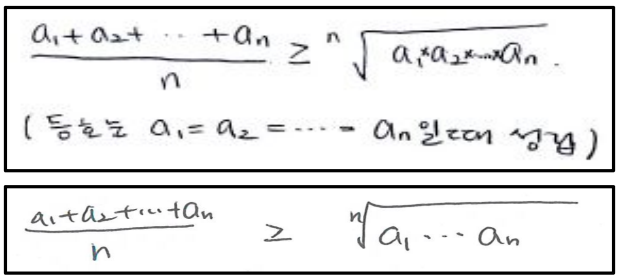
[그림 Ⅳ-4]와 같이 본래의 <대수학의 기본 정리>를 쓴 교사도 있었고 따름 정리를 쓴 교사도 있었는데 따름 정리를 대수학의 기본 정리로 부르기도 하기 때문에 두 응답 모두 정답으로 처리하였다.

문항 3.3에서 교사 3명은 정답, 교사 4명은 부분정답으로 처리하였다. 교사들의 정답 분포는 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 문항 3.3의 정답 분포

구분	교사
정답	교사 Ⅱ, Ⅲ, Ⅵ
부분 정답	교사 Ⅰ, Ⅳ, Ⅴ, Ⅶ

이 문항의 정답은 n개의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대한 산술-기하평균 부등식은 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$(등호 성립 조건: $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$)이다. [그림 Ⅳ-5]에서 위의 그림은 정답을 한 교사의 응답이고 아래의 그림은 부분 정답을 한 교사의 응답이다. 7명의 교사는 모두 식을 옳게 세웠으나 4명의 교사는 등호가 성립할 조건을 간과하고 있었다.



[그림 Ⅳ-5] 문항 3.3에 대한 응답

종합하였을 때, AK 문항을 모두 옳게 답한 교사는 한명으로 다른 교사들은 적어도 한 번씩 오류를 보이는데, 이것은 학생의 오류와 비슷하게 나타났다. 학생들에게 내용을 이해시키기보다 절차적인 방법, 계산 능력 향상을 위한 지도 방법으로 가르치려는 습관에서 비롯된 것이라고 할 수 있다. 산술-기하평균 부등식에서 등호의 성립 조건을 간과하고 있던 점 또한 부등식의 증명 과정을 이해하도록 지도하기보다 그것을 활용한 문제 풀이를 주로 다루었기 때문이라고 할 수 있다. 이는 다음의 사후 인터뷰 내용이 뒷받침한다.

교사 Ⅰ: 꼼꼼하고 정확하게 하는 연산 능력 기르기. 계산의 순서를 알고 틀리지 않게 계산하는 능력이 중요하고 그걸 강조해서 가르쳐요.

교사 Ⅱ: 의미 설명보다는 인수분해를 어떻게 하면 잘할 수 있는지, 어떻게 빨리 하는지에 초점이 있죠.

교사 Ⅵ: 다른데 많이 사용되니까 계산이 중요해요. 계산을 빠르고 정확하게 할 수 있게 하는 걸 중심으로 지도해요.

한편, 교사들은 AK에 대한 문항에서 오류를 보이기도 하였으나, 교사로서 교과서 내용보다 발전된 지식, 학생들이 배우는 것보다 더 많은 지식, 대학 수학 지식까지 알고 있어야 한다고 말하며 AK의 필요성을 인식하고 있었다.

교사 Ⅱ: 단순히 고등학교 것만 잘 푼다고 해서 교사로서 충분한 지식은 아닌 것 같아요. 수학을 바라보는 눈을 준다고 생각하거든요. 수학을 바라보는 시야의 폭이 넓게 해 줄 수 있다고 생각해요.

교사 Ⅴ: 교사는 심화 내용도 알아야 한다고 생각해요. 구체적으로 수업하지 않아도, 사실 많이 까먹기도 했지만 그래도 그걸 알아야 방향을 제시할 수 있을 것 같아요. 내가 큰 틀을 알고 있어야, 예를 들면 이차방정식을 배우면 미적, 함수 계속 쓰이니까 그런 부분이랑 연결 지어서 생각할 수 있게 지도할 수 있죠. 내가 연결을 모르면 딱 이차방정식까지 밖에 모르니까. 지나가는 말이라도 이렇게 활용되니까 이런 것도 해봐야 할 것이다 언급할 수 있을 것 같아요.

교사 Ⅵ: 심화된 내용을 애들한테 가르쳐 줄 건 아니지만, 뭔가 이게 맞는지를 판단할 때 나는 더 위에 내용을 알고 판단을

해야 하잖아요. 지금은 이게 맞는 말이지만, 애들이 조금 더 배우게 되면 틀린 말이 될 그런 것들이 많잖아요. 그런 개념들을 지도할 때 내가 말을 조심해서 해야 하기 때문에 엄밀하고 정확한 내용을 생각 하려면 전공 수학까지 알긴 알아야 할 것 같아요. 그런데 문제는 대학 내용이 잘 기억이 안나요. 결국에 필요는 하더라고요, 까먹고 있지만.

교사 VII: 고등학교 수학에서 대학 수학하고 많이 연계가 되어 있어요. 대학 수학을 있는 그대로는 아니지만 아이들도 '아~' 이해할 수 있는 수준으로 지도할 수 있다고 생각해요. 대학 수학 내용이 아예 필요 없는 것 같지 않아요. 학생이 아는 지식을 대학 수학하고 관련지어서, '대학교에 있는 건데 해볼래?' 하면 아이들이 흥미를 가지고 하는 편이에요. 내용을 관련지어 설명할 수도 있고, 좀 더 높은 수준에서 정확한 내용을 가르칠 수도 있지만 학생들의 학습 자료 개발에도 영향을 주니까 필요하다고 생각해요.

교사들은 심화 수학 지식을 예비 교사 때만큼 자세히 또는 많이 알고 있지는 않지만, 학생들이 수학을 기존보다 더 넓은 관점으로 볼 수 있게 하고, 교과서에서 배우는 내용들 사이의 연관성과 계통성을 알고 더욱 의미 있게 학습 할 수 있게 하며, 학생들에게 대학 수학과 관련하여 새로운 과제를 제시하고 학습 자료 개발하기 위하여 심화 수학 지식이 필요하다고 생각하고 있었다.

1.3. TK 문항에 대한 응답

TK는 학생들의 수학적 언어를 해석하고 수학적 오류나 오개념을 설명할 수 있으며 수학적 대상들의 연관성을 알고 학생의 수준에 맞는 것이 무엇인지 파악하는 필요한 지식이다. TK의 문항은 KAT 연구(McCrory et

al, 2012), 이동환(2010), 이정희(2013)의 연구, 대학교 수시문제를 바탕으로 문항 1.5, 2.5, 3.5을 구성하였다.

문항 1.5에서는 학생의 말을 수학적으로 해석하고 표현하는지 조사하였고 모든 교사들이 옳은 답을 하였다. 문항 1.5의 상황 글은 다음과 같다.

> 김교사는 다항식의 인수분해 내용을 끝내고 학생들에게 차수가 10인 다항식 $P(x)=x^{10}+a_9x^9+\cdots+a_1x+12$이 0이 되는 10개의 서로 다른 정수해를 가질 수 있을지 질문 했습니다.
>
> 현호: 가능할 것 같아요. 곱해서 12가 되는 정수들을 나열해보면 $1\times12, 2\times6, 3\times4$로 음수까지 생각하면 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$ 12개가 나오니까 충분히 가능할 것 같아요.
>
> 예진: 아니지. 저 수들 중 10개를 뽑아 곱하면 12가 안되잖아. 서로 다른 정수이어야 하니까 최대한 다섯 개의 정수해를 가질 수 있어.

$P(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{10})$<단, $b_1, \cdots, b_{10}$은 정수>와 같이 정수범위에서 인수분해 되었다면 전개했을 때 상수항이 일치해야하므로 $b_1\times\cdots\times b_{10}=12$이 되어야 한다. 하지만 $b_i(1\le i\le 10)$의 가능성은 현호가 말한 숫자에 제한되어 있으므로 이는 불가능하다. 따라서 최대한 작은 숫자만을 선택하여 곱했을 때, 12가 되게 하려면, $\pm1, \pm2, +3$을 인수로 택해야하므로
$P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x^5+1)$와 같은 식이 만들어지는 것이 가능하다. 따라서 최대 정수해는 5개다.

[그림 Ⅳ-6] 문항 1.5에 대한 응답

예진의 두 마디 말에 함축되어 있는 내용을 교사들은 [그림 Ⅳ-6]과 같이 해석하였고 예진의 말과 교사의 수학적 해석을 비교해보면 <표 Ⅳ-3>과 같다.

<표 Ⅳ-3> 학생의 말에 대한 교사의 수학적 해석

예진의 말	교사의 수학적 해석
저 수들 중 10개를 뽑아 곱하면 12가 안되잖아.	$P(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{10})$<단, $b_1, \cdots, b_{10}$은 정수>와 같이 정수범위에서 인수분해 되었다면 전개했을 때 상수항이 일치해야하므로 $b_1\times\cdots\times b_{10}=12$이 되어야 한다. 하지만 $b_i(1\le i\le 10)$의 가능성은 현호가 말한 숫자에 제한되어 있으므로 이는 불가능하다.
서로 다른 정수이어야 하니까 최대한 다섯 개의 정수해를 가질 수 있어.	12가 되게 하려면, $\pm1, \pm2, +3$을 인수로 택해야하므로 $P(x)=(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)(x-3)(x^5+1)$와 같은 식이 만들어지는 것이 가능하다. 따라서 최대 정수해는 5개다.

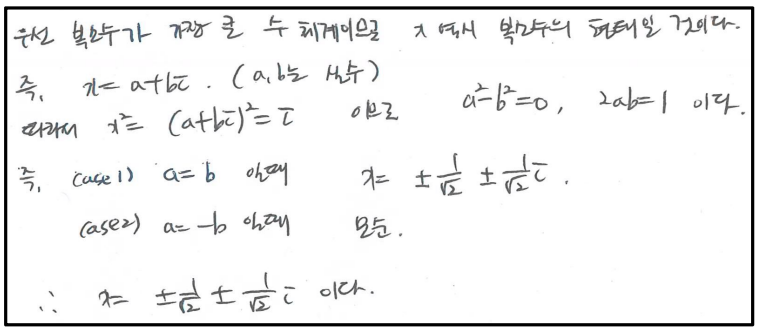
그러나 교사들이 이 문항에 대해 어려움 없이 답하였지만 사후 인터뷰에서 실제로는 학생의 말을 이해하지 못하는 경우가 있다고 말하였다.

교사 Ⅴ: 학생들이 질문할 때 포인트가 뭔지 잘 모를 때가 있어요. 친구들한텐 의사표현이 더 잘되고 피드백도 잘 되니까 다른 학생들을 통해 알 때가 많아요.

교사 Ⅵ: 학생의 말을 잘 해석하지 못할 때가 있어요. 그럴 땐 통역해주는 학생이 있어요. '쟤는 저 식에서 x가 뭔지 모른다는 거예요.' 하면 그때 알아듣죠. 학생이 통역을 해줘서 알려주면 그 때 알아들을 때가 있어요.

문항 2.5에서는 학생의 궁금증을 풀어주기 위해 학생에게 어떤 설명이 적절한가를 알고 있는지 조사하였고 무응답을 한 1명의 교사를 제외한 다른 교사들이 옳은 답을 하였다. 학생의 궁금증은 다음과 같다.

‘$x^2=i$의 해는 뭐지? 전에 배운 것과 비슷하다면 $\pm\sqrt{i}$인가? 처음 보는 수인데, 복소수가 아닌 다른 수가 있나?’



[그림 Ⅳ-7] 문항 2.5에 대한 응답

교사들은 $x^2=i$의 근에 대해 설명할 때 어떤 설명이 학생에게 적절한가를 파악해야 한다. 이 문항은 복소수 지수 $i^{\frac{1}{2}}$에 대한 지식을 요구하지만, 학생들이 복소수 지수를 배우지 않았기 때문에 대부분의 교사들은 위의 그림과 같이 복소수의 기본 형태인 $a+bi(a,b$는 실수$)$을 x로 두고 계수 비교를 통해 해를 보여주는 것이 적절하다고 판단하였다. 또한 ‘복소수는 대수적 폐체로 모든 복소 계수 방정식은 복소수 내에서 반드시 근을 갖기 때문에 더 이상 수가 확대되지 않은 가장 큰 범위 수이다.’라는 것을 설명하기에는 학생들에게 적절하기 않아 [그림 Ⅳ-7]과 같이 복소수가 가장 큰 수 범위라는 것을 언급하고 넘어가기도 하였다.

문항 3.5에서는 산술-기하평균 부등식을 이용한 식의 최솟값 문제에 대한 학생의 풀이에서 오류를 알고 있는지 조사하였고 모든 교사들이 옳은 답을 하였다. 주어진 학생의 풀이는 다음과 같다.

[문제] $x>0$일 때, $x^2+\dfrac{6}{x}$의 최솟값을 구하여라.

[정연의 풀이] $x^2+\dfrac{6}{x}=x^2+\dfrac{2}{x}+\dfrac{4}{x}\geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\dfrac{2}{x}\cdot\dfrac{4}{x}}=3\sqrt[3]{8}=6$

따라서 최솟값은 6이다.

산술기하평균 부등식에서 등호가 성립하는 경우는 각 항의 값이 서로 같을 때이다. 위의 풀이에서 등호가 성립하려면 $x^2, \frac{2}{x}, \frac{4}{x}$ 의 값이 서로 같아야 하는데 이를 만족하는 값은 존재하지 않는다. 3개 항의 값이 같아지려면 주어진 식을 $x^2, \frac{3}{x}, \frac{3}{x}$ 꼴로 나누고 산술기하를 적용하였을 때 최솟값을 찾아낼 수 있다.

[그림 Ⅳ-8] 문항 3.5에 대한 응답

교사들은 [그림 Ⅳ-8]과 같이 학생의 풀이에서 최솟값이 6이 되기 위해서는 $x^2+\frac{2}{x}+\frac{4}{x}=6$ 즉, 등호가 성립해야 하고, 등호가 성립하기 위해서는 식을 이루고 있는 세 항 $x^2, \frac{2}{x}, \frac{4}{x}$의 값이 모두 같아야 하지만 이러한 값이 존재하지 않기 때문에 등호 성립 조건을 만족하지 못하여 오류가 발생하였음을 알고 있었다.

종합하였을 때, 교사 모두 세 개의 TK 문항을 해결하는데 어려움은 없었지만 세 문항으로 교사들의 TK가 잘 형성되어 있다고 말하기 어렵다. 문항이 아닌 실제 상황에서는 본인들의 TK가 부족함을 느끼고 있었기 때문이다. 경력이 적어 학생들과 소통한 시간이 많지 않아 학생의 말을 이해하지 못하는 경우가 있고, 고등학교의 내용을 모두 가르쳐본 적이 없기 때문에 내용간의 연관성을 제대로 파악하지 못하는 한계가 있다고 하였다. 따라서 세 문항만으로 교사들에게 TK가 제대로 형성되어 있다고 말하기는 어렵다. 다음은 사후 인터뷰 내용이다.

교사 Ⅱ: 경력 많으면 학생들에게 비슷한 질문을 많이 받았을 거고, 애들이 보이는 오류가 뭔지 금방 알텐데, 아직 경력이 적어서 그런 실력은 덜하다고 생각해요.

교사 Ⅲ: 예를 들어서 행렬의 정의를 물어보면 대답은 하겠지만 그 단원의 계통을 물어보면 잘 몰라요. 경력이 쌓이고 경험이 늘어나면 그래도 지금 보다는 많이 알지 않을까요. 그

런 게 계통을 알게 되면 수업할 때도 다른 거랑 연결시켜서 설명해주면 더 효과가 좋을텐데...

교사 Ⅵ: 경력이 있고 하면 빠르게 다음 내용이 무엇인지 생각나고 그래서 어떻게 연결을 하면 좋고 이런게 생각날텐데, 지금은 바닥부터니깐 아직 고등학교 걸 다 보지 못해서 그런 계통을 잘 알고 있지 않아요. 기본적으로 그림이 안 그려져요. 다음에 이게 나오고 이게 더 중요하고 이게 더 중점적으로 다뤄야 하고 이런 걸 잘 몰라요. 나무만 보면서 가고 있어요 급급하게..숲을 못보고..

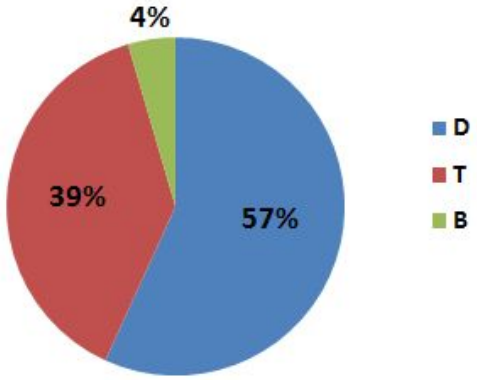
2. 대수를 가르치는데 필요한 지식의 사용에 대한 분석

이 절에서는 대수를 가르치는데 필요한 지식을 주어진 수업 상황에서 어떻게 사용하는지 분석한 결과를 서술한다. 대수를 가르치는데 필요한 지식은 SK, AK, TK로 구성되어 있는데, 교사는 대수를 가르칠 때 어느 하나의 지식만을 사용하지 않고 서로 다른 지식들을 복합적으로 사용한다. 이 연구에서는 특정한 지식을 중심으로 주어진 상황에서 대수를 가르치는데 필요한 지식을 어떻게 사용하는지 조사하기 위해 세 가지의 문항을 개발하였다. 문항 2는 SK를 중심으로, 문항 4는 AK를 중심으로, 문항 6은 TK를 중심으로 지식의 사용이 어떻게 나타나는지 알아보기 위해 개발되었다. 이 절에서는 각 지식을 중심으로 한 문항에서 보인 일반적인 특징을 서술한 후, 연구 참여자를 지도하는 학생의 수준에 따라 나누어 각 그룹의 응답에서 나타나는 특징을 분석한다.

2.1. 지식의 사용 문항에서 나타난 일반적인 특징

2.1.1. SK를 중심으로 한 지식의 사용 문항

학교에서 학생들이 배우는 학교 대수 지식인 SK를 중심으로 지식의 사용을 조사하고자 문항 1.2, 2.2, 3.2을 개발하였고, 각 문항에서는 다항식의 인수분해의 지도, 이차방정식의 판별식 도입지도, 산술-기하평균 부등식의 증명지도를 질문하였다. 세 문항에서 교사들은 [그림 Ⅳ-9]와 같이 수학적 내용을 구성요소로 분해하여 설명하는 D는 25회(57%)로 가장 많았고, 수학적 내용의 엄밀성을 조절하는 T가 17회(39%), 수학적 내용들을 연결하는 B가 2회(4%)로 나타났다.



[그림 Ⅳ-9] SK를 중심으로 한 지식의 사용

다음 그림은 각 문항에서 답한 교사들의 응답이다. [그림 Ⅳ-10]은 교사 Ⅱ가 문항 2.2에서 이차방정식의 판별식의 도입 지도를 서술한 것이고, [그림 Ⅳ-11]은 교사 Ⅲ이 문항 3.2에서 산술-기하평균 부등식의 증명 지도를 서술한 것이다.

(선수학습 확인) (중학교 3학년) 이차방정식의 근의 공식

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(발문) 근의 공식을 칠판에 적고, ① $2a$, ② $-b$, ③ $\sqrt{b^2-4ac}$ 세 부분에 동그라미를 친 후, 이차방정식의 근이 실근이 되는지 허근이 되는지를 결정하는 부분이 어디인지 맞추어 보라고 한다.

(설명) 그 부분을 따로 떼어서 근이 실근인지 허근인지 판별하는 식인 판별식이라 지도한다.

(적용) 간단한 예제로 처음엔 자세히 지도
(a, b, c가 각각 어느 수인지, 대입하면 부호가 무엇이 되는지)

[그림 Ⅳ-10] 문항 2.2에 대한 교사 Ⅱ의 응답

교사 Ⅱ는 이차방정식의 판별식을 도입할 때, 이차방정식의 근의 공식으로부터 식 b^2-4ac을 유도하고, 근의 유형을 판별할 수 있는 식이라는 의미에서 판별식 용어를 설명한 후, 간단한 예제를 다루면서 식을 구성하고 있는 각 문자들의 대상을 설명한다고 답하였다. 이 교사의 경우 판별식을 설명하기 위해 먼저 공식을 유도하였고(D2), 용어의 의미를 알려주었으며(D1), 간단한 예제를 통해 식의 문자 기호들의 대상을 설명하는(D3) 등 D을 중점적으로 사용하고 있다.

(1) 실수와 복소수 단원에서 배운 '실수의 제곱은 적어도 0 이상이다' 라는 공리 활용

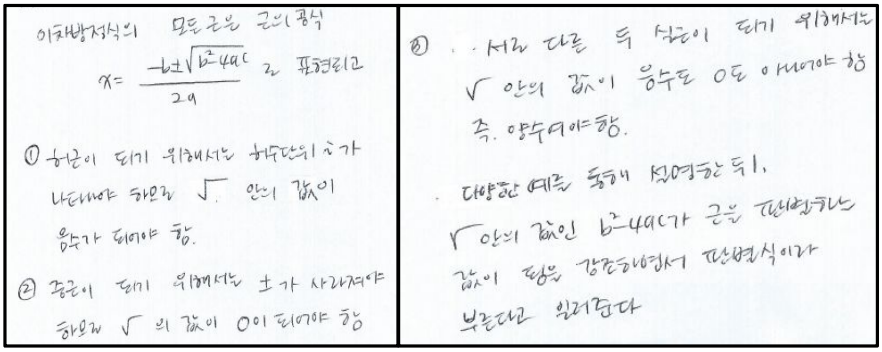
(2) 주어진 식과 필요충분조건이 되는 식으로 변형해보도록 합시다. 양변에 2를 곱한 후 우변에 0만 남도록 좌변으로 모두 이항시켜주면 $a+b-2\sqrt{ab} \geq 0$과 같은 식이 됩니다. a, b가 모두 양수이므로 역시 필요충분조건으로 $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$의 형태로 바꿀 수 있습니다. $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ 가 실수이고 실수의 제곱은 언제나 0 이상이므로 이 부등식은 절대부등식입니다. 따라서 처음의 식도 항상 성립하게 됩니다.

[그림 Ⅳ-11] 문항 3.2에 대한 교사 Ⅲ의 응답

교사 Ⅲ은 산술-기하평균 부등식의 증명을 지도할 때, '실수의 제곱

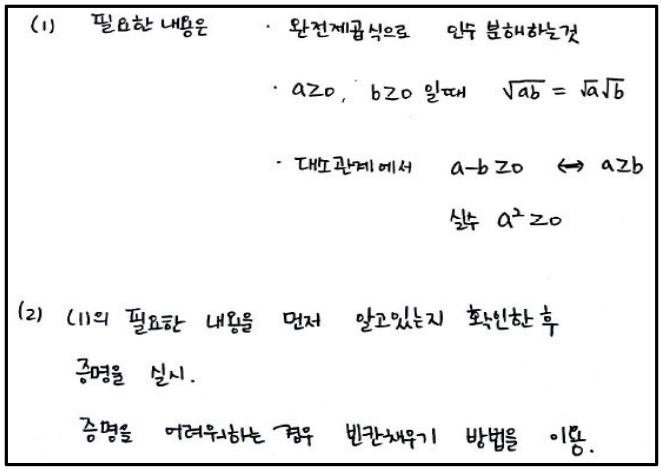
은 적어도 0이상이다’ 라는 공리를 사용하여 살술-기하평균 부등식이 절대부등식임을 설명하고 있다. 이 교사의 경우 주어진 조건하에 식이 항상 성립함을 증명하기 위하여 필요충분조건이 되는 식으로 변형하면서 증명의 각 단계를 설명하였고(D2), 항상 성립하는 부등식이 절대부등식임을 언급하는(D1) 등 D을 중점적으로 사용하고 있다.

SK를 중심으로 한 문항에서는 어느 한 가지 방법만 나타난 것이 아니라 D, T, B 중 2-3개를 결합하여 사용하는 것으로 나타났는데, 특히 D와 T을 함께 사용하는 것을 볼 수 있었다. [그림 Ⅳ-12]의 교사 Ⅴ의 응답과 [그림 Ⅳ-13]의 교사 Ⅵ의 응답을 보면, 각각 교사 Ⅱ, 교사 Ⅲ과는 달리 D와 T를 함께 사용하고 있다.


이차방정식의 모든 근은 근의 공식
$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 로 표현되고
① 허근이 되기 위해서는 허수단위 i가 나타나야 하므로 √ 안의 값이 음수가 되어야 함.
② 중근이 되기 위해서는 ± 가 사라져야 하므로 √ 의 값이 0이 되어야 함
③ 서로 다른 두 실근이 되기 위해서는 √ 안의 값이 음수도 0도 아니어야 함 즉. 양수여야 함.
다양한 예를 통해 설명한 뒤, √ 안의 값인 b^2-4ac가 근을 판별하는 값이 됨을 강조하여서 판별식이라 부른다고 일러준다

[그림 Ⅳ-12] 문항 2.2에 대한 교사 Ⅴ의 응답

[그림 Ⅳ-12]와 같이 교사 Ⅴ는 이차방정식의 다양한 예를 통해 판별식을 배우기 전에 근의 공식을 사용하여 근을 표현하며 b^2-4ac의 부호에 따라 근을 구별할 수 있음을 알게 한 후에 공식적으로 판별식이라는 용어를 도입하고 있다. 이것은 구체적인 예를 통해 공식을 도입하는 것에 익숙한 학생들의 사고를 고려한 것으로, 이차방정식의 일반형이 아닌 이차방정식의 예를 들면서 설명하였기 때문에 T로 볼 수 있다. 그리고 직접 근과 판별식의 부호를 비교하는 활동을 한 후에는 판별식에 대한 설명을 하는 것은 D로 볼 수 있다. 때문에 지식을 D와 T의 방법을 함께 사용하고 있다.


(1) 필요한 내용은 · 완전제곱식으로 인수 분해하는것

· $a \geq 0$, $b \geq 0$ 일때 $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$

· 대소관계에서 $a-b \geq 0 \leftrightarrow a \geq b$

실수 $a^2 \geq 0$

(2) (1)의 필요한 내용을 먼저 알고있는지 확인한 후

증명을 실시.

증명을 어려워하는 경우 빈칸채우기 방법을 이용.

[그림 Ⅳ-13] 문항 3.2에 대한 교사 Ⅵ의 응답

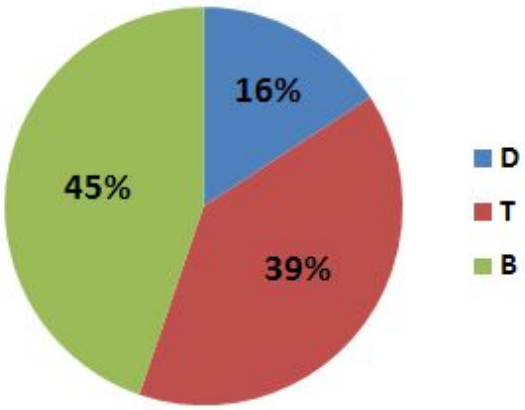
[그림 Ⅳ-13]의 교사 Ⅵ은 산술-기하평균 부등식을 증명할 때 필요한 수학적 내용들을 나열한 후 문항 3.1에서 답으로 제시한 증명과정을 설명한다고 답하였다. 이것은 공식의 증명과정을 구체적으로 지도하는 D에 해당한다. 또한 학생들이 증명을 어려워하는 경우 특정 부분만 빈칸으로 두고 다른 부분은 알려주어 증명을 지도한다고 답하였다. 이것은 학생들의 수준에 따라 필요한 내용을 선정하여 다듬어 설명하는 T에 해당한다. 때문에 지식을 D와 T의 방법을 함께 사용하고 있다.

결과적으로 수학자가 하는 완성된 수학은 추상성이 강하기 때문에 학생들이 받아들이기에 무리가 있다. 학생들이 교과서를 통해 직접적으로 접하는 지식인 SK를 교사들은 있는 그대로 전달하기보다 그 내용을 구성하고 있는 요소, 예를 들면 개념 정의, 식을 구성하는 문자의 대상과 성립 조건 등 하나하나에 대한 이해를 도울 수 있도록 지도하는 것을 알 수 있다.

2.1.2. AK를 중심으로 한 지식의 사용 문항

학교 대수 지식보다 심화된 지식인 AK를 중심으로 지식의 사용을 조

사하고자 문항 1.4, 2.4, 3.4를 개발하였고, 각 문항에서는 Eisenstein의 판정법의 응용 지도, 대수학의 기본정리를 이용한 지도, 산술-기하평균 부등식의 심화지도를 질문하였다. 세 문항에서 교사들은 [그림 Ⅳ-14]와 같이 수학적 내용들을 연결하는 B와 수학적 내용의 엄밀성을 조절하는 T를 많이 사용하고 있었다. 지식의 사용 코드별로 보면 B는 17회(45%), T가 16회(39%), D가 6회(16%)로 나타났다.



[그림 Ⅳ-14] AK를 중심으로 한 지식의 사용

다음 그림은 각 문항에서 답한 교사들의 응답이다. [그림 Ⅳ-15]와 [그림 Ⅳ-16], [그림 Ⅳ-17]은 대수학의 기본정리를 이용하여 학생들에게 n차방정식의 근이 n개임을 어떻게 설명할지 질문한 문항 2.4에 대한 교사들의 응답이다.

수의 확장은 우리 사람들의 필요에 의해 이루어지는 경우가 많단다. 초기 인류에게는 자연수만 알고 있더라도 생활하는데 전혀 어려움이 없었지만 문명이 발달할수록 자연수만으로는 원하는 것을 다 표현할 수 없어서 정수, 유리수, 실수 등으로 수가 확장되어 왔지. 이런 관점에서 봤을 때 복소수의 등장배경은 실계수를 가지는 n차 방정식을 n개의 일차식의 곱으로 분해할 수 있느냐의 문제가 생겨났지. 이를 위해서는 기존의 실수의 범위 안에서는 불가능함이 밝혀졌고 이를 해결하기 위해 i라는 허수와 함께 복소수 체계가 생겼단다. 필요에 의해 만들어진 수인 그대로 n차 방정식은 언제나 n개의 복소수 근을 가지게 된 것이란다.

[그림 Ⅳ-15] 문항 2.4에 대한 교사 Ⅲ의 응답

이차방정식은 근의 공식을 이용하면 복소수 범위에서 반드시 2개의 근을 가짐.
복잡해서 소개는 하지 않았지만 3차, 4차 방정식도 근의 공식이 존재하고
반드시 3개, 4개의 근이 각각 구해짐을 말해준다.
일반적으로 복소수범위에서는 모든 n차방정식이 n개의 근을 갖는다는
<대수학의 기본정리>가 성립함을 이야기해 주고
자세한 내용은 대학교에 가서 배울것이라고 이야기한다.
(경험상 아이들은 별다른 의문사항 없이 받아들였다.

[그림 Ⅳ-16] 문항 2.4에 대한 교사 Ⅵ의 응답

[그림 Ⅳ-15]에서 교사 Ⅲ은 방정식의 근의 필요성에 의해 수가 확장되어 왔음을 설명하면서 필연적으로 n차 방정식의 근은 n개임을 말한다고 답하였고, [그림 Ⅳ-16]에서 교사 Ⅵ은 '복소수 범위에서는 모든 n차 방정식이 n개의 근을 갖는다는 <대수학의 기본 정리>가 성립함'이라고 언급하고 대학교에서 배울 것이라고 예고한다고 답하였다. 두 교사는 학생들이 배우는 내용과 관련 있는 심화 수학 지식을 언급하거나 소개하는 B만을 사용하고 있다.

모든 이차방정식은 복소수 범위에서 근을 갖는다.
또한 우리가 생각하는 방정식은 계수가 실수인 방정식인데, 계수가 실수인 방정식은 켤레 복소수로 해를 가지므로 계수가 실수인 삼차 방정식은 적어도 하나의 실근을 갖는다. 그 실근을 α라 하면 $f(x)=(x-\alpha)g(x)$로 인수분해 되고, $g(x)$는 다시 이차식이 되어 $g(x)=0$은 2개의 근을 갖는다.
<대수학의 기본 정리>라는 것이 있는데, 방정식은 복소수 범위에서 적어도 하나의 근을 갖는다는 내용이다. 가우스라는 수학자가 증명해 낸 정리이다.
방정식 $f(x)$가 복소수 범위에서 근을 갖고 그 근을 a_1이라 하면
$f(x)=(x-a_1)g_1(x)$로 인수분해 되고 $g_1(x)$는 $f(x)$보다 차수가 하나 낮다.
$g_1(x)$도 복소수 범위에서 근을 갖고, 그 근을 a_2라 하면
$g_1(x)=(x-a_2)g_2(x)\, f(x)=(x-a_1)(x-a_2)g_2(x)$가 된다.
$g_2(x)$도 같은 이유로 인수분해 되고 이 과정을 반복하면 $f(x)$가 삼차식이면
$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$, $f(x)$가 사차식이면
$f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$로 일차식의 곱으로 인수분해 되고,
a_1, a_2, a_3 또는 a_1, a_2, a_3, a_4가 방정식의 근이 된다. a_1, a_2, a_3 또는 a_1, a_2, a_3, a_4가 서로 같을 수 있으므로 중근을 포함하여 삼차방정식은 세 개의 근을 갖고, 사차방정식은 네 개의 근을 갖는다.

[그림 Ⅳ-17] 문항 2.4에 대한 교사 Ⅰ의 응답

반면 교사 Ⅰ은 '대수학의 기본정리'를 '방정식은 복소수 범위에서 적어도 하나의 근을 갖는다'고 언급하면서(B) 이로부터 주어진 방정식이 일차식과 차수가 하나 낮은 다항식으로 인수분해 되고 이러한 과정이 반복되면서 중근을 포함하여 삼차방정식은 3개의 근, 사차방정식은 4개의 근을 가짐을 설명하고 있다(T). [그림 Ⅳ-18]과 같이 교사 Ⅱ도 비슷한 양상을 보였다.

(3.3의 내용을 심화내용으로 다룬다면)
(발문 1) (일반화에 앞서서) 세 개의 양수 a, b, c에 대한 산술기하평균은 없을까? 있다면 어떻게 생겼을까?
(발문 2) n개의 양수 $a_1, \cdots, a_n$에 대한 산술기하평균은 없을까? 있다면 어떻게 생겼을까?

[그림 Ⅳ-18] 문항 3.4에 대한 교사 Ⅱ의 응답

산술-기하평균 부등식의 심화지도를 묻는 문항 3.4에서 교사 Ⅱ는 일반화 지도를 목적으로 먼저 세 개의 양수일 경우를 다루어보고(T) 일반적인 산술-기하평균 부등식을 지도한다(B)고 답하였다. 다시 말해 교사들

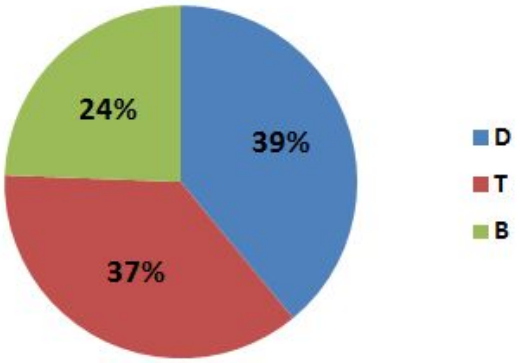
은 학습 내용과 연관된 심화 수학 지식을 연결하여 지도하지만 엄밀하게 가르치지 않고 언급만 하거나 또는 교과서에는 없는 내용이지만 학생들이 이해할 수 있도록 표현하고 설명하는 것으로 응답하였다.

심화 수학 지식은 학교 대수 지식보다 추상성과 엄밀성이 더욱 강하다. 때문에 학생들이 그 자체를 받아들일 수 있는 내용이 아니므로 그것을 구성 요소로 분해하여 설명하여 이해시키는 D보다는 학생들이 이해할 수 있도록 엄밀성을 조절하여 설명하는 T가 요구된다는 것을 알 수 있다. 또한 학교에서 배우는 수학 내용들과 어떤 심화 지식이 어떻게 관련이 되는지 연결 지어 지도하는 B가 요구되는데, 학생들에 따라 단순히 학교 대수 지식과 관련된 심화 수학 지식을 언급하거나 소개하기도 하고 심화 수학 지식을 학생들의 수준에서 이해할 수 있도록 엄밀성의 정도를 낮추고 예를 들어 설명한다는 것을 알 수 있다. 학생들에게 심화 지식을 어느 정도로 설명하는지는 지도하는 학생들의 수준에 따라 달라질 수 있다. 교사 Ⅰ은 다양한 수준의 학생들을 지도하고 있고, 교사 Ⅵ은 하수준의 학생들을 지도하고 있다는 차이가 있다. 따라서 심화 수학 지식을 수업에서 활용하는 정도도 다르게 나타나고 있다. 결국 학생에게 적절한 수준을 파악하는 TK가 AK의 사용에 작용하고 있다는 것을 알 수 있다. 이러한 학생의 수준에 따른 지식의 사용은 다음 절에서 분석한다.

2.1.3. TK를 중심으로 한 지식의 사용 문항

수학 교수 활동에서 학생들의 오류를 알고 그들에게 적절한 수학 지식을 파악하는데 요구되는 지식인 TK를 중심으로 지식의 사용을 조사하고자 문항 1.6, 2.6, 3.6을 개발하였고, 각 문항에서는 한 학생의 말을 다른 학생이 이해할 수 있도록 설명하기, 방정식 $x^2 = i$의 근에 대한 적절한 설명하기, 산술-기하평균 부등식에서 발생할 수 있는 오류 지도와 관련된 과제 개발하기를 질문하였다. 세 문항에서 교사들은 [그림 Ⅳ-19]와 같이 수학적 내용을 구성요소로 분해하여 설명하는 D와 수학적 내용의 엄밀성을 조절하는 T를 많이 사용하고 있었고 수학적 내용들을 연결하

는 B도 많이 나타났다. 지식의 사용 코드별로 보면 D는 16회(39%), T가 15회(37%), B가 10회(24%)로 나타났다. TK를 중심으로 한 문항에서는 다른 지식들 보다 세 가지 방법이 고루 나타나고 있었다.



[그림 Ⅳ-19] TK를 중심으로 한 지식의 사용

다음 그림은 각 문항에서 답한 교사들의 응답이다. [그림 Ⅳ-20]는 다항식의 인수분해에 대한 한 학생의 대답을 다른 학생이 이해할 수 있도록 설명을 요구한 문항 1.6, [그림 Ⅳ-21]은 이차방정식과 관련된 수학적 지식들을 어떻게 연결하여 지도할 수 있는지 서술하도록 한 문항 2.6, [그림 Ⅳ-22]는 산술-기하평균 부등식에서 자주 보이는 오류를 극복할 수 있는 과제를 개발하도록 한 문항 3.6에 대한 응답이다.

만약 10개의 서로다른 정수 해를 가진다면 그것은 12의 약수 ±1, ±2, ±3
±4, ±6, ±12 중에 있을 것이다. 그것을 $a_1, a_2, \cdots, a_{10}$ 이라 하면
다항식 $p(x)$는 $p(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_{10})$ 으로 인수분해된다.
이 식도 전개하면 $p(x) = x^{10} + a_9x^9 + \cdots + 12$와 같을 것이고 따라서
두 식의 상수항 같아야 하므로 $a_1 \cdots a_{10} = 12$가 되어야 한다.
그런데 $a_1, \cdots, a_{10}$ 이 12의 약수 ±1, ±2, ±3, ±4, ±6, ±12
중 서로 다른 수 들이므로 이것은 가능하지 않다.
따라서 다시 정수해는 가지수 있지만 만약 ±1, ±2, ±3, ±4, ±6,
±12 중 적절한 만큼 수를 택해서 곱했을때 12가 되는 경우는
$(+1) \times (-1) \times (+2) \times (-2) \times (+3) = 12$ 로 총 5개의 정수를 뽑았을
때만을 이야기한 것이다.

[그림 Ⅳ-20] 문항 1.6에 대한 교사 Ⅳ의 응답

[그림 Ⅳ-20]에서 교사 Ⅳ는 다항식 $P(x) = x^{10} + a_9x^9 + \cdots + a_1x + 12$가 10개의 서로 다른 일차식으로 인수분해 된다면 일차식들의 상수항의 곱이 12가 되어야 함을 설명하고(D) 상수항의 약수가 $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$로 다른 학생의 설명을 바탕으로 서로 다른 '10개'의 해를 가질 수 있다는 학생의 생각에 어떤 점이 잘못 되었는지 설명한다(T)고 답하였다.

<일반적인 n차 방정식의 근과 계수의 관계>

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$의 근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$이라 하면,

$$\begin{aligned} & a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \\ &= a_0(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n) \\ &= a_0\{x^n - (\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n)^{n-1} + \cdots + (-1)^n(\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n)\} \end{aligned}$$

이므로 근을 모두 더한 값은

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{(n-1\text{차 항의 계수})}{(n\text{차 항의 계수})}$$

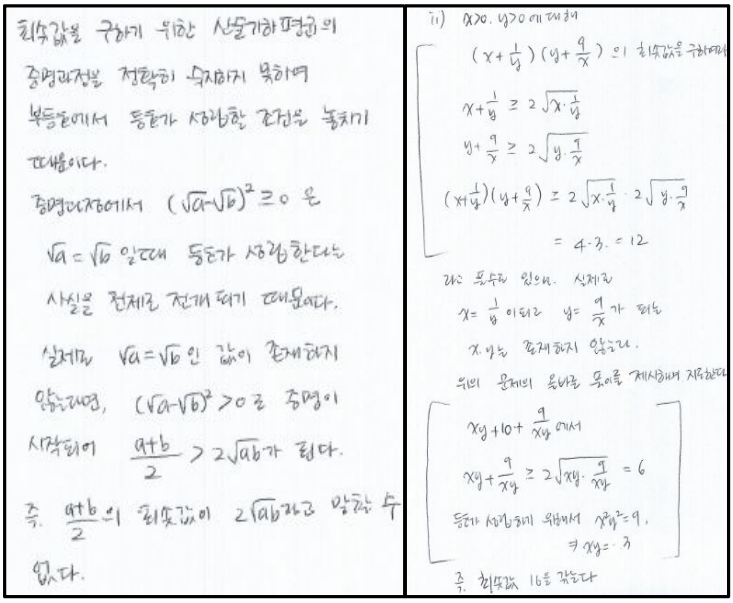
근을 모두 곱한 값은

$$\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n = (-1)^n\frac{a_n}{a_0} = (-1)^n\frac{(\text{상수항})}{(\text{최고차항의 계수})}$$

으로 유도하도록 한다.

[그림 Ⅳ-21] 문항 2.6에 대한 교사 Ⅰ의 응답

[그림 Ⅳ-21]에서 교사 Ⅰ은 이차방정식의 근과 계수를 주제로 하여 일반적인 n차 방정식의 근과 계수의 관계를 연결하여 지도한다고 답하였다. 방정식의 근과 계수의 관계를 일반화하여 지도하면서(B) n개의 근의 합과 곱이 각각 $-\frac{(n-1)\text{차 항의 계수}}{n\text{차 항의 계수}}$, $(-1)^n\frac{(\text{상수항})}{(n\text{차 항의 계수})}$인 원리를 설명하고 있다(D).



[그림 Ⅳ-22] 문항 3.6에 대한 교사 Ⅴ의 응답

[그림 Ⅳ-22]에서 보듯이 교사 Ⅴ는 제시된 상황에서 산술-기하평균 부등식을 이용하여 식의 최솟값 문제를 해결한 학생의 풀이에서 보인 오류가 등호의 성립 조건을 간과하였기 때문이라는 것을 정확히 인지하고(D) 이와 같은 오류를 보일 수 있는 과제를 제시하며(T) 학생들에게 식과 등호가 성립할 조건을 중요하게 다루도록 지도하고 있었다.

교사들은 학생들의 수학적 언어의 해석, 수학적 오류나 수학적 오개념 인식, 수학적 대상들 간의 연관성을 알고 학생의 수준에 맞는 지식 파악 등 TK 문항에 대한 응답을 옳게 답하였다. 따라서 TK를 중심으로 지도

할 때에는 학생들의 언어를 수학적으로 해석하고 수학적 오류나 오개념을 파악하여 지도하는데 D, T, 수학적 대상들 사이의 연관성을 알고 학생의 수준에 적절한 것을 파악하여 지도하는데 D, B, T가 나타나는 지식의 특성상 다양한 방법으로 지식이 사용되고 있음을 알 수 있다.

2.1.4. 지식의 사용에서 지식 사이의 관계

SK를 중심으로 지식의 사용을 알아보고자 한 문항에 대하여 교사들은 학생들에게 적절한 수준이 무엇인지 파악하여 지도하고 어떤 부분에서 수학적으로 오류를 발생시키거나 오개념을 가질 가능성이 있는지에 대한 인식을 바탕으로 SK를 사용하는 것으로 보였다. 즉 SK의 사용에 TK가 영향을 주고 있다는 것을 알 수 있다. 다음은 SK를 중심으로 한 지식의 사용 문항 응답 중 TK와 관련된 일부분을 발췌한 것이다.

> <u>다항식의 인수분해에 있어 학생들이 가장 곤란해 하는 것은</u> 공식이 10가지가 넘을 정도로 다양한데다 주어진 식을 어떤 공식을 활용해서 풀어야할지 잘 모른다는 것이다.
>
> (교사 Ⅲ의 문항 1.2 응답 중)

> <u>학생들이 산술, 기하 평균을 사용하면서 자주 범하는 오류</u> 몇 가지를 지적하며 설명한다.
>
> (교사 Ⅴ의 문항 3.2 응답 중)

예를 들어 교사 Ⅲ, Ⅴ와 같이 다항식의 인수분해, 산술-기하평균 부등식의 증명과 같은 SK를 사용하는데 있어 학생들이 어려워하는 것, 잘 이해하지 못하는 것 그리고 자주 범하는 오류가 무엇인지 아는 TK가 영향을 주고 있다는 것을 알 수 있다. SK를 중심으로 지식을 사용할 때 AK의 영향을 받는지는 설문지에 대한 응답만으로 알 수는 없었다. 그러나 다음의 사후 인터뷰 내용에서 보듯이 AK가 겉으로 표출되지는 않지만 지도방향과 내용의 정확성, 학습 자료를 개발하는 등 SK의 사용에 영향

을 주는 것을 알 수 있었다.

교사 Ⅲ: 교사가 더 높은 수준에서 바라보고 있어야 학생들이 배우는 개념들을 확실하게 설명해 줄 수 있으니까 교사는 깊이 있게, 세밀하게 된 정의를 알고 있어야 해요.

교사 Ⅴ: 교사는 심화 내용도 알아야 한다고 생각해요. 구체적으로 수업하지 않아도, 사실 많이 까먹기도 했지만 그래도 그걸 알아야 방향을 제시할 수 있을 것 같아요.

교사 Ⅵ: 심화된 내용을 애들한테 가르쳐 줄 건 아니지만, 뭔가 이게 맞는지를 판단할 때 나는 더 위에 내용을 알고 판단을 해야 하잖아요.

교사 Ⅶ: 고등학교 수학에서 대학 수학하고 많이 연계가 되어 있어요. 학생이 아는 지식을 대학 수학하고 관련지어서, '대학교에 있는 건데 해볼래?' 하면 아이들이 흥미를 가지고 하는 편이에요.

AK를 중심으로 지식의 사용을 알아보고자 한 문항에 대하여 교사들은 학생들이 배우는 내용을 고려하면서 학생들의 수준을 고려하여 AK를 사용하는 것으로 보인다. 즉 AK의 사용에는 SK와 TK가 영향을 주고 있다는 것을 알 수 있다. 다음은 AK를 중심으로 한 지식의 사용 문항에 대한 응답 중 SK, TK와 관련된 일부분을 발췌한 것이다.

고등학교 1학년의 인수분해는 정수범위에서 다루므로 조립제법에서 인수를 찾는데 유용함을 줄 수 있다.

(교사 Ⅱ의 문항 1.4 응답 중)

고등학교 교과서의 문제를 생각할 경우 대부분 인수분해 공식을 사용할 수 있는 꼴의 문제가 주어지기에 유용하지 않을 것 같다.

(교사 Ⅵ의 문항 1.4 응답 중)

복잡해서 소개는 하지 않았지만 3차, 4차 방정식도 근의 공식이 존재하고 반드시 3개, 4개의 근이 각각 구해짐을 말해준다. 일반적으로 복소수 범위에서는 모든 n차 방정식이 n개의 근을 갖는다는 <대수학의 기본정리>가 성립함을 이야기해 주고, 자세한 내용은 대학교에 가서 배울 것이라고 이야기한다.

(교사 Ⅵ의 문항 2.4 응답 중)

예를 들어 교사 Ⅱ, Ⅵ과 같이 고차다항식의 인수분해 가능성, 대수학의 기본정리와 같은 AK를 사용하는데 있어 학생들이 배우는 학교 대수 지식, 교과서에 제시된 지식인 SK와 그들에게 적절한 것인지, 적절하지 않은 것인지 판단하는 TK가 영향을 주고 있다는 것을 알 수 있다.

TK를 중심으로 지식의 사용을 알아보고자 한 문항에 대하여 교사들은 학생들이 배우는 지식과 심화된 지식을 고려하면서 TK를 사용하는 것으로 보인다. 즉 TK의 사용에는 SK와 AK가 영향을 주고 있다는 것을 알 수 있다. 다음은 TK를 중심으로 한 지식의 사용 문항에 대한 응답 중 AK와 관련된 일부분을 발췌한 것이다.

<일반적인 n차 방정식의 근과 계수의 관계>

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0$의 근을 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_n$이라 하면, (중략)

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k = -\frac{a_1}{a_0} = -\frac{(n-1\text{차 항의 계수})}{(n\text{차 항의 계수})}$$

$$\alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0} = (-1)^n \frac{(\text{상수항})}{(\text{최고차항의 계수})} \text{ (중략)}$$

(교사 Ⅰ의 문항 2.6 응답 중)

이차방정식의 근과 계수와의 관계 ⇒ 삼, 사차 및 고차방정식의 근과 계수와의 관계를 직관적으로 유도한 뒤 간단한 예를 들어 설명한다. 또한 상수준의 학생이라면 증명 또한 지도할 수 있다.

(교사 Ⅴ의 문항 2.6 응답 중)

예를 들어 교사 Ⅰ, Ⅴ와 같이 수학적 내용들 사이의 연결성을 알고 학생에게 적절한 것을 파악할 줄 아는 TK를 중심으로 하는 문항 2.6에서 이차방정식의 근과 계수의 관계에서 차수를 높여 삼, 사차 또는 일반화하여 n차 방정식의 근과 계수의 관계를 설명한다고 답하였다. 교과서의 내용보다 좀 더 일반화된 정리나 공식은 AK에 해당하는 것으로 AK를 앎으로써 수학적 내용들 사이의 연결성을 파악하는데 용이하므로 TK를 사용하는데 AK가 영향을 주는 것으로 알 수 있다.

교사들은 학생들을 지도하는데 있어 SK는 가장 기본이 되어야 한다고 생각하고, 실제로 설문지에서 SK가 모든 응답에 기본적으로 녹아있었다. TK는 지도의 내용과 방향을 결정하는 지식으로 이로 인해 SK와 AK의 사용이 결정됨을 알 수 있었다. 결과적으로 대수를 가르치는데 필요한 지식을 사용하는 데 있어 SK, AK, TK가 서로 영향을 주고받는다는 것을 알 수 있었다.

2.2. 학생의 수준에 따른 지식의 사용 비교

연구 참여자 7명은 일반계 고등학교 교사 6명, 전문계 고등학교(취업형 특성화 고등학교) 교사 1명으로 구성되어 있다. 사후 인터뷰에서 교수 방법과 내용을 설명하는 방법에 영향을 주는 요인으로 학생들의 수준이라고 답하였다.

교사 Ⅰ: <u>학생들의 수준이나 애들의 성향</u>. 그게 중요한 것 같아요.

교사 Ⅲ: 내가 생각했을 때는 개념을 이해해야 수학이라는 과목에서 성공적인 학습을 할 수 있을 것이라는 신념적인 부분이 있고, 또 <u>학생들의 수준이 가장 큰 영향을 미친다고 봐요</u>. 기본 신념은 똑같이 가지고 수업을 하지만 야간 심화반 수업이나 보통 수업에서 학생들을 보고 할 수밖에

없으니까요.

교사 Ⅳ: 학생들의 수준이죠. 수준과 선수학습. 학생들의 수준에 맞춰서 수업을 해야 하니까.

이 절에서는 지도하는 학생들의 수준에 따라서 교사들을 분류하고 각 그룹의 교사들이 지식을 어떻게 사용하는지, 지식의 사용 양상을 살펴본다. 따라서 먼저 지도하는 학생들의 모의고사 수리 영역 성적을 기준으로 교사들을 <표 Ⅳ-4>와 같이 구분하였다. 교사 Ⅴ는 학교 특성 상 국가 모의고사를 제외한 모의고사는 치르지 않기 때문에 이 분류에서 제외하였다.

<표 Ⅳ-4> 지도하는 학생의 수준과 교사 그룹

구분	학생의 수준(모의고사 등급)	교사
A	상(평균 3등급)	교사 Ⅶ
B	다양함(1등급~9등급, 평균 5등급)	교사 Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ
C	중하 이하(평균 6급 이하)	교사 Ⅳ, Ⅵ

상수준의 학생을 지도하는 교사는 1명을 A, 다양한 수준의 학생들을 지도하는 교사들을 B 그룹, 중하 이하인 수준의 학생을 지도하는 교사들을 C 그룹으로 구분하여 지식의 사용을 분석하였다.

사전 인터뷰를 통해 수집한 교사들의 특징을 살펴보면, 수학 학습 수준이 상수준인 학생들을 지도하고 있는 A 교사는 교과서의 내용은 기본으로, 수학 익힘책과 다른 문제집에서 나오는 다양한 문제의 유형을 모두 다루려고 노력하고 교과서 외적인 내용까지 지도한다고 답하였다. 다양한 수준의 학생들이 모여 있는 학급을 지도하는 B 그룹의 교사들은 학생들의 수준차를 고려하여 개별적으로 질문을 받고 지도를 하려고 하고, 학습 내용과 관련된 예를 많이 보여주며 설명하려고 노력한다고 한다. 중하 이하인 수준의 학생들을 지도하고 있는 C 그룹의 교사들은 꼭

필요한 내용을 선정하여 가르치며 교과서와 모의고사에 출제되는 문제 중 기초적인 문제를 집중적으로 다루며 반복 학습으로 수학적 내용을 익힐 수 있도록 지도하려고 노력한다고 말하였다. 이러한 세 그룹의 특징을 바탕으로 지식의 사용이 어떻게 일어나는지 분석하였다.

2.2.1. SK를 중심으로 한 지식의 사용 문항

대체적으로 A와 B 그룹의 교사들은 모두 교과서의 수준을 유지하면서 융통성 있게 수준을 조절하여 답안을 작성하였고 C 그룹의 교사들은 개념의 설명이나 제시하는 과제의 난이도를 낮게 두고 작성하였다.

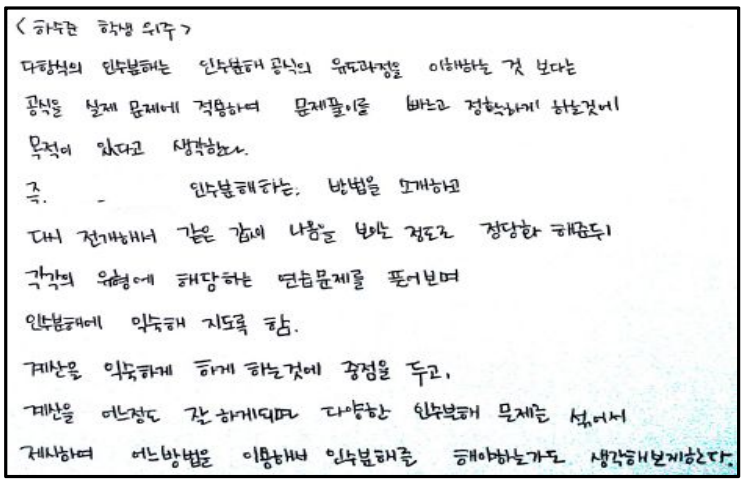
문항 1.2는 다항식의 인수분해 지도에 대한 질문이다. [그림 Ⅳ-23]은 문항 1.2에 대한 B 그룹 교사의 응답이고, [그림 Ⅳ-24]는 문항 1.2에 대한 C 그룹 교사의 응답이다.

인수분해공식을 이해하고 익숙해지도록 한다.
유형별로 (1) 공식을 이용한 인수분해
(2) 공통부분이 있는 식의 인수분해
(3) 차수가 짝수인 항만 있는 인수분해
(4) 두 개 이상의 문자가 포함된 식의 인수분해
(5) 인수정리와 조립제법을 이용한 인수분해
로 나누어 풀이방법을 익히고 연습 문제를 제시하여 반복 연습하도록 한다.
(하수준) 중학교 때 배운 인수분해 공식과 함께 기호, 공식을 외우는 방법 제시, 유형별 풀이 방법 익히도록 지도, 조립제법을 인수분해 하는 방법 지도, 익숙해지도록 연습
(상수준) 인수분해 공식을 유도해보는 기회를 갖도록 한다. 차수가 짝수인 항만 있는 식의 인수분해를 치환을 이용한 인수분해로 접근하여 식을 변형시켜 X^2, Y^2 꼴로 나타내어 인수분해 하는 방법을 유형으로 익히지 않고 스스로 유도해내도록 한다. $f(a)=0$일 때 인수정리에 의해 $(x-a)$가 $f(a)$의 인수임을 이해하도록 하고 $f(a)=0$임을 a를 찾는 방법을 생각해보도록 한다.

[그림 Ⅳ-23] 문항 1.2에 대한 교사 Ⅰ의 응답

A와 B 그룹의 교사들은 다양한 수준의 학생을 염두하고 응답하는 경향이 있었다. 수업의 기본적인 형태는 교과서의 내용 수준을 바탕으로 인수분해 공식의 이해, 유형별 인수분해 방법 지도, 연습문제 풀이를 지도하는 T1으로 답하였다. 또한 공식을 암기시키고 문제를 푸는 방법에

초점을 두거나 간단한 형태의 인수분해를 다루는 T1b와 직접 인수분해 공식을 유도해보는 기회를 제공하거나 복잡한 다항식의 인수분해를 다루는 T1a으로 응답이 나타났다.



[그림 Ⅳ-24] 문항 1.2에 대한 교사 Ⅵ의 응답

[그림 Ⅳ-24]와 같이 C 그룹의 교사들은 학생들에게 인수분해 공식을 유도하는 과정을 알려주고 이해하게 하는 것보다 공식에 익숙해지도록 하고 유형별 문제를 해결하는 것을 목적으로 하고 있다. 다항식의 인수분해와 전개과정을 보여줌으로써 인수분해를 소개하고 각 유형별로 문제풀이 연습을 많이 한 뒤, 어느 정도 익숙해지면 다양한 문제를 섞어서 제공하는 T1b의 응답이 많았다.

문항 2.2는 이차방정식의 판별식의 도입 지도에 대해 묻는 문항으로 A와 B 그룹의 교사들은 이차방정식의 근의 공식으로부터 도입하는 것을 볼 수 있었고, C 그룹의 교사들은 예나 게임을 통해 판별식의 유용성을 알려주면서 도입하였다. [그림 Ⅳ-25]는 문항 2.2에 대한 B 그룹 교사의 응답이고, [그림 Ⅳ-26]은 문항 2.2에 대한 C 그룹 교사의 응답이다.

(선수학습 확인) (중학교 3학년) 이차방정식의 근의 공식

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

(발문) 근의 공식을 칠판에 적고, ① $2a$, ② $-b$, ③ $\sqrt{b^2-4ac}$ 세 부분에 동그라미를 친 후, 이차방정식의 근이 실근이 되는지 허근이 되는지를 결정하는 부분이 어디인지 맞추어 보라고 한다.

(설명) 그 부분을 따로 떼어서 근이 실근인지 허근인지 판별하는 식인 판별식이라 지도한다.

(적용) 간단한 예제로 처음엔 자세히 지도
(a, b, c가 각각 어느 수인지, 대입하면 부호가 무엇이 되는지)

[그림 Ⅳ-25] 문항 2.2에 대한 교사 Ⅱ의 응답

A와 B 그룹의 교사들은 이차방정식의 판별식을 도입할 때 교과서의 내용을 바탕으로 하여, 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 근의 공식 $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$을 시작으로 근호 안의 부호에 따라 근의 형태가 달라짐을 설명하고 근호 안의 식 b^2-4ac가 근을 판별할 수 있는 식으로 '판별식' 이라는 용어를 사용하며 판별식을 구성하는 문자 a, b, c가 나타내는 대상이 각각 x^2의 계수, x의 계수, 상수항임을 설명한다고 답하였다.

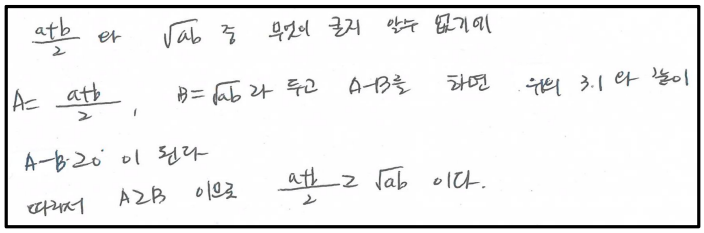
예를 들어 당도 측정기를 통하여 라임의 당도를 검사해보고
그 라임을 먹어보지 않아도 그 라임이 얼마나 맛있는지 알게 된다.
이와 같이 이차방정식의 근을 직접 구할 일 없으나 식은 있는데
허근인지만 알고 싶을 때 근을 직접 구하는 것보다 판별식을 이용하는 것이
더욱 편리하고 빠른 방법이다.

[그림 Ⅳ-26] 문항 2.2에 대한 교사 Ⅳ의 응답

[그림 Ⅳ-26]과 같이 교사 Ⅳ는 판별식을 '당도 측정기' 에 비유하여 학생들이 이해하기 쉽도록 설명하는 T3로 응답하였고, 교사 Ⅵ은 이차방

정식의 근의 형태를 빠르게 구하는 게임을 통해 판별식의 유용성과 뜻을 알려주는 D1으로 응답하였다. C 그룹의 교사들은 지도하는 학생들의 학습 수준과 흥미도가 낮은 점을 염두하고 학생들에게 이해하기 쉽고 유용성을 느낄 수 있도록 도입하려고 하였다.

문항 3.2는 산술-기하평균 부등식의 지도를 묻는 문항이다. A와 B 그룹의 교사들은 증명 과정 이외에 내용도 지도 내용에 포함시켰고, C 그룹의 교사들은 교과서에서 다루는 증명 과정을 부등식의 지도 내용으로 답하였다. [그림 Ⅳ-27]은 문항 3.2에 대한 C 그룹의 교사의 응답이고, [그림 Ⅳ-28]은 문항 3.2에 대한 B 그룹의 교사의 응답이다.


$\frac{a+b}{2}$ 와 $\sqrt{ab}$ 중 무엇이 클지 알수 없기에
$A=\frac{a+b}{2}$, $B=\sqrt{ab}$ 라 두고 $A-B$를 하면 위의 3.1 와 같이
$A-B\geq 0$ 이 된다
따라서 $A\geq B$ 이므로 $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$ 이다.

[그림 Ⅳ-27] 문항 3.2에 대한 교사 Ⅳ의 응답

[그림 Ⅳ-27]과 같이 C 그룹의 교사들은 산술-기하평균 부등식의 증명 과정을 부등식의 성질과 관련하여 교과서에서 다루는 증명의 수준으로 부등식을 지도하는 것으로 보인다. 지식의 사용 코드로 보면 T1과 D2로 나타났다.

1) 실수의 대소 관계($A \geq B \Leftrightarrow A-B \geq 0$)를 이용하여
$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \geq 0$이므로 $\frac{a+b}{2} - \sqrt{ab}$의 부호를 살펴보자.
2) 완전제곱식을 이용하여 위 증명을 해준다.

● 별도로 산술기하평균의 암기와 이해를 위해 설명해 줄 내용
✓ 산술평균은 수의 산술적인 평균으로 우리가 잘 알고 있는 평균이다. 두 수 2, 8의 산술평균은 $\frac{2+8}{2}=5$이다.)
✓ 기하평균은 수의 기하적인 평균을 말하는데, 2, 8을 두 변의 길이로 하는 직사각형의 넓이와 같은 정사각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{2\times 8}$이다. 따라서 두 수 2, 8의 기하평균은 4이다.
✓ 산술-기하평균 부등식은 위 두 평균 간의 대소 관계가 있음을 알려주는 식이다.

[그림 Ⅳ-28] 문항 3.2에 대한 교사 Ⅱ의 응답

A와 B 그룹의 교사들은 C 그룹의 교사들과 마찬가지로 교과서의 증명 과정을 지도하는 것을 기본으로 하고, 그 외에 교사 Ⅰ은 항등식과 연결지어 절대 부등식의 뜻을 설명한다고 답하였으며 교사 Ⅱ는 산술-기하평균을 기계적으로 암기하기보다 이해를 바탕으로 학습할 수 있도록 산술평균과 기하 평균의 뜻을 설명한다고 답하였고, 교사 Ⅲ은 증명을 한 후 주어진 식이 모든 양수에 대해 성립하기 때문에 절대 부등식의 범주에 들어감을 알려준다고 답하였다. 즉 C 그룹의 교사들이 사용한 것에 추가적으로 D1, B2으로 지식을 사용하는 것으로 알 수 있다(<표Ⅳ-5>).

<표 Ⅳ-5> SK를 중심으로 한 지식의 사용

교사 / 문항	A, B 그룹	C 그룹
1.2	T1, T1a, T1b	T1b
2.2	T1, D1, D2, D3	T3, D1
3.2	T1, D1, D2, B2	T1, D2

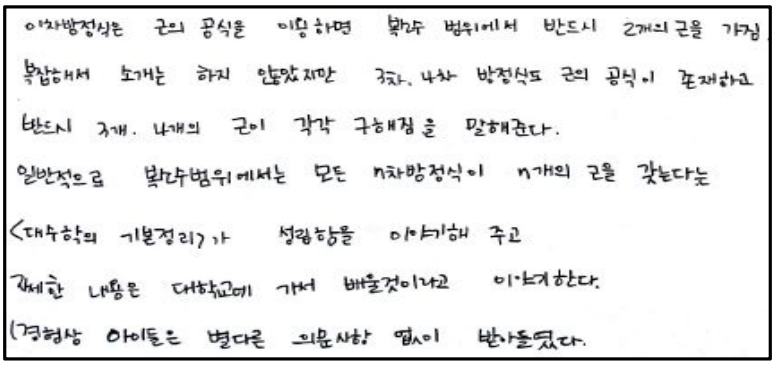
종합하여 볼 때 수준이 낮은 학생들을 지도하는 교사는 공식을 암기하거나 단순한 식을 먼저 지도하고, 이해하기 쉽도록 비유를 통해 내용을 도입하는 등 비교적 간단하게 1-2가지 방법으로 지식을 사용하는 것을

알 수 있다. 반면 수준이 높은 학생을 포함하여 다양한 수준의 학생들을 지도하는 교사는 교과서에서 제시하는 내용을 기본으로 하면서 여러 수준으로 교과서 내용을 다루고 그 외에 추가적인 내용도 포함하여 설명하며 수학적 내용들 간의 연관성을 지도하는 등 다루는 지식의 폭이 넓고 지식을 사용하는 방법이 3~4가지로 다양한 것을 알 수 있다.

2.2.2. AK를 중심으로 한 지식의 사용 문항

AK를 중심으로 한 지식의 사용을 알아본 문항은 각 주제의 4번 문항들로 구성되어 있다. 각 주제의 3번 문항에서 조사한 심화 수학 지식을 수업에서 활용하는 문항들로 3번 문항에 대한 답이 4번 문항을 답할 때 영향을 주게 된다. 그런데 문항 1.3에서 옳게 답한 교사가 Ⅰ과 Ⅵ으로 B와 C 그룹에서 한 명씩 정답을 하였기 때문에 이 절에서는 문항 1.4을 제외한 문항 2.4와 문항 3.4에 대한 두 그룹의 응답을 비교한다.

문항 2.4에서는 수학적 내용들의 연결성을 지도에 포함하도록 의도한 문항으로 C 그룹의 교사들은 심화 수학 지식을 언급만 하고 A와 B 그룹의 교사들은 그것을 학생들의 수준에서 이해할 수 있도록 설명한다는 차이가 있었다. [그림 Ⅳ-29]는 문항 2.4에 대한 C 그룹의 교사의 응답이고, [그림 Ⅳ-30]은 문항 2.4에 대한 B 그룹의 교사의 응답이다.


이차방정식은 근의 공식을 이용하면 복소수 범위에서 반드시 2개의 근을 가짐
복잡해서 소개는 하지 않았지만 3차, 4차 방정식도 근의 공식이 존재하고
반드시 3개, 4개의 근이 각각 구해짐을 말해준다.
일반적으로 복소수범위에서는 모든 n차방정식이 n개의 근을 갖는다는
<대수학의 기본정리>가 성립함을 이야기해 주고
자세한 내용은 대학교에 가서 배울것이라고 이야기한다.
(경험상 아이들은 별다른 의문사항 없이 받아들였다.

[그림 Ⅳ-29] 문항 2.4에 대한 교사 Ⅵ의 응답

C 그룹의 교사 Ⅵ은 이차방정식은 근의 공식으로부터 중근을 포함하여 2개의 근을 가지며 삼, 사차방정식도 이차방정식과 마찬가지로 근의 공식이 존재하며 근을 각각 3개, 4개 가짐을 말하고 <대수학의 기본 정리>를 소개하는 정도로만 다룬다고 응답하였다. 같은 그룹의 교사 Ⅳ는 모든 n차 다항식은 n개의 일차식으로 인수분해 됨을 말하며 명시적으로는 아니지만 교사 Ⅵ과 마찬가지로 간단히 언급하고 넘어가는 B1으로 응답하였다.

모든 이차방정식은 복소수 범위에서 근을 갖는다. 또한 우리가 생각하는 방정식은 계수가 실수인 방정식인데, 계수가 실수인 방정식은 켤레 복소수로 해를 가지므로 계수가 실수인 삼차 방정식은 적어도 하나의 실근을 갖는다. 그 실근을 α라 하면 $f(x)=(x-\alpha)g(x)$로 인수분해 되고, $g(x)$는 다시 이차식이 되어 $g(x)=0$은 2개의 근을 갖는다.

<대수학의 기본 정리>라는 것이 있는데, 방정식은 복소수 범위에서 적어도 하나의 근을 갖는다는 내용이다. 가우스라는 수학자가 증명해 낸 정리이다. 방정식 $f(x)$가 복소수 범위에서 근을 갖고 그 근을 a_1이라 하면 $f(x)=(x-a_1)g_1(x)$로 인수분해 되고 $g_1(x)$는 $f(x)$보다 차수가 하나 낮다. $g_1(x)$도 복소수 범위에서 근을 갖고, 그 근을 a_2라 하면 $g_1(x)=(x-a_2)g_2(x)$ $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)g_2(x)$가 된다. $g_2(x)$도 같은 이유로 인수분해 되고 이 과정을 반복하면

$f(x)$가 삼차식이면 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)$,

$f(x)$가 사차식이면 $f(x)=(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)$

로 일차식의 곱으로 인수분해 되고, a_1, a_2, a_3 또는 a_1, a_2, a_3, a_4가 방정식의 근이 된다. a_1, a_2, a_3 또는 a_1, a_2, a_3, a_4가 서로 같을 수 있으므로 중근을 포함하여 삼차방정식은 세 개의 근을 갖고, 사차방정식은 네 개의 근을 갖는다.

[그림 Ⅳ-30] 문항 2.4에 대한 교사 Ⅰ의 응답

한편 A와 B 그룹의 교사들은 <대수학의 기본 정리>를 언급만 하는 것이 아니라 먼저 정리를 소개한 뒤, n차식은 일차식과 차수가 하나 낮은 $(n-1)$차식으로 인수분해 되고 같은 과정을 일차식만 남을 때까지 반복하면 결국 n차식의 근은 n개임을 알려주고 따라서 삼차방정식의 근은 3개, 사차방정식의 근은 4개임을 설명한다고 답하였다. 즉 심화 수학 지식을 학교 대수 지식과 연결하는 B1과 이것을 학생들이 이해할 수준으로 표현하거나 설명하는 T3으로 지식을 사용한다고 답하였다.

문항 3.4에서는 산술-기하평균 부등식의 심화 지도를 묻는 것으로 C

그룹의 교사는 교육과정에서 크게 벗어나지 않는 범위에서 지도하고 A와 B 그룹의 교사들은 학교 수학에서 다루지 않는 내용까지 다룬다고 응답하였다. [그림 Ⅳ-31]은 문항 3.4에 대한 A 그룹 교사의 응답이고, [그림 Ⅳ-32]는 B 그룹 교사의 응답, [그림 Ⅳ-33]은 C 그룹 교사의 응답이다.

ⅰ) 부등식의 성질 뿐 아니라 그래프를 이용하는 등 산술-기하 평균의 여러 가지 증명 방법(대수적 증명 외에 기하영역과 연결하여 증명)을 다뤄본다. 학생 스스로 증명방법을 찾아보도록 지도한다.
ⅱ) 양수가 2개 뿐 아니라 3개일 때의 산술-기하평균 부등식을 다뤄본다. 인수분해 공식을 이용하여 증명을 해보고 관련된 문제를 풀어본다.
ⅲ) 실생활에 사용되고 있는 산술-기하 평균 부등식의 응용을 수업 내용으로 다룬다.
ⅳ) 조화 평균까지 포함하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$ 로 부등식을 확대하여 지도하며 음악이나 경제와 같은 다른 학문과 연결하여 지도 한다.

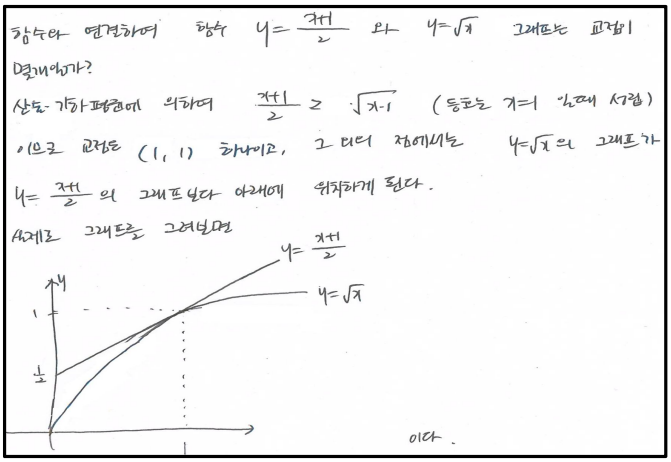
[그림 Ⅳ-31] 문항 3.4에 대한 교사 Ⅶ의 응답

A 그룹의 교사는 사전 인터뷰에서 수준이 높기 때문에 교과서 내용과 그 외적인 내용, 예를 들어 수학 익힘책에서 심화로 다루는 문제, 실생활 응용문제, 그리고 그 문제들의 바탕이 되는 내용들을 다루고 있다고 말하였다. 이러한 양상은 [그림 Ⅳ-31]에도 볼 수 있다. 이 교사는 산술-기하 평균 부등식을 심화시켜 지도할 때, 여러 가지 증명을 다루면서 학생들이 직접 증명을 하도록 지도하고 주어진 부등식에서 양수의 개수를 늘리기도 하고 실생활 활용을 다루며 조화 평균까지 포함한 부등식 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2ab}{a+b}$으로 확대하여 다루고 타 학문과 연결하여 지도한다고 답하였다. 지식의 사용 코드로 볼 때 이 교사는 증명과정에 대한 지도하는 D2, 증명을 기하영역과 관련지어 지도하는 B2, 심화 지식과 연결하는 B2, 타학문과 연결하는 B3로 지식을 사용하여 지도한다고 답하였다.

음수들을 이용한 산술기하 부등식은 만들 수 있는지 생각해보자. 또는 양수가 음수가 섞여 있을 때도 산술기하 부등식이 가능한지 생각해보자. 복소수는 대소 관계가 없지만 복소평면을 활용하면 원점으로부터 거리를 재어 크기를 줄 수도 있다. 이와 같이 복소수의 크기를 정의해주었을 때 산술기하 부등식이 가능한지 생각해보자.

[그림 Ⅳ-32] 문항 3.4에 대한 교사 Ⅲ의 응답

B 그룹의 교사들은 교과서에서 다루는 산술-기하평균 부등식의 조건 '두 개의 양수에 대하여'를 변형하여 심화 지도를 한다고 답하였다. [그림 Ⅳ-32]와 같이 교사 Ⅲ은 '두 개의 양수'라는 조건에서 '양수'를 음수, 양수와 음수로 변형하였을 때 부등식이 성립하는지, 복소수의 크기(복소평면에서 복소수를 나타내는 점까지의 거리)로 변형하였을 때 부등식이 그대로 성립하는지 생각해보는 기회를 제공하였다. 교사 Ⅱ는 '두 개의 양수'라는 조건에서 '두 개'를 변형하여 세 개의 양수, n개의 양수에 대한 산술-기하평균 부등식으로 확장하고 일반화하여 지도한다고 답하였다. 교사 Ⅰ은 교사 Ⅱ와 비슷하게 세 개의 양수에 대한 산술-기하평균 부등식을 지도하는데 다항식의 인수분해를 이용하여 부등식의 증명까지 다룬다고 답하였다. 지식의 사용 코드로 보면 새로운 과제를 제공하는 T2, 심화 수학 지식을 학교 수학과 연결하는 B1, 증명 과정을 다루는 D2으로 지식을 사용하는 것으로 답하였다.



[그림 Ⅳ-33] 문항 3.4에 대한 교사 Ⅳ의 응답

[그림 Ⅳ-33]과 같이 교사 Ⅳ는 교과서에서 다루는 두 양수에 대한 산술-기하평균 부등식의 형태를 유지하여 교육과정 내의 내용들과 연결하여 지도한다고 답하였다. $x>0$에 대하여 $\frac{x+1}{2} \geq \sqrt{x \cdot 1} = \sqrt{x}$가 성립하고 이 때 등호는 $x=1$ 일 때 성립한다. 이것을 함수의 그래프와 연결하면 일차함수 $y=\frac{x+1}{2}$의 그래프는 무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프보다 아래쪽에 위치하고 두 함수는 $x=1$일 때 같은 함숫값을 가짐을 알 수 있다. 이 교사는 새로운 과제를 제시하는 T2, 교육과정 내 내용들을 연결하는 B2, 그래프와 식의 관계를 설명하는 D4로 지도하고 있었다(<표 Ⅳ-6>).

<표 Ⅳ-6> AK를 중심으로 한 지식의 사용

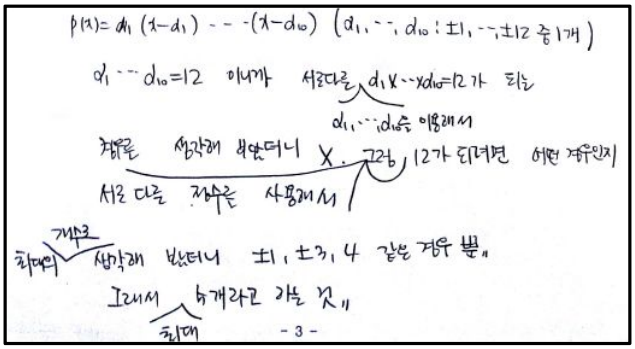
교사 / 문항	A 그룹	B 그룹	C 그룹
2.4	B1, **T3**	B1, **T3**	B1
3.4	D2, **B1, B2, B3**	D2, B1, T2	D4, B2, T2

종합하여 볼 때, 수준이 낮은 학생을 가르치는 교사는 학교 대수 지식과 관련된 심화 수학 지식을 소개하고 언급하는 정도로만 다루거나 학교 대수 지식에서 크게 벗어나지 않는 범위에서 다루는 반면 다양한 수준의 학생을 지도하는 교사는 수준이 높은 학생도 포함하여 지도하기 때문에 심화 수학 지식을 엄밀하게 가르치지는 않지만 학생들이 이해할 수 있는 수준으로 지도하려고 하는 경향이 있음을 알 수 있다. 또한 수준이 높은 학생을 지도하는 교사는 학생들의 이해속도가 빠르고 해결할 수 있는 문제의 난이도가 높기 때문에 다루는 지식의 폭을 넓혀 다른 수학적 영역이나 다른 학문과 연결하여 지도하는 것을 알 수 있다.

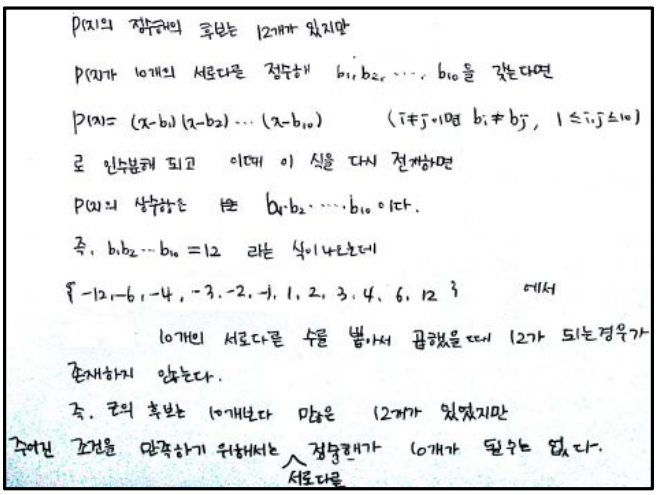
2.2.3. TK를 중심으로 한 지식의 사용 문항

TK를 중심으로 한 지식의 사용을 알아보는 문항은 문항 1.6, 2.6, 3.6으로 구성되어 있다. 여기에서는 SK나 AK를 중심으로 한 지식의 사용 문항에서 나타난 것과는 달리 큰 차이가 나타나지 않았다.

문항 1.6은 한 학생의 말을 다른 학생이 이해할 수 있도록 표현하거나 설명하는 T4을 의도한 문항이다. [그림 Ⅳ-34]는 문항 1.6에 대한 A 교사의 응답이고, [그림 Ⅳ-35]는 문항 1.6에 대한 C 그룹 교사의 응답이다.



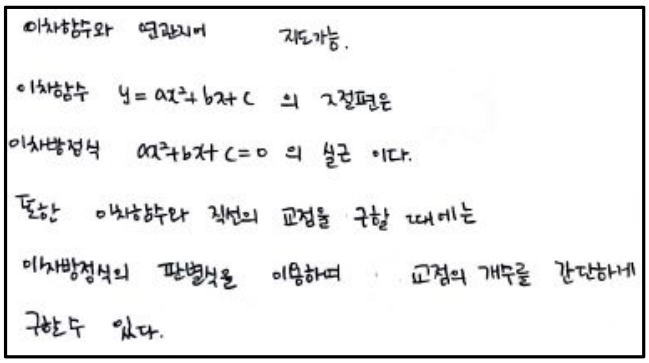
[그림 Ⅳ-34] 문항 1.6에 대한 교사 Ⅶ의 응답



[그림 Ⅳ-35] 문항 1.6에 대한 교사 Ⅵ의 응답

[그림 Ⅳ-34], [그림 Ⅳ-35]와 같이 교사들은 다항식 $P(x)=x^{10}+a_9x^9+\cdots+a_1x+12$가 10개의 서로 다른 일차식으로 인수분해 된다면 일차식들의 상수항의 곱이 12가 되어야 함을 설명한다고 답하였는데 이는 D2로 볼 수 있다. 그리고 상수항의 약수가 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$ 총 12개로 서로 다른 '10개'의 해를 가질 수 있다는 학생의 생각에 어떤 점이 잘못 되었는지 지적하는 다른 학생의 말을 이 학생이 이해할 수 있게 설명하는 T4를 사용하는 것으로 응답하였다.

문항 2.6은 이차방정식과 다른 수학적 내용을 연결한 지도에 대한 문항이다. A와 B 그룹의 교사들은 교육과정 내적, 외적 다양한 내용들과 연결하여 지도한다고 답하였고, C 그룹의 교사들은 이차방정식을 교육과정 내의 내용들과 연결하여 지도한다고 답하였다. [그림 Ⅳ-36]은 문항 2.6에 대한 C 그룹의 교사의 응답이고, [그림 Ⅳ-37]은 문항 2.6에 대한 B 그룹의 교사의 응답이다.


이차함수와 연관시켜 지도가능.

이차함수 $y=ax^2+bx+c$ 의 x절편은

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$ 의 실근 이다.

또한 이차함수와 직선의 교점을 구할 때에는

이차방정식의 판별식을 이용하여 교점의 개수를 간단하게

구할수 있다.

[그림 Ⅳ-36] 문항 2.6에 대한 교사 Ⅵ의 응답

[그림 Ⅳ-36]과 같이 C 그룹의 교사들은 교육과정 내에서 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$을 이차함수 $y=ax^2+bx+c$와 연관 지어 지도한다고 답하였다. 이차함수의 그래프 $y=ax^2+bx+c$가 $y=0$ 즉, x축과 만나는 교점의 x좌표(x절편)가 이차방정식 $ax^2+bx+c=0$의 실근임을 설명한다고

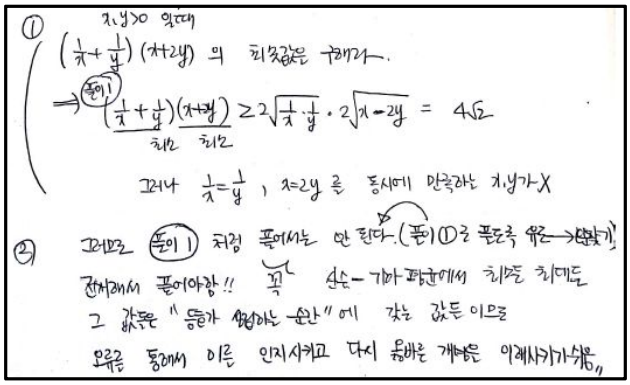
응답하였다. 이는 그래프와 식의 관계를 설명한 것(D4)이고 또한 함수와 방정식과의 연결하여(B2) 지도하는 것으로 볼 수 있다.

(1) 연계할 단원 : 필요조건과 충분조건
(2) 지도목표 : $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ or $x=2$가 필요충분조건임을 안다.
(3) 지도방법
1) 도입: 2의 배수 ⇔ 짝수가 필요충분조건임을 확인시키고, 필요충분조건은 겉모양이 다를 뿐 사실 같은 대상임을 알려준다.
2) 전개: $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ or $x=2$도 마찬가지로 확인시켜 필요충분조건임을 보인다.
(4) 지도의 의의
학생들은 교과서에서 $x^2-3x+2=0 \Rightarrow x=1$ or $x=2$와 같이 한 쪽 방향의 풀이밖에 하지 않는다. $x=1$ or $x=2 \Rightarrow x^2-3x+2=0$ 처럼 역방향을 확인하여 명제적 사고를 키우고, 구한 해가 정확한 해임을 확인시켜주는 기회를 제공한다. 이는 차후 수2의 분수·무리방정식을 배울 때, 같은 풀이를 해놓고 일부 근을 인정할 수 없는 무연근 상황을 혼란 없이 이해하는데 도움을 줄 수 있다.

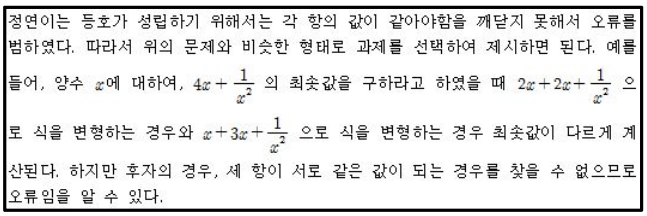
[그림 Ⅳ-37] 문항 2.6에 대한 교사 Ⅱ의 응답

한편 A와 B 그룹의 교사들은 다양한 응답을 하였다. 교사 Ⅰ은 이차방정식의 근과 계수와의 관계를 n차방정식의 근과 계수와의 관계로 일반화됨을 지도한다고 답하였는데 이것은 심화 내용과 연결하는 B1과 공식의 발생 과정을 설명하는 D2로 볼 수 있다. 교사 Ⅱ는 [그림 Ⅳ-37]과 같이 교육과정 내 '필요조건과 충분조건' 단원과 연계하여 이차방정식의 풀이의 각 단계가 필요·충분조건임을 깨닫게 하고 이후에 배우는 분수 방정식이나 무리 방정식에서는 방정식 풀이의 각 단계가 필요·충분조건이 아니기 때문에 무연근이 생김을 이해하는데 도울 수 있다고 답하였다. 즉 교사 Ⅱ는 B2와 D2로 지도하는 것으로 볼 수 있다. 교사 Ⅲ과 교사 Ⅶ은 C 집단의 교사들과 같은 응답을 하였다.

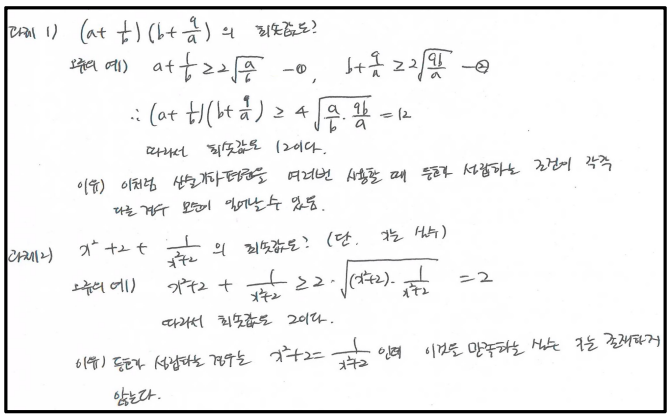
문항 3.6은 학생이 오류를 범하기 쉬운 수학적 내용을 이해시키기 위해 과제를 개발하는 문항이다. 그룹 간의 차이는 나타나지 않았다. [그림 Ⅳ-38], [그림 Ⅳ-39], [그림 Ⅳ-40]은 각각 문항 3.6에 대한 A, B, C 그룹의 응답이다.


① x, y>0 일때
$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)(x+2y)$ 의 최솟값을 구하라.
⇒ 풀이1
$\underbrace{\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}_{\text{최소}}\underbrace{(x+2y)}_{\text{최소}} \geq 2\sqrt{\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{y}}\cdot 2\sqrt{x\cdot 2y} = 4\sqrt{2}$
그러나 $\frac{1}{x}=\frac{1}{y}$, $x=2y$ 를 동시에 만족하는 x, y가 X
② 그러므로 풀이 1 처럼 풀이식는 안 된다. (풀이 ①을 풀도록 유도 → 실패)
전체에서 풀어야함!! 꼭 산술-기하평균에서 최소는 최대도
그 값들은 "등호가 성립하는 순간"에 갖는 값들 이므로
오류를 통해서 이를 인지시키고 다시 올바른 개념을 이해시키기가 쉽다.

[그림 Ⅳ-38] 문항 3.6에 대한 교사 Ⅶ의 응답


정연이는 등호가 성립하기 위해서는 각 항의 값이 같아야함을 깨닫지 못해서 오류를 범하였다. 따라서 위의 문제와 비슷한 형태로 과제를 선택하여 제시하면 된다. 예를 들어, 양수 x에 대하여, $4x+\frac{1}{x^2}$ 의 최솟값을 구하라고 하였을 때 $2x+2x+\frac{1}{x^2}$ 으로 식을 변형하는 경우와 $x+3x+\frac{1}{x^2}$ 으로 식을 변형하는 경우 최솟값이 다르게 계산된다. 하지만 후자의 경우, 세 항이 서로 같은 값이 되는 경우를 찾을 수 없으므로 오류임을 알 수 있다.

[그림 Ⅳ-39] 문항 3.6에 대한 교사 Ⅲ의 응답


과제 1) $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right)$ 의 최소값은?
오류의 예) $a+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ —①, $b+\frac{9}{a} \geq 2\sqrt{\frac{9b}{a}}$ —②
$\therefore \left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{9}{a}\right) \geq 4\sqrt{\frac{a}{b}\cdot\frac{9b}{a}} = 12$
따라서 최솟값은 12이다.
이유) 이처럼 산술기하평균을 여러번 사용할 때 등호가 성립하는 조건에 각각 다른 경우 모순이 일어날 수 있음.
과제2) $x^2+2+\frac{1}{x^2+2}$ 의 최솟값은? (단, x는 실수)
오류의 예) $x^2+2+\frac{1}{x^2+2} \geq 2\cdot\sqrt{(x^2+2)\cdot\frac{1}{x^2+2}} = 2$
따라서 최솟값은 2이다.
이유) 등호가 성립하는 경우는 $x^2+2=\frac{1}{x^2+2}$ 인데 이것은 만족하는 실수 x를 존재하지 않는다.

[그림 Ⅳ-40] 문항 3.6에 대한 교사 Ⅳ의 응답

산술-기하평균 부등식을 문제에 적용할 때 생길 수 있는 오류를 고려하여 과제를 제시하도록 요구한 이 문항에서 대부분의 교사는 두 개의

양수에 대한 산술-기하평균 부등식을 적용하는 과제를 제시하였고 교사 Ⅲ은 문항 3.5에서와 같이 세 개의 양수에 대한 산술-기하평균 부등식을 적용하는 과제를 제시하였다. 부등식을 구성하는 문자의 개수가 다를 뿐 오류의 근원은 등호 성립 조건을 간과한 것임을 지적하는 것은 공통으로 과제에 포함되었다. 수학적 내용의 구성요소 중 문자나 기호의 의미를 설명하는 D3, 새로운 과제를 제시하는 T2로 응답한 것으로 볼 수 있었다.

<표 Ⅳ-7> TK를 중심으로 한 지식의 사용

교사 / 문항	A, B, C 그룹
1.6	D2, T4
2.6	B2, D2
3.6	D3, T2

종합하여 볼 때, 지도하는 학생들의 수준에 따라 교사의 TK를 중심으로 한 지식의 사용에는 차이가 없었다. 이것은 문항 6에서 주어진 상황이 동일하였고 상황 속에 있는 특정 학생을 대상으로 지도하는 경우를 가정하였기 때문으로 보인다. 하지만 설문지 문항에 대한 응답을 분석했을 때 전반에 걸쳐 학생에게 적절한 수준이 무엇인지 파악하는 TK가 지도하는 내용과 방향을 결정하였다고 볼 수 있다.

V. 결론

1. 요약

교사는 수업에 필요한 지식을 갖추고 있어야 하고 자신의 수학적 지식 뿐 아니라 교수학적 지식을 적절히 활용하여 수업 실천을 할 수 있어야 한다. 교사의 지식은 효과적인 수업의 핵심 요소로써 그 중요성을 깨닫고 이에 대한 연구가 계속되어야 한다. Shulman(1986)을 시작으로 교사의 지식에 대한 연구가 본격적으로 이루어지기 시작했다.

수학교육에서 교사의 지식에 대한 연구는 주로 초등학교 교사를 대상으로 하였고, 중등학교 교사를 대상으로 한 연구가 적었다. 학교급이 올라감에 따라 다루는 수학적 내용의 범위는 점점 넓어지고 교사는 더 많은 내용을 심도 있게 알고 수업에 적절히 사용할 수 있어야 한다. 특히 광범위하고 높은 수준의 내용을 가르치는 고등학교 교사들에게 적절한 교과 내용과 지도에 대한 교육이 필요한데, 그러한 교사 교육을 논하기에 앞서 그들의 지식을 밝힌 연구가 부족하다. 또한 경력 만 5년 미만인 초임 교사는 이 기간 길러지는 능력과 태도, 지식이 앞으로의 교육 활동 전반에 결정적인 영향을 주기 때문에 고등학교 초임 교사들의 지식의 특성을 이해하고 효과적으로 발전시킬 수 있는 방법에 대한 연구가 필요하다.

한편 우리나라의 학교 대수 영역 중 ‘문자와 식’ 영역에서 학습하는 내용은 함수 외에도 기하 영역 등 학교 수학 전반에 걸쳐 기본이 되기 때문에 무엇보다 중요하다고 할 수 있다. 또한 ‘문자와 식’ 영역에서 학습하는 문자에 대한 이해와 조작은 대수 전반의 수학적 개념들을 이해하고 이들을 구조적인 관점에서 문제를 다룰 수 있는 능력을 신장하는데 있어 중요하다고 할 수 있다(정영우, 김부윤, 2011). 대수 학습의 중요성에서 시작하여 교사의 지식을 대수에 초점을 둔 연구가 진행되었다. 대수 영역에서 수학 교사의 지식을 알아본 최근 연구(McCrory et al.,

2012)에서는 대수를 가르치는데 필요한 지식으로 학생들이 배우는 지식으로 교과서, 교육과정에 나타난 학교 대수 지식(SK), 대학과정에서 배우는 해석학, 추상대수학, 기하학 등을 포함하는 심화 수학 지식(AK), 학생의 언어를 수학적으로 해석하고 수학적 오류나 오개념을 설명할 수 있으며 수학적 대상들 사이의 연관성을 알고 학생의 수준에 적절한 것을 파악하는데 사용되는 교수를 위한 수학적 지식(TK)으로 범주화하였다.

교사의 지식에 대한 연구가 구체화되면서 이를 어떻게 측정하고 평가할 것인지에 대한 연구도 변화를 거듭하고 있다. 초기에는 대안적인 방법으로 표준화된 시험 점수, 자격증 등을 이용하였으나 이것은 교사가 지식을 어떻게 사용하는지에 대해서는 밝히지 못한 한계를 가지고 있었다(McCrory et al., 2012; Somayajulu, 2012). 교사의 지식은 수업과 떼어 놓고 생각할 수 없기 때문에 주어진 수업 상황에서 어떻게 사용하는지를 함께 연구해야 한다(Ball, 2003; Ball et al., 2001; Black, 2007).

따라서 이 연구에서는 고등학교 초임 수학 교사가 대수를 가르치는데 필요한 지식과 그것을 주어진 상황에서 어떻게 사용하는지를 이해하는 것을 목적으로 대수 영역 중 고등학교 1학년 내용에 초점을 맞추어 다음과 같은 연구 질문을 설정하였다.

1. 문자와 식 영역에서 고등학교 초임 수학교사의 대수를 가르치는데 필요한 지식은 어떠한가?
2. 문자와 식 영역에서 고등학교 초임 수학교사는 대수를 가르치는데 필요한 지식을 어떻게 사용하는가?

고등학교 초임 수학교사 7명을 연구 참여자로 섭외하여 사전 인터뷰, 설문 조사, 사후 인터뷰를 실시하였다. 사전 인터뷰에서는 교사의 경력, 근무하는 학교 배경, 지도 성향을 알아보았고, 사후 인터뷰에서는 설문지 분석을 확인하고 교사의 지식에 대한 신념을 알아보았다. 설문지 문항은 우리나라 교육과정과 교과서를 검토하고 국제 수학교육 연구에서 사용하였던 문항과 교과서 및 교사용 지도서를 바탕으로 세 개의 수학적

주제로 다항식의 인수분해, 이차방정식의 근, 절대부등식 중 산술-기하 평균 부등식을 선택하여 개발하였다. 예비 검사와 전문가 검토 후 설문을 실시하였다. 각 주제별로 문항 1, 3, 5는 대수를 가르치는데 필요한 지식을 조사하는 문항으로 각각 학교 대수 지식, 심화 수학 지식, 교수를 위한 수학적 지식에 해당하는 문항이다. 교사는 대수를 가르칠 때 단일한 지식만을 사용하는 것이 아니라 서로 다른 지식들을 복합적으로 사용기 때문에 이 연구에서는 특정한 지식을 어떻게 사용하는지 조사하기 위해 문항 2는 SK의 사용을 중심으로, 문항 4는 AK의 사용을 중심으로, 문항 6은 TK의 사용을 중심으로 하고 개발하였다. 지식에 대한 문항은 예시 답안을 기준으로 분석하였고 지식의 사용에 대한 문항은 크게 세 개의 코드, 수학적 내용을 구성 요소로 분해하기(이하 D), 수학적 내용의 엄밀성 조절하기(이하 T), 수학적 내용들을 연결하기(이하 B)로 분석한 뒤 각각을 세분화하여 다시 분석하였다. 이에 따라 얻은 연구 결과를 요약하면 다음과 같다.

<연구 질문 1>에서는 대수를 가르치는데 필요한 지식을 분석하였다. 대수를 가르치는데 필요한 지식은 학생들이 학교에서 배우는 대수 지식(SK), 실해석학, 복소해석학, 추상대수학 등과 같은 심화 수학 지식(AK), 교사가 학생의 언어를 수학적으로 해석하고 학생의 풀이에서 수학적 오류나 오개념을 알며 수학적 대상들 사이의 연관성을 알고 학생의 수준에 적절한 것을 파악하는데 사용되는 지식(TK)으로 구성된다. 교사들은 SK와 TK에 대해 어려움 없이 답한 반면 AK에 대해서는 대학 과정의 내용을 잊어 제대로 된 답을 하지 못한 경우가 있었다. 설문지를 통해서 교사들이 대수를 가르치는데 필요한 지식을 모두 갖추고 있다고 단정하기 어려웠지만 사후 인터뷰를 통해 교사들은 세 지식의 필요성을 인식하고 있었고 주로 교과서와 보조교과서를 사용하여 지도하기 때문에 SK에 대해서는 기본적으로 알고 있다고 할 수 있지만 AK는 직접적으로 자주 사용하는 지식이 아니기 때문에 예비 교사 때만큼 많이 알고 있지는 않은 것을 알 수 있었다. 또한 TK에서는 문항에 대한 답변을 하는데 시간과 노력이 많이 소요되었고 사후 인터뷰에서는 경력이 적기 때문에 고등학

교의 내용을 모두 가르쳐본 적이 없고 따라서 내용간의 연관성을 제대로 파악하지 못하는 한계가 있으며 때로 학생의 말을 이해하지 못하는 경우가 있다고 답하였다. 즉 교사들은 지식에 대한 문항을 대체적으로 잘 해결하였더라도 AK와 TK가 부족하다는 것을 알 수 있었다.

<연구 질문 2>에서는 대수를 가르치는데 필요한 지식을 주어진 수업 상황에서 어떻게 사용하는지 분석하였다. SK, AK, TK 각각을 중심으로 지식의 사용을 알아보았다. 교사들은 SK를 중심으로 지식을 사용할 때는 학생들에게 완전한 수학적 대상을 그대로 주기보다 하나의 수학적 대상에 대해 용어의 뜻을 풀어서 설명하고 공식의 유도과정이나 증명과정을 단계별로 정당함을 들어 설명하며 공식의 성립 조건, 구성하는 문자들의 대상이 무엇인지, 그래프와 식과 같이 서로 다른 표상 간에 어떤 관계가 있는지 등을 설명하는 D로 주로 응답하였고, 수학적 내용을 풀어서 설명하는 D와 학습자에 맞게 내용의 양과 수준을 고려하는 T가 결합한 응답이 많았다. AK를 중심으로 지식을 사용할 때는 심화 지식이 필수적인 교수학습 내용이 아니므로 학생들이 배우는 내용과 연결되는 내용을 소개하는 B, 그리고 심화 지식을 학생들이 이해할 수 있는 수준으로 엄밀성을 낮춰 설명하는 T의 형태도 볼 수 있었다. TK를 중심으로 지식을 사용할 때는 D, B, T 세 가지가 고루 나타나고 있었다. 학생들의 언어를 수학적으로 해석하고 수학적 오류나 오개념을 파악하는데 D, T가 나타나고 수학적 대상들 사이의 연관성을 알고 학생의 수준에 적절한 것을 파악하는데 B와 T가 나타나는 지식의 특성상 D, B, T가 고루 나타나는 것을 알 수 있었다.

지식을 사용할 때 교사들은 교수 방법과 내용을 설명하는 방법에 영향을 주는 요인으로 학생의 수준을 가장 먼저 꼽았고 위의 결과에서 학생에게 적절한 수준이 무엇인지 파악하는 TK가 지식의 사용을 결정하는 것으로 나타났다. 따라서 교사들을 지도하는 학생의 수준에 따라 분류한 후 각각 지식의 사용에 어떤 양상을 보이는지 알아보았다. 그 결과 SK를 중심으로 지식을 사용할 때 수준이 낮은 학생을 지도하는 교사들은 단순한 식으로부터 공식을 유도하고 이해하기 쉽도록 비유를 사용하고 있었

고 다양한 수준, 상수준의 학생을 지도하는 교사들은 교과서 외에 있는 추가적인 내용도 지도하는 것을 알 수 있었다. AK를 중심으로 지식을 사용할 때 수준이 낮은 학생을 가르치는 교사는 학교 대수 지식과 관련된 심화 수학 지식을 소개하고 언급하는 정도로만 다루거나 학교 대수 지식에서 크게 벗어나지 않는 범위에서 다루는 반면 다양한 수준의 학생을 지도하는 교사는 수준이 높은 학생도 포함하여 지도하기 때문에 심화 수학 지식을 엄밀하게 가르치지는 않지만 학생들이 이해할 수 있는 수준으로 설명하려는 경향이 있음을 알 수 있었으며, 수준이 높은 학생을 지도하는 교사는 학생들의 이해속도가 빠르고 해결할 수 있는 문제의 난이도가 높기 때문에 다루는 지식의 폭을 넓혀 다른 수학적 영역이나 다른 학문과 연결하여 지도하는 것을 알 수 있었다. TK를 중심으로 지식의 사용을 조사하였을 때는 지도하는 학생들의 수준에 따른 차이가 없었다. 이것은 문항 자체의 특성에 따른 것으로 주어진 상황이 동일하였고 문항에 언급한 특정 학생을 대상으로 지도하는 경우를 가정하였기 때문으로 보인다. 하지만 문항에 대한 응답 전반에 걸쳐 학생에게 적절한 수준이 무엇인지 파악하는 TK가 지도하는 내용과 방향을 결정하였다고 볼 수 있었다.

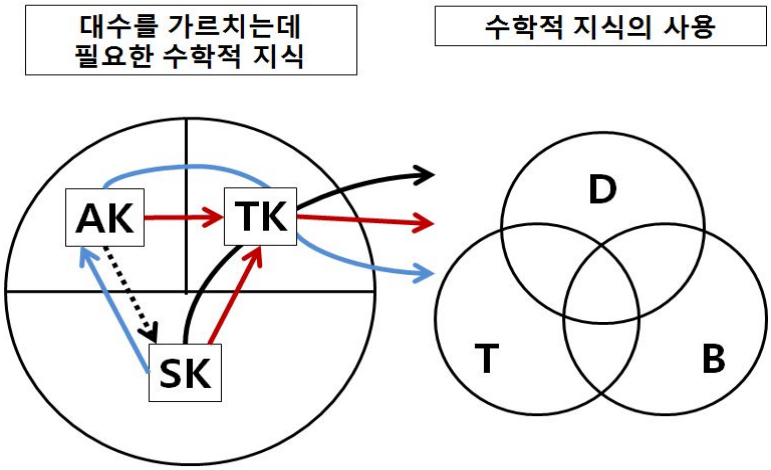
이상의 연구로부터 고등학교 1학년 '문자와 식' 영역 중 다항식의 인수분해, 이차방정식의 근, 산술-기하평균 부등식에 대하여 지식을 사용하는 방법 D, T, B의 예는 다음과 같다.

- D: 인수분해, 판별식과 같은 단어의 뜻 설명하기, 인수분해 공식, 이차방정식의 판별식 유도과정, 산술-기하평균 부등식 증명과정 설명하기, 인수분해 공식, 판별식, 부등식에서 각 문자가 가리키는 수와 성립하기 위한 조건 설명하기, 그래프와 식 사이의 관계 설명하기
- T: 인수분해 공식의 암기법 설명 또는 오류를 발생하기 쉬운 과제 제시와 같이 교과서 내용과 문제를 기본으로 보충·심화 지도하기, 대수학의 기본정리로부터 방정식의 차수와 근의 개수 관계 설명하

기, 한 학생의 말을 다듬어 재성하기

- B: 다항식의 인수분해와 방정식, 부등식, 복소수와 연산 등을 연결하기, 대수학의 기본정리와 방정식의 근의 개수, Eisenstein's criterion과 다항식의 인수분해 연결하여 설명하기, 산술-기하평균 부등식의 일반화 설명하기, 산술-기하평균 부등식이 적용되는 음악, 미술, 경제에서의 예 설명하기

이 연구에서 초점을 맞춘 영역에서, 지식의 사용은 세 지식의 상호 영향을 받으며 나타난다는 것을 볼 수 있었다. 다시 말해 지식은 단독으로 사용되는 것이 아니라 다른 두 지식을 통해서 어떻게 사용될지 결정된다. 그 과정을 나타내면 [그림 Ⅴ-1]과 같다.



[그림 Ⅴ-1] 지식의 사용에서 나타난 지식 사이의 관계

SK 즉 학교 대수 지식은 교사로서 갖추어야 할 가장 기본이 되는 지식으로 세 지식 중 바탕이 된다. SK와 심화 수학 지식인 AK는 서로 영향을 주고받는다는 것을 알 수 있었다. 단, SK의 사용에 대한 설문지 응답에서 AK가 직접적으로 들어나지는 않았지만 상위 내용을 앎으로써 현재 배우는 내용을 명확하게 지도할 수 있다는 인터뷰 결과 AK의 영향 가능성이 없지 않다는 것을 알았다. 교수를 위한 수학적 지식인 TK는 지도할 때

내용과 방향을 결정하는 가장 영향력이 있는 지식으로, 이로 인해 지식들의 사용 양상이 다르게 나타나게 되고, TK는 현 교육과정의 내용 지식인 SK와 이와 연결되는 상위 수학적 내용 지식인 AK의 영향을 받으며 나타나는 것을 알 수 있었다.

2. 논의 및 제언

이 연구에서는 대수 영역 중 고등학교 1학년 '문자와 식' 영역에 초점을 맞추어 고등학교 초임 수학 교사가 대수를 가르치는데 있어 어떤 수학적 지식을 가지고 있고, 그것을 주어진 상황에서 어떻게 사용하는지를 알아보았다.

고희정(2013)은 수학적 내용 지식을 교육과정에서 가르쳐야 하는 수학적 개념과 성질로 보고 있고 윤현경(2011)은 대학 수학까지 포괄하는 것으로 보고 있는 것으로 보아 연구자마다 지식의 범위가 달라 혼란을 야기 시킬 수 있었다. 반면 이 연구에서는 기존 연구와 달리 수학적 내용 지식을 학교 수준과 대학 수준으로 구분하여 조사하였고, 교사의 지식과 주어진 상황에서 그 지식을 어떻게 사용하는지 함께 조사함으로써 지식 사이의 관계를 도출했다는 점에서 의의를 갖는다.

연구 결과로부터 초임 교사들의 학교 대수 지식인 SK는 충분했던 반면 심화 수학 지식인 AK는 부족하다는 것을 알 수 있었다. 초임 교사임에도 불구하고 경력이 약 2년 이상인 이들은 수업에서 직접적으로 AK를 사용하지 않기 때문에 많이 기억하지는 못하였다. 그러나 고등학교에서 가르치는 수학의 수준은 초·중학교의 수준보다 더 복잡하고 학생들의 사고 또한 발달하기 때문에 교사는 수학적 내용을 더 넓고 깊게 알고 있어야 한다(CBMS, 2012; Somoyajulu, 2012). 교사들 또한 AK를 갖추고 있어야 한다고 인식하고 있었으며 현직 교사를 위한 심화 수학 연수가 필요하다고 하였다. 그러나 대학 과정처럼 단순히 심화 수학을 가르치고 배우는 연수라면 얼마 지나지 않아 지금처럼 다시 잊어버리고 사용하지 못하는 상황이 반복될 것이다. 따라서 심화 수학 지식을 배우고 이것을

실제 수업과도 연계가 될 수 있도록 하는 연수가 필요하다.

사후 인터뷰에서 교사들은 TK가 부족하다고 인식하고 있었는데 이것은 교사들의 경력이 적어 학생들과 소통한 시간이 많지 않았고 고등학교의 내용을 모두 가르쳐본 적이 없기 때문에 내용간의 연관성을 제대로 파악하지 못했기 때문이다. 따라서 이러한 초임 교사들에게는 다른 교사들과 다양한 수업 방법, 그리고 수업 자료를 공유하고 실제로 학교에서 사용할 수 있도록 수업 방법을 체험하고 만들어보는 장이 필요하다고 할 수 있다. 단순히 전달만 받는 하향식 연수가 아닌 학교 현장에서 실질적으로 도움이 될 수 있는 체험적 연수가 필요하다. 다시 말해, 초임 교사에게는 다른 교사와 공동체를 형성하여 서로 교류와 소통을 통해 이론과 실천이 융화될 수 있는 연수가 필요하다(권오남 등, 2014).

이 연구에서는 초임 교사들이 대수를 가르치기 위해 필요한 지식인 SK, AK, TK를 잘 갖추고 있는지 조사하였고, 각 지식의 사용에 초점을 맞추어 지식 사이의 관계를 도출하였다. 세 지식은 서로 영향을 주고받으며 사용이 되고 특히 SK는 교사들이 갖추고 있는 가장 기본적인 지식이었고 지도의 바탕이 되며 TK는 지도의 방향을 결정하는 지식임을 알 수 있었다. 고희정(2013)과 윤현경(2011)은 MKT[1)]의 교과 내용 지식의 하위 영역들 간의 관계를 조사하여 PCK에 영향을 주고 있음을 밝혔는데, 이 관계는 일방향적이었던 반면, 이 연구에서 지식의 사용에 있어 지식 간의 관계는 서로 상호 의존적으로 나타났다. SK를 사용할 때는 AK의 영향을 받으면서 TK를 통해 표현되고, AK를 사용할 때는 SK의 영향을 받으면서 TK를 통해 표현되며 TK를 사용할 때는 SK와 AK의 영향을 받으면서 나타난다는 점에서 세 지식이 사용될 때 서로 영향을 주고받는다는 것을 알 수 있었다.

이 연구의 결과와 논의를 바탕으로 후속 연구를 다음과 같이 제안한다.

첫째, 이 연구는 설문 문항과 인터뷰를 통해 교사의 지식을 알아보았고 주어진 수업 상황에서 지식을 어떻게 사용하는지 조사하였다. 그러나 수업에서 지식을 사용할 때는 여러 가지 요인이 복합적으로 작용하고 교

1) MKT의 하위 영역 CCK는 KAT의 SK와 AK에 해당하고 SCK는 TK에 해당함.

사와 학생의 소통이 영향을 미치기 때문에 이러한 설문 문항과 인터뷰로 조사하기에 한계가 있었다. 따라서 제한된 상황이 아닌 여러 요인이 복합적으로 작용하는 실제 수업 관찰을 통한 연구가 필요하다.

둘째, 이 연구에서 다룬 지식의 범위는 대수 영역 중 고등학교 1학년 '문자와 식' 영역에 한정하였다. 그러나 중등학교 수학 교사는 중·고등학교에서 근무하기 때문에 교사들의 대수 영역에서의 지식을 살펴보기 위해서는 내용의 범위를 더 확장시켜서 연구할 필요가 있다.

Ⅵ. 참 고 문 헌

고희정 (2013). **고등학교 수학 수업에서 나타나는 초임교사의 수학 교수에 대한 지식(MKT)의 분석**. 박사학위 논문. 단국대학교.

교육과학기술부 (2008). **고등학교 교육과정 해설 수학**, 교육인적자원부 고시 제 2007-79호.

권오남, 박정숙, 박지현, 조형미 (2014). 공동체 단위 수학교사 연수 프로그램의 개발 및 효과 -'함께 만들어가는 수학교사 연수'를 중심으로-. **수학교육, 53**(2), 201-217.

김남희, 나귀수, 박경미, 이경화, 정영옥, 홍진곤 (2006). **예비교사와 현직 교사를 위한 수학교육과정과 교재연구**. 서울: 경문사

김서령, 이정례, 선우하식, 이진호, 조동석, 김민정, 박효정 (2009a). **고등학교 수학**. 서울: 천재교육.

김서령, 이정례, 선우하식, 이진호, 조동석, 김민정, 박효정 (2009b). **고등학교 수학 익힘책**. 서울: 천재교육.

김서령, 이정례, 선우하식, 이진호, 조동석, 김민정, 박효정 (2009c). **고등학교 수학교사용 지도서 상**. 서울: 천재교육.

김수환, 최영기, 이중권, 김진호, 윤오영, 김경현, …, 안미숙 (2009a). **고등학교 수학**. 서울: 교학사.

김수환, 최영기, 이중권, 김진호, 윤오영, 김경현, …, 안미숙 (2009b). **고등학교 수학 익힘책**. 서울: 교학사.

박경미 (2009). 수학의 교수학적 내용 지식(PCK)에 대한 연구의 메타적 검토. **수학교육, 48**(1), 93-105.

박현주 (2005). 초임 중등과학 교사의 과학교수에 대한 인식과 전문성 발달, **한국과학교육학회지, 25**(3), 421-430.

손승남 (2005). 교사의 수업전문성 관점에서 본 교사교육의 발전방향. **한국교원교육연구, 22**(1), 89-108.

심상길 (2013). 교사의 지식에 대한 중등 초임수학교사들의 인식 분석. **학교수학, 15**(2), 443-457.

우정호, 김성준 (2007). 대수의 사고 요소 분석 및 학습 지도 방안의 탐색.

수학교육학연구, 17(4), 453-475.
유한구 (2001). 수업 전문성의 두 측면: 기술과 이해. **한국교사교육, 18**(1), 69-84.
윤현경 (2011). **벡터 개념에 대한 예비교사와 현직교사의 MKT**. 석사학위 논문. 서울대학교.
이동환 (2010). **복소수 지도를 위한 수학 지식 연구**. 박사학위 논문. 서울대학교.
이정희 (2013). **복소수와 방정식에 대한 현직교사의 수학적 지식(MKT) 분석**. 석사학위 논문. 한국교원대학교 교육대학원.
이준열, 최부림, 김동재, 서정인, 전용주, 김홍섭, …, 송정 (2010). **고등학교 수학교사용 지도서**. 서울: 천재교육
정영우, 김부윤 (2011). 다항식과 다항함수에 관한 교수학적 분석. **교과교육학연구, 15**(2), 555-576.
황우형, 권혁진, 김인수, 김동화, 조남일, 박승렬, …, 김원중 (2009a). **고등학교 수학**. 서울: 미래엔 컬처그룹.
황우형, 권혁진, 김인수, 김동화, 조남일, 박승렬, …, 김원중 (2009b). **고등학교 수학 익힘책**. 서울: 미래엔 컬처그룹.
Ball, D. L. (2003). *Mathematical proficiency for all students: Toward a strategic research and developmental program in mathematics education.* Santa Monica, CA: RAND.
Ball, D., & Bass, H. (2009). With an Eye on the Mathematical Horizon: Knowing Mathematics for Teaching to Learners' Mathematical Futures. *Paper presented at the 43rd Jahrestagung fur Didaktik der Mathematik*, Oldenburg, Germany.
Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching (4th ed.)* (pp. 433-456). New York, NY: Macmillian
Ball, D. L., Thames, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. J*ournal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

Baumert, J., Kunter, M., Blum, W., Brunner, M., Voss, T., Jordan, A., ... Tsai, Y.. (2010). Teachers' mathematical knowledge, cognitive activation in the classroom, and student progress. *American Educational Research Journal, 47*(1), 133-180.

Baxter, J. A., & Lederman, N. G. (1999). Assessment and content measurement of pedagogical content knowledge. In J. Gess-Newsome (Ed.), *Examining pedagogical content knowledge: The construct and its implications for science education* (pp. 147-162). Hingham, MA: Kluwer.

Black, D. J. B. (2007). *The relationship of teachers content knowledge and pedagogical content knowledge in Algebra and changes in both types of knowledge as a result of professional development* (Doctoral dissertation). Retrieved from http://etd.auburn.edu/etd/

Conference Board of the Mathematical Sciences. (2012). *The mathematical education of teachers II: Draft for public discussion.* Retrieved February 13, 2012, from http://www.cbmsweb.org

Devlin, K. (2000). Finding your inner mathematician, *Chronicle of Higher Education*, 46, B5.

Even, R. (1993). Subject-matter knowledge and pedagogical content knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for Research in Mathematics Education, 24*(2), 94-116.

Fraleigh, J. B. (2002). *A First Course In Abstrat Algebra (7th edition).* Reading, MA: Addison-Wesley.

Grossman, P. L. (1990). *The making of a teaching: Teacher knowledge and teacher education*. NY: Teachers College Columbia University.

Helen, M. (2004). Novice and expert teachers' conceptions of learners' prior knowledge. *Science Education, 88*(6), 970-983.

Hill, H. C., Rawan, B., & Ball, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

Krauss, S., Brunner, M., Kunter, M., Baumert, J., Blum, W., Neubrand, M.,

& Jordan, A. (2008). Pedagogical content knowledge and content knowledge of secondary mathematics teachers. *Journal of Educational Psychology, 100*, 716-725.

Llinares, S. (2000). Secondary School Mathematics Teacher's Professional Knowledge: a case from the teaching of the concept of function. *Teachers and Teaching: theory and practice, 6*(1), 41-62.

Ma, L. (1999). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States. Mahwah,* NJ: Lawrence Erlbaum.

Marks, R. (1990). Pedagogical Content Knowledge: From a mathematical case to a modified conception. *Journal of Teacher Education, 41*(3), 3-11.

McCrory, R., Floden, R., Ferrini-Mundy, J., Reckase, M., & Senk, S. (2012). Knowledge of algebra for teaching: A framework of knowledge and practices. *Journal of Research in Mathematics Education, 43*(5), 584-615.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco: Jossey-Bass.

Monk, D. H. (1994) Subject area preparation of secondary mathematics and science teachers and student achievement. *Economics of Education Review, 13*(2), 125-45.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and* standards for school mathematics. NCMT, Reston: VA.

Paul, S., Steven, T., Dean, M., & Matthew, F. (1998). Differences in novice and competent teachers' knowledge. *Teachers and Teaching: theory and practice, 4*(1). 9-20.

Robinson, N., Even, R., & Tirosh, D. (1992). Connectedness in teaching algebra: A novice-expert contrast. In W. Geeslin, & W. Graham (Eds.), *Proceedings of 16th International Conference, 2*, 258-263.

Sfard, A. (1991), On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same

coin, *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-6.

Sherin, M. G. (2002). When Teaching Becomes Learning. *Cognition and Instruction, 20*(2), 119-150

Shulman, L. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Somayajulu, R. B. (2012). *Building Pre-Service Teacher's Mathematical Knowledge for Teaching of High School Geometry* (Doctoral dissertation). Retrieved from https://etd.ohiolink.edu/

Tatto, M. T., Schwille, J., Senk, S. L., Ingvarson, L., Peck, R., & Rowley, G. (2008). *Teacher Education and Development Study in Mathematics (TEDS-M): Policy, practice and readiness to teach primary and secondary mathematics. Conceptual framework*. East Lansing, MI: Teacher Education and Development International Center, College of Education, Michigan State University.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. Coxford & A. Shulte (Eds.). *The ideas of algebra, K-12* (pp. 8-19). NCTM. Reston, VA.

[부록] 수학적 내용 지식 문항의 예시 답안

문항 1.1

(1) $8a^3+27b^3=(2a+3b)(4a^2-6ab+9b^2)$

(2) $x^4+3x^2y^2+4y^4=(x^2+xy+y^2)(x^2-xy+y^2)$

(3) $x^4-4x^3-10x^2+28x-15=(x-1)^2(x+3)(x-5)$

문항 1.3

<대수학의 기본정리>

모든 복소 계수 다항식은 적어도 한 개의 근을 갖는다.

문항 1.5

다항식 $P(x)=x^{10}+a_9x^9+\cdots+a_1x+12$가 0이 되는 서로 다른 10개의 정수해를 갖는다면

$P(x)=(x-b_1)(x-b_2)\cdots(x-b_{10})$꼴로 인수분해 될 것이다. 계수 비교를 하면 $b_1\times b_2\times\cdots b_{10}=12$이기 때문에 $b_i(1\le i\le 10)$으로 가능한 수는 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$이다. 그러나 12개의 수 중 10개의 수를 뽑아 곱하면 12가 되지 않는다. 따라서 곱해서 12가 될 수 있는 수를 최대한 많이 뽑는다면 $\pm1, \pm2, +3$가 가능하므로 주어진 다항식이 0이 되는 가능한 서로 다른 정수 해는 최대 5개이다.

문항 2.1

이차방정식 $ax^2+bx+c=0$은 근의 공식으로부터 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$를 근으로 갖는다. 그런데 b는 실수이므로 $b^2\ge0$이고 $ac<0$이기 때문에 $-4ac>0$이다. 따라서 $b^2-4ac>0$이고 $\sqrt{b^2-4ac}$는 0이 아닌 양의 실수이기 때문에 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

문항 2.3

(1) Eisenstein's criterion 이용

Eisenstein's criterion: 다항식 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\in Z[x]$ $(a_n\neq 0, n\geq 1)$은 적당한 소수 p에 대해 $p\nmid a_n$, $p\mid a_i(0\leq i\leq n-1)$, $p^2\nmid a_0$이면 정수(또는 유리수) 범위에서 인수분해 되지 않는다.

따라서 다항식 $P(x)=x^5-6x^4-3x^2-12$은 소수 3에 대하여 $3\nmid 1$, $3\mid -6$, $3\mid -3$, $3\mid 12$, $9\nmid 12$이므로 정수범위에서 인수분해 되지 않는다.

(2) 귀류법 이용

다항식 $P(x)$가 정수 범위에서 인수분해가 된다면 (일차식)×(사차식) 또는 (이차식)×(삼차식) 꼴로 표현될 수 있다.

(ⅰ) 만약 다항식 $P(x)$가 정수 범위에서 일차식 $x-\alpha(\alpha$는 정수$)$을 인수로 갖는다면 α는 $\pm1, \pm2, \pm3, \pm4, \pm6, \pm12$ 중 하나이다. 그러나 α가 음의 정수라면 $P(\alpha)<0$으로 불가능하고, $0\leq\alpha\leq 6$이면 $P(\alpha)=\alpha^4(\alpha-6)-3\alpha^2-12<0$으로 불가능하다. 그리고 $P(12)\neq 0$이므로 모순이다. 따라서 $P(x)$는 일차식을 인수로 갖지 않는다.

(ⅱ) 만약 다항식 $P(x)$가 정수 범위에서 이차식 x^2+ax+b을 인수로 갖는다면

$P(x)=(x^2+ax+b)(x^3+cx^2+dx+e)(a,b,c,d,e$는 정수$)$ 꼴로 표현할 수 있다. 계수비교를 하면

$$\begin{cases} a+c=-6 \\ ac=-b \\ be=-12 \\ bd+ae=0 \\ ad+e=-3 \end{cases}$$

을 만족해야 한다. 만약 $a+c=-6, ac=-b$에서 a,c는 이차방정식 $x^2+6x-b=0$의 정수근이다. 이차방정식 $x^2+6x-b=0$이 정수인 근을 갖기 위해서는 $9+b$가 제곱수이며 0보다 크거나 같아야 하고, 이 때 b는 12의 약수이어야 한다. 그러나 b로 가능한 수

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 6, \pm 12$ 중 $9+b$에 대입했을 때 이 조건을 만족하는 수가 없으므로 모순이다. 따라서 $P(x)$는 이차식을 인수로 갖지 않는다.

따라서 다항식 $P(x)$는 정수 범위에서 인수분해 되지 않는다.

문항 2.5

우리가 배운 수들을 포함관계로 나타내면 '자연수⊂유리수⊂실수⊂복소수' 이고 복소수는 가장 큰 범위의 수이다. 따라서 $x^2=i$를 만족하는 x의 값은 복소수이기 때문에 $a+bi(a, b$는 실수$)$의 꼴로 나타낼 수 있다.

$x=a+bi(a, b$는 실수$)$로 두고 방정식을 풀어보자.

$(a+bi)^2=(a^2-b^2)+i(2ab)=i$ 이므로 계수 비교를 하면 $a^2=b^2$, $2ab=1$ 이다.

(i) 만약 $a=b$이면 $2a^2=1$이므로 $a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$이고

$b=a=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\pm\frac{\sqrt{2}}{2}i$가 해이다.

(ii) 만약 $a=-b$이면 $-2a^2=1(a$는 실수$)$이므로 모순이다. 따라서 해는 $\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ 모두 해가 되지만 서로 다른 두 수를 하나의 기호 $\sqrt{i}$로 표기하면 오해의 소지가 있기 때문에 $\sqrt{i}$라는 표현은 우리가 다루지 않는다.

문항 3.1

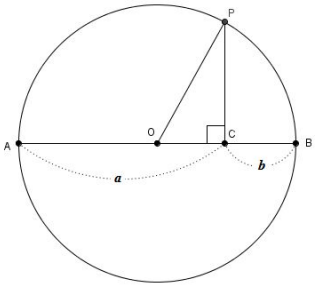
(i) 대수적 증명

$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}\geq 0$임을 보이자.

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{a-2\sqrt{ab}+b}{2}$$
$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}$$

a, b는 양의 실수이므로 $\sqrt{a}-\sqrt{b}$는 실수이고, $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geq 0$이다. 따라서 $\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \geq 0$이므로 $\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab} \geq 0$이고, $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$이다. 이 때 등호는 $\sqrt{a}=\sqrt{b}$ 즉, $a=b$일 때 성립한다.

(ii) 기하적 증명



오른쪽 그림과 같이 길이가 $a+b$인 선분 AB을 지름으로 하는 원 O가 있다. 이때 반지름의 길이는

$\overline{\mathrm{OP}}=\frac{a+b}{2}\cdots$①

$\overline{\mathrm{CP}}^2=\overline{\mathrm{AC}}\cdot\overline{\mathrm{BC}}$이므로 $\overline{\mathrm{CP}}=\sqrt{ab}\cdots$②

$\overline{\mathrm{OP}} \geq \overline{\mathrm{CP}}$이므로 ①, ②에 의하여 $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$이다.

문항 3.3

n개의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대하여 $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ 이 성립한다. 이 때 등호가 성립할 조건은 $a_1=a_2=\cdots=a_n$이다.

문항 3.5

정연은 산술-기하평균 부등식에서 등호가 성립할 조건을 고려하지 않고 부등식을 활용하여 문제를 해결하려고 하였다. 산술-기하평균 부등식에서 등호가 성립할 조건을 만족하려면 $x^2=\frac{2}{x}=\frac{4}{x}$이어야 하지만 이것을 만족하는 양수 x는 존재하지 않는다. 즉 이 경우에는

$\frac{6}{x}=\frac{a}{x}+\frac{b}{x}$로 나타내려고 했으면 $a=b$가 되도록 했어야 한다. 올바르게 해결하기 위해서는

$$x^2+\frac{6}{x}=x^2+\frac{3}{x}+\frac{3}{x} \geq 3\sqrt[3]{x^2\cdot\frac{3}{x}\cdot\frac{3}{x}}=3\sqrt[3]{9}$$

이고 특히 등호가 성립하려면 $x^2=\frac{3}{x}$를 만족해야 하므로 $x=\sqrt[3]{3}$이 된다.

ABSTRACT

Novice high school teachers' KAT: focusing on variables and expressions in 1st grade high school

Kim Young Ki
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

The teachers' expert knowledge could turn out to be profound education for their students. Teachers should be familiar with the knowledge demanded for conducting successful teaching and appropriately use the knowledge in teaching. Because teacher knowledge established during the beginning of their learning experience affects their teaching lives afterward, there is a need to investigate the nature of novice teacher knowledge. But in mathematics education, there has been little research on secondary teachers' knowledge. The purpose of this study is to investigate novice teachers' knowledge of algebra for teaching(KAT) and how they use the knowledge in a given teaching situation.

The participants of the study were seven novice high school teachers and they were asked to complete questionnaires. Pre- and post-interview were conducted with them for the deeper investigation. Based on international research items, Korean curriculum, textbooks, and teacher's guidebooks, three topics were selected and 18 questions were developed. The survey was carried out after the preliminary survey and expert reviews. The questions consist of KAT and use of KAT in a given teaching situation focused on specific knowledge. The responses were analyzed by the sample answer and the framework. The results of the study include the following.

First of all, the survey indicated that the novice teacher basically had completed their understanding in school knowledge(SK) while it showed their lack of comprehension in advanced knowledge(AK) and teaching knowledge(TK). The teachers didn't know as much as pre-service teachers understood because they didn't directly use AK in teaching, but they recognized the need for AK. The difficulty of TK questions was not demonstrated on responses but the teachers recognized lack of TK due to little experience in the post interview. Secondly, SK, AK and TK affect each other while being used in teaching. SK is the most basic knowledge needed as a teacher and TK is the most influential knowledge that determines contents and direction in teaching. Because of this, patterns of the use of SK and AK were determined.

Prior researches showed a one-way relationship among content knowledge, whereas this study showed interdependent relationship among knowledge. Since the teachers lack of AK and TK, there is a need to make professional development programs that connect with actual teaching practice. If teachers only learn advanced mathematics, they soon forget that knowledge and this situation will be repeated. For this reason, programs that learn about what teachers must know for teaching, how to

teach and how to use their knowledge are needed. It is also important for novice teachers to get a practical education which includes interaction with other teachers, makes use of a variety of teaching methods and materials, and allows for actual experiences.

Keyword: teacher knowledge, use of knowledge, KAT
Student number: 2012-21413