교육학석사학위논문

예비수학교사의 부등식 증명구성에 관한 분석

- 코시-슈바르츠 부등식을 중심으로 -

2016년 2월

서울대학교 대학원

수학교육과

곽 문 영

예비수학교사의 부등식 증명구성에 관한 분석

- 코시-슈바르츠 부등식을 중심으로 -

지도교수 권 오 남

이 논문을 교육학석사학위논문으로 제출함

2015년 12월

서울대학교 대학원

수 학 교 육 과

곽 문 영

곽문영의 석사학위논문을 인준함

2015년 12월

위 원 장	최 영 기	(인)
부 위 원 장	유 연 주	(인)
위 원	권 오 남	(인)

국문초록

예비수학교사의 부등식 증명구성에 관한 분석

- 코시-슈바르츠 부등식을 중심으로 -

수학에서 증명이란 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 중요한 수학적 소양 중 하나이다. 수학적 증명은 엄밀한 수학적 기호를 통해 표현된 정의와 정리, 즉 형식적 개념을 연역하여 정당화하는 증명의 표현양식을 따른다. 그러나 증명을 구성하는 과정에서는 예시를 통해 직관적으로 파악하기도 하고 식을 간단하게 표현할 수 있는 방법을 찾기도 하는 등의 다양한 추론 전략이 나타나며 이에 따라 증명 구성을 구문론적 증명과 의미론적 증명으로 분류할 수 있다. 구문론적 증명은 증명의 표현 양식 내에서 증명의 전개 구조를 선택하고 기존에 형식적으로 정립된 정의와 정리, 논리적 연역 규칙을 적용하여 가정들로부터 새로운 결론을 이끌어내는 증명이다. 의미론적 증명은 증명의 표현 양식 외의 다른 표현 양식과 명제 등을 증명 구성에 연결함으로써 명제를 의미적으로 이해하고, 다른 대안적인 표현 양식 안에서 명제가 왜 참이 되는 지를 설명하는 이유를 찾고, 이를 기반으로 증명의 표현 양식에 맞게 작성된 증명이다.

이에 본 연구는 예비수학교사들을 대상으로 사례 연구를 실시하여 코시-슈바르츠 부등식을 어떻게 증명하는지 그 증명방법을 분류하고 증명에 필요한 수학적 개념을 이해의 관점에서 분석하였다. 그 결과 코시-슈바르츠 부등식과 같은 절대부등식의 증명에서도 구문론적 증명과 의미론적 증명으로 분류할 수 있었다.

우선 6명의 연구참여자의 증명은 총 7개의 유형으로 분류할 수 있었다. 이중 4개는 구문론적으로 증명이며 3개는 의미론적으로 증명이다.

구문론적으로 증명을 구성한 연구참여자들은 유사한 명제에 대한 증명 경험을 토대로 증명 계획 수립이 즉각적으로 이루어졌다. 또한 증명의 전개과정에서 사용된 개념들은 증명의 표현양식을 따르는 형식적인 개념 정의였으며 기호나 도구를 이용하여 증명의 과정들을 연결하였다. 특히 구문론적 증명을 성공적으로 수행한 연구참여자들은 n차항을 가진 코시-슈바르츠 부등식을 유능하게 전개하였다. 복잡한 식을 치환하거나, $\sum$와 벡터로 표현을 간단히 바꾸어 식의 구조를 파악하였으며 이는 증명을 연역적으로 서술하는데 영향을 미쳤다.

의미론적으로 증명을 구성한 연구참여자들은 증명 계획을 수립할 때 부등식의 좌변과 우변을 벡터로 표현하면 그 크기를 비교할 수 있는 개념 이미지를 사용할 수 있다는 아이디어를 떠올렸다. 증명의 전개과정에서는 좌변과 우변의 크기를 시각화하는 그림을 그린 뒤 증명의 표현양식에 맞게 기호를 사용하여 증명을 구성하였다. 특히 이 과정에서 그림을 통해 명제가 참임을 확인하는 과정이 일어났다. 즉, 코시-슈바르츠 부등식이 성립함을 보일 때 전개해야 할 식과 비교해야 할 대상 모두에 초점을 둔 참여자들은 증명 계획을 세울 때 또는 증명 구성 과정에서 어려운 점에 도달하였을 때 좌변과 우변의 크기를 비교할 수 있는 개념이미지를 사용하였음을 알 수 있었으며 연역적 증명을 구성하기 위해 떠올린 개념 이미지를 다시 증명의 표현 양식으로 변환할 수 있었다.

수학자는 형식적이고 추상적인 증명을 구성해 낼 필요가 있지만 수학교사는 증명을 통해 학생들에게 개념을 보다 풍부히 이해시킬 필요가 있으므로 구문론적 증명 구성뿐 아니라 의미론적 증명 구성에 익숙해질 필요가 있다. 절대부등식의 의미론적 증명 구성을 하는 연구참여자들은 절대부등식을 전개해야 할 식으로 봄과 동시에 좌변과 우변을 비교할 수 있는 개념이미지를 떠올렸으며 떠올린 개념이미지를 적절히 수학적 표현으로 바꾸어 증명의 표현 양식으로 나타냄을 알 수 있었다.

주요어: 절대부등식, 구문론적 증명, 의미론적 증명
학 번: 2013-23371

목 차

표 목 차

그 림 목 차

I. 서론

1. 연구의 목적 및 필요성

2015 개정 수학과 교육과정에서는 수학 학습을 통해 길러야 할 역량으로 문제 해결, 추론, 창의・융합, 의사소통, 정보 처리, 태도 및 실천의 6가지 수학교과 역량을 선정하였다. 이 중 추론은 수학적 사실을 추측하고 논리적으로 분석하고 정당화하며 그 과정을 반성하는 능력이다(교육부, 2015).

추론 및 증명은 패턴 찾기, 구조화하기, 통제하기 등 다양한 현상 또는 수학적 상황에 대해 수학적으로 표현하는 강력한 방법으로 전학년에서 중요하게 다루어야 할 중요한 소양 중 하나이다(NCTM, 2000). 또한 수학에서 증명하는 활동은 수학적 사고활동에 문제해결만큼 중요한 부분이며 본질적인 특성이라고 할 수 있는바 증명은 문제해결과 더불어 수학적 사고활동의 핵심이다(우정호, 박미애, 권석일, 2003). 따라서 증명의 구성과정을 질적으로 분석해 보는 연구는 수학적 사고 활동을 분석하게끔 해준다는 점에서 꾸준한 연구가 필요하다.

추론 및 증명의 역할에 대해 Knuth(2002)는 명제가 참임을 확인하기, 왜 이 명제가 참인지를 설명하기, 수학적 지식으로 의사소통하기, 새로운 수학을 발견하거나 발명하기, 명제를 공리체제로 체계화하기로 제안하였다. 따라서 교사는 증명의 다양한 역할을 이해하고, 증명 구성을 통해 명제가 참임을 확인하는 것뿐만 아니라 다양한 수학적 지식을 증명과정에서 사용하면서 수학적으로 의사소통할 수 있도록 증명을 구성할 필요가 있다.

그러나 여러 선행연구들에서는 예비교사가 증명을 이해하고 수행하는데 있어 여러 어려움을 보인다고 지적하고 있다(신경희, 2005; 이정곤 & 류희찬, 2011; Martin & Harel, 1989; Harel & Sowder, 1998; Knuth, 2002; Selden & Selden, 2003; Alcock & Weber, 2004). 예비교사가 증명

교육에서 갖는 문제점은 수학적 증명의 이해가 부족하거나, 기호나 용어의 의미에 대한 고려 없이 절차적으로 증명하거나 수학 개념에 대해 이해를 하지 못하고 있다는 것이다. 즉, 예비수학교사의 증명에 대한 선행 연구를 볼 때, 증명을 성공적으로 구성하는 예비교사가 어떻게 개념을 이해하며, 증명을 구성하는지 살펴보고 그 관련성을 설명할 필요가 있다.

한편 절대부등식의 증명은 증명 그 자체로서 수학적 의미를 가지며, 또한 다른 증명과정에서 활용된다는 점에서 중요하다(Hardy, Littlewood & Polya, 1952; Kazarinoff, 2014). 절대부등식에 대한 국내의 선행 연구로는 오개념을 분석한 연구(김혜은, 2010)와 절대부등식의 다양한 증명방법에 대한 연구(한인기, 2003)가 진행된 바 있다. 학생의 문제해결능력 및 오류유형을 분석한 선행 연구 결과, 학생들의 절대부등식에 대한 개념 이해가 상대적으로 부족하다는 것이 드러났다. 따라서 교사는 절대부등식에 대한 충분한 개념 지도를 해야 하며, 절대부등식의 형식화된 대수적 표현의 의미를 관계적으로 이해하도록 지도할 수 있어야 한다(김혜은, 2010).

또한 부등식에 대한 학생들의 이해와 오개념에 대해 분석한 국외의 연구들(Bicer, Capraro & Capraro, 2014; Tsamir& Almog, 2001; Tsamir, Pazzini, 2004)은 학생이 부등식에 대해 더 잘 이해할 수 있도록 가르치는 하나의 방안으로서 교사가 부등식의 다양한 표현을 이해하고 사용하는 것을 제시하였다. 이에 앞서 예비교사가 부등식의 표현을 어떻게 이해하고 있으며 부등식의 이해가 부등식의 사용에 어떤 관련이 있는지를 분석해 볼 필요가 있다.

본 연구에서 사용한 코시-슈바르츠 부등식은 절대부등식 중에서도 최댓값, 최솟값을 찾는 문제, 또는 증명에서 자주 사용되는 기본적이면서도 중요한 절대부등식이다(Hardy, 1930). 또한 산술-기하 평균 부등식이 다양한 증명 방법을 가진 것처럼 코시-슈바르츠 부등식 역시 다양한 증명 방법을 가진 부등식인데 이 부등식에 대한 연구는 이루어지지 않았다.

코시-슈바르츠 부등식은 세 수학자의 노력을 통해 역사적으로 발달하였으며 실수를 사용한 대수적 표현방법과 벡터를 사용한 기하적 표현방법 등을 가진 부등식으로 다양한 수학적 개념을 연결하여 코시-슈바르츠 부등식을 이해할 수 있다(Steel, 2004). 즉, 코시-슈바르츠 부등식은 증명방법에 따라 수학 개념의 다양한 이해를 볼 수 있다는 장점이 있다. 이에 본 연구는 예비교사의 절대부등식에 대한 이해와 증명에 대한 분석의 필요성을 느끼고 부등식 중에서도 중등수학과 대학수학에서 모두 다루어질 수 있으며 절대부등식 중 기본부등식이라 불릴 수 있는 코시-슈바르츠 부등식에 초점을 두고자 한다.

2. 연구문제

본 연구에서는 증명을 성공적으로 구성하는 예비교사가 수학적 개념을 어떻게 이해하고 증명을 구성하고 있는지 분석하기 위하여 코시-슈바르츠 부등식에 대한 증명 과정을 분석하였다. 이 목적을 달성하기 위한 연구문제는 다음과 같다.

연구문제. 예비수학교사는 코시-슈바르츠 부등식에 대한 증명을 어떻게 구성하는가?

본문은 총 5개의 장으로 구성되어 있다. Ⅰ장은 서론으로 연구의 목적, 필요성 및 연구문제를 제안한다. Ⅱ장은 코시-슈바르츠 부등식의 이해와 증명 구성에 대한 이론적 배경을 담고 있다. 이는 연구 방법과 연구 결과의 해석을 이해하기 위한 기반이 된다. Ⅲ장은 연구 방법을 기술하였다. 연구 참여자, 과제 개발과 같은 연구 절차와, 자료 분석 및 해석을 위한 준비를 설명하여 결과의 타당도와 신뢰도를 검증할 수 있음을 보였다. Ⅳ장은 연구결과를 제시하였다. 연구참여자들이 증명을 어떻게 유형화하고 증명에 사용된 개념과 개념을 어떻게 사용하였는지 자세히 분석하였다. 또한 유형화된 증명에 따라 개념 이해가 어떻게 이루어졌는지 자세히 분석하였다. 이를 통해 증명 구성과 개념 이해의 관계를 도출하

고자 했다. Ⅴ장은 결론으로 연구를 요약하였으며, 연구의 의의, 한계점, 제언으로 마무리 지었다.

Ⅱ. 이론적 배경

본 연구는 최댓값, 최솟값을 찾는 문제를 해결하는 과정 또는 증명하는 과정에서 기본적이면서도 중요한 위치를 차지하고 있는 코시-슈바르츠 부등식과 관련한 연구이다. 이 장에서는 연구의 이론적 배경이 되는 코시-슈바르츠 부등식의 역사와 증명방법 등 다양한 경로를 통해 코시-슈바르츠 부등식을 이해한다. 그 후 증명 구성의 발달 과정과 증명 구성의 사고를 분석하는 선행연구를 통해 증명 구성 과정을 정리하고 부등식에 적용한다.

1. 코시-슈바르츠 부등식

1.1. 수학적 분석

학습이 지식을 차곡차곡 쌓는 것뿐 아니라 지식에 대한 비판적 태도를 형성하는 것이라면, 지식의 양이 아니라 어떤 개념이 왜 발생했는지, 어떤 역사적 조건 하에서 발생했는지 지식의 질적인 측면이 중요하다(계영희 외 역, 2006). 따라서 이 장에서는 코시-슈바르츠 부등식을 포함한 부등식의 발달과정을 통해 이해해 보고자 한다.

Fink(2000)에 의하면 부등식은 고대에서부터 일상생활에서 땅의 면적을 표현하기 위해 필요했으므로 기하적 영역이 먼저 발달하였다. 유클리드(Euclid)와 아르키메데스(Archimedes)를 포함한 수학자들에 의해 몇 개의 부등식(삼각부등식[1], 산술-기하 평균 부등식, 평면에서의 등주부등식[2])이 등장하였다. 부등식의 기호 ‘<’ 는 주로 영역의 크기를 비교하기 위해 사용된 것만 기록되어있고, 유일하게 대수적 관점에서 부등식의 기호를

1) 삼각형의 두 변의 길이의 합은 다른 한 변의 길이보다 항상 크다.
2) 길이가 L이고 평면에서 둘러싸는 넓이가 A인 폐곡선은 $4\pi A \leq L^2$을 만족하며, 곡선이 원일 때 유일하게 등호가 성립한다.

사용한 것은 아르키메데스가 π의 크기를 나타냈을 때이다. 즉, 초기의 부등식은 영역의 크기 비교와 미지의 것의 범위를 나타내기 위한 표현의 도구로 사용되었다.

고대에서 중세로 넘어가면서 기하적으로만 해석되었던 부등식을 점진적으로 대수적으로도 표현하였다. 1800년부터 1880년대 사이에 부등식은 뉴턴(Newton)과 코시(Cauchy)의 노력으로 인해 엄청난 발전을 이루었다 (Fink, 2000). 코시의 「Cours d’analyse」 노트 Ⅱ는 부등식의 대수적 기본성질을 다루는 것으로 시작한다.

> a, b가 두개의 같지 않은 양(quantities)이라 하자.
>
> 두 식 $a > b, b < a$은 첫 번째 양 a에서 두 번째 양 b을 빼는 것, 즉 그 차이 $a-b$는 양수($a-b > 0$)와 동등하게 표현할 수 있다.
>
> 이 기본 원리는 앞으로 진술할 명제들을 쉽게 세울 수 있다.
>
> …

그의 노트Ⅱ에 적혀있는 코시-슈바르츠 부등식과 관련한 내용이다.

정리 16. $a, a^{'}, a^{''}, \cdots,$ $\alpha, \alpha^{'}, \alpha^{''}, \cdots$ 와 같이 두 개의 양(quantities)의 수열이 있고 각 수열은 n개의 항을 가지고 있다고 하자. 만약 비율이

$$\frac{a}{\alpha}, \frac{a'}{\alpha'}, \frac{a''}{\alpha''}, \cdots$$

서로 같지 않으면, 그 합

$$a\alpha + a^{'}\alpha^{'} + a^{''}\alpha^{''} \cdots$$

은 곱

$$\sqrt{a^2 + a^{'2} + a^{''2} + \cdots} \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha'^2 + \cdots},$$

보다 작다. 따라서 우리는

$$\begin{cases} (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \cdots) \\ < \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots} \sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \cdots} \end{cases} \quad (30)$$

임을 알 수 있다.

코시부등식이 발견되었을 때의 기호적 표기의 특징은 '$<$' 기호를 사용하고 등호가 성립할 조건을 실수의 조건에서 배재하여 서술한 것이다. 현재의 코시-슈바르츠 부등식이 '$\leq$' 기호를 사용하고 등호가 성립할 조건을 추가한 것과는 다르다. 차이가 나는 이유는 코시가 코시부등식을 증명하는 과정을 통해 추측해 볼 수 있다.

다음은 코시가 코시부등식을 발견하고 증명한 과정이다.

증명

만약 $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \cdots$의 제곱에

$\frac{a}{\alpha}, \frac{a'}{\alpha'}, \frac{a''}{\alpha''}, \cdots$을 모든 가능한 방법으로 서로를 선택하여 분모들을 곱한 것의 차이의 제곱을 더하면,

즉 $(a\alpha' - a'\alpha)^2, (a\alpha'' - a''\alpha)^2, \cdots, (a'\alpha'' - a''\alpha')^2, \cdots$을 더하면

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \cdots)^2$$
$$+ (a\alpha' - a'\alpha)^2 + (a\alpha'' - a''\alpha)^2 + \cdots + (a'\alpha'' - a''\alpha')^2 + \cdots$$
$$= \left(a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots\right)\left(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \cdots\right)$$ 임을 알 수 있다.

따라서

$$(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \cdots)^2 < \left(a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots\right)\left(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \cdots\right)$$

이고 양 변에 이중근호를 씌우면 위 식(30)을 얻을 수 있다.

코시의 코시부등식 증명은 라그랑주 동일률(Lagrange Identity)[3]로 설명할 수 있으며 라그랑주 동일률은 항등식이다(Sommariva, 2008). 즉, 코시가 증명과정에서 사용한 좌변에 실수를 더해서 우변과 같게 만드는 식은 정교화하면 라그랑주 동일률과 같다. 또한 좌변에 더해지는 실수들이 0보다 크려면 등호가 성립하지 않을 조건이 필요하게 된다. 그러나 위 식이 참인지를 설명하기 위해서는 복잡한 계산과정이 필요하다.

코시가 발명한 코시부등식이 코시-번야코브스키-슈바르츠 부등식(이하에서는 간단히 코시-슈바르츠 부등식이라 부르기로 한다)이 되기까지의 발달 과정은 다음과 같다. 코시-슈바르츠 부등식은 1821년 코시에 의해 발명 및 증명되었고, 1829년에 선형과 초월 방정식의 근을 찾는 계산에

3) 라그랑주 동일률(Lagrange Identity) : $\sum_{k=1}^{n}(a_k b_k)^2 + \sum_{1 \le i < j \le n}(a_i b_j - a_j b_i)^2 = \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2$

이용되며 처음으로 중요하게 사용되었다(Cauchy, 1829). 코시-슈바르츠 부등식을 응용한 연구들은 합의 형태뿐만 아니라 적분의 형태로 쓰인 코시-슈바르츠 부등식을 많이 사용한다. 적분의 형태가 처음 나타난 것은 번야코브스키(Bunyakovsky)의 「Mémoire」이다. 1859년에 번야코브스키의 「Mémoire」에서는 코시 부등식을 간단한 유한합의 형태로 표현을 정리하였으며, 단순 곡선에서의 적분의 형태도 코시의 부등식을 만족함을 보였다. 「Mémoire」에 적혀있는 코시-슈바르츠 부등식과 관련한 내용이다.

$$\left(a_1^2+a_2^2+a_3^2+\cdots+a_n^2\right)\left(b_1^2+b_2^2+b_3^2+\cdots+b_n^2\right) >$$
$$\left(a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3+\cdots+a_nb_n\right)^2$$

위 식의 수 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$을 연속 함수 $\rho(x)$의 x는 x_0부터 X까지의 유한합이라 가정하고, $b_1, b_2, b_3 \cdots b_n$을 또 다른 연속함수 $\phi(x)$의 유한합이라 가정하면 극한을 취했을 때 위의 부등식은 다음으로 대체된다.

$$\int_{x_0}^{X}\rho(x)^2.dx.\int_{x_0}^{X}\phi(x)^2.dx > \left(\int_{x_0}^{X}\rho(x)\phi(x)dx\right)^2$$

이 식에서 $\rho(x)=\lambda\phi(x)$이면 등호가 성립한다. λ는 상수이다.

번야코브스키는 a, a'와 α, α'와 같은 코시부등식의 초기 기호형태에서 현재의 표현과 유사한 a_i, b_i로 정리하였다. 또한 극한의 아이디어를 사용하여 유한합을 무한합인 적분으로 확장하여 함수의 적분에서도 코시-슈바르츠 부등식이 성립함을 주장하였다. 그러나 엄밀한 증명은 제시하지 않았다. 이에 대한 증명은 슈바르츠(Schwarz, 1885)가 기발한 증명의 아이디어를 떠올리면서 해결되었다. 슈바르츠는 코시의 부등식의 2차원적 적분 형태, 즉

$$\text{만약 } S \subset \mathbb{R}^2 \text{이고 } f: S \to \mathbb{R},\ g: S \to \mathbb{R} \text{ 이면}$$
$$\text{이중적분 } A = \iint_S f^2 dxdy,\ B = \iint_S fg dxdy,\ C = \iint_S g^2 dxdy \text{들은}$$
$$\text{반드시 } |B| \le \sqrt{A} \cdot \sqrt{C} \text{을 만족한다.}$$

을 보이는 과정에서 다음과 같은 함수를 사용하는 증명의 아이디어를 떠올렸다.

$$p(t) = \iint_S (tf(x,y) + g(x,y))^2 dxdy = At^2 + 2Bt + C$$

함수 $p(t)$를 사용한 증명은 함수 $p(t)$를 생각해내는 기발한 아이디어를 필요로 하지만, 함수를 정의하고 나면 증명과정을 쉽고 간단하게 수행할 수 있는 장점이 있다(Steele, 2004). 정리하면 코시-슈바르츠 부등식은 코시에 의해 증명된 절대부등식으로서 후에 번야코브스키와 슈바르츠에 의해 확장되고 일반화된 역사적 변화 과정을 가진 부등식이라 할 수 있다.

그 이후 1880년부터 1900년까지 많은 부등식들이 증명되었고, 부등식은 대수학의 기본적인 개념의 한 부분으로 여겨지기 시작하였다. 1900년부터 1930년대에 하디(Hardy)와 그의 동료들은 부등식에 대한 체계적인 연구를 시작하였고, 그 결과 「Inequalities」를 출판하였다. 많은 수학자들이 다양한 부등식을 증명해내면서 가장 기본이 되는 부등식을 선정할 필요성을 느낀 하디는 기본 부등식으로 선택하는 조건을 '기초적'이어야 한다고 정하고 기본 부등식은 '유한합'의 꼴로 표현될 수 있어야 한다고 주장하면서 기본 부등식의 예로 a와 b가 양수이고, $r = 1, 2, \cdots, n$과 같이 유한합일 때의 코시-슈바르츠 부등식을 언급하였다(Hardy, 1930).

$$\sum ab \le \left(\sum a^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum b^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

이와 같이 코시-슈바르츠 부등식을 역사적 발달과정과 비교하여 이해하는 것은 수학 개념을 보다 잘 이해할 수 있다. 공리화를 통해 이루어진 수학의 엄밀화와 추상화 및 대수학의 발전은 부등식의 사용에 영향을 주었다. 대수적 기본 성질을 이용한 여러 절대부등식을 증명은 좌변과 우변의 실제적인 크기를 비교하는 것이 아닌, 실수의 성질을 이용한 식의 전개가 가능한지를 알아보는 과정이 되었다.

본 연구에서 다루고자 하는 코시-슈바르츠 부등식의 일반적인 표현은 실수의 유한합 꼴이다. 대학교재에서는 실수의 유합합의 표현을 $\sum$를 사용하여 간편하게 표현하는 경우도 있고 벡터의 내적으로 표현하는 경우도 있다. 본 연구에서 코시-슈바르츠 부등식의 일반적인 표현을 덧셈기호를 사용한 유한합의 형태로 선정하였다. 실수의 유한합의 표현을 기본적인 표현으로 선택한 이유는 고등학교 교과서의 순서 상 수열의 급수 단원에서 $\sum$ 기호를 배우기 전에 절대부등식의 예로 다루어지기도 하며 또한 코시-슈바르츠 부등식의 역사적 발달과정을 고려하였다.

임의의 실수 $a_i, b_i \in \mathbb{R}\ (i=1,2,\cdots,n)$에 대하여 $a_1b_1 + a_2b_2 \cdots + a_nb_n \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$ 는 항상 만족한다. 단, 등호가 성립할 필요충분조건은 $\dfrac{b_i}{a_i} = k\ \ (i=1,2,\cdots,n)$일 때이다.

역사적 발달과정에서 코시-슈바르츠 부등식은 그 자체로도 기본부등식이라는 의미가 있지만 무한합으로 확장된 형태(적분 형태)도 수학적 발달의 중요한 도구로 사용되었으며 그 의미가 크다. 무한합으로의 확장은 적분의 형태(기초적분, Riemann 적분, Stieltjes 적분 모두 가능하다)로 표현할 수 있으며 다음과 같다.

임의의 적분가능한 연속함수 f,g에 대하여

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \le \left(\int_a^b f^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

단, 등호가 성립할 필요충분조건은 f,g가 일차종속일 때이다.

또한 코시-슈바르츠 부등식은 실벡터의 형태로도 표현이 가능하다. 벡터를 사용한 코시-슈바르츠 부등식의 표현법은 다음과 같다.

V가 실벡터공간이면, $V \times V$를 보내는 내적 함수 $(a,b) \mapsto \langle a,b \rangle$를 정의할 수 있고,
n차 벡터 $a,b \in V$에 대하여 $(a,b) \le |a| \cdot |b|$이 만족한다.
등호가 성립할 필요충분조건은 두 벡터 a,b가 $a = kb$를 만족할 때이다.

이와 같이 수학적 내용을 다양한 표현방법을 사용하여 나타낼 수 있다. Skemp(1982)는 수학의 기호 체계는 표면적 구조이고 이와 밀접하게 연결된 개념 구조는 내면적 구조라고 하였다. 이처럼 코시-슈바르츠 부등식의 다양한 표현은 다양한 개념 구조들을 연결시켜 수학적 아이디어로 진행할 수 있게 해준다. 특히, 벡터의 내적 개념을 사용한 표현은 복잡한 대수식을 간단하게 정리할 수 있다는 장점이 있다. 또한 벡터는 머릿속에서 실제로 크기 비교가 가능하도록 개념을 생성할 수 있기 때문에 대수식보다 시각적으로 크기 비교를 용이하게 할 수 있다.

1.2. 교수학적 분석

김병무(2005)는 여러 가지 평균들의 부등식과 산술-기하평균 부등식에 대한 다양한 증명방법을 소개하였다. 또한 여러 가지 평균의 도입과 부등식의 관계를 기하학적 방법으로 증명하여 시각적인 도움이 흥미를 불

러일으키고자 하였다. 즉, 다양한 증명을 통해 새로운 도전을 하도록 하며 사고의 폭을 넓히는데 도움을 주고자 하였다.

여러 가지 증명 기술을 보여주는 것에 대한 수학교육적 의의는 수학적 개념의 더 깊은 이해를 가능하게 할 뿐만 아니라(Zhonghong & George, 2012), 수학에 대한 좋은 느낌을 갖게 하며 지적호기심과 창의력 함양에 수학이라는 도구를 이용하여 동참할 기회를 갖게 하는 것이다.

한인기(2001)는 코시부등식[4]

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

에 관한 연구에서 교사가 그 항의 수를 n개의 양수 $a_1, a_2, \cdots, a_n$에 대한 부등식으로 확장할 수 있는 것은 학생에게 확산적인 다양한 사고를 가능하게 한다고 보았다. 교사가 일반화된 n항 코시부등식의 다양한 증명과 활용과정을 아는 것은 학생들에게 필수적이지는 않지만, 교실에서 수학을 지도할 때 마음의 여유가 생길 수 있는 내용에 해당되며, 교수-학습 과정에서 발생하는 '왜'라는 질문에 대해 교사가 자신 있게 대답할 수 있다. 또한 수학에 좀 더 관심 있는 학생들에게는 수학적 사고의 한 유형인 '일반화'를 경험할 수 있는 기회를 제공할 수 있다.

이와 같이 코시-슈바르츠 부등식은 다양한 방법으로 증명할 수 있는데, 그 방법을 수학 내용 영역으로 분류해 보면 크게 대수적 방법 증명, 기하적 방법 증명, 해석적 방법 증명, 타 부등식으로의 유도 증명, 수학

---

4) 수학에서 코시부등식이라고 불리는 세 가지 다른 부등식이 있다. 본 연구대상인 코시-슈바르츠 부등식 $\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \le \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k^2$과, 산술-기하평균 부등식의 확장인 $\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$, 혹은 복소평면 $\mathbb{C}$의 한 점 a에서 정규 해석 함수(regular analytic function) $f(z)$에서 $|f^{(k)}(a)| \le k! \frac{M(r)}{r^k}$이 있다. $M(r)$은 원 $|z-a| = r$에서 $|f(z)|$의 최댓값이고, r은 $f(z)$가 정규 해석인 폐원반 $U = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| \le r\}$의 반지름이다.

적 귀납법을 사용한 증명 등으로 분류할 수 있다(Wu & Wu, 2009). 다양한 증명방법 중 적절할 표기법을 사용하면 고등학교 수준에서도 증명할 수 있는 방법을 정리하면 <표Ⅱ-1>과 같다.

<표Ⅱ-1> 코시-슈바르츠 부등식의 증명방법

	증명법
대수적방법증명	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j - a_jb_i)^2$ $= \sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{j=1}^{n}b_j^2 + \sum_{i=1}^{n}b_i^2\sum_{j=1}^{n}a_j^2 - 2\sum_{i=1}^{n}a_ib_j\sum_{j=1}^{n}b_ja_i$ $= 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_j\right)^2$ 여기서 좌변의 실수의 제곱의 합은 항상 0보다 크거나 같다는 성질에 의하여 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_j\right)^2$ 이 만족한다.□
기하적방법증명	$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 벡터를 두자. $\alpha \bullet \beta = \lvert\alpha\rvert\lvert\beta\rvert\cos(\alpha.\beta)$, $\lvert\cos(\alpha.\beta)\rvert \leq 1$이고, $\lvert\alpha\rvert\lvert\beta\rvert \geq 0$이므로 위 식은 $\alpha \bullet \beta = \lvert\alpha\rvert\lvert\beta\rvert\cos(\alpha.\beta) \leq \lvert\alpha\rvert\lvert\beta\rvert$라 할 수 있다. 표현을 바꿔보면 $\alpha \bullet \beta = \sum_{i=1}^{n}a_ib_i$이고, $\lvert\alpha\rvert^2 = \sum_{i=1}^{n}a_i^2$, $\lvert\beta\rvert^2 = \sum_{i=1}^{n}b_i^2$ 이다. 따라서 코시 슈바르츠 부등식을 증명하였다.□
해석적방법증명	다음 이차 함수 $f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)x + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n}(a_ix - b_i)^2$는 실수 내의 모든 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이므로, $f(x)$의 판별식은 0보다 작거나 같아야 한다. 따라서 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) \leq 0$ 이 만족한다.□

수학적 귀납법	$n=1$일 때는 자명하다. $n=2$일 때 $(a_1b_1+a_2b_2)^2 = a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2$ $\le a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2 = \left(a_1^2+a_2^2\right)\left(b_1^2+b_2^2\right)$ 를 만족한다. $n=k$일 때 코시-슈바르츠 부등식이 성립한다고 가정하면 즉, $\left(\sum_{i=1}^{k} a_ib_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right)$ 이 식을 만족하면 $\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2}$ $\ge \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2} + \lvert a_{k+1}b_{k+1}\rvert$ $\ge \sum_{i=1}^{k} \lvert a_ib_i\rvert + \lvert a_{k+1}b_{k+1}\rvert = \sum_{i=1}^{k+1} \lvert a_ib_i\rvert$ 이다. 따라서 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$ 이 만족한다.□

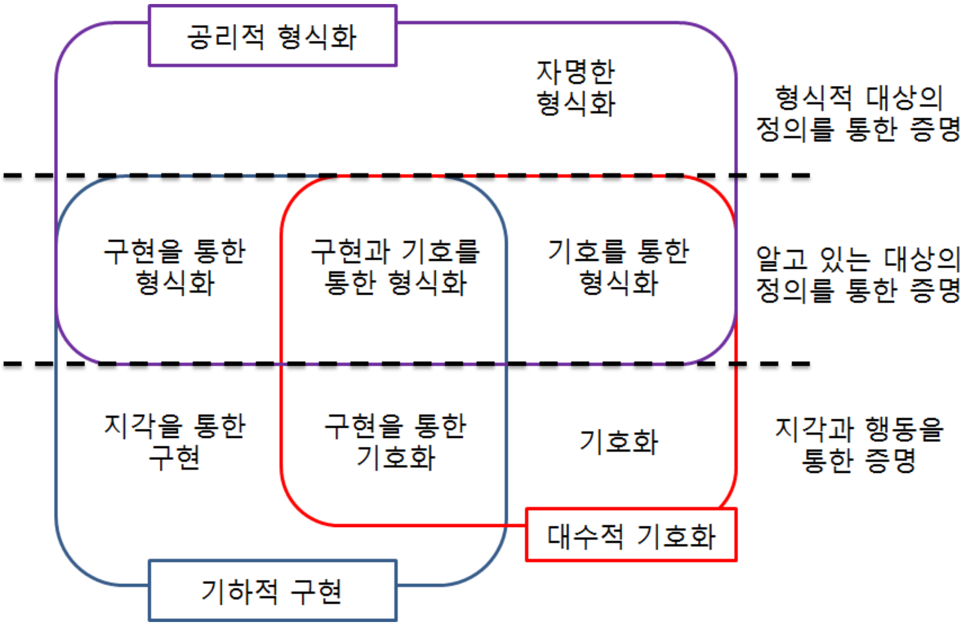
2. 수학적 증명의 구성

2.1. 개인의 증명 발달

Tall(2004, 2008)은 개인의 증명 발달 과정을 세 가지로 구분하였다. 즉, 행동과 대상에 대한 인식에서부터 공리적 수학으로 이행하는 형식적 증명의 인지 발달 과정을 '기하적 구현(geometric embodiment)', '대수적 기호화(algebraic symbolism)', '공리적 형식화(axiomatic formalism)'의 세 가지의 발달 형태로 구분하였다. 간략히 설명하면 기하적 구현이란 대상과 대상의 성질을 탐구하여 유클리드 기하 지식을 획득하고 이를 언어적으로 표현하면서 대상의 성질을 개념적 기호로 발달시킬 때까지의 과정을 의미한다. 대수적 기호화는 대수식을 연산할 대상에서 조작할 대상으로 인식하는 기호의 의미에 대한 전환이다. 예를 들

어 $2x+3$을 '어떤 수에 2를 곱하고 3을 더한다.' 라는 연산으로 보지 않고 증명의 전개과정에서 '조작해야 할 하나의 대상' 으로 보는 것이다. 공리적 형식화는 수학적 증명을 구성할 때 이론적인 공리들과 정의를 지식으로 사용하는 공리적 형식주의 수준으로의 발달을 의미한다.

구현, 기호, 형식의 세 단계는 수준의 차이는 존재하지만 인지과정에서 독립되어 발달하는 것이 아닌 혼합된 형태를 거치며 발달하며, 현 수준에서도 이전 수준의 단계가 증명 구성에 작용할 수 있다. 이와 같은 증명 개념의 발달 과정의 전체적인 뼈대(framework)를 구성하면 [그림 II-1]과 같다.



[그림 II-1]. Tall et al., (2012)의 증명 개념 발달 과정

[그림 II-1]은 열의 관점과 행의 관점으로 나누어 발달단계를 살펴보면 다음과 같다. '지각을 통한 구현' 에서는 물리적 도구를 가지고 놀면서 도구의 형체와 도구들 간의 관계를 성찰한다. 그 후 '구현을 통한 기호화' 에서는 도구에 대한 본인의 행동을 성찰하면서 구현과 기호의 혼합이 이루어진다. 예를 들어 연산 순서는 덧셈 성질에 영향을 미치지

않음을 확인하고 이 현상을 덧셈의 교환법칙과 같이 언어적 규칙으로 표현할 수 있다. 특정한 그림들은 일반화하여 비슷한 예의 포괄적인 묘사로도 인지할 수 있다. 증명 활동 역시 구현과 기호의 혼합으로 이루어진다. 그 후 '기호화' 에서는 세기와 같은 연산이 수의 개념으로 기호화된다. 예를 들어 $10+7=7+10$와 같은 구체적인 연산식은 $x+y=y+x$와 같이 대수식으로 일반화된다. 이러한 일반화는 대수학에서 지켜질 규칙으로 형식화되며 '구현을 통한 형식화', '구현과 기호를 통한 형식화', '기호를 통한 형식화' 를 거친다. 이처럼 아이는 성장하면서 지각을 통한 개념과 행동을 언어적 정의를 통하여 증명으로 변형시킨다.

[그림 Ⅱ-1]의 가로점선 표시는 중대한 인지적 변화를 의미한다. 아래의 가로점선은 기하학적 도형과 대수학의 연산규칙을 지각과 행동을 통해 추론하는 인지 수준과 정의에 기반하여 증명하는 인지 수준을 구분한다. 이 가로점선을 넘어가는 것은 증명의 첫 번째 인지적 전환이다. 예를 들어 대수학의 지수법칙인 $a^m \times a^n = a^{m+n}$은 m과 n이 정수일 경우 인수를 더하는 행동을 통해 직접적으로 구현하여 추론할 수 있지만 m과 n이 분수나 음수일 경우 규칙은 적용되지 않는다. 이제 지수법칙의 규칙을 정의를 사용하여 $a^{\frac{1}{2}}$와 a^{-1}의 의미를 추론할 수 있다. 이는 지각에 기반으로 한 성질의 추론에서 규칙을 기반으로 한 성질의 추론으로 의미를 바꾸어야 가능하다.

가로 점선의 가장 상위인 자명한 형식화는 적절한 정의와 연역의 과정을 거친 모든 형식적 증명을 포함한다. 모든 형식적인 증명이란 합동과 연산 규칙을 통한 대수적 증명과, 공리적 형식적 증명과 같은 기하학적 원칙을 통한 유클리드 증명을 포함하는 개념이다. 이는 형식화된 증명은 구현과 기호에 기반을 두되 맥락에 맞는 정제된 논리의 전략의 발전을 거치는 것을 의미한다.

형식적 증명의 중대한 발전은 힐버트(Hilbert)의 공리적 방법으로의 전환이다. 이제 수학적 대상들은 설정된 이론적 공리로 정의되고, 다른 성질들은 공리에서 추론되어야 하며 차후의 정의는 형식적인 수학적 증명을 통해 정의해야 한다. 이로 인해 플라톤의 사고실험에서 볼 수 있는

익숙한 도구나 정신적 개체에 기반을 둔 정의는 힐버트의 형식 이론처럼 필요한 공리가 만족되는 모든 맥락에 적용할 수 있는 형식적 정의로의 인지적 변화가 일어난다.

공리적 형식주의 수준에 도달했을 때 학생은 친숙한 개념의 범주에서 이들을 형식적 정의와 증명으로 구성할 수 있다. 공리적 방법을 처음 배우는 학생은 공리의 목록을 접하고 이를 사용하여 초기의 추론을 만들어야 한다. 이로써 연속적인 정리의 증명으로 이끄는 형식적 추론 관계의 지식 구조를 만든다.

위와 같은 증명의 성장 과정은 사이클을 형성한다. 즉, 형식화된 공리적 구조는 다시 특정한 구현을 일으키고 이와 관련된 연산을 가지는 것을 증명하는데 사용된다. 이러한 과정은 형식적 증명에서 공리학적 토대에 기반을 둔 구현과 기호화가 다시 발생함을 의미한다. 즉, 형식적 증명을 구성할 수 있는 수준에 도달했다 할지라도 구현과 기호화는 끊임없이 사고에 관여함을 알 수 있으며, 이는 2.2절의 구문론적 증명 구성과 의미론적 증명 구성을 뒷받침하는 이론적 배경이 될 수 있다.

2.2. 증명 스키마

이제 예비수학교사들이 증명을 할 때 어떤 스키마가 작용하는지에 대한 선행연구를 살펴본다. 수학에서 일반적인 증명 스키마란 논증의 중요부분을 좀 더 효과적으로 설득하는 수학적 증명이 무엇인지 이해하게 해주고 학생들의 답이 유효한 증명인지 혹은 아닌지를 판가름하게 해주는 기본적인 지식이다(Harel & Sowder, 1998, 2007).

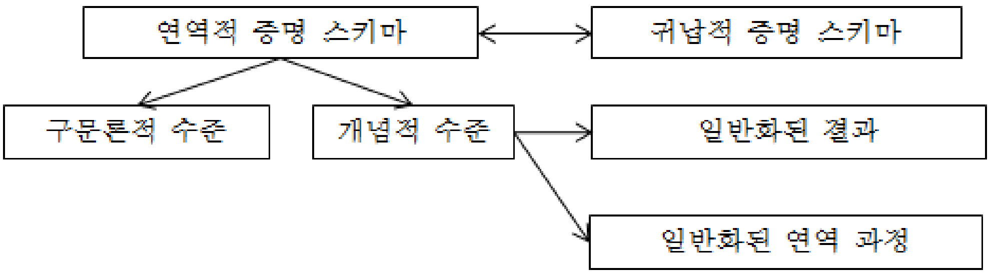
수학 증명스키마에 관해 진행되어온 연구는 다음과 같다. Martin & Harel(1989)는 101명의 예비초등교사들에게 익숙한 또는 익숙하지 않은 명제에 대한 귀납적이고 연역적인 증명을 보여주고 어떤 것이 수학적으로 옳은지 판단하는 연구를 진행하였다. 그 결과 절반 이상의 예비초등교사들이 귀납적 주장을 유효한 수학적 증명이라고 인식하였다. 이는 연역적 증명 이전에 생성되는 귀납적인 증명스키마[5]가 연역적 증명스키마

5) 원문에서는 schema라는 단어를 사용하지 않고 frame이라는 단어를 사용함

를 습득했다 하더라도 꾸준히 증명방법 중 하나로 기억되고 있음을 의미한다. 따라서 예비교사의 증명 스키마를 귀납적 스키마와 연역적 스키마로 분류하였다.

또한 연역적 증명을 잘 알고 있는 학생들 중에는 틀린 증명에 대해 증명의 표현이 엄밀하면 옳은 증명이라 판단하는 경우가 있었다. 이는 연역적 스키마에도 두 가지 수준 즉 ‘구문론적 수준(syntactic)’과 ‘개념적 수준(conceptual)’으로 구분할 수 있음을 의미한다. 구문론적 수준은 증명을 기호적으로 이해하는 수준이고 개념적 수준은 증명을 개념과 통합하여 이해하는 수준이다.

개념적 수준의 학생들 중에서도 특별한 증명방법을 귀납적 증명으로 판단하는 학생이 있고, 연역적 증명의 하나의 예시로 판단하는 학생이 있었다. 이처럼 개념적 수준의 연역 증명 스키마를 가진 학생 중에서도 증명을 일반화된 결과로서 이해하는 학생과 일반화된 연역의 과정으로 이해하는 학생으로 분류할 수 있었다. Martin & Harel(1989)의 증명스키마를 도식화하면 [그림Ⅱ-2]과 같다.



[그림Ⅱ-2] Martin & Harel(1989)의 예비교사의 증명스키마

또한 Harel & Sowder(1998)은 지식 구성 차원에서 대학생들의 증명 스키마를 좀 더 세분화하여 ‘외적인 형태에만 의존하는 증명 스키마’, ‘경험적 증명 스키마’, ‘연역적 증명 스키마’로 크게 분류하였다.

외적인 형태에만 의존하는 증명 스키마란 증명의 정당성을 판단하거나 증명을 구성할 때 증명의 근거가 모두 외적인 것이다. 교사나 교과서의 권위를 받아들이는 증명 스키마, 기호의 표현과 조작의 적합성만을 고려

하는 기호적 증명 스키마, 논증이 수학적 용어나 기호로 표현되기만 하면 수학적 증명으로 간주하는 관습적 증명 스키마로 생각하는 경우이다. 이는 증명이 형식적으로나 내용적으로도 타당해야 한다는 증명 개념을 완전히 갖지 못한 것으로 볼 수 있다. 이러한 학생들의 증명 구성 특징은 기호가 갖는 의미를 고려하지 않는 것인데, 그에 따라 잘못된 기호 조작을 하는 오류를 일으킨다.

경험적 증명은 구체적인 예를 이용하여 명제의 결론을 확인하거나 수치나 그림에 대하여 눈에 보이는 느낌으로 명제의 타당성을 확인하는 것이다. 이러한 증명양식을 가지고 명제를 증명했다고 판단하는 학생은 명제를 수학적으로 증명했다고 보기 어렵다.

연역적 증명 양식이란 논리적인 연역 수단을 사용하여 가설을 입증하는 것이다. 그러나 대학생의 수학적 증명의 이해정도가 연역적 증명 양식 수준까지 미치지 못함을 여러 학년 수준에서 행해진 광범위한 교수실험에 기초하여 드러내었고 연역적 증명 스키마를 획득하기 위한 증명교육이 필요함을 주장하였다.

2.3. 증명 구성

증명을 판단하는 증명 스키마에서 좀 더 증명의 구성 활동에 초점을 둔 Weber 와 Alcock의 연구를 요약해볼 수 있다. Weber(2001)는 학부생과 박사과정 학생의 증명을 비교하고 박사 과정 학생들은 수학적 개념의 ‘직관적인 이해’를 증명 전략에 이용함을 관찰하였다. 후에 Weber & Alcock(2004)는 ‘형식적 추론’의 의미와 ‘직관적 추론’의 의미를 분류하고 각각을 ‘구문론적 증명 구성(syntatic proof production)’과 ‘의미론적 증명 구성(semantic proof production)’으로 명명하였다. 구문론적 증명 구성이란 논리적으로 허용된 방법 안에서 정확히 진술된 정의와 관련된 사실들에 대한 조작만으로 증명을 구성한 것이다. 구문론적 증명 구성을 하는 사람은 다이어그램이나 수학적 개념의 직관적이고 비형식적인 표현들을 증명에 사용하지 않는다. 수학 공동체에서 구문론적

증명 구성은 '정의를 풀어쓰기' 나 '기호를 사용하기' 와 같은 증명의 구어체로 정의될 수 있다.

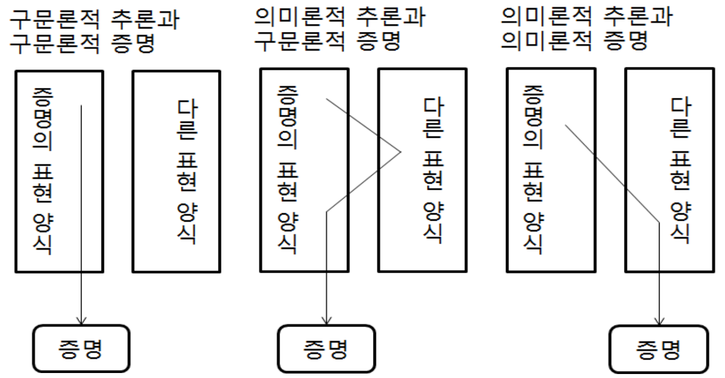
의미론적 증명 구성이란 증명과정에서 도달해야할 형식적 추론을 제안하고 안내할 수 있는 수학적 현상의 예시를 사용하여 증명을 구성하는 것이다. 의미론적 증명 구성을 하는 사람은 다이어그램이나 수학적 개념의 직관적이고 비형식적인 표현들을 증명에 사용한다. 증명 구성에서 예시의 사용은 수학적 현상에 대한 개인적인 생각들이 내부적으로 의미 있게 체계적으로 반복되고 있음을 의미한다.

이후 Alcock & Inglis(2008)은 박사과정 학생들이 증명 구성과정에서 예시를 사용하는 것을 관찰하고 예시가 증명의 최종적인 서술 과정에는 나타나지 않지만 개념을 이해할 때나 가설을 정당화할 때 사용되는 현상을 분석하고자 하였다. 즉, 최종적인 증명에는 형식적인 형태로 서술되지 않지만 증명 구성에 사용되는 예시도 증명의 한 부분으로 보고 '증명의 표현 양식(representation system of proof)' 과 '다른 표현 양식(other representation system)' 를 정의하였다. 증명의 표현 양식은 해석학의 증명처럼 허용된 규칙의 배열과 같은 일반화된 기호의 서술로 이루어져 있다. 증명의 표현 양식을 거치는 증명 구성은 구문론적 증명 구성을 통해서도 가능하고 의미론적 증명 구성을 통해서도 가능하다. 구문론적 증명 구성은 온전히 증명의 표현 양식 내에서만 이루어진다. 즉, 증명에 포함된 개념들을 알고 있는 규칙과 배열에 연관시키고 정의나 정리들 사이의 적절한 배열을 통해 기본적인 증명 방법을 구성한다.

반면 의미론적 증명 구성은 적어도 어떤 부분에서는 형식적인 증명 표현 양식이 아닌 다른 표현 양식이 사용된다. 즉, 증명 구성 과정에서 필요한 개념들을 의미론적으로 이해하는 과정에서는 예공간이나 개념과 관련 있는 특정한 예들을 탐구하는 활동이 일어난다. 이 과정에서는 증명의 표현 양식이 아닌 다른 표현 양식 영역으로 이동한다. 의미론적 증명을 성공적으로 구성하기 위해서는 예시를 통한 새로운 표현을 적절하게 증명의 표현 양식으로 변환하는 능력이 요구된다. 특이한 사항은 반례를 사용한 증명이다. 반례는 그 자체로 증명을 구성하므로 반례(일종의 예

시)가 다시 증명의 표현 양식으로 돌아갈 필요는 없다.

이와 같이 형식적이고 연역적인 증명을 완성하는 박사과정의 학생들도 증명을 구성할 때에 사용되는 추론 전략이 예시를 사용한 직관적인 추론 전략임을 관찰하고 증명 구성 과정에서 추론을 구문론적 추론과 의미론적 추론으로 또 다시 분류하였다. 구문론적 추론이란 사실이라고 알려진 정의와 명제를 사용하여 추론하는 것, 기본적인 증명 방법을 사용하여 추론하는 것 및 논리적인 연역과정을 통해 추론하는 것 등을 포함한다. 의미론적 추론이란 예시를 사용하여 추론하는 것, 제스쳐, 비형식적인 표현을 이용한 추론 등을 포함한다. 그 후 구문론적 증명 구성과 의미론적 증명 구성의 과정을 추론의 과정과 증명의 표현 양식으로 세분화하여 [그림 Ⅱ-3]과 같이 도식화하였다.



[그림 Ⅱ-3] Alcock & Inglis(2008)의 추론 전략과 증명의 표현 양식

Weber & Alcock(2004)가 구문론적 증명 구성과 의미론적 증명 구성을 수학교육의 측면에서 해석하기 위한 논의는 다음과 같다. 첫 번째는 설득하기와 설명하기이다. 두 번째는 도구적 이해와 관계적 이해이다. 세 번째는 개념 정의와 개념 이미지이다.

증명은 구성의 목적에 따라 '설득'을 위한 증명과 '설명'을 위한 증명으로 분류할 수 있다(Davis & Hersh, 1981; Hanna, 1990; Weber, 2002). 설득을 위한 증명이란 진술의 수학적 진실성을 얻기 위한 증명이

며 이러한 증명들은 매우 형식적이다. 설득을 위한 증명은 정의와 공리들의 집합에서 시작하여 아직 증명되지 않은 명제의 참을 보이는 것으로 끝난다. 즉, 설득을 위한 증명의 의도는 이 증명을 보는 사람에게 명제가 참임을 보이는 것이다. 논리적인 증명의 진행 과정을 점검하여 명제가 정말 참임을 확인할 수 있다(Weber, 2002). 이러한 관점에서 볼 때 구문론적 증명은 설득을 위한 증명에 가깝다. 구문론적 증명은 논리적으로 정확하다는 가정 하에 설명 없이 증명을 구성하며 증명된 진술을 보면 단순한 기호들의 나열로 보일 수 있다.

설명을 위한 증명이란 왜 그 결과가 참인지에 대해 직관적인 수준을 통해서라도 설명하는 증명이다. 설명한 위한 증명은 정의와 공리들의 집합에서 시작하여 직관적으로 명백하지 않은 명제의 참을 보이는 것으로 끝난다. 단 여기서 명제가 수학적으로 참임을 검증하는 것이 목적이 아니기 때문에 증명 구성은 엄격할 필요는 없다. 즉, 설명을 위한 증명의 의도는 왜 이 명제가 참인지를 직관적으로 설명하는 것이다. 증명의 주된 아이디어를 파악하며 증명을 직관적으로 이해할 수 있다(Weber, 2002). 의미론적으로 증명을 진술하는 사람은 형식적 조작과 대응시킬 수 있는 것들을 통한 예시를 떠올리고 이를 연관시켜서 증명을 구성한다. 즉 설득과 설명이 동시에 일어난다고 볼 수 있다.

Skemp(1976,1987)는 이해에 대해 새로운 상황과 이미 알고 있는 스키마를 동화시키는 것이라고 정의하고 이해를 도구적 이해와 관계적 이해로 분류하였다. 관계적 이해란 일반적인 수학적 개념들 간의 관계로부터 특정한 법칙 또는 절차를 연역해내는 능력이다. 즉, 관계적 이해는 새로운 상황에 적응 가능한 개념적 연결을 구성하는 것이다. 따라서 수학적 개념을 관계적으로 이해하면 새로운 과제에 보다 잘 적응할 수 있으며, 기억하기 쉽다. 도구적 이해란 어떤 문제를 해결함에 있어서 법칙이 왜 적용되는지 알지 못하지만 기억하고 있는 적절한 법칙을 적용해서 문제를 해결하는 능력이다.

구문론적 증명과 의미론적 증명 과정은 Skemp의 도구적 이해와 관계적 이해로 비유할 수 있다. 도구적 이해는 무엇을 해야 할지 아는 것이

고, 관계적 이해는 무엇을 해야 할지 그리고 왜 그런지를 모두 아는 것이다. 구문론적 증명을 구성하는 사람은 '무엇을' 해야 하는지에 대한 이해를 바탕으로 증명을 구성하고, 의미론적 증명을 구성하는 사람은 무엇을 해야 하는지에 대한 이해와 '왜' 해야 하는지에 대한 이해를 바탕으로 증명을 구성한다.

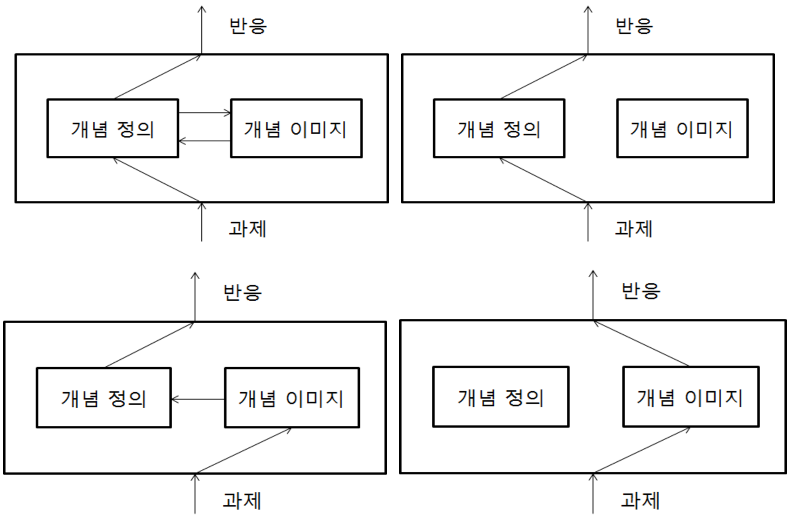
Skemp는 도구적 이해와 관계적 이해를 다음과 같이 비유하였다. 도구적 이해는 마치 그 마을의 고정된 길들을 알고 있는 것이다. 증명의 구성은 특정한 절차를 따르는 것 보다 개인의 결정이 많이 작용하는 수학적 과정이기에 고정된 길이라고 말하기 다소 어려운 점이 있으나, 구문론적 증명을 구성하는 사람을 그 길에 익숙한 사람이라고는 비유할 수 있다. 따라서 A지점에서 B지점으로 이동하는 경로를 찾을 때 익숙한 길을 따라 이동할 수 있다. 관계적 이해는 그 마을의 지도를 가지고 있는 것이다. 지도를 가지고 있으면 A지점에서 B지점으로 이동할 때 우선 지도에서 A지점과 B지점의 위치를 확인하고 길을 찾는다. 즉 예시를 사용하여 형식적 추론을 이끄는 것을 이동해야 하는 길을 지도를 통해 설명하는 과정으로 비유할 수 있다.

Tall & Vinner(1981)는 수학 개념을 형식적으로 기술된 정의와 정리에만 한정하지 않고 수학적 개념 형성의 개인적인 측면을 강조하였다. 즉, 수학적 개념은 형식적인 정의와 정리를 따르더라도 개인이 수학적 개념을 습득할 때에는 적절한 문맥 안에서 그 개념을 사용하고 경험하면서 이루어진다고 보았으며 그 과정에서 개인마다 생성되는 심상이 있음을 가정하였다. 이를 개념 이미지라는 용어로 설명하였는데 개념 이미지란 그 개념을 고려할 때 사용되는 모든 인지 구조이다. 모든 인지 구조란 개념에 대한 모든 심상과 관련된 성질과 절차를 포함하며 개인의 모든 경험을 통해서 형성될 수 있다. 즉, 수학적 개념의 예시와 같은 것이 개념 이미지가 될 수 있다.

개념 정의는 언어의 형태로서 개념을 명시하는 것이다. 개념 정의는 암기를 통해 배우기도 하지만 정의에 대해 개인적으로 의미를 부여하여 재구성하는 의미 있는 과정을 거치며 배울 수도 있다. 이러한 과정에서

개념 정의는 개인적 차원으로 재구성되는데 이를 개인적 개념 정의라 하며 개인화되지 않은 수학 개념 정의와 구분하기 위해 이를 형식적 개념 정의라 명명하였다. 개인적 개념 정의는 개념에 대한 개인 내부의 한 표현양식이므로 개념 이미지로도 볼 수 있다.

Vinner(1983)은 Tall & Vinner(1981)의 연구를 확장하여 함수 개념을 예시로 하여 수학적 개념에 대해 개인이 가지고 있는 개념이미지와 개념 정의를 인지 구조 내의 하나의 셀로 보고 인지적 과정을 [그림Ⅱ-4]와 같이 도식화하였다.



[그림 Ⅱ-4] Vinner(1983)의 개념정의와 개념 이미지의 발현 양상

[그림 Ⅱ-4]를 통해 과제가 주어졌을 때 개념 정의와 개념 이미지의 상호작용을 직관적으로 이해할 수 있다. 우선 과제가 주어졌을 때 개념 정의를 먼저 떠올릴 수도 있고, 개념이미지를 먼저 떠올릴 수도 있다. 또한 개념 정의나 개념 이미지만으로 과제에 대한 반응을 보일 수도 있다. 개념 정의와 개념 이미지가 서로 상호작용하며 반응을 구성할 수도 있다. 특히 수학적 의사소통 면에서 개인화된 개념이미지를 바로 반응하기 보다는 형식적 개념 정의로 다시 이동하여 반응을 표현하는 경향을 보임을 알 수 있다.

이러한 관점에서 볼 때 구문론적 증명 구성은 형식적인 개념 정의를 통해 증명을 구성하는 것이고, 의미론적 증명 구성은 개념 이미지를 사용한 증명 구성이라 할 수 있다.

Ⅲ. 연구방법

본 연구의 목적을 달성하기 위해서는 예비수학교사가 코시-슈바르츠 부등식을 증명해보고 증명과정에서 드러나는 수학 개념을 어떻게 사용하고 이해하는지에 따라 증명구성을 분류하는 것이 필요하다. 즉, 학생들이 가지고 있는 개념과 증명을 구성하는 동안 일어나는 사고의 심층적 분석이 요구된다. 따라서 본 연구는 소수의 사례를 가지고 심도 있게 알아보는 정성연구의 사례연구법을 선택하였다.

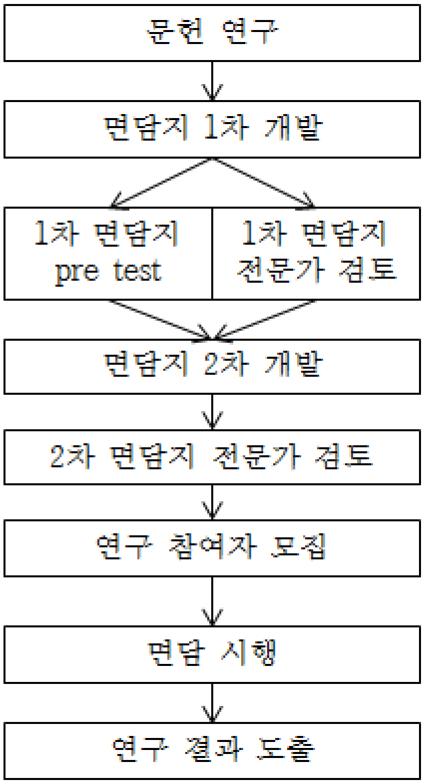
정성연구는 연구자가 자료를 해석한다는 점에서 근본적으로 해석적이다. 이는 연구자가 배경을 기술하고 면담자료를 분석하여 주제나 목록을 만들며, 개인적이고 이론적으로 그 의미에 대한 해석을 내리거나 결론을 도출하고 학습된 경험을 진술하고 후속 질문을 제공하는 것을 포함한다(Stake, 1995).

사례연구는 개인이나 사건, 집단과 같은 제한된 체계(bounded system) 또는 하나의 단위(single unit)을 심층적으로 탐구하는 것으로 연구자가 지속적으로 다양한 자료수집 절차를 통해 상세한 정보를 수집하고 분석하면서 상황과 그 저변에 있는 의미를 심층적으로 이해하는 과정으로 사례연구는 결론보다는 과정, 변수보다는 맥락, 확증보다는 발견에 관심이 있는 연구방법이다(Merriam, 1998, 2005).

본 연구는 예비수학교사의 증명과정을 분석하여 예비수학교사의 증명에서 나타나는 특징과 개념 이해에 대한 분석을 목적으로 하기 때문에 사례연구 방법이 이 연구의 목적과 부합하는 연구 방법이라고 판단하였다. 연구 절차, 연구 참여자, 자료 수집, 자료 분석에 대한 상세한 내용은 다음과 같다.

1. 연구 절차

본 연구의 절차는 [그림 Ⅲ-1]과 같다.



[그림 Ⅲ-1] 연구 절차

1.1. 과제 설계

예비수학교사의 부등식에 대한 이해와 증명 구성 과정을 분석할 수 있는 과제 제작을 실시하였다. 먼저 코시-슈바르츠 부등식의 역사와 다양한 표현법 및 증명방법을 알아보았다. 이를 바탕으로 예비수학교사의 코시-슈바르츠 부등식의 증명을 분석할 수 있는 면담지를 개발하였다. 면담지는 면담의 진행 과정 설명, 코시-슈바르츠 부등식에 대한 간단한 설명(역사적 발달 과정, 다양한 표현 방법) 그리고 증명과제로 구성되어 있다. 실제 면담지는 부록1로 첨부한다.

1차적으로 개발한 면담지(이하 1차 면담지)로 예비조사를 진행하여 면

담에 걸리는 총 시간과 면담 참여자가 느끼는 난이도 등을 확인하였으며 연구목적에 부합하는 답변을 얻을 수 있는지에 대한 면담지의 타당도를 검사하였다. 또한 전문가집단에게 1차 면담지를 검토 받고 면담지 수정 작업을 거쳤다. 2차로 개발된 면담지(이하 2차 면담지)에 대한 전문가 검토를 시행하여 면담지의 신뢰도를 높이고자 하였다.

덧붙여, 연구자는 본 수행결과 분석의 객관성과 신뢰성 확보를 위하여 참가자 대부분이 주어진 해당 주제에 대하여 이미 공부했고 주어진 문제를 정확하게 평가할 뿐만 아니라 코시-슈바르츠 부등식에 대하여 증명과 활용을 완성할 수 있다는 가설을 세우고 진행하였다. 또한 본 연구의 결과는 위의 조사 면담을 통하여 코시-슈바르츠 부등식의 증명에 대한 예비 교사들의 수행결과 분석에 초점을 두었다. 연구의 참여자는 모두 사범대 수학교육과 학생들이며 참가자의 나이, 성이나 다른 특징에 초점이 있는 것이 아니며 이 연구의 분석에 이와 같은 특징들은 고려되지 않는다.

1.2. 연구 참여자

본 연구 수행을 위한 표집 방법은 연구자가 탐구하고자 하는 과정에 대하여 접근할 수 있는 사례를 선택하는 의도적 표본 추출이다. 연구자가 의도하는 적절한 사례를 찾기 위해서는 사례 선정을 위한 기준이 마련되어야 한다. 본 연구는 예비수학교사인지, 과제로 주어지는 코시-슈바르츠 부등식을 증명할 수 있는지를 기준으로 연구참여자를 모집하였다.

연구 참여자 모집 과정 및 동의 과정은 A대학교 수학교육과에 재학 중인 예비수학교사 중 코시-슈바르츠 부등식에 관심이 있거나 알고 배워본 적 있는 예비수학교사들을 대상으로 하였다. 연구 참여자를 모집하기 위해 수학교육과 학과 게시판에 연구 목적과 과정 등을 작성한 모집문건을 게시하였다. 그 후 연구에 참여 의사를 밝힌 예비수학교사들을 모아 서면으로 연구동의를 받는 과정을 거쳤다.

이 연구의 참여자는 A대학교에 재학 중인 예비수학교사 6명이다. 연구

참여자의 배경은 <표Ⅲ-1>와 같다[6].

<표Ⅲ-1> 연구 참여자가 수강한 수학 과목

	참여자 1	참여자 2	참여자 3	참여자 4	참여자 5	참여자 6
해석개론1	○	○	○	○	○	○
해석개론2	○	수강 중	○	○	○	○
기하학	○	○	○	○	○	○
이산수학	○	○	○	○	○	○
미분방정식개론	○	수강 중	○	○	○	○
선형대수학1	○	○	○	○	○	○
선형대수학2	○	수강 중	○	○	○	○
정수론				○	○	○
확률론	○		○		○	○
현대대수학1	○		○	○	○	○
현대대수학2	수강 중			수강 중		
다변수함수론	수강 중			수강 중		
미분기하학개론						
복소변수함수론	○		○	○	○	
수리통계			수강 중	○		○
위상수학1	수강 중	수강 중		수강 중	수강 중	○
위상수학2						
해석학	○					○
수치해석	수강 중			수강 중	수강 중	수강 중

(○: 수강을 완료한 과목, 수강 중은 현재 학기에 수강중인 과목, 공란은 수강하지 않은 과목)

6) A대학교 수학교육과에서 운영하고 있는 과목은 다음과 같다.
수학 과목: 해석개론1, 해석개론2, 기하학, 이산수학, 미분방정식개론, 선형대수학1, 선형대수학2, 정수론, 확률론, 현대대수학1, 현대대수학2, 다변수함수론, 미분기하학개론, 복소변수함수론, 수리통계, 위상수학1, 위상수학2, 해석학, 수치해석

또한 사전설문지를 통해 연구참여자들의 증명에 대한 인식을 조사하였다.

연구참여자 1은 증명에 대해 중・고등학교 때 했던 증명학습과 대학교 때 했던 증명 학습이 각자 다른 인상을 받았다고 말하였다. 중·고등학교 때에 풀어낸 증명은 답안에 대한 정당화를 요구하기보다는 단순한 계산을 통한 관계식 유도라고 답했다. 고등학교 수학시간엔 위에서 언급했던 문제들만 풀었지 증명의 필요성을 거의 못 느꼈고 단순하지 않은 증명 문제가 나오면 시도하는 것도 벅차서 바로 답을 보는 걸 선택했다. 대학교 학부에서는 고등학교 때 느꼈던 증명의 부담감이 없었는데 증명하기 상대적으로 쉬운 문제들을 많이 접하다 보니 증명에 대한 자신감이 어느 정도 생겼다.

연구참여자 1은 증명의 필요성에 대해서는 삼수선의 예로 설명하였다. 예를 들어 삼수선의 정리는 직관적으로는 당연하여 고등학생 때에는 필요성을 느끼지 못하였다. 그러나 대학교에 입학하여 증명에 익숙해지면 주어진 상황의 가정을 살펴보고 빠진 것이 없는 지 엄밀하게 판단하는 습관이 생겨 삼수선의 증명의 필요성을 인식할 수 있었다고 말했다. 연구참여자 1은 증명을 한다는 것은 다른 사람에게 자신의 주장이 맞는 것을 납득시키는 과정이라고 결론지었다.

연구참여자 2는 평소 증명을 수학을 공부하는 데 있어 가장 중요한 활동이라고 생각하였다. 증명을 하지 않으면 수학은 별 의미가 없기 때문에 증명의 장단점이나 필요성을 설명하는 것조차 어색해했다. 하지만 교육을 하는 데에 있어서는 증명만을 강조하는 것이 비효율적이라고 답했고, 그 이유는 과외와 멘토링의 경험을 통해서였다. 과외와 멘토링을 할 때, 학생들이 깊게 생각하지 않는 경향을 보였다. 또한 교사가 세세한 증명을 채워나가는 것은 아직 수학의 큰 흐름을 잡지 못한 학생에게 오히려 갈피를 못 잡게 하는 결과를 낳는다고 판단하였다. 그러나 수학 학습에서 어느 정도 단계에 올랐다면 증명을 강조하는 것은 매우 중요하다고 생각하였다.

연구참여자 3은 증명이란 수학적 과정을 따라가면서 논리적인 흐름을

배우는 것이라고 생각하였다. 학생에게 증명을 가르친다면 학생이 수학의 논리적인 면을 학습할 수 있기에 좋다고 생각하였다. 하지만 다소 딱딱한 내용에 싫증을 느껴 수학에 대한 관심이 줄어들 수 있는 것이 증명교육의 큰 문제라고 답하였다.

연구참여자 4는 평소 증명을 어떤 명제가 모든 경우에 대해 참이 된다는 것을 보이는 것이라고 생각하였다. 수학적인 명제는 '무한히 많은' 것들을 대상으로 하기 때문에 구체적인 각 경우에 대해 성립한다고 해서 그 것이 모든 경우에 성립한다는 것을 보장할 수 없다. 하지만 한 번의 증명을 통해서 무한한 경우에 대해 성립한다는 것을 보여줄 수 있다는 점에서 증명은 매우 강력하면서 필수적인 과정이라고 할 수 있다.

다만 그 과정에서 증명이 매우 형식적이고 논리적인 형태로 진행되기 때문에 그러한 형식적인 수학적 의사소통에 익숙하지 않은 학생들에게 증명을 가르친다는 것은 매우 까다롭고 힘든 일이 될 수 있다고 생각하였다. 다만 학생들에게 '모든 경우'를 한 번에 다룰 수 있다는 점을 분명하게 인식시킬 필요가 있다고 생각하였다.

연구참여자 5는 증명을 추측했던 것을 정당화하는 과정이라고 응답하였다. 증명은 증명에 필요한 선행과정을 생각하게 되기 때문에 개념을 이해하기 좋다고 생각했다. 그러나 증명학습이 아무 맥락 없이 조작을 통해 이루어지는 경우가 있을 수 있다고 생각하였다.

연구참여자 6은 증명을 고등학교 때의 경험과 대학교 때의 경험을 바탕으로 다르게 정의하였다. 고등학교에서 증명학습은 어떤 정리를 배우는 준비활동이었는데, 대학교에서 증명학습은 정의가 등장하고, 그 정의에 딸려있는 성질에 대한 증명, 그렇게 증명된 정리를 통해서 얻을 수 있는 다른 정리에 대한 증명과 증명의 연속으로, 증명은 수학 그 자체인 것 같다고 답하였다. 즉, 고등학교 때는 대학교 때보다 좀 더 단편적이었고, 논리를 좀 생략하더라도 소수의 정리들을 이용해서 증명을 전개시켰는데 대학 수학에서는 계속되는 증명의 끈이 존재하는 것 같았고 이는 본인의 한계를 실감하게 한다고 응답하였다.

추가적으로 연구참여자 6은 대학수학의 증명학습에서 느낀 점을 말해

주었다. 고등학교 때는 증명의 내용이 다소 복잡하더라도 그것은 새로운 내용이었고, 그렇게 증명된 내용을 많이 활용하며 문제를 풀 수 있었는데, 대학교 와서는 물론 그 발상에서는 배울 것이 많지만 그 증명해야하는 결과가 직관적으로 당연한데 복잡하게 표기하는 경우가 많았다. 이는 증명의 필요성과 가치에 대해 무감각해지게 하는 경우가 많았다고 답했다.

2. 자료 수집

2.1. 사전 조사

사전 질문지를 통해 연구참여자들의 학년과 수강 과목, 지도경험의 유무 등을 확인했다. 또한 증명의 장점, 단점, 필요성 등 증명에 대한 인식을 질문지에 포함시켰다. 사전 질문지는 예비수학교사들에게 메신저 또는 이메일로 전달하고 수합하였다. 사전질문지는 부록 2로 첨부한다.

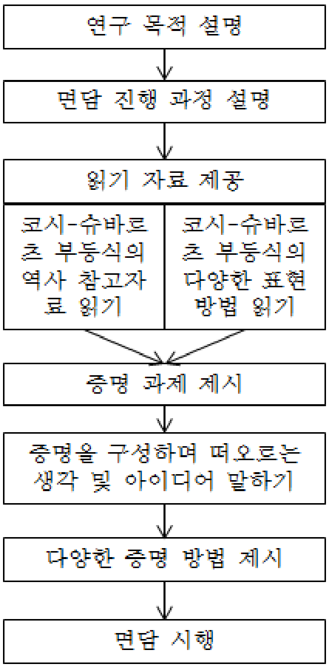
2.2. 면담

예비수학교사의 증명으로부터 그들의 개념이해를 파악하기 위해서는, 작성된 증명 뿐 아니라 과제 기반 면담을 통한 심도 깊은 분석이 필요하다. 이에 따라 본 연구에서는 면담을 위해 예비교사들이 코시-슈바르츠 부등식을 증명하고 설명하는 과정을 분석하기 위한 과제로 면담지를 구성하였다.

과제 기반 면담은 2015년 9월과 10월 중에 8명의 예비수학교사들을 대상으로 각각 1시간~2시간 동안 시행하였다. 이 중 2명은 예비 조사(pre-test)를 실시하여 과제의 난이도와 과제를 통한 면담 구성의 타당도를 평가하였다. 그리고 6명에게 본 면담을 시행하였다. 과제 수행 시간은 따로 제약을 두지 않았기 때문에 학생들마다 자유로웠다. 과제 하나

당 대략 20~40분 정도 걸렸으며 총 30분~1시간 정도의 면담이 이루어졌다. 더 이상 새로운 증명방법이 나오지 않을 때 면담을 종료했으며 연구참여자 6의 증명이 연구참여자 4의 증명과 연구참여자 5의 증명과 동일한 증명방법이었으므로 연구참여자 6을 마지막으로 면담을 종료하였다.

연구 참여자들이 과제를 수행할 때 연구자는 안내자나 조언자의 역할은 최소화하고 관찰자의 역할에 초점을 두어 개념 이해에 대한 올바른 분석이 이루어질 수 있도록 하였다. 또한 연구자는 연구 참여자가 증명 과제를 수행하는 과정을 말로 표현하도록 요청한 후 증명을 구성하는 과정에서 사용된 개념의 이해방법을 기록하였다. 연구참여자가 증명 과제를 수행한 후 증명에 사용한 수학적 개념을 어떻게 이해했는지 면담과정에서 확인하였다. [그림Ⅲ-2]는 면담 과정을 도식화 한 것이다.



[그림Ⅲ-2] 면담 과정

면담 시행 과정에서는 예비수학교사에게 코시-슈바르츠 부등식의 증명을 부탁한 뒤 어떠한 개념을 사용하여 증명하였는지 풀이에 대한 설명을

요구했다. 면담은 연구자의 질문에 연구참여자가 답변하는 형식으로 진행되었다. 연구자의 질문 내용은 <표Ⅲ-2>과 같다.

<표Ⅲ-2> 연구자의 질문 내용

연구자의 질문 내용
'어떻게 증명방법을 선택하였는가?'
'이전에 유사한 명제의 증명을 한 적이 있는가?'
'또 다른 증명 방법은 없는가?'
'증명과정에서 어떠한 수학적 개념을 떠올렸는가?'
'떠올린 수학적 개념을 증명과정에서 어떻게 사용하였는가?'
'떠올린 수학적 개념을 증명과정에서 왜 사용하였는가?'

면담지는 비구조화하여 예비수학교사가 자유롭게 대답할 수 있도록 하였다. 정성연구는 엄밀하게 그 형상이 미리 결정되기보다는 생성되는 것이므로 나타나는 양상에 따라 다양한 질문을 던졌다. 면담의 모든 과정은 녹음 후 전사를 통해 연구 자료로 사용하였다. 면담지에 학생의 개인인적 사항은 기록되지 않았다.

면담은 자연스러운 환경에서 면담이 이루어질 수 있도록 A대학교 사범대학 강의실에서 진행되었고 연구참여자가 원하는 시간대에 약속을 정하고 한 시간에서 두 시간 정도 이루어졌다. 연구자와 연구참여자 모두 익숙한 장소였으며 제한 시간 없이 연구를 진행할 수 있었다. 면담을 통한 예비수학교사들의 응답을 바탕으로 연구 결과를 도출하였다.

3. 자료분석

과제 수행과 면담의 모든 진행 과정은 녹음되었으며 녹음된 내용은 모두 전사하여 학생들이 작성한 답안지와 함께 보관하였다. 녹음된 인터뷰 내용의 전사 자료와 학생의 과제 수행 결과는 상시 비교 분석법으로 분석하였다. 상시비교분석법이란 유사점과 차이점을 결정하기 위해서 지속적으로 자료들을 비교하는 것이다(Cresswell, 2005).

본 연구에서 증명을 분석하기 위해 증명을 증명 계획 수립 단계와 증명 구성 과정 단계로 나누어 보았다. 또한 증명법과 증명에 사용된 개념을 분석하기 위한 조지영(2011)의 분석틀을 변형하여 사용하였다. 우선 각 증명 유형마다 증명을 구성할 때 사용된 개념을 추출하였다. 그리고 그 개념을 어떻게 이해하여 증명 구성에 사용하였는지를 분리하여 표로 정리하였다. <표Ⅲ-3>는 연구참여자의 증명 유형 별 사용된 개념과 개념을 어떻게 이해하고 사용하였는지를 정리하기 위한 표이다.

<표Ⅲ-3> 증명 유형별 개념이해와 증명 구성 분석 틀

유형	사용한 개념	구문론적/의미론적 증명 구성
	형식적 개념 정의 개념 이미지	계획 수립 증명의 전개 표현 양식

그 후 각 증명 유형마다의 증명 구성 과정을 계획 수립, 증명의 전개로 나누어 분석하고 증명에 사용된 개념을 정리하였다. 그리고 증명의 표현 양식을 정리하였다. 증명 구성의 과정을 계획 수립과 증명의 전개로 분류한 이유는 다음과 같다. 증명방법을 찾는 것을 분석하기 위해 계획 수립을 증명 구성의 분석의 한 요소로 포함하였으며 증명에 사용된 개념들이 증명의 전개 과정에서 어떠한 역할을 하고 있는지 서술하기 위해 증명의 전개를 요목화하여 서술할 필요가 있다. <표Ⅲ-4>는 증명 과정에서 연구참여자들의 개념이 증명 구성에 어떠한 영향을 미치는지를 분석하기 위한 표이다.

<표 Ⅲ-4> 증명 과정 분석 틀

	증명 유형 i
참여자	참여자 A
계획수립	계획수립방법
증명방법	증명방법
사용된 개념 및 이해	이해 + 개념

질적 연구는 자료 수집과 분석의 과정에서 타당도와 신뢰도가 뒷받침되어야 그 결과를 신뢰할 수 있다. 타당도를 높이기 위해서는 연구결과를 보일 수 있는 과제, 인터뷰 등 다양한 종류의 자료를 수집하였다. 다양한 종류의 자료란 연구자가 관찰한 상세하고 구체적인 사건들에 대하여 세밀하게 서술한 자료이다(Maxwell, 2005). 본 연구는 연구에서 수집된 자료를 통해 예비수학교사가 작성한 과제의 결과물과 함께 전사 자료와 녹음 자료를 이용하여 학생들이 증명을 구성하고 설명하는 상황을 세세하고 면밀하게 살펴볼 수 있었다.

자료를 분석하고 해석하는 동안 동료 연구자와 전문가의 검토를 통하여 신뢰도를 높였다. 동료연구자와 전문가의 지속적인 검토를 통하여 자료 분석 결과와 해석은 지속적으로 수정, 보완되었다.

Ⅳ. 연구결과

이 장에서는 예비수학교사가 코시-슈바르츠 부등식을 증명해 봄으로써 나타나는 다양한 증명 유형을 증명 구성 방법에 따라 구문론적 증명과 의미론적 증명으로 분류하였다. 분류의 기준은 증명에 사용되는 개념들의 형태이다. 즉, 형식적인 개념 정의만을 사용하여 증명을 구성하면 구문론적 증명으로 분류하였고, 직관적인 아이디어나 개념이미지가 증명 과정에 명시적으로 포함되어 있으면 의미론적 증명으로 분류하였다. 그리고 구문론적으로 증명을 구성하는 연구참여자는 증명에 사용되는 개념들을 어떻게 이해하고 사용했는지를 알아보았다. 또한 의미론적으로 증명을 구성하는 연구참여자는 증명에 사용한 개념들을 어떻게 이해하고 사용했는지를 알아보았다. 최종적으로는 구문론적 증명을 구성하는 연구참여자와 의미론적 증명을 구성하는 연구참여자는 코시-슈바르츠 부등식의 어떤 특성에 초점을 맞추어 증명을 구성하는지 알아보았다.

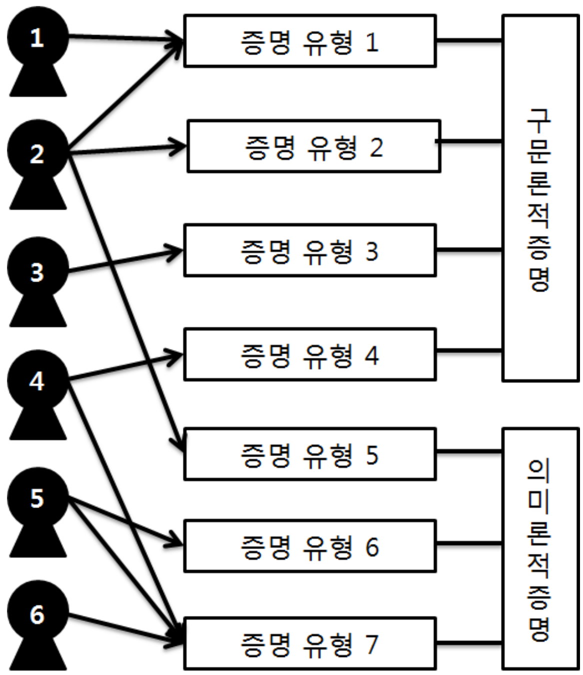
임의의 실수 $a_i, b_i \in \mathbb{R}\ (i=1,2,\ \cdots,n)$에 대하여 $a_1b_1 + a_2b_2 \cdots + a_nb_n \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$ 는 항상 만족한다. 단, 등호가 성립할 필요충분조건은 $\frac{b_i}{a_i} = k\ \ (i=1,2,\cdots,n)$일 때이다. 지금까지 배운 수학적 지식을 바탕으로 코시-슈바르츠 부등식을 자유롭게 증명해 보세요.

코시-슈바르츠 부등식의 증명 과제

위 과제는 대학 수학에서 배우는 n차항의 코시-슈바르츠 부등식을 예비수학교사가 어떻게 증명하는 지를 알아보기 위한 과제이다. 과제를 제시할 때에는 코시-슈바르츠 부등식의 다양한 형태가 오히려 증명 방법의

발견에 영향을 미칠 수 있으므로 기본적인 형태로 제시하였으며 연구자는 예비교사가 위 식을 이해하고 증명하도록 요구하였다.

6명의 예비수학교사가 코시-슈바르츠 부등식을 증명하였으며 총 7가지의 증명 유형이 도출되었다. 한 연구참여자 당 가장 많게는 세 개까지 증명방법을 생각해 내었다. 연구참여자 별 증명 방법과 유형 구분은 [그림 Ⅳ-1]와 같다.



[그림 Ⅳ-1] 연구참여자 별 증명 방법 분류

1. 구문론적 증명

증명 분석 결과 연구참여자가 증명 구성에 사용한 개념이 형식적인 정의의 형태이면 구문론적 증명 구성으로 분류하였다. 구문론적 증명의 구성 방법을 정리하면 <표Ⅳ-1>와 같다. 표의 서술은 다음의 규칙을 따른다. 참여자 A의 B번째 증명에 대해 참여자 A-B로 표기하였다. 또한 사

용된 개념 및 이해에는 사용의 순서를 고려하여 서술하였다. 계획 수립 단계에 영향을 미친 요인, 증명 방법, 증명 구성에 사용된 개념 및 이해로 분류하여 서술하였다.

계획수립은 증명의 아이디어를 떠올리는 데 사용된 개념이다. 증명 방법은 증명 유형 별 전체적인 증명의 흐름을 보이기 위해 제시하였다. 마지막으로 증명에 사용된 지식 및 개념은 앞서 살펴본 증명 유형 별 분류한 개념 및 이해를 정리한 것이다. 각 증명 구성에서 핵심적으로 작용한 개념은 기울임으로 효과를 주었다.

<표Ⅳ-1> 구문론적 증명의 유형과 분석

	증명 유형 1	증명 유형 2	증명 유형 3	증명 유형 4
	참여자 1, 참여자2-1	참여자2-2	참여자 3	참여자 4-1
계획수립	같은 명제의 이전의 증명 경험	참여자2의 증명1 + *놈의 정의*	유사한 명제에 대한 이전의 증명 경험	결론을 참이라고 가정
증명방법	직접 증명	직접 증명	수학적 귀납법	분석법
사용된 개념 및 이해	도구적 이해 + 형식적 개념 + *시그마 표현*	도구적 이해 + 형식적 개념 + *벡터로 표현*	도구적 이해 + 형식적 개념 + *치환하여 표현*	도구적 이해 + 형식적 개념 + *특수화, 일반화* + *시그마 표현*

이제 각 유형별 증명 구성 과정을 자세히 살펴본다.

1.1. 증명 유형 1 분석

연구 참여자 1과 연구참여자 2의 첫 번째 증명은 증명 유형 1로 구분하였다. 연구참여자 1이 작성한 증명방법은 [그림 Ⅳ-2]이고 연구참여자 2가 작성한 증명방법은 [그림 Ⅳ-3]과 같다.

(증명)

임의의 $1 \le i \le n$ 에 대해

실수 t가 주어졌을 때 $(a_i t - b_i)^2 \ge 0$ 이므로

$\sum_{i=1}^{n} (a_i t - b_i)^2 \ge 0$ 즉, $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) t + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \ge 0$ 이다.

$A := \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $B := \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ $C := \sum_{i=1}^{n} b_i^2$ 로 놓고.

함수 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 를 $f(t) = At^2 - 2Bt + C$ 로 놓으면

$f(t) \ge 0$ for all $t \in \mathbb{R}$ 이므로 이차방정식의 판별식을 적용해, $B^2 - AC \le 0$ 을 얻는다.

[그림 Ⅳ-2] 연구 참여자 1의 증명 구성 과정

(증명)

$f(t) = \sum_{i=1}^{n} (a_i t - b_i)^2$ $a_i, b_i \in \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

이라 정의하면 $f(t) \ge 0$.

한편, $f(t) = (a_1 t - b_1)^2 + (a_2 t - b_2)^2 + \cdots + (a_n t - b_n)^2$

$= \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) t^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right) t + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$

의 이차함수 이므로 판별식 $D \le 0$ $\left(\because \sum_{i=1}^{n} a_i^2 > 0\right)$

$\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$

$\sum a_i^2 = 0$ 이면 $a_i = 0$ b_i 에서 부등식 성립함.

등호는 $f(t) = 0$ 일 때 성립한다.

즉 $t = \frac{b_i}{a_i}$ $b_i \in \{1, 2, \ldots n\}$ 일 때 성립.

[그림 Ⅳ-3] 연구 참여자 2의 증명1 구성 과정

연구참여자 1과 연구참여자 2는 슈바르츠가 발견한 증명방법을 대수적

으로 사용하였다. 이 증명은 이차방정식의 판별식을 이용한 증명 방법으로 증명과정을 간단하게 해줄 뿐 아니라 고등학생에게도 설명할 수 있는 증명 방법이라고 할 수 있다. 연구참여자들이 이러한 증명방법을 떠올리게 된 계기는 선행학습의 기억이었다.

참여자1 : 이게 어디서 많이 봤었거든요. 어디서 많이 봤나 생각을 해봤더니 책 두개가 생각이 났는데 첫 번째가 정석책 보면 이 증명이 있더라고요. 그래서 아 그거 쓰면 되겠구나 했었고..

연구참여자 1은 실수의 성질을 먼저 사용하였고 연구참여자 2는 함수를 곧바로 대입하였다는 점에서 연구참여자 2가 증명 방법의 사용에 좀 더 능숙함을 알 수 있었다. 또한 등호 성립 조건까지 증명하였다는 점에서는 연구참여자 2가 좀 더 정확한 증명을 구사했다고 볼 수 있다. 연구참여자 2가 증명방법을 떠올린 과정은 다음과 같다.

연구자 : 어떻게 이 증명방법을 선택하게 되셨나요?

참여자2 : 어..이거는.. 별로 생각을 할 필요가 없어가지고.. 그냥 노동을 하면서..했기 때문에

연구자 : 이 식을 보고 바로 증명법을 떠올리는게 처음 하면 쉽지 않은데, 어떻게 떠올리셨어요?

참여자2 : 바로 떠올렸다기 보다는 이전의 경험으로...

연구참여자 2 역시 유사한 증명을 한 경험을 통해 증명방법을 생각해내고 전개하였다. 연구참여자 2는 면담 중 증명과정을 노동이라고 표현하였다. 즉, 본 증명을 하기 위해 사용해야 할 형식적인 개념들을 이전의 증명 경험을 통해 기억하고 있었으며 본 증명 과제에서 단순히 상기시켰다. 그리고 이전에 알고 있는 형식적 개념을 사용하여 절차적으로 증명을 구성하였다. 이는 연구참여자 2가 증명을 구성할 때 사용한 수학적 개념을 도구적으로 이해하고 사용했음을 알 수 있었다. 또한 등호 성립 조건에 대해 추가적으로 설명해 준 과정은 다음과 같다.

연구자 : 등호 설립할 필요충분조건은 어떻게 증명하셨나요?
참여자2 : 그냥 제곱식 있어서 그냥 하다보니까 되는 거 같아요.
연구자 : 그 제곱이 어떤 의미를 가져서요?
참여자2 : 음..그건 모르겠고. 가장 잘 쓰이는 실수의 제곱합이 0이면 각각 성분이 0이 되어야 된다는 걸 이용했습니다. 그거 말고는 하다보니까 된 것 같아요.

연구참여자 2는 등호 성립 조건을 증명할 때 제곱식이라는 것을 초점을 두었다. 실수의 성질을 사용하여 증명을 구성할 때 실수의 성질이 쓰이는 이유나 실수의 성질이 이 증명에서 갖는 의미 등은 생각하지 않고 평소의 증명 구성에 자주 쓰이는 것이기 때문에 본 증명에서 사용하였음을 알 수 있다. 즉 연구참여자 2는 증명을 구성할 때 사용한 수학적 개념을 여전히 도구적으로 이해하고 사용했음을 알 수 있었다.

또한 연구참여자 1은 면담 결과 위의 증명 말고도 수학적 귀납법, 벡터의 내적과 크기의 곱과의 관계식을 사용한 증명 등 다양한 방법을 알고 있었지만 위의 증명방법이 가장 간편하고 효율적이라는 이유로 선택하여 해결하였다. 그러나 기존에 증명방법을 사용했던 기억을 절차적으로 사용했다는 점에서 왜 이차함수로 바꾸게 되었는지, 판별식을 사용한 이유에 대해서는 답하지 못하였다.

참여자1 : 일단은 제가 수학 공부하는 것은 느낌이 약간 그래요. 그 뭐냐. 애들한테 항상 그렇게 얘기하거든요. 전 외워서 수학공부했다고. 항상. 그래서 그냥 어떻게 풀었냐라기 보단, 어디서 봤기 때문에 그 본걸 그냥 대충 기억을 더듬어서 그냥 어짜피 수학이란게 대충 핵심적인 아이디어만 알면 핵심적인 아이디어를 연결연결연결만 하면 딱 증명이 나오잖아요. 그래서 어디서 봤던 것을 그냥 대충 어떻게 연결해서 한 거 같아요.

증명 유형1을 구성한 연구참여자들은 수학의 형식적 개념을 도구적으로 이해하여 식의 조작을 통해 증명을 구성하였다고 볼 수 있다. 이러한

형식적 개념의 도구적 사용은 연역적 증명 중에서도 구문론적으로 증명을 구성하였다고 말할 수 있다. 이를 바탕으로 연구참여자 1의 증명과 연구참여자 2의 첫 번째 증명을 코시-슈바르츠 증명 유형1로 구분하고 증명과정에서 드러난 개념이해와 증명 구성 과정을 정리하면 <표Ⅳ-2>와 같다.

<표Ⅳ-2> 증명 유형1에 사용된 개념과 증명 구성

유형	사용한 개념	구문론적 증명 구성
1	형식적 개념 정의 • 실수의 성질 ($t^2 \geq 0$, $t \in \mathbb{R}$) • 이차함수, 이차부등식, 이차방정식의 관계	계획 수립 • 같은 명제의 이전의 증명 경험을 떠올리기 증명의 전개 • 실수의 성질을 이용한 이차함수 만들기 • 이차방정식의 판별식을 사용하기 표현 양식 • 기본적인 연역적 증명의 논리를 따르는 직접 증명

이와 같이 유형 1과 같은 증명을 구성한 학생들은 코시-슈바르츠 부등식에 대한 특별한 의미를 부여하지 않고 참임을 증명해야 할 대상으로만 인식하고 기존에 알고 있는 특수한 증명방법을 사용하여 증명을 해결하였음을 알 수 있다.

1.2. 증명 유형 2 분석

다음은 연구참여자 2가 두 번째로 작성한 증명방법이고 앞의 증명 유형1과 증명 방법은 같지만 벡터로 바꾸어 표현했으므로 증명 유형 2로 구분하였다. [그림 Ⅳ-4]은 연구참여자 2의 두 번째 증명 구성이다.

$$
\begin{aligned}
0 \leq \|x-cy\|^2 &= \langle x-cy, x-cy \rangle \\
&= \langle x.x \rangle + \langle x,-cy \rangle + \langle -cy,x \rangle + c^2\langle y.y \rangle \\
&= \langle x.x \rangle - 2c\langle x.y \rangle + c^2\langle y.y \rangle
\end{aligned}
$$

$$
\text{판별식} \longrightarrow \quad \langle x.y \rangle^2 \leq \langle x.x \rangle\langle y.y \rangle = \|x\|^2\|y\|^2
$$

[그림 Ⅳ-4] 연구 참여자 2의 증명2 구성 과정

연구참여자 2의 두 번째 증명방법은 앞서 증명과정에서 사용한 증명방법1과 같은 방법이지만 대수식이 아닌 벡터로 식을 표현한 점이 차이점이다. 벡터는 식을 좀 더 간편하게 표현할 수 있다는 이점이 있다. 연구참여자 2는 다른 증명처럼 보이기 위해 벡터의 표현을 사용했을 뿐(연구자가 다른 증명을 요구했을 때 연구참여자 2는 이전에 증명한 방법과 다른 방법을 구상해 내야만 한다는 생각을 하였다.) 증명을 구성하는 데 있어 벡터와 관련한 개념이미지가 적용된 것은 아니었다.

참여자2 : 우선은 이거는 맨 처음 한거랑 알고보니 똑같은거 같은데 음. 놈이 이렇게 정의가 되기 때문에

…

연구자 : x,y,c 가 뭔가요?

참여자2 : x, y 가 실벡터고 c는 상수요.

연구자 : x가 n차 벡터라는 말이죠?

참여자2 : 네. 아 말을 안했는데.. 네. 그래서 실수벡터공간에선 순서를 바꿔도 되니까 정리가 돼서 이제 이건 0보다 크다는 걸 알았고, … c에 대한 이차방정식이기 때문에 판별식을 쓰면 증명 끝입니다.

그러나 증명 유형 1과 비교하였을 때 연구참여자 2는 새로운 문자 도입에서 문자를 정의하여 표현하는 것에 미숙함을 보였다. 면담을 통해 연구참여자 2는 머릿속에서 생성된 벡터의 기호가 증명의 표현양식으로 변환하여 작성되지 않았음을 알 수 있다.

이를 바탕으로 연구참여자 2의 두 번째 증명을 코시-슈바르츠 증명 유

형2로 구분하고 증명과정에서 드러난 개념이해와 증명 구성 과정을 정리하면 <표Ⅳ-3>와 같다.

<표Ⅳ-3> 증명 유형2의 개념 이해와 증명 구성

유형	사용한 개념	구문론적 증명 구성
2	형식적 개념 정의 • 놈의 성질($\lVert x-cy \rVert^2 \geq 0$) • 놈의 정의 ($\lVert x-cy \rVert^2 = \langle x-cy, x-cy \rangle$) • 벡터의 내적 • 이차함수, 이차부등식, 이차방정식의 관계	계획 수립 • 증명 유형1과 같은 증명 방법을 벡터의 놈을 사용하여 다르게 표현하기 증명의 전개 • 놈의 성질로부터 이차함수만들기 • 벡터의 내적 계산하기 • 이차방정식의 판별식을 사용하기 표현 양식 • 기본적인 연역적 증명의 논리를 따르는 직접 증명 • 새롭게 정의한 문자 x, y, c에 대한 증명의 표현 양식 부족

증명 유형 2는 식의 표현을 위해 벡터의 형식적 개념 정의를 사용하였다. 그러나 증명을 구성하는 데 사용된 개념의 이해방식은 유형 1과 같다. 단 식의 표현을 바꾸기 위해 사용된 벡터의 놈의 정의와 성질, 벡터의 내적 개념이 추가되었으며 실수의 성질은 놈의 성질로 대체되었다. 연구참여자 2는 증명 유형1을 구성할 때와 마찬가지로 이번 증명을 구성할 때에도 알고 있는 형식적인 수학적 개념을 증명하고자 하는 명제에 도달하기까지의 도구로 사용하였다. 증명에 사용한 벡터 $\overrightarrow{x-cy}$의 어떠한 이미지도 개념 증명 구성에 사용되지 않았으며 단지 n차항을 포함한 식을 n차 벡터로 간편하게 정리할 수 있는 수단으로 사용되었다. 즉 형식

적 개념 정의만을 사용한 구문론적 증명으로 구분할 수 있다.

1.3. 증명 유형 3 분석

1번 과제의 답으로 연구 참여자 3은 수학적 귀납법으로 증명을 완성하였고 증명 유형 3으로 구분하였다. 연구참여자 3이 작성한 증명방법은 [그림 Ⅳ-5]과 같다.

(증명)

By induction on n.

i) $n=1$.

$$a_1b_1 \le \sqrt{a_1^2}\cdot\sqrt{b_1^2} = |a_1|\cdot|b_1| = |a_1b_1|$$

$$\therefore a_1b_1 \le |a_1b_1|$$

ii) Suppose that it holds on $n=k-1$.

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{k-1}b_{k-1} \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{k-1}^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{k-1}^2}$$

$$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{k-1}b_{k-1}+a_kb_k \le \sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{k-1}^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{k-1}^2}+a_kb_k \quad \left(\begin{array}{l}\text{Let } \sqrt{a_1^2+\cdots+a_{k-1}^2}=t \\ \sqrt{b_1^2+\cdots+b_{k-1}^2}=s\end{array}\right)$$

$$\le \sqrt{t^2+a_k^2}\cdot\sqrt{s^2+b_k^2}$$

$$= \sqrt{a_1^2+\cdots+a_{k-1}^2+a_k^2}\cdot\sqrt{b_1^2+\cdots+b_{k-1}^2+b_k^2}$$

$$\therefore a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_{k-1}b_{k-1}+a_kb_k \le \sqrt{a_1^2+\cdots+a_{k-1}^2+a_k^2}\cdot\sqrt{b_1^2+\cdots+b_{k-1}^2+b_k^2}$$

Therefore, it holds on $n=k$.

[그림 Ⅳ-5] 연구 참여자 3의 증명 구성 과정

연구참여자 3은 코시-슈바르츠 부등식을 증명하기에 앞서 n을 정해지지 않은 수라고 인식하고 변수 개념으로 인식하였다. 따라서 n을 1, 2, 임의의 자연수 k로 고정시키고 증명하는 수학적 귀납법을 사용하였다. n을 임의의 수로 받아들이는 연구참여자들은 수학적 귀납법을 증명방법으로 택하지 않았으나, n을 변수의 개념으로 인식하거나, n 번째 코시-슈바르츠 부등식을 증명해야 한다고 받아들은 연구참여자들은 수학적 귀납법을 증명 방법으로 선택하는 경향을 보였다.

연구자 : 수학적 귀납법을 선택하셨는데, 어떻게 이 식을 보고 수학적 귀납법으로 증명해야겠다고 생각해 내셨나요?

참여자3 : 어.. 일단은 이게 a_n, b_n 라는 게 그러니까 말이 그냥 n개라는 거지 막 몇 개 정해져 있는 게 아니잖아요. 그러니까 일반적으로 n이 계속 변할 수 있는 거니까 일반적으로 변하는 것에 대해서 증명을 하려면 귀납법을 쓰는 게 좀 더 간편하다고 해야 하나 그렇게 배웠던 기억이 있어서 귀납법을 택했거든요

연구자 : 혹시 비슷한 명제의 증명을 해 보신 적이 있나요?

참여자3 : 어.. 네 뭔가 약간 n과 관련된 식에서 귀납법을 사용해서 풀어본 기억이 있어요.

연구참여자 3이 $n=1$일 때 위 식이 성립함을 보였다. 보이는 과정에서는 분석법이 사용되었다. 보여야 할 부등식을 먼저 적고 우변을 절댓값의 성질로 정리하여 대소 관계를 확인하였다.

연구자 : $n=1$일 때 어떻게 식을 전개하신 거예요?

참여자3 : 일단 여기($a_1b_1 \leq \sqrt{a_1^2} \cdot \sqrt{b_1^2}$)까지는 여기 ($a_1b_1 + a_2b_2 \cdots + a_nb_n \leq \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$) 나와 있는 대로 a_1, b_1, n이 1이니까 루트 제곱 된 건데, 실수라 그랬으니까 a_1, b_1이 음수인지 양수인지 확실하지 않은 거니까. 그래서 절댓값을 한 거고요. 그래서 이거($|a_1||b_1| = |a_1b_1|$)는 절댓값의 성질에 의해서 그렇게.. 됐고.. 네 그래서 결론이 여기까지 되서 이 식($a_1b_1 \leq \sqrt{a_1^2} \cdot \sqrt{b_1^2}$)은 성립한다고.

연구참여자 3은 수학적 귀납법을 익숙하게 사용해왔으므로 $n=1$일 때를 우선 보였다. 그 후 $n=k-1$일 때 성립함을 가정하였다. 가정을 통해 $n=k$일 때에도 성립함을 보이면서 증명을 완료하였다. 연구참여자 3의 증명의 특징은 연구참여자 1이 수학적 귀납법을 사용했을 때 전개하지

못했을 것 같다는 식 $n=k$일 때에 대한 식을 성공적으로 전개하였다는 것이다. 앞서 연구참여자 1은 수학적 귀납법을 시도하려다가 그만둔 적이 있다. 다음은 그 면담 내용이다.

참여자1 : 처음 봤을 때는 n이니까 귀납법을 써야 할 거라고 생각했습니다. 그런데 딱 봐도 귀납법으로는 안 될 거라고 생각했어요. 왜냐하면 $n=1$일 때는 자명하고, $n=2$부터 시작해서 집어넣어야 되는데 그럼 2이상부터는 어떻게 해야 할지 딱히 안보이더라고요. 그냥 그건 포기를 했었고...

연구참여자 1은 식을 이해할 때 n개의 항을 가지고 있다는 것에 주목하여 수학적 귀납법으로 증명방법을 선택하려고 하였다. 그러나 연구참여자 1은 수학적 귀납법을 선택하면 식의 전개가 복잡해질 것을 우려하였으며 식 전개가 쉽지 않다고 느껴서 증명을 포기한 바 있다. 그러나 연구참여자 3은 식을 전개하는 아이디어로 식을 하나의 구조로 묶어서 보는 전략을 사용하여 증명을 성공적으로 구성할 수 있었다.

연구자: 수학을 귀납법을 이용해서 증명할 때 가장 중요한 아이디어는 k일 때의 아이디어인데. 어떻게 생각을 떠올리셨나요?

참여자3: 일단은 $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$ 은 루트 안에 들어가 있는 거고 $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n-1}^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_{n-1}^2}+a_kb_k$ 은 루트 없이 더해져 있는 거잖아요. 그런데 우리가 바꿔야 되는 방향은 이게(a_kb_k) 루트 안에 들어가야 하는 거잖아요. 어떻게 보면 이거 루트를 어떻게 풀어야지 들어가든 말든 할텐데, 이 루트를 풀 수 있는 방법이 제곱해야 되는 건데. 이것도 길게 쓰여져 있어서 그렇지 형태가 길게 보면 우리가 증명해야 되는 경우랑 똑같은 경우잖아요 n=2인 경우랑 똑같은 거잖아요. 그래서 그걸 이용하면 제곱이 되니까.

연구참여자 3은 복잡한 식을 치환을 통해 구조화해서 보는 방법을 택하여 증명을 구성하였다. 이러한 과정에 특별한 개념이미지가 작용한 것이라기보다는 '복잡한 식을 다룰 때에는 치환하여 이미 알고 있는 식의 꼴로 나타낸다.' 라는 이전의 증명 경험을 통해 알고 있던 지식을 도구적으로 사용하였음을 볼 수 있었다.

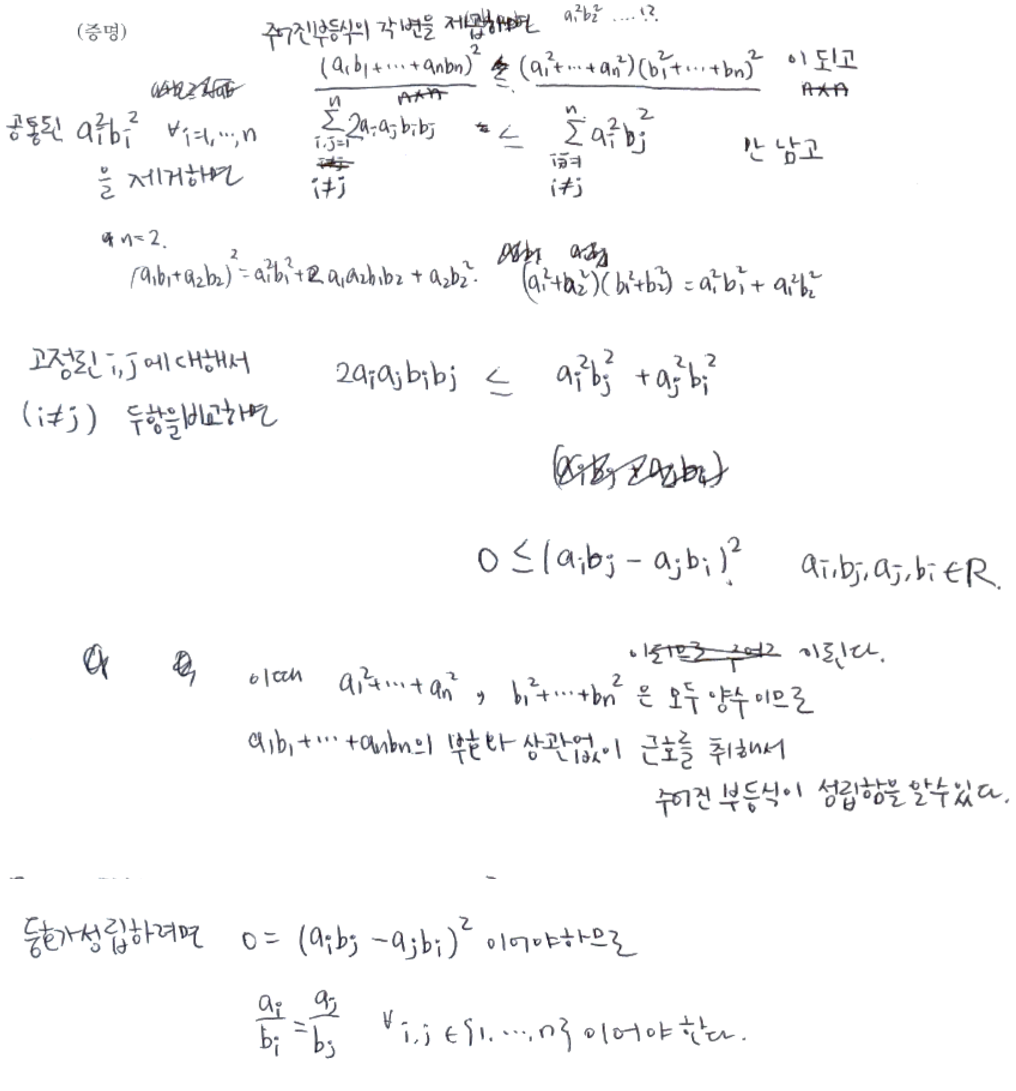
요약하면, 연구참여자 3는 본 과제의 항의 개수 n에 초점을 두고, n차항을 가진 다른 식에 대한 증명 경험을 통해 수학적 귀납법이라는 증명 방법을 떠올렸다. 그 후에는 식 전개를 용이하게 하기 위해 식의 형태를 구조화하여 보는 치환을 사용하였다. 연역적으로 증명을 구성하였으며 증명을 설명하는 직관적인 이미지는 사용되지 않았으므로 수학적 귀납법을 사용한 구문론적 증명이라 할 수 있다. 이와 같이 연구참여자 3의 증명을 코시-슈바르츠 증명 유형 3으로 구분하고 증명과정에서 드러난 개념이해와 증명 구성 과정을 정리하면 <표Ⅳ-4>와 같다.

<표Ⅳ-4> 증명 유형3의 개념 이해와 증명 구성

<table>
<tr><th>유형</th><th>사용한 개념</th><th>구문론적 증명 구성</th></tr>
<tr><td>3</td><td>형식적 개념 정의
• 수학적 귀납법
• 치환을 통한 식의 조작</td><td>계획 수립
• n개의 정해지지 않은 항을 증명할 때 사용하는 증명 전략을 떠올리기
증명의 전개
• 수학적 귀납법 사용하기
• 치환하여 모르는 식을 아는 식의 형태로 표현하기
표현 양식
• 연역적 증명 표현 양식 중 하나인 수학적 귀납법으로 증명
• 복잡한 식을 치환하여 표현</td></tr>
</table>

1.4. 증명 유형 4 분석

1번 과제의 답으로 연구 참여자 4는 총 두 가지 증명을 구성하였다. 그 중 첫 번째 증명은 <표Ⅱ-1>의 대수적 증명 방법을 분석법을 사용하여 구성한 것이다. 이를 증명 유형 4로 구분하였다. 자세한 증명 구성의 과정은 [그림 Ⅳ-6]와 같다.


(증명)

주어진 부등식의 각 변을 제곱하면 $a_i^2b_i^2 \dots$!?

$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2 \le (a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)$ 이 되고

공통된 $a_i^2b_i^2$ $\forall i=1,\dots,n$ 을 제거하면 $\sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} 2a_ia_jb_ib_j \le \sum_{i,j=1,\, i\neq j}^{n} a_i^2b_j^2$ 만 남고

$n=2$.

$(a_1b_1+a_2b_2)^2 = a_1^2b_1^2+2a_1a_2b_1b_2+a_2b_2^2$. $(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)=a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2$

고정된 i,j 에 대해서 $(i\neq j)$ 두 항을 비교하면 $2a_ia_jb_ib_j \le a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2$

$0 \le (a_ib_j-a_jb_i)^2$ $a_i, b_j, a_j, b_i \in R$.

~~이 되므로 구하고~~ 가 된다.

이때 $a_1^2+\cdots+a_n^2$, $b_1^2+\cdots+b_n^2$ 은 모두 양수이므로 $a_1b_1+\cdots+a_nb_n$의 부호와 상관없이 근호를 취해서 주어진 부등식이 성립함을 알 수 있다.

등호가 성립하려면 $0=(a_ib_j-a_jb_i)^2$ 이어야 하므로 $\frac{a_i}{b_i}=\frac{a_j}{b_j}$ $\forall i,j\in\{1,\dots,n\}$ 이어야 한다.

[그림 Ⅳ-6] 연구 참여자 4의 증명1 구성 과정

연구 참여자 4는 주어진 식을 양변 제곱하여 전개하는데 $\sum$를 사용하여 굉장히 능통하게 진행하였다. 연구 참여자 4가 증명방법을 떠올린 과정은 다음과 같다.

연구자 : 이거하고 유사한 방법으로 다른 명제를 증명해본 적이 있나요?
참여자 4: 그 산술기하 할 때도 이렇게 많이 했던 것 같아요.
음.. 산술기하 양변 제곱해서 빼서 완전제곱으로 만들어서.

연구참여자 4는 평소 n차항이 식을 죽 나열하지 않고 $\sum$로 표현하는 습관이 있었다. $\sum$로 표현하여 문제를 해결하는 것이 식의 전개 방향을 한눈에 더 잘 보이게 했기 때문이었다. 본 과제의 증명에서도 $\sum$로 표현을 바꾸자 식의 작성이 간편해졌고 식 전개를 통해 없어지는 것과 남아있는 것을 구분하게 쉽게 하였다. 즉, 연구참여자 4는 $\sum$를 사용하여 식의 구조를 파악했으며, 식의 구조를 파악하자 식의 전개가 좀 더 간편해졌다.

또한 코시부등식의 증명을 할 때 근호가 식에 있으면 양변을 제곱하여 풀었던 것을 기억하였다. 양변을 제곱하는 것 역시 식에서 근호를 제거하여 근호가 포함된 식이 아닌 다항식의 전개를 해결하는 익숙한 문제로 변형시켰다. 이와 같이 연구참여자 4는 식의 전개를 간편하게 할 수 있는 다양한 방법들을 잘 알고 있으며 능숙하게 사용할 수 있었다.

연구참여자 4는 식을 능숙하게 전개하면서 증명해야 할 과제를 코시-슈바르츠 부등식이 아닌 $\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} 2a_i a_j b_i b_j \leq \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_i^2 b_j^2$으로 변형시켰다. 이제 다음 부등식이 모든 실수에 대해 성립하면 코시-슈바르츠 부등식이 성립함을 보일 수 있다. 연구참여자 4는 위 식이 참임을 보이기 위해 $n=2$인 특정한 경우를 가정하여 식을 풀어본 후 증명의 아이디어를 발견하였다.

발견한 아이디어를 일반적인 n에 그대로 적용하여 증명을 완성할 수 있었다.

참여자4 : 일단 근호가 보이니까 제곱을 해서 전개를 해볼까 해서 처음에 잠깐 막혔다가 두개일 때로 해봤더니 하나를 고르면 안 되고 쌍으로 골라야 되더라고요. 그래서 이거를 일반화해서 했어요.

연구참여자 4의 증명은 증명방법을 비교적 발견하기 쉬운 분석법을 사용했다는 점과 $\sum$를 사용했다는 점에서 의의가 있다. 연구참여자 4의 증명은 연구참여자 3과 비교하여 의미를 찾을 수 있다. 같은 n에 대하여 두 참여자가 다르게 인식하였다. 연구참여자 3은 n을 고정되지 않은 수라고 생각하여 수학적 귀납법을 떠올렸지만, 연구참여자 4는 n을 고정된 임의의 수라고 생각하고 $\sum$로 표현하여 식을 간단히 표현하였다. 또한 증명과정에서 식 전개에 어려움을 느꼈을 때 $n=2$를 대입하는 단순화 작업을 통해 해결의 실마리를 찾았다.

연구참여자 4는 분석법을 사용하는 과정에서 참인 명제로 식을 이끌어 가기 위한 식의 전개를 꾸준히 구상하였다. 식의 전개과정이 막힐 때에는 $n=2$인 경우로 특수화하여 식의 전개의 아이디어를 찾았다. 식을 전개하는 과정에서 관련 개념들에 대한 직관적인 표현이나 개념이미지는 사용되지 않았다. 즉 기존에 알고 있던 수학의 형식적 개념 정의를 증명 구성에 도구적으로 사용하는 구문론적으로 증명을 구성하였음을 알 수 있다. 이를 바탕으로 연구참여자 4의 첫 번째 증명을 코시-슈바르츠 증명 유형4로 구분하고 증명과정에서 드러난 개념이해와 증명 구성 과정을 정리하면 <표Ⅳ-5>와 같다.

<표Ⅳ-5> 증명 유형4의 개념 이해와 증명 구성

유형	사용한 개념	구문론적 증명 구성
4	형식적 개념 정의 • 분석법 • $\sum$	계획 수립 • 결론을 참이라고 가정하기 • 유사한 명제의 증명 경험 떠올리기

	• 특수화, 일반화	증명의 전개 • 결론을 참이라고 가정한 뒤 결론의 명제의 부등식을 정리하기 • $\sum$를 사용하여 부등식 전개하기 • $n=2$일 때를 사용하여 부등식이 성립하는 조건을 찾고 이를 n일 때로 일반화하기 표현 양식 • 연역적 증명 표현 양식 중 하나인 분석법으로 증명 • $n=2$일 때로 규칙을 표현

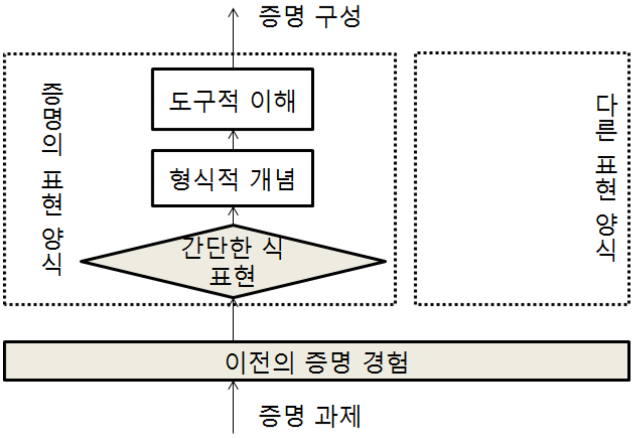
즉, 연구참여자 5가 증명을 구성하고 본 연구에서 유형4로 분류된 코시-슈바르츠 부등식의 증명은 다른 증명과 비교하였을 때 증명을 구성한 사람이 식 전개를 효율적으로 할 수 있는 여러 가지 방안을 적절하게 사용한 증명이라고 할 수 있다. 다른 측면에서 본다면 식 전개를 용이하게 하는 기능을 숙달하지 못한 사람이 이 증명을 보았을 때 증명의 의미를 잘 이해하지 못할 수 있다. 또한 분석법에 대해 모르는 사람은 이 증명을 증명이 아니라고 판단할 수도 있다. 이 증명의 구성에는 증명을 구성한 사람의 직관적인 아이디어가 포함되어 있지 않으며 오류 없는 식 전개를 통해 본 명제가 참임을 밝힌 증명이라고 판단할 수 있으므로 구문론적 증명 구성이라 볼 수 있다.

1.5. 구문론적 증명 종합

이와 같이 구문론적 증명을 구성한 증명들의 증명 유형에 따른 증명 분석은 다음과 같을 수 있다.

증명 유형 1,2와 같이 증명을 구성한 연구참여자들은 코시-슈바르츠 부등식을 증명할 때 배운 특별한 증명의 기술을 기억하고 있다가 본 과

제에 그대로 사용하였다. 즉, 증명에 필요한 핵심적 개념인 이차함수, 이차부등식, 이차방정식의 관계는 코시-슈바르츠 부등식을 배울 때 외부에서 학습한 형식적 개념이었다. 과제가 주어졌을 때 증명방법을 알고 있었으므로 시그마를 사용하여 간단하게 식을 표현하였다. 증명은 형식적이며 구조적으로 이루어졌으며 빠르고 정확하게 증명할 수 있었다. 단 이미 숙달된 증명 구성을 반복하였을 뿐 증명을 통해 코시-슈바르츠 부등식의 의미를 찾아내지는 못하였다. 증명 유형 2와 같이 벡터로 표현을 바꾸면 식 전개를 위주로 했던 대수식을 화살표로 표현하면서 그림이미지를 그릴 수 있다는 장점이 있다. 그러나 증명 유형 2를 구성한 연구참여자는 그림이미지를 그리지 않고 단지 식의 전개를 간편하게 하기 위해 벡터의 놈의 성질을 절차적 과정 중의 하나로 도구적으로 사용했을 뿐이다. 즉, 벡터로 표현을 바꾼다고 해서 무조건 그림을 그리거나 이미지를 활용하는 것은 아님을 알 수 있었다. 증명 유형 2에서 벡터로 표현을 바꾸는 것은 마치 긴 대수식을 $\sum$로 표현하여 단순화하는 것과 같이 볼 수 있었다. 증명 유형 1,2와 같이 코시-슈바르츠 부등식을 증명한 연구참여자들의 증명 구성 과정의 사고를 도식화하면 [그림 Ⅳ-7]과 같다.



[그림 Ⅳ-7] 구문론적 증명의 구성 과정 1

증명 유형 3,4는 구문론적 증명을 구성하는 과정에서 의미론적 추론 과정이 포함되어 있는 증명으로 분류할 수 있다. 위 두 유형과 같이 증

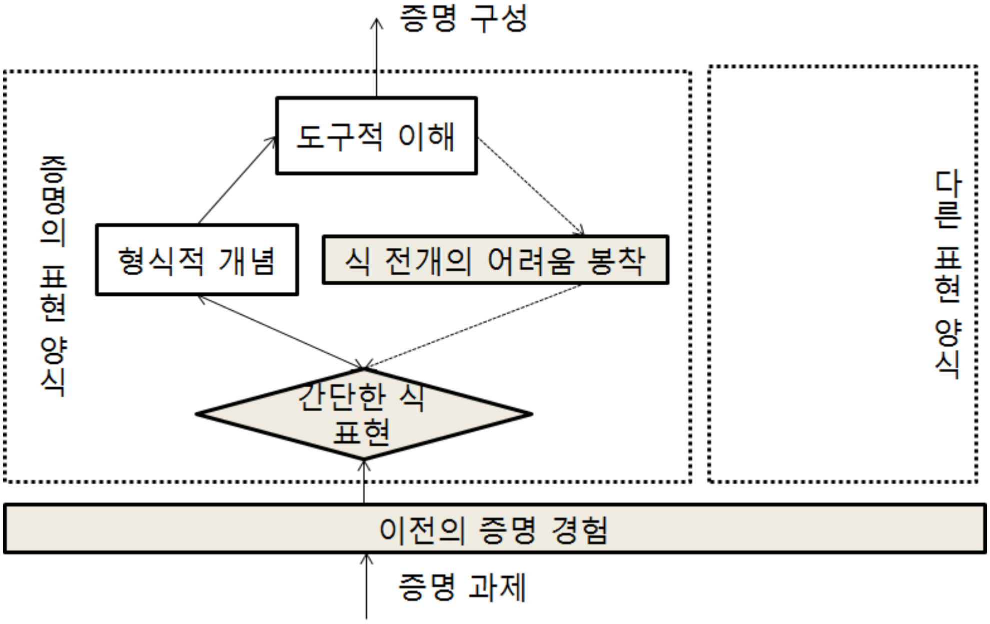
명을 구성한 연구참여자들은 대수식으로 표현된 코시-슈바르츠 부등식의 증명과제를 본인이 해결하기 쉬운 표현으로 바꾸고 증명 구성을 시작하였다는 특징이 있다. 증명 유형 3에서는 식의 구조를 파악하여 치환하였으며 증명 유형 4에서는 $\sum$로 표현을 바꾸었다.

증명 유형 3과 같이 증명한 연구참여자는 식을 치환하여 구조를 파악하는 과정이 증명에 포함되어 있다. 이와 같이 증명유형 3,4는 모두 식 전개에서 식을 간단히 표현할 수 있는 방안을 찾아 증명을 구성하였다는 특징이 있다. 따라서 증명 유형 2와 증명 유형 4와 같이 우선 식을 간단하게 표현하는 것을 먼저 하고 형식적 개념을 사용하여 증명을 구성할 수도 있고, 증명 유형 3과 같이 형식적 개념을 사용하여 증명을 구성하는 과정에서도 증명의 일부분으로 식의 표현을 구조화하거나 단순화 할 수 있다. 이는 형식적 개념과 간단한 식의 표현이 양방향의 화살표로 사고 과정이 이루어짐을 알 수 있다.

더불어 유형 4를 구성한 연구참여자는 일차적으로 식을 단순화하여 증명을 하던 중 n차항의 식을 전개할 때 어려움을 느끼자 $n=2$일 때로 특수화하여 식 전개의 아이디어를 찾고 다시 일반화하여 n일 때의 증명을 구성하였다. 즉 한번 단순화 한 식을 또 다시 단순화 하였다. 이는 식을 간단히 표현하여 증명을 구성하는 동안에도 증명 구성이 유연하게 안 될 때에는 다시 식 표현을 간단히 할 수 있는 방안으로 돌아가서 증명을 구성해 옴을 알 수 있었다. 이와 같이 식을 간단하게 표현하여 바로 증명을 구성할 수도 있다. 그런데 식을 간단하게 표현하는 방법 중에는 식을 추상적으로 표현하게 될 수 있다. 따라서 형식화되고 추상화된 식을 전개할 때 어려운 부분이 등장할 수도 있으며 식 전개의 어려움에 봉착하면 더 간단하게 식을 표현하여 증명의 아이디어를 찾을 수 있었다. 이는 반드시 일어나는 현상은 아니므로 실선이 아닌 점선으로 나타내었다.

증명 유형 3와 증명 유형 4에서는 이전의 유사한 명제에 대한 증명 경험을 통해 증명법의 아이디어를 떠올리며 증명을 구성할 방안을 체계적으로 수립하였다. 이 과정에서 식을 간단하게 표현할 수 있는 방법으로 증명 과제를 수정하여 증명을 구성하거나 증명 과정에서 증명을 간편하

게 할 수 있는 방법으로 식을 수정하였다. 그러나 증명을 구성하기 위한 직관적인 아이디어나 개념 이미지는 찾아볼 수 없었다. 증명 유형 3,4와 같이 코시-슈바르츠 부등식을 증명한 연구참여자들의 증명 구성 과정의 사고를 도식화하면 [그림 Ⅳ-8]과 같다.



[그림 Ⅳ-8] 구문론적 증명의 구성 과정 2

이와 같이 구문론적으로 증명을 구성한 연구참여자들의 증명과정에서 드러나는 사고의 과정을 정리하였다. 우선, 구문론적 증명 과정은 증명의 계획을 수립할 때 사전에 같은 명제를 증명해 보았던 경험이나, 유사한 명제를 증명할 때 사용한 증명법에 대한 아이디어가 크게 영향을 미쳤다. 이전의 증명 경험, 또는 증명법의 아이디어는 증명을 구성하는 사람으로 하여금 즉각적으로 증명을 구성할 수 있는 형식적 개념(익히 많이 사용하여 자연스러운 개념)을 떠올리게 하였다. 또한 식의 구조나 개념의 형식적 정의에 의하여 증명 방법, 즉 무엇을 가정으로 해서 어떤 결론을 이끌어 나갈 지가 거의 자동적으로 확립되었으며 증명 구성에 이

개념을 왜 사용해야 하는지에 대한 설명보다는 이 개념을 사용하여 식 전개를 용이하게 하는 것이 더 주를 이루었다. 따라서 구문론적 증명을 한 연구참여자들은 떠올린 다양한 형식적 개념 및 형식적 정의를 도구적으로 이해하여 증명을 구성하였다.

2. 의미론적 증명

증명 구성에 사용한 개념 중 직관적인 아이디어나 개념 이미지의 형태로 드러난 경우가 있을 때 의미론적 증명 구성으로 분류하였다. 의미론적 증명 구성 방법을 정리하면 <표 Ⅳ-6>와 같다. 표의 서술 방식은 <표 Ⅳ-1>과 같다.

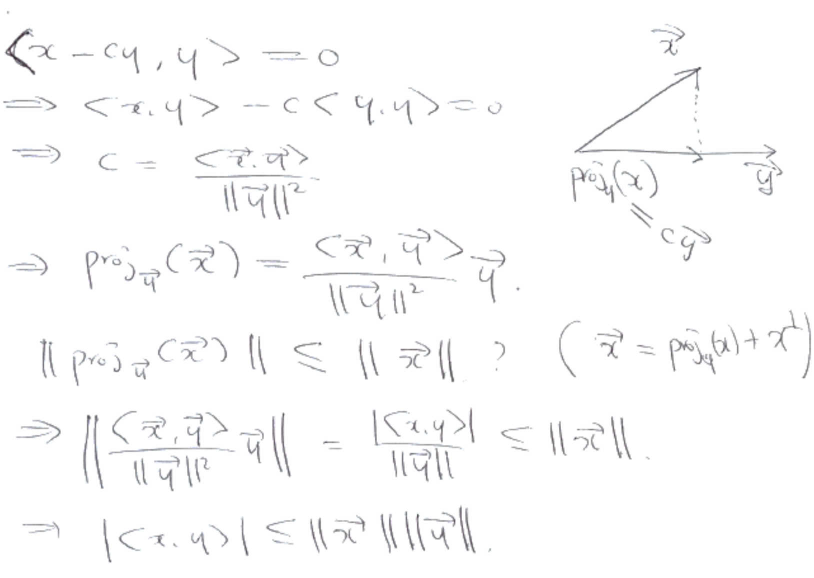
<표Ⅳ-6> 의미론적 증명 구성한 증명의 유형과 증명 과정 분석

	증명 유형 5	증명 유형 6	증명 유형 7
	참여자2-3	참여자 5-2	참여자 4-2, 참여자 5-1, 참여자6
계획수립	벡터와 벡터의 성분 개념 이미지	유사한 명제에 대한 이전의 증명 경험 + *실수의 성질을* *이용한 식의 변형*	벡터의 내적으로 식 표현하기
증명방법	직접 증명	수학적 귀납법	직접 증명
사용된 개념 및 이해	관계적 이해 + 개념 이미지 +	관계적 이해 + 개념 이미지 +	관계적 이해 + 개념 이미지 +

	형식적 개념	도구적 이해 + 형식적 개념	*벡터 표현*

2.1. 증명 유형 5 분석

연구참여자 2는 두 번째 증명을 구성할 때 벡터를 사용한 후 코시-슈바르츠 부등식을 증명할 때 벡터로 표현하는 것이 유용함을 깨달았다. 그리고 세 번째 방법으로 증명을 구성하였으며 이를 증명 유형 5로 구분하였다. 연구참여자 2가 세 번째 방법으로 구성한 증명의 과정은 [그림 Ⅳ-9]와 같다.



[그림 Ⅳ-9] 연구 참여자 2의 증명3 구성 과정

연구참여자 2는 현재 선형대수 수업을 듣고 있었으며 특히 내적공간을 공부한 뒤였다. 따라서 자신이 배운 내용을 활용하여 증명하고자 시도하였고 증명에 성공하였다. 증명의 아이디어는 한 벡터를 평행벡터와 수직

벡터로 나누고 벡터와 벡터의 성분의 크기를 비교하는 개념 이미지를 사용하였다.

참여자2 : 이거는 y에다가 프로젝션을 내린 걸(cy) 우선 구했어요. 구하면 이렇게($\langle x-cy, y\rangle = 0$) 되는데 어떻게 구했냐면 그.. 이 y와 수직인 x의 성분은 $x - proj_{\vec{y}}(x)(=x-cy)$ 이건데 이거와 y가 수직이기 때문에 내적이 0이라서 상수(c)를 구할 수 있고, 음.. 그래서 이걸($c=\dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{\| y \|^2}$) 구하고, 성분의 크기($\| proj_{\vec{y}}(\vec{x}) \|$)는 이건 어쨌든 성분이니까 x의 크기보다 작거나 같아서 이렇게 됩니다.

연구자 : 이 코시 슈바르츠 부등식을 보고 이 증명방법을 어떻게 생각하셨나요?

참여자2 : 아 이 식($\Rightarrow proj_{\vec{y}}(\vec{x}) = \dfrac{\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle}{\| y \|^2}\vec{y}$)은 내적할 때 이 성분($\| proj_{\vec{y}}(\vec{x}) \|$)을 구할 때 흔히 쓰는 거라서 당연히 나온 거고. 이 그러니까 아 뭐라고 설명해야 되지. 그. 어떤 벡터를 두 가지 성분으로 나눌 때 이 축에 대해서 수직인 거랑 평행인 거랑 나눌 때 주로 이런 걸 많이 써서 썼는데..

연구참여자 2는 선형대수에서 배운 벡터를 다른 벡터의 평행한 벡터와 수직인 벡터로 나누어 생각하는 아이디어를 떠올리고 증명을 시도하였다. 위 증명은 엄밀한 형식적 증명은 아니지만 기존에 알고 있던 증명의 알고리즘을 도구적으로 사용하지 않고 새로운 수학적 개념을 연결하여 증명 방법을 발견해 냈다는 것에 의미가 있다.

또한 증명해야 하는 대상을 식으로 보지 않고 좌변과 우변의 크기를 실제적으로 비교할 수 있는 개념이미지를 찾으려고 노력하였다. 물론 비교 가능한 개념이미지를 바로 떠올린 것은 아니었다. 앞서 증명 2에서 벡터로 표현하여 증명 구성을 완료한 후 연구참여자 2는 벡터의 내적 개념과 관련하여 벡터의 성분을 나누는 수학적 개념을 떠올린 후 ‘벡터의

성분을 나눠보면, 성분과 원래 벡터의 크기를 비교함으로써 부등식을 증명할 수 있지 않을까' 하는 직관적인 아이디어를 떠올렸다. 그 후 벡터의 성분과 벡터의 크기를 비교하는 개념이미지를 사용하며 형식적인 증명을 구성하였다. 연구참여자 2의 세 번째 증명은 증명 구성에 직관적 아이디어를 사용했다는 점에서 의미론적으로 증명을 구성했음을 알 수 있다.

이를 바탕으로 연구참여자 2의 세 번째 증명을 코시-슈바르츠 증명 유형5로 구분하고 증명과정에서 드러난 개념이해와 증명 구성 과정을 정리하면 <표Ⅳ-7>와 같다.

<표Ⅳ-7> 증명 유형5의 개념 이해와 증명 구성

유형	사용한 개념	의미론적 증명 구성
5	개념 이미지 • 벡터와 벡터의 성분의 크기 형식적 개념 정의 • 프로젝션 • 벡터의 놈	계획 수립 • 벡터와 벡터의 성분의 개념 이미지를 사용하여 크기를 비교하고 증명 전략 세우기 증명의 전개 • 벡터를 성분으로 나누기 • 벡터와 벡터의 성분의 크기 비교하기 표현 양식 • 그림을 사용한 직관적인 크기 비교 • 형식적 개념 정의를 통한 연역적 증명의 논리를 따르는 직접 증명

연구참여자 2는 총 세 가지 방법으로 증명을 구성하였다. 첫 번째 증명은 코시-슈바르츠 부등식 증명의 특수한 형태인 이차함수를 활용한 증명을 구성하였다. 첫 번째 증명을 구성할 때에는 이전의 증명 경험을 토대로 아무 생각 없이 노동을 하여 증명을 구성하였다고 말하였다. 두 번째 증명은 첫 번째 증명과 같은 방법이지만 표현을 대수식으로 하지 않고 벡터를 사용하였다. 벡터를 사용하여 표현하니 식의 전개가 간편하였

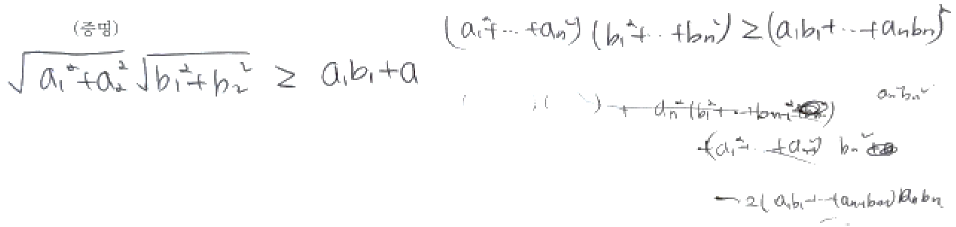
다. 코시-슈바르츠 부등식을 벡터를 이용하여 표현하는 과정에서 연구참여자 2는 최근 선형대수학 과목에서 배운 '벡터의 성분을 나누면 원래 벡터보다 벡터의 성분이 항상 작다'라는 직관적인 이해를 떠올렸다. 그 후 한 벡터를 다른 벡터와 평행인 성분과 수직인 성분으로 나누어서 평행인 성분 벡터와 원래의 성분 벡터 사이의 크기를 비교하는 개념 이미지를 떠올렸다. 그 결과 이러한 과정을 형식적으로 잘 다듬으면 코시-슈바르츠 부등식의 증명이 됨을 깨달았고, 증명을 구성하였다.

연구참여자 2의 증명 구성을 정리하면 다음과 같다. 연구참여자 2가 세 번째 증명을 구성한 방식은 첫 번째와 두 번째의 증명 구성하고는 차이가 있음을 알 수 있다. 첫 번째와 두 번째는 이전의 경험을 통해서 익숙한 방법으로 증명을 구성했으므로 식의 오류가 없고 신속하게 식 전개를 할 수 있었으며 증명의 서술 과정도 좀 더 엄밀하였다. 그러나 증명을 완료한 후에 증명을 통해 본 명제의 어떤 의미를 찾아낼 수는 없었다. 그러나 세 번째로 구성한 증명에서는 증명해야 할 명제를 관계적으로 이해하여 실제로 크기를 비교할 수 있는 개념 이미지를 떠올리고 그 개념이미지를 증명할 수 있는 수학적으로 형식화된 개념들을 사용하여 증명을 구성하였다. 이러한 과정에서 증명의 서술이 형식적으로 완벽하지 않았다. 하지만 개념이미지에서 증명을 구성하는 과정까지의 연구참여자의 사고과정을 살펴볼 수 있었다. 또한 증명 후 증명한 명제의 의미가 '두 벡터가 있을 때 한 벡터에서 다른 벡터의 평행한 성분을 구하면 평행한 성분의 크기는 원래 벡터의 크기보다 작다'라는 의미를 찾을 수 있었다.

2.2. 증명 유형 6 분석

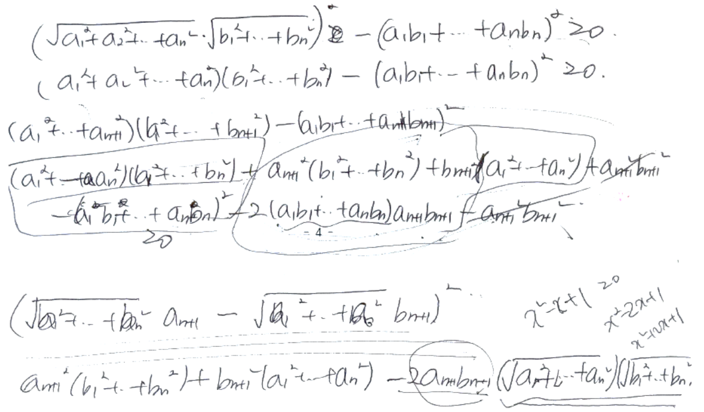
1번 과제에서 연구참여자 5는 처음에는 n차항에 초점을 두어 증명 방법으로 수학적 귀납법을 선택하고 전개하였다. 하지만 계산이 복잡하여 증명 전략을 수정하고 다른 방법(증명 유형 7)으로 증명을 구성하였다. 수학적 귀납법을 선택하고 전개해본 미완성된 증명은 [그림 Ⅳ-10]와 같

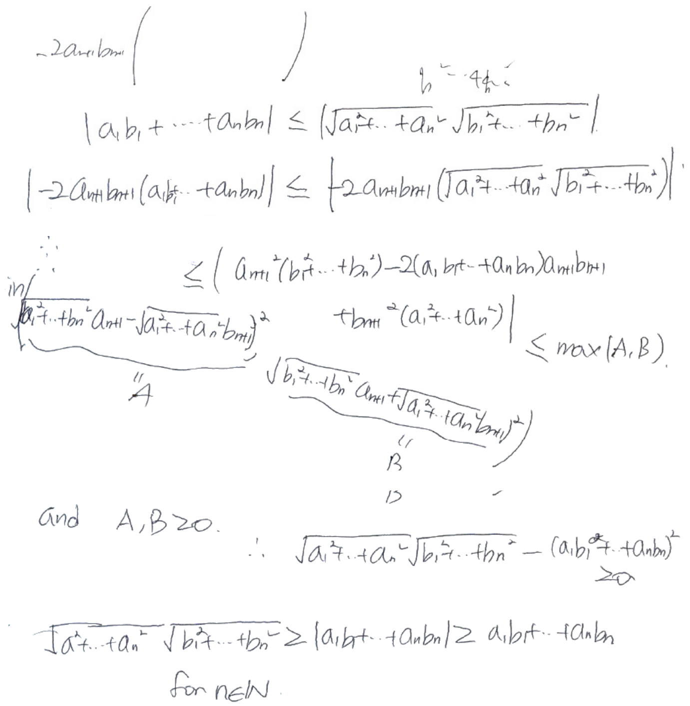
다.



[그림 Ⅳ-10] 연구참여자 5의 수학적 귀납법 증명 시도

연구참여자 5는 수학적 귀납법으로 증명했을 때 n차항을 정리하는 것이 복잡하다고 생각하여 $n=2$인 경우도 시도해보았지만 특별한 증명의 방향을 찾지 못하였다. 다른 증명 방법인 증명 유형 7로 증명을 완성하고 나서 연구자가 다른 증명방법도 있는지 물었을 때 연구참여자 5는 다시 수학적 귀납법으로 증명을 구성하는 것을 시도하였고 완성하였다. 앞서 연구참여자 3이 수학적 귀납법으로 증명을 구성한 것과는 다르게 본인의 직관적인 개념이미지를 증명 구성에 사용하였으므로 증명 유형 5으로 구분하였다. 연구참여자 5가 두 번째로 완성한 증명은 [그림 Ⅳ-11]와 같다.





[그림 Ⅳ-11] 연구 참여자 5의 증명2 구성 과정

이 증명은 앞서 연구참여자 3이 수학적 귀납법으로 증명했을 때와 같은 방법이라고 보이지 않을 정도로 복잡하다. 이 증명이 복잡해진 이유는 연구참여자 5가 식을 그대로 사용하지 않고 평소 증명 경험을 통해 유용하게 사용했던 '근호가 있는 식은 제곱하여 푼다.' 와 '부등식의 좌변과 우변을 빼서 0보다 크거나 같음을 보인다.' 와 같은 개념들을 사용하여 식을 변형시켰기 때문이다. 오히려 이것은 식을 복잡해 보이게 만들었다. 위 증명에 대한 연구참여자 5의 설명은 다음과 같다.

참여자5 : 음 네. 증명 된 거 같은데. 일단 수학적 귀납법을 쓸 건데 음.. n일때 성립한다고 가정하고 그 다음에 이제 $n+1$일 때 성립한다는 걸 보일 텐데 $\left(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_{n+1}^2\right)\left(b_1^2+\cdots+b_{n+1}^2\right)-\left(a_1b_1+\cdots+a_{n+1}b_{n+1}\right)^2$를 정리하면 n값 까지랑 $n+1$일 때랑

다 나눌 수 있어요. n값 까지는 앞서 가정에 따라 0보다 크거나 같고 $a_{n+1}^2 b_{n+1}^2$는 지워지고 $a_{n+1}^2(b_1^2+\cdots+b_n^2)+b_{n+1}^2(a_1^2+\cdots\ a_n^2)$ $-2(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)a_{n+1}b_{n+1}$가 남아요. 여기서 다시 $(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)\geq a_1b_1+\cdots+a_nb_n$ 이걸 위 식에 사용하면 완전제곱식이니까 0보다 크거나 같음을 증명할 수 있어요.

앞서 연구참여자 3이 수학적 귀납법을 사용하여 증명할 때 치환의 아이디어를 사용하여 식 전개를 간편하게 했음을 보았다. 연구참여자 5는 치환의 아이디어를 떠올리지 못했으므로 다른 전략을 통해 증명을 완성할 수밖에 없었다. 위 증명을 보고 수학적 귀납법을 옳게 사용하지 않았다고 판단할 수도 있다. 그러나 연구참여자 5는 $n=2$일 때에 위 명제가 성립함을 자명하다고 머릿속으로 판단하고 연구자에게 설명한 다음 따로 증명으로 서술하지는 않았다. 연구자에게 설명할 때는 n일 때 식 전개를 했던 것과 마찬가지로 양변을 제곱하고 빼서 그 차이가 0보다 크거나 같음을 보였다. 그 후 n일 때 위 부등식이 성립한다고 가정하고 $n+1$일 때도 성립하는지 알아보려고 하였다. 그 과정에서 연구참여자 5는 주어진 식 $a_1b_1+a_2b_2\cdots+a_nb_n\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\bullet\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$(편의상 $\alpha\leq\beta$라 두자)을 사용하지 않고 식을 제곱하고 이항한 형태인 $\beta^2-\alpha^2\geq 0$을 증명 대상으로 두었다. 이러한 식의 변형은 오히려 식의 증명을 복잡하게 만들었다. 그러나 연구참여자 5는 $\sqrt{\ }$을 포함한 식을 전개하는 증명이 익숙하지 않아 양변을 제곱한 뒤 식을 전개하여 증명을 구성하였다고 말했다.

참여자5 : 어 일단 루트를 가지고 식을 정리하면 좀 복잡하기도 하구요. $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\bullet\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$는 항상 양수인 게 보장되어 있으니까 양수인 거 비교할 때는 제곱해서 비교해도 되는 걸 알고 있고 $a_1b_1+a_2b_2\cdots+a_nb_n$얘가 양수인 건 보장이 안되더라도 음수이면 당연히 작으니까 양수임을 가정하고 제곱해도 된다고 생각했어요. 좀 더 간단히 정리하려고.

그 이후에 연구참여자 5는 식을 전개하여 알고 있는 것과 모르는 것을 구분하여 모르는 것을 증명하는 것에 초점을 두었다. 이제 증명해야 할 것은 $a_{n+1}^2(b_1^2+\cdots+b_n^2)+b_{n+1}^2(a_1^2+\cdots+a_n^2)-2(a_1b_1+\cdots\ a_nb_n)a_{n+1}b_{n+1}\geq 0$ 이다. 이 식을 관찰하던 연구참여자 5는 위 식의 $a_1b_1+\cdots+a_nb_n$이 원래 코시-슈바르츠 부등식 $a_1b_1+a_2b_2\cdots+a_nb_n\leq\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\bullet\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$의 좌변이라는 것을 찾았다. 그리고는 n일 때의 가정을 사용하여 $a_1b_1+a_2b_2\cdots+a_nb_n$ 대신에 $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}\bullet\sqrt{b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2}$을 넣어 식 $a_{n+1}^2(b_1^2+\cdots+b_n^2)+b_{n+1}^2(a_1^2+\cdots+a_n^2)-2(a_1b_1+\cdots\ a_nb_n)a_{n+1}b_{n+1}\geq 0$을 $a_{n+1}^2(b_1^2+\cdots+b_n^2)+b_{n+1}^2(a_1^2+\cdots+a_n^2)-2\sqrt{a_1^2+\cdots\ a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}\,a_{n+1}b_{n+1}$으로 바꾸었다. 즉, 위 식은 $(\sqrt{b_1^2+\cdots\ b_n^2}\,a_{n+1}-\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\,b_{n+1})^2$이 된다. 실수의 성질을 사용하면 위 식은 $(\sqrt{b_1^2+\cdots\ b_n^2}\,a_{n+1}-\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\,b_{n+1})^2\geq 0$은 쉽게 보일 수 있다. 그러나 아직 우리가 보이고자 하는 $a_{n+1}^2(b_1^2+\cdots+b_n^2)$ $b_{n+1}^2(a_1^2+\cdots+a_n^2)-2(a_1b_1+\cdots\ a_nb_n)a_{n+1}b_{n+1}\geq 0$을 보인 것은 아니다. 이 과정에서 연구참여자 5는 다음과 같은 개념이미지를 사용하였다.

참여자5 : 그리고 그 다음에 이용한건 제가 고등학교 때 $x^2-x+1\geq 0$를 보일 때 판별식이라는 걸 잘 못써가지고 <u>x^2-x+1가 x^2-2x+1랑 x^2+2x+1랑 사이에 있는데($x\geq 0$일 때) 둘 다 0보다 크거나 같으니까 둘 사이에 있는 얘도 0보다 크거나 같다고 생각한 적이 있거든요.</u>

즉, 연구참여자 5는 크기를 알고 있는 이차식을 사용하여 크기를 모르는 이차식의 크기를 대략적으로 추측하는 직관적인 아이디어를 가지고 증명을 완성하였다. 요약하면 연구참여자 5은 두 번째 증명에서 절차적 지식을 통해 증명을 구성하고 있었다. 그런데 증명에서 어려움을 느끼는 부분이 등장하자 식의 크기에 대해 비교할 수 있는 개념 이미지를 떠올렸으며 이 개념 이미지는 식을 전개하는 과정에서 핵심적인 역할을 하였

다. 연구참여자 3과 비교할 때 같은 증명방법을 사용하더라도 식의 전개 과정에 사용한 수학적 개념의 이해 형태에 따라 구문론적으로 증명을 구성할 수도 있고, 의미론적으로 증명을 구성할 수도 있음을 알 수 있다.

이를 바탕으로 연구참여자 5의 두 번째 증명을 코시-슈바르츠 증명 유형6으로 구분하고 증명과정에서 드러난 개념이해와 증명 구성 과정을 정리하면 <표Ⅳ-8>와 같다.

<표Ⅳ-8> 증명 유형6의 개념 이해와 증명 구성

유형	사용한 개념	의미론적 증명 구성
6	형식적 개념 정의 • 실수의 성질 • 수학적 귀납법 개념 이미지 • 이차식의 크기	계획 수립 • 유사한 명제에 대한 이전의 증명 경험 떠올리기 • 실수의 성질을 이용하여 식을 변형하기 증명의 전개 • 수학적 귀납법 사용하기 • 크기를 아는 이차식을 사용하여 크기를 모르는 이차식을 부등호로 표현하기 • 이차식의 크기 비교하기 표현 양식 • 연역적 증명 표현 양식 중 하나인 수학적 귀납법으로 증명

2.3. 증명 유형 7 분석

벡터로 표현하여 증명을 완성한 연구참여자 4, 연구참여자 5, 연구참여자 6의 증명을 증명 유형 7로 구분하였다. 연구참여자 4가 작성한 증명방법은 [그림 Ⅳ-12]이고 연구참여자 5가 작성한 증명방법은 [그림 Ⅳ-13]이고 연구참여자 6이 작성한 증명방법은 [그림 Ⅳ-14]이다.

$\mathbb{R}^n$ 의 임의의 두벡터 $\vec{a}=(a_1,\cdots,a_n)$ $\vec{b}=(b_1,\cdots,b_n)$ 이라고하면,

두벡터의 내적 $\vec{a}\cdot\vec{b}$는 $(a_1,\cdots,a_n)\circ(b_1,\cdots,b_n)$

$=(a_1b_1+\cdots+a_nb_n$ 으로 구할수 있고

또한 두벡터가 이루는각을 θ라고 했을때

$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ 로도 구할수있다.

이때 $|\vec{a}|=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$, $\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}$ 이고

$-1\le\cos\theta\le1$ 이므로

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)\cdot\cancel{\cos}=\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}\cdot\cos\theta$$

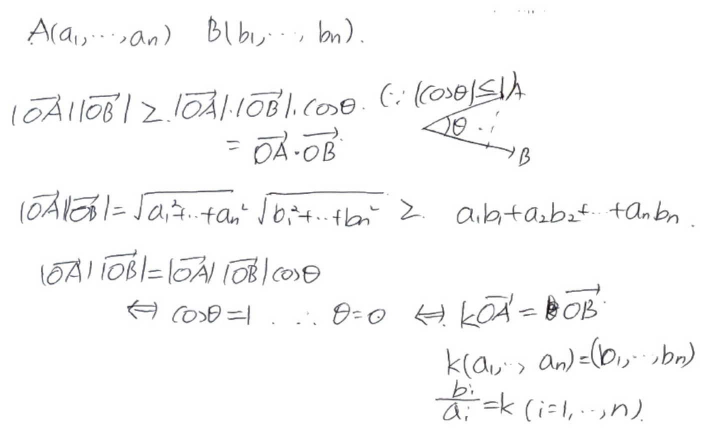
$$\le\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}$$ 이다.

~~부등식~~ 등호가 성립하려면 $\cos\theta=1$ 이어야하고

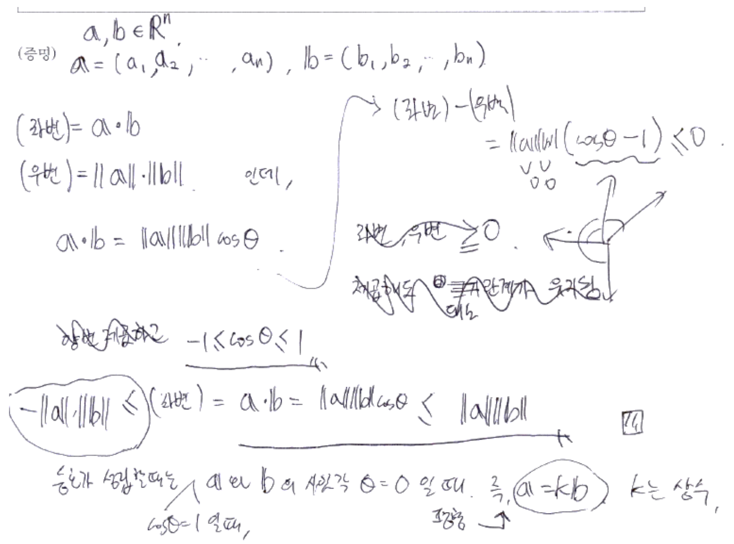
따라서 두벡터가 나란해야하기 때문에 $\vec{a}=k\vec{b}$ (k:0이아닌실수)

이고, $\frac{a_i}{b_i}=k$ $\forall i=1,\cdots,n$.

[그림 Ⅳ-12] 연구참여자 4의 증명2 구성 과정



[그림 Ⅳ-13] 연구 참여자 5의 증명1 구성 과정



[그림 Ⅳ-14] 연구 참여자 6의 증명 구성 과정

연구참여자 4는 코시-슈바르츠 부등식의 표현을 대수식이 아닌 벡터로 표현한 뒤 증명을 구성하였다. 코시-슈바르츠 부등식의 좌변과 우변을 벡터의 내적과 백터의 크기의 곱으로 식을 치환하면 삼각함수의 성질을 이용하여 코시-슈바르츠 부등식을 거의 자명하게 증명할 수 있다. 연구참여자 4는 내적을 구하는 두 가지 방법을 통해 임의의 두 벡터의 내적

을 구하였다. 구하는 방법이 달라도 두 벡터의 내적은 서로 같으므로 두 식을 등호로 놓을 수 있다. 그 후 삼각함수의 성질인 $-1 \leq \cos\theta \leq 1$을 사용하여 식의 크기를 표현하였다. $\cos\theta = 1$일 때 등호가 성립하므로 $\cos\theta = 1$일 조건을 찾아 등호가 성립할 조건까지 증명하였다. 연구참여자 4의 두 번째 증명은 연구참여자 5의 첫 번째 증명과 연구참여자 6의 증명과 같은 방법의 증명이다.

연구참여자 4의 첫 번째 증명과 두 번째 증명을 비교해보면 두 번째 증명 과정에서 설명이 많이 포함되어 있음을 알 수 있다. 이는 첫 번째 증명이 식 전개를 통한 설득을 위한 증명이라면 두 번째 증명은 크기 비교의 설명을 통한 증명이라고 볼 수 있기 때문이다.

연구자 :	이렇게 증명을 해봤는데 증명을 해보고 나니까 저 부등식이 갖는 의미가 있나요?
참여자4 :	저는 벡터가 떠올라요 어떤 그림이 그려지기는 하는데 저걸 유용하게 쓴 적은 별로 없는거 같아요. 어.. 전개하면 계산이 너무 많아서.. 어.. 뭔가 이렇게 증명하면 아 이게 성립하는건 알겠는데 그래서 뭐? 이런느낌인데 이렇게 표현하면 기억하기도 쉽고 좀 뭔가 숨어있는 의미를 찾을 수 있는 그런 거 같아요.

연구참여자 5는 벡터의 내적으로 표현함으로써 이전의 증명보다는 수월하게 증명을 완성할 수 있었다. 연구참여자 5가 처음부터 벡터의 내적을 증명 구성의 아이디어로 선택하지 않은 이유는 코시-슈바르츠 부등식을 처음 접할 때를 고려하면 내적보다 이전에 배우기 때문이었다. 연구참여자는 증명 방법을 선택할 때 수학 교과 내용의 흐름을 고려하여 벡터의 내적을 증명 방법으로 채택하는 것이 교수학적으로 옳은지를 고민하였다. 그러나 벡터로 표현을 바꾸어 증명하는 것의 장점이 크다고 판단하여 증명 방법으로 선택하였다.

연구참여자 5의 증명은 연구참여자 4의 증명과 같은 방법이되 벡터의 크기와 $\cos\theta$의 성질을 증명 구성에 바로 적용하여 연구참여자 4의 증명

보다 형식적인 수준의 증명을 완성할 수 있었다. 연구참여자 5는 면담을 통해 벡터로 표현한 증명이 본인에게 가지는 의미를 설명하였다.

참여자 5: 사실 이렇게 식으로 보는 거는 감이 잘 안와서요. 의미를 찾기에는 좀 힘든 거 같아요. 그런데 눈으로 보이거나 그림으로 그려볼 수 있는 게 있으면 의미를 찾는 게 더 쉬운 거 같은데 임의로 두 점을 찍었을 때 이 길이의 곱은 이 길이의 곱보다 크거나 같다는 기하적 의미가 있는 거 같아요. 근데 식은 자꾸 정리만 하게 되니까 증명하는 과정에서 느끼기 전 힘든 거 같아요.

연구참여자 5는 코시-슈바르츠 부등식을 모두 의미론적으로 증명을 구성하였다. 수학자의 관점에서 본다면 연구참여자 5는 연역적인 증명 구성 능력이 부족하다고 볼 수도 있다. 증명 구성과정에서 본인이 수학적 개념을 이해할 때 사용했던 직관적인 이해가 다른 연구참여자들보다 많았기 때문이다. 그러나 연구참여자 5가 평소 수학 학습을 통해 습득했던 직관적인 이해는 증명 구성을 좀 더 쉽게 할 수 있도록 도운 경우가 첫 번째 증명 구성이며, 증명 구성과정에서 어려움에 봉착하였을 때 의미 있게 사용된 것이 두 번째 증명이다. 이와 같이 수학 개념에 대한 직관적인 이해는 증명구성과정에서 의미 있게 사용됨을 알 수 있다.

연구참여자 6이 벡터의 내적 정의를 증명 방법으로 선택한 이유는 연구참여자 4, 연구참여자 5와 마찬가지로 벡터로 표현하면 증명과정이 쉽기 때문이다. 또한 벡터의 표현은 부등식의 이미지를 직관적으로 떠올릴 수 있게 한다. 연구참여자 6은 벡터의 이미지는 많은 변수를 하나의 화살표로 치환할 수 있게 해주며 이는 증명의 구성에 도움이 된다고 하였다.

참여자6: (이 증명방법이) 제일 쉬울 거 같고 이미지가 가장 직관적으로 떠올랐어요

연구자: 어떤 이미지요?

참여자6: 네 벡터의 이미지랑, 그리고 변수가 되게 많은데, 벡터로 나타나

면 다변수가 화살표 하나로 치환 되서 해결해나가기 좀 더 쉬웠던 거 같아요.

또한 연구참여자 6은 부등식의 크기 비교에서 삼각함수의 성질을 이용하여 참인 부등식 $-1 \leq \cos\theta \leq 1$을 세우고, 증명하고자 하는 부등식을 유도하였다는 점에서 연구참여자 4의 증명과 유사하다.

참여자6: 사실은 처음에는 정석 증명법대로라면 좌변이 크다 작다를 따질 때 서로 빼거나 나누거나를 하잖아요. 그래서 빼려고 했는데 코사인이 낯설어서..

연구참여자 6은 삼각함수가 포함된 부등식을 전개할 때 부호에 예민하게 반응하고 식 전개를 잘 수행하지 못하였다. 따라서 이미 알고 있는 삼각함수의 부등식의 표현을 작성한 다음 증명하고자 하는 부등식으로 점차 확장해 나가는 방법을 선택하였다.

연구참여자 6은 내적의 정의를 사용하여 복잡한 식을 단순화하였다. 식을 단순화 한 결과 좌변과 우변을 특정한 크기로 볼 수 있었고, 삼각함수의 성질을 사용하여 두 크기에 대한 비교가 가능하였다. 이는 부등식을 식 전개의 대상으로 보지 않고 크기를 비교해야 할 대상으로 보았다고 할 수 있다. 즉 연구참여자 6은 형식적인 증명의 절차를 사용한 구문론적 증명을 구성하려고 했으나 수학적 개념을 형식적으로 사용하기에 익숙하지 않아서 이미지로 크기를 비교할 수 있는 방법을 선택하는 의미론적 증명을 구성하였다.

이를 바탕으로 연구참여자 6의 증명(이하 연구참여자 4의 두 번째 증명, 연구참여자 5의 첫 번째 증명도 모두 포함한다)을 코시-슈바르츠 증명 유형7로 구분하고 증명과정에서 드러난 개념이해와 증명 구성 과정을 정리하면 <표Ⅳ-9>와 같다.

<표Ⅳ-9> 증명 유형7의 개념 이해와 증명 구성

유형	사용한 개념	의미론적 증명 구성

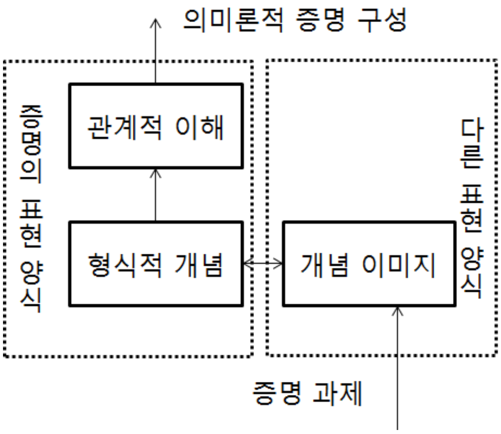
7	형식적 개념 정의 • 벡터의 내적 • 벡터의 크기 • 삼각함수의 성질 개념 이미지 • 삼각함수의 범위	계획 수립 • 벡터로 식을 표현하여 내적의 개념 이용하기 증명의 전개 • 대수식을 벡터로 표현하기 • 삼각함수의 성질을 이용한 대소 비교하기 표현 양식 • 벡터의 내적을 이용하여 자명한 정리를 유도한 직접 증명

이와 같이 벡터로 표현을 바꾸어 부등식을 증명하는 것은 좌변과 우변의 크기를 직관적으로 비교할 수 있는 개념이미지를 증명과정에서 사용할 수 있게 하였다. 또한 벡터로 표현하는 것은 증명과정에서 그림을 그려볼 수도 있게 한다. 절대부등식의 기하적 의미를 찾고 기하적인 아이디어를 통해 직관적으로 절대부등식이 참임을 보이는 그림을 찾는 과정은 수학에서 꾸준히 주목받고 있는 절대부등식의 증명방법 중 하나이다(Alsina & Nelsen, 2009).

2.4. 의미론적 증명 종합

이와 같이 의미론적으로 증명을 구성한 연구참여자들의 증명과정에서 드러나는 이해 및 개념을 정리할 수 있다. 유형 5과 유형 7의 의미론적 증명 구성은 증명 계획을 수립하는 단계에서 개념이미지가 사용되었다. 유형 5와 유형 7의 증명을 구성한 연구참여자들은 코시-슈바르츠 부등식의 좌변을 두 n차 벡터의 내적, 우변을 두 n차 벡터의 크기의 곱으로 머릿속으로 생각하거나 또는 식으로 표현하였다. 그 후 좌변과 우변의 크기를 비교할 수 있는 벡터의 내적의 성질을 떠올렸다. 이 과정에서 유형 5로 증명한 연구참여자는 프로젝션, 즉 벡터의 평행벡터와 수직벡터

로 성분을 나누는 작업을 하여 벡터의 성분의 크기와 벡터의 크기를 비교하여 증명을 구성하였다. 유형 7로 증명한 연구참여자들은 벡터의 내적의 두 가지 표현을 사용하여 삼각함수의 성질을 통해 증명하였다. 두 유형 모두 벡터로 표현하여 실제 크기를 비교해 볼 수 있는 개념이미지를 떠올렸으며 이후의 증명을 완성할 때에는 벡터의 형식적 개념을 사용하여 증명을 구성하였다. 두 증명 모두 증명 구성을 위해 사용된 형식적 개념들이 식의 전개를 위해 절차적으로 사용된 것이 아니라 크기 비교를 할 수 있도록 하는 관계를 통해 이해되고 사용되었다. 증명 유형 5,7과 같이 코시-슈바르츠 부등식을 증명한 연구참여자들의 증명 구성 과정의 사고를 도식화하면 [그림 Ⅳ-15]과 같다.

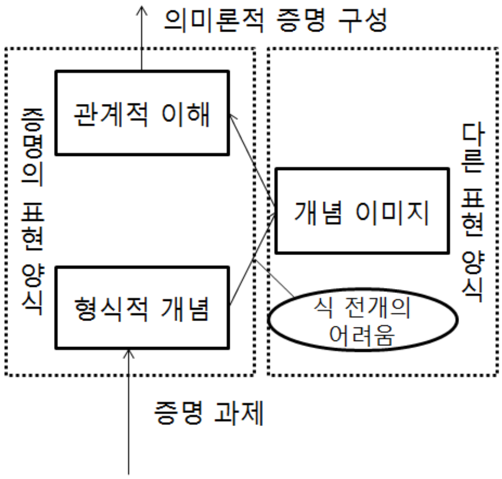


[그림 Ⅳ-15] 의미론적 증명의 구성 과정 1

[그림 Ⅳ-15]와 같이 증명을 구성하는 과정은 절대부등식의 증명 과제를 보고 좌변과 우변의 크기를 비교할 수 있는 이미지를 먼저 떠올렸다는 것이 가장 큰 특징이다. 크기를 비교할 수 있는 이미지를 떠올리고 그 이미지를 형식적 개념을 사용하여 나타내고 증명을 구성한 것은 이전의 증명들이 코시-슈바르츠 부등식을 오류 없는 식 전개를 통해 우리가 알고 있는 참인 절대부등식으로 이끌어가려던 것에 집중했던 것과 가장 큰 차이점이라고 볼 수 있다. 연구참여자들은 떠올린 벡터의 개념이미지

를 그림으로 표현하고 증명하는 동안 꾸준히 그림을 보는 행동을 반복하였는데 이는 형식적 개념을 사용하여 증명을 구성하는 동안에도 개념이미지가 계속 영향을 미치고 있음을 알 수 있었다. 따라서 증명을 구성하는 동안 형식적 개념과 개념이미지 사이의 관계를 양방향 화살표로 표시하였다. 연역적 증명을 완성하였으므로 형식적 개념을 사용하여 증명을 구성하였지만 그 개념들을 관계적으로 이해하여 사용할 때에도 개념이미지는 영향을 미쳤으므로 형식적 개념이 관계적으로 이해되는 과정을 표현한 화살표에도 개념 이미지가 영향을 미치고 있음을 화살표로 표현하였다.

또한, 유형 6의 의미론적 증명 구성 과정은 유형 5, 7과는 차이점이 존재한다. 유형 6의 증명을 구성한 연구참여자는 형식적 개념을 도구적으로 이해하여 증명을 구성하고 있었다. 그 과정에서 형식적 개념으로는 보이기 어려운 새로운 부등식을 증명해야 할 상황에 놓이자, 연구참여자는 함수의 크기를 비교하는 개념이미지를 사용하여 증명을 해결하였다. 즉, 의미론적 증명 과정은 증명의 전체 방향을 잡기 위해 개념이미지가 사용되기도 하며, 증명의 과정에서 특정한 문제를 해결하기 위해 개념이미지가 사용되기도 한다. 증명 유형 6과 같이 코시-슈바르츠 부등식을 증명한 연구참여자들의 증명 구성 과정의 사고를 도식화하면 [그림 Ⅳ-16]과 같다.



[그림 Ⅳ-16] 의미론적 증명의 구성 과정2

이와 같이 코시-슈바르츠 부등식에 대한 구문론적 증명 구성과 의미론적 증명 구성과 증명 구성에 영향을 미치는 개념들의 이해를 심도 있게 살펴보았다. 구문론적으로 증명을 구성한 연구참여자들의 공통점은 부등식을 '전개해야 할 식'에 초점을 둔 것이다. 다시 말하면 증명해야 할 부등'식'을 증명 대상으로 보고 '식'을 다양한 방법으로 변경할 수 있는 개념들을 도구적으로 사용하여 식을 변경하였고 변경된 식이 성립함을 보이는 과정을 시행하였다.

의미론적으로 증명을 구성한 연구참여자들은 증명해야 할 식에 초점을 두기 보다는 비교되고 있는 '좌변과 우변', 즉 비교 대상에 초점을 두었다. 비교 대상을 자신이 알고 있는 개념이미지로 변형시켜서 개념이미지의 크기를 비교하는 과정을 증명에 사용하였다. 이는 부등식을 증명해야 할 대상으로 볼 뿐만 아니라 실제로 비교가 되고 있는 대상들을 직관적으로 비교하는 사고 작용이 일어남을 의미한다.

V. 결론

1. 요약 및 결론

수학의 여러 이론 체계는 공리와 정의로부터 수학적 증명을 통해 이끌어진 정리와 성질들로 구성된다. 여기서 수학적 증명이란 엄밀한 수학적 기호를 통해 표현된 정의와 정리, 즉 형식적 개념을 연역하여 정당화하는 증명을 의미한다. 그러나 개인의 증명 능력의 발달과정은 시각적 구현을 통한 정당화에서부터 발달하며 식을 대상으로 인식하는 기호화를 통해 형식화된 사고가 가능해진다. 형식화된 사고에서도 증명을 구성하는 과정에서는 그 전단계의 사고가 작용한다.

코시-슈바르츠 부등식과 같은 절대부등식은 모든 실수에 대해 항상 성립하는 부등식으로 그 부등식이 성립함을 증명하는 것은 부등식 학습에 중요한 한 부분이다. 절대부등식의 증명은 형식화된 실수의 성질과 식의 전개와 같이 연역적인 증명에 의해서만 그 타당성이 확보될 수 있다. 그런데 증명 자체는 형식적 개념을 통한 연역적인 전개로 이루어지지만 증명을 구성하기 위한 사고 과정에서는 직관적인 표현의 도움을 받기도 한다(Weber & Alcock, 2004). 따라서 절대부등식의 연역적인 증명 구성 과정을 면밀히 분석하여 사고 과정에서 수학적 개념이 어떻게 이해되어 사용되는지에 대해 생각해 볼 수 있다.

이에 본 연구는 예비수학교사들을 대상으로 사례 연구를 실시하여 코시-슈바르츠 부등식을 어떻게 증명하는지 그 증명방법을 분류하고 증명에 필요한 수학적 개념을 이해의 관점에서 분석하고자 하였다. 이를 위하여 본 연구자는 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

예비수학교사는 코시-슈바르츠 부등식 증명을 어떻게 구성하는가?

연구 문제에 대한 답을 얻기 위해 사례 연구를 실시하였다. 코시-슈바

르츠 부등식과 관련한 문헌 연구를 통해 과제를 개발하였으며 면담지에 담긴 과제를 바탕으로 예비수학교사 6명과 면담을 실시하였다. 연구참여자들의 증명을 유형별로 분류하여 분석하였다. 증명을 증명 방법, 증명에 사용된 개념을 기준으로 분류하였다. 그 후 증명 과정에서 수학적 개념이 어떻게 사용되었는지 면담을 통해 유도하였다. 그 후 Tall & Vinner(1981)가 제시한 개념 정의와 개념 이미지로 개념을 분류하고 Skemp(1982)의 도구적 이해와 관계적 이해로 개념을 어떻게 이해했는지 분석하였다.

과제를 통한 증명과 면담내용을 바탕으로 도출한 연구 결과는 다음과 같다. 우선 6명의 연구참여자의 증명은 총 7개의 유형으로 분류할 수 있었다. 이중 4개는 구문론적으로 증명을 구성하였고 3개는 의미론적으로 증명을 구성하였다. 구문론적으로 증명을 구성한 연구참여자는 대부분 부등식을 보고 증명의 과정 또는 증명의 구체적인 아이디어를 머리 속에 떠올릴 수 있었다. 그 후 형식적 개념을 도구적으로 사용하여 증명을 완성하였다. 이전의 증명 경험이 영향을 미치기도 하였다. 의미론적으로 증명을 구성한 연구참여자는 부등식에서 부등호의 좌변과 우변의 크기를 비교할 수 있는 개념 이미지를 사용하여 증명을 구성하였다. 개념이미지는 형식적 개념과 관계적으로 이해되어 증명을 완성하였다.

결론적으로 코시-슈바르츠 부등식을 증명할 때 부등식에 대한 개념 이해는 증명 구성에 영향을 주었다. 예비수학교사들은 수학을 학습하는 오랜 과정동안 부등식에 대한 개념 이해를 거쳐 왔으며 증명 구성에도 영향을 미쳤음을 알 수 있다. 절대부등식의 증명을 가르쳐야 하는 예비수학교사로서 다양하게 부등식을 이해하고 교수·학습 과정에서 기하적 사고와 대수적 사고에 관한 학생들의 사고 양식을 모두 고려해야 할 뿐만 아니라, 학생들이 하나의 사고에 고착되지 않고 다양한 사고 양식을 형성할 수 있도록 지도해야 한다.

코시-슈바르츠 부등식이 성립함을 보일 때 전개해야 할 식에 초점을 둔 참여자들은 다양한 형식적 개념을 도구로 사용하여 식을 전개하는 연역적 증명을 구성하였다. 따라서 부등식을 전개해야 할 식으로 본 참여

자들은 구문론적으로 증명 구성하여 연역적 증명을 완성하였다. 이러한 증명은 형식적인 개념을 사용한 엄밀한 연역적 증명에 가깝다. 또한 증명을 한 부등식이 성립하는지에 대한 여부를 전개된 식의 성립 여부로 판단하였다.

또한 코시-슈바르츠 부등식이 성립함을 보일 때 전개해야 할 식과 비교해야 할 대상 모두에 초점을 둔 참여자들은 증명 계획을 세울 때 또는 증명 구성 과정에서 어려운 점에 도달하였을 때 좌변과 우변의 크기를 비교할 수 있는 개념이미지를 사용하였다. 그리고 연역적 증명을 구성하기 위해 개념이미지를 관계적으로 이해하여 식의 전개하는 연역적 증명을 구성하였다.

2. 논의 및 제언

지금까지 부등식의 증명 구성을 분석하고 증명을 구성하는데 있어 부등식을 인식하는 두 가지 방법을 제시하였다. 하나는 부등식의 크기 비교에 초점을 두고 증명을 구성하는 것이다. 실제로 크기를 비교할 수 있는 벡터나 이차함수를 이용하여 증명을 구성한다. 다른 하나는 부등식이 식 전개가 가능한 대수식임에 초점을 두고 식의 전개를 통해 부등식의 성립함을 보이며 증명을 구성하는 것이다. 전개해야 할 식에 초점을 두고 형식적 개념을 도구적으로 사용한 참여자들은 구문론적으로 증명을 구성하였다. 반면 비교해야 할 대상에 초점을 두고 비교해야 할 대상의 개념이미지를 사용하여 증명을 구성한 참여자들은 의미론적으로 증명을 구성하였다.

코시-슈바르츠 부등식을 증명할 수 있는 다양한 증명 방법이 존재했지만 어떻게 개념 이해를 해야 이러한 증명을 구성할 수 있는지에 대해 알아볼 수가 없었으며, 이는 증명 교육에서도 어떻게 개념을 이해하도록 가르쳐야 증명을 좀 더 증명의 다양한 역할을 할 수 있도록 의미 있게 가르칠 수 있는지를 답하지 못하였다. 본 연구를 통해 두 가지 종류의 연역적 증명에 따라 부등식을 이해하는 초점이 다름을 알 수 있었다. 부

등식을 풀 수 있고 증명할 수 있다는 것을 넘어서 부등식을 어떻게 이해하느냐에 따라 증명 구성 과정이 달라짐을 확인해 볼 수 있었다. 절대부등식의 증명을 실수의 성질을 이용한 식의 전개의 차원에서 이해한다면 형식적이고 연역적인 증명을 잘 구성할 수 있다. 또한 절대부등식을 증명하는 과제에서 부등호의 좌변과 우변의 크기를 비교할 수 있는 개념이미지를 사용하는 것은 증명해야 할 부등식을 직관적으로 이해할 수 있다는 점에서 좀 더 쉽게 연역적 증명을 구성할 수 있도록 도왔다.

본 연구에서 한걸음 나아가 부등식과 관련한 문제를 해결할 때도 서로 다른 이해가 작용하는지 분석하는 사례 연구가 가능할 것이다. 또한 질적 연구의 단점인 소수의 연구참여자의 문제를 보완하기 위해 대량의 실험을 통해 부등식의 이해를 분석해 볼 수도 있다.

참고문헌

교육과학기술부(2015). **수학과 교육과정**. 고시 제 2015-74호 [별책 8].

김병무(2005). 여러 가지 평균과 부등식을 이용한 대학수학 학습. **수학교육논문집, 19**(4). 699-713.

김성경, 현은정, 김지연(2015). 중고등학생의 대수적 추론 문제해결능력과 문제해결과정 분석. **East Asian mathematical journal, 31**(2). 145-165.

김영기(2014). **문자와 식 영역에 대한 고등학교 초임 수학교사의 KAT - 고등학교 1학년 내용을 중심으로 -**. 석사학위논문. 서울대학교.

김혜은(2010). **절대부등식 문제해결능력 및 오류유형 분석에 관한 연구 : 고등학교 1학년 학생들을 대상으로**. 석사학위논문. 한국교원대학교.

박귀희 외.,(2010). 중학생의 경험적 증명과 연역적 증명에 대한 선호 요인 분석. **수학교육논문집, 24**(2), 325-344.

신경희(2005). 선형대수에서의 학생들의 오개념 - 일차변환을 중심으로 -, **수학교육논문집, 19**(2). 379-388.

우정호. (2000). **수학 학습-지도 원리와 방법**, 서울대학교 출판부.

우정호, 박미애, 권석일(2003). 역사발생적 수학교육 원리에 대한 연구(1) : 증명의 의미 지도의 역사발생적 전개. **학교수학 5**(4). 401-420.

이정곤, 류희찬(2011). 예비교사들을 대상으로 한 증명활동과 반례생성 수행결과 분석 : 수열의 극한을 중심으로, **수학교육학연구, 21**(4). 379-398.

조지영(2011). **학생들의 수학적 개념 이해와 증명의 구성 분석 - 벡터와 관련된 개념들을 중심으로 -**. 석사학위논문. 서울대학교

한인기(2001). 코시 부등식에 관한 연구. **수학교육, 40**(1). 103-112.

최지영(2011). **초등학교에서의 대수적 추론 능력 향상을 위한 교수-학습 방향 탐색.** 박사학위논문. 한국교원대학교.

Alcock, L., & Inglis, M. (2008). Doctoral students’ use of examples in evaluating and proving conjectures. *Educational Studies in*

Mathematics, 69(2), 111-129.

Almog, N., & Ilany, B. S. (2012). Absolute value inequalities: high school students' solutions and misconceptions. *Educational Studies in Mathematics*, *81*(3), 347-364.

Bicer, A., Capraro, R. M., & Capraro, M. M. (2014). Pre-service Teachers' Linear and Quadratic Inequalities Understandings. *International Journal for Mathematics Teaching &Learning*.

Bouniakowsky, V. (1859). *Sur quelques inégalités concernant les intégrales ordinaires et les intégrales aux différences finies.* Eggers.

Bradley, R. E., & Sandifer, C. E. (2009). Cauchy's Cours d'analyse. *CCD Astronomy, 1.*

Cauchy, A. L. (1821). *Cours d'analyse de l'École Royale Polytechnique.*

Creswell, J. W. (2005). **연구설계: 정성연구, 정량연구 및 혼합연구에 대한 실제적인 접근.** (강윤수 외 공역). 서울 : 교우사. (원저 2003 출판)

Davis, P. J., & Hersh, R. (1998). *The mathematical experience*. Houghton Mifflin Harcourt.

Fink, A. M. (2000). An essay on the history of inequalities. *Journal of mathematical analysis and applications*, *249*(1), 118-134.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21*(1), 6-13.

Hardy, G. H. (1930). Prolegomena to a chapter on inequalities. *Journal of the London Mathematical Society, 1*(1), 80-80.

Hardy, G. H., Littlewood, J. E., & Pólya, G. (1952). *Inequalities*. Cambridge university press.

Harel, G., & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. *Research in collegiate mathematics education III, 7*, 234-282.

Harel, G., & Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspectives on the learning and teaching of proof. *Second handbook of research* *on mathematics teaching and learning, 2*, 805-842.

Jiang, Z., & O'Brien, G. E. (2012). Multiple Proof Approaches & Mathematical Connections. *Mathematics Teacher, 105*(8), 586-593.

Kazarinoff, N. D. (2014). *Analytic inequalities*. Courier Corporation.

Knuth, E. J. (2002). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. J*ournal of Mathematics Teacher Education, 5*(1), 61-88.

MacGregor, M., & Stacey, K. (1993). Cognitive models underlying students' formulation of simple linear equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 217-232.

Mejia-Ramos, J. P., Fuller, E., Weber, K., Rhoads, K., & Samkoff, A. (2012). An assessment model for proof comprehension in undergraduate mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 79*(1), 3-18.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative Research and Case Study Applications in Education. Revised and Expanded from" Case Study Research in Education."*. Jossey-Bass Publishers, 350 Sansome St, San Francisco, CA 94104.

Merriam, S. B.(2005). **정성연구방법론과 사례연구**(강윤수 외 공역). 서울: 교우사. (원저 1998년 출판)

Martin, W. G., & Harel, G. (1989). Proof frames of preservice elementary teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41-51.

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM) (2000). **학교수학을 위한 원리와 규준** (류희찬, 조완영, 이경화, 나귀수, 김남균, 방정숙 역.). 서울: 경문사. (원저 2000출판).

Schwarz, H. A. (1890). *Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung* (pp. 223-269). Springer Berlin Heidelberg.

Selden, A., & Selden, J. (2003). Validations of proofs considered as texts: Can undergraduates tell whether an argument proves a theorem?. *Journal for research in mathematics education*, 4-36.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*, 20-26.

Skemp, R. R. (1982). Communicating mathematics: Surface structures and deep structures. *Visible Language, 16*(3), 281.

Skemp, R. R. (2000). **수학학습 심리학**. (황우형 역.). 서울 : 사이언스북스. (원저 1987출판)

Sommariva, A. M. (2008). The generating identity of Cauchy-Schwarz-Bunyakovsky inequality. *Elemente der Mathematik, 63*(1), 1-5.

Stake, R. E. (1995). *The art of case study research*. Thousand Oaks, CA : Sage.

Steele, J. M. (2004). *The Cauchy-Schwarz master class: an introduction to the art of mathematical inequalities*. Cambridge University Press.

Tall, D. (2004). Thinking through three worlds of mathematics. In *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 281-288).

Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal, 20*(2), 5-24.

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational studies in mathematics, 12*(2), 151-169.

Tall, D., Yevdokimov, O., Koichu, B., Whiteley, W., Kondratieva, M., & Cheng, Y. H. (2012). Cognitive development of proof. *In Proof and proving in mathematics education* (pp. 13-49). Springer Netherlands.

Tsamir, P., & Almog, N. (2001). Students' strategies and difficulties: the case of algebraic inequalities. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 32*(4), 513-524.

Tsamir, P., & Bazzini, L. (2004). Consistencies and inconsistencies in students' solutions to algebraic 'single-value' inequalities.

International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 35(6), 793-812.

Victor J. Katz (2006). **수학교육에서 역사 활용하기** (계영희 외 역.) 서울 : 교우사. (원저 2000출판).

Weber, K. (2001). Student difficulty in constructing proofs: The need for strategic knowledge. *Educational studies in mathematics, 48*(1), 101-119.

Weber, K. (2002). Beyond proving and explaining: Proofs that justify the use of definitions and axiomatic structures and proofs that illustrate technique. *For the learning of Mathematics*, 14-17.

Weber, K., & Alcock, L. (2004). Semantic and syntactic proof productions. *Educational studies in mathematics, 56*(2-3), 209-234.

Wu, H. H., & Wu, S. (2009). Various proofs of the Cauchy-Schwarz inequality. *Gao Mingzhe Some new Hilbert type inequalities and applications....... 4 Song-Zhimin, Dou-Xiangkai and Yin Li On some new inequalities for the Gamma function....... 14 Mihály Bencze, 17*(1), 221-229.

부록 1. 면담지

안녕하세요.
연구책임자 곽문영입니다.

본 연구는 면담을 통해 진행되며,
코시-슈바르츠 부등식의 증명과 개념 이해에 관한 연구입니다.

연구의 순서에 맞춰 페이지수가 진행되오니,
연구책임자의 지시에 따라 페이지를 넘겨주시기 바라며
뒷면의 페이지를 미리 보지 마시기를 부탁드립니다.
앞 장으로 되돌아가는 것은 상관 없습니다.

각 페이지마다 시간제한은 없으므로
충분히 생각해보시고 말하시거나 적으시면 됩니다.
최대한 자세히 말씀해주시고, 자세히 적어주시면
연구에 큰 도움이 될 것입니다.
중간에 연구책임자의 질문에 답하는 것 외에도
궁금한 사항이 있으시면 언제든 말씀해 주시고
기타 의견도 말씀해 주시면 잘 분석하여 사용하겠습니다.

연구가 시작됨과 동시에 녹음이 시작됨을 알려드립니다.

준비가 되셨으면 연구책임자에게 말씀해 주시고
페이지를 넘겨주시기 바랍니다.

다음은 코시-번야콥스키-슈바르츠 부등식의 역사적 발달 과정을 간략하게 간추린 것입니다.

코시(Augustin-Louise Cauchy, 1789-1857)는 1821년 자신의 저서 「Cours d' analyse」의 노트Ⅱ(부록)에서 부등식의 대수적 기본성질을 다루었습니다. 그리고 몇 가지 절대부등식을 발견하였는데, 그 중 코시 부등식은 다음과 같습니다.

정리 16. $a, a', a'', \cdots$, $\alpha, \alpha', \alpha'', \cdots$와 같이 두 개의 양(quantities)의 수열이 있고 각 수열은 n개의 항을 가지고 있다고 하자. 만약 비율이 $\frac{a}{\alpha}, \frac{a'}{\alpha'}, \frac{a''}{\alpha''}, \cdots$ 서로 같지 않으면, 그 합 $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' \cdots$은 곱보다 작다

$$\sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots}\,\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha'^2 + \cdots},$$

따라서 우리는 $\begin{cases} val.\,\nu m.\,(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \cdots) \\ < \sqrt{a^2 + a'^2 + a''^2 + \cdots}\,\sqrt{\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \cdots} \end{cases}$ 임을 알 수 있다.

1859년에 번야코브스키(V. Y. Bunyakovsky)의 「Mémoire」에서는 코시 부등식을 간단한 유한합의 형태로 일반화 하였습니다.

$$\left(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \cdots + b_n^2\right) >$$
$$\left(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \cdots + a_n b_n\right)^2.$$

위 식을 수 $a_1, a_2, a_3 \cdots a_n$이 연속 함수 $\rho(x)$의 x는 x_0부터 X까지의 유한합이라 가정하고, $b_1, b_2, b_3 \cdots b_n$가 또 다른 연속 함수 $\phi(x)$의 유한합이라 가정하면 극한을 취했을 때 위의 부등식은 다음으로 대체된다.

$$\int_{x_0}^{X} \rho(x)^2.dx.\int_{x_0}^{X} \phi(x)^2.dx > \left(\int_{x_0}^{X} \rho(x)\phi(x)dx\right)^2$$

이 식에서 $\rho(x) = \lambda\phi(x)$이면 등호가 성립한다. λ는 상수이다.

1895년에 슈바르츠(H. A. Schwarz)는

만약 $S \subset \mathbb{R}^2$이고 $f: S \rightarrow \mathbb{R}$, $g: S \rightarrow \mathbb{R}$이면 이중적분 $A = \iint_S f^2 dxdy$, $B = \iint_S fgdxdy$, $C = \iint_S g^2 dxdy$들은 반드시 $|B| \leq \sqrt{A} \cdot \sqrt{C}$을 만족함을 보이려 했지만 쉽지 않았습니다. 그러던 중 그는 다음과 같은 아이디어를 떠올렸습니다.

$$p(t) = \iint_S (tf(x,y) + g(x,y))^2 dxdy = At^2 + 2Bt + C$$

1930년대에 하디(Hardy)외는 「Inequalities」를 출판하면서 코시-슈바르츠 부등식을 절대부등식 중 가장 기본이 되는 부등식(fundamental inequalities)이라고 하였습니다.

수학개념의 역사적 발달 과정을 아는 것에 대한 교육적 가치는 수학교육에서 꾸준히 그 의의를 인정받고 있습니다. Freudenthal은 역사 발생적 원리에 따른 수학화 지도 방법에 대해 역사는 우리에게 수학이 어떻게 발명되었는지 가르쳐주지만 학습자는 인류의 학습 과정을 그대로 반복해야 하는 것이 아니라 재발명하도록 해야 하며, 수학보다는 수학화를 재발명하도록 안내되어야 한다. 재발명은 가치 있는 지식과 여러 가지 능력을 부과되는 것보다 더 쉽게 학습되고, 파지되고, 전이될 것이라고 하였습니다.

대학수학에서 배운 내용을 토대로 코시-슈바르츠 부등식을 다음과 같이 표현할 수 있습니다.

1. 기본형

임의의 실수 $a_i, b_i \in \mathbb{R}\ (i=1,2,\ \cdots, n)$에 대하여

$a_1 b_1 + a_2 b_2 \cdots + a_n b_n \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$ 는 항상 만족한다.

단, 등호가 성립할 필요충분조건은 $\dfrac{b_i}{a_i} = k\ \ (i=1,2,\cdots,n)$일 때이다.

2. 적분형

임의의 적분가능한 연속함수 f, g에 대하여

$$\int_a^b f(x) g(x) dx \le \left(\int_a^b f^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_a^b g^2(x) dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

단, 등호가 성립할 필요충분조건은 f, g가 일차종속일 때이다.

3. 벡터형

V가 실벡터공간이면, $V \times V$를 보내는 내적 함수 $(a,b) \mapsto \langle a,b \rangle$를 정의할 수 있고,

n차 벡터 $a,b \in V$에 대하여 $(a,b) \le |a| \cdot |b|$이다.

등호가 성립할 필요충분조건은 두 벡터 a,b가 $a = kb$를 만족할 때이다.

(이제, 코시-슈바르츠 부등식에 대한 증명을 할 것입니다. 증명 후 면담과정에서 질문할 내용은 다음과 같습니다.)

'어떻게 증명방법을 선택하였는가?'

'이전에 유사한 명제의 증명을 한 적이 있는가?'

'또 다른 증명 방법은 없는가?'

'증명과정에서 어떠한 수학적 개념을 떠올렸는가?'

'떠올린 수학적 개념을 증명과정에서 어떻게 사용하였는가?'

'떠올린 수학적 개념을 증명과정에서 왜 사용하였는가?'

지금까지 배운 수학적 지식을 바탕으로 코시-슈바르츠 부등식을 자유롭게 증명해 보세요.

> 임의의 실수 $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$에 대하여
> $a_1b_1 + a_2b_2 \cdots + a_nb_n \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + \cdots + b_n^2}$ 는 항상 만족한다.
> 단, 등호가 성립할 필요충분조건은 $\frac{b_i}{a_i} = k$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$일 때이다.

(증명)

증명해 주셔서 감사합니다. 코시-슈바르츠 부등식의 네 가지 관점에서의 증명과정은 다음과 같습니다.

대수적방법증명	$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(a_ib_j - a_jb_i)^2$ $= \sum_{i=1}^{n}a_i^2\sum_{j=1}^{n}b_j^2 + \sum_{i=1}^{n}b_i^2\sum_{j=1}^{n}a_j^2 - 2\sum_{i=1}^{n}a_ib_j\sum_{j=1}^{n}b_ja_i$ $= 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right) - 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_j\right)^2$ 여기서 좌변의 실수의 제곱의 합은 항상 0보다 크거나 같다는 성질에 의하여 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}b_j^2\right) \geq \left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_j\right)^2$ 이 만족한다.□
기하적방법증명	$\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, $\beta = (b_1, b_2, \cdots, b_n)$ 벡터를 두자. $\alpha \bullet \beta = \lvert\alpha\rvert\lvert\beta\rvert\cos(\alpha.\beta)$, $\lvert\cos(\alpha.\beta)\rvert \leq 1$이고, $\lvert\alpha\rvert\lvert\beta\rvert \geq 0$이므로 위 식은 $\alpha \bullet \beta = \lvert\alpha\rvert\lvert\beta\rvert\cos(\alpha.\beta) \leq \lvert\alpha\rvert\lvert\beta\rvert$라 할 수 있다. 표현을 바꿔보면 $\alpha \bullet \beta = \sum_{i=1}^{n}a_ib_i$이고, $\lvert\alpha\rvert^2 = \sum_{i=1}^{n}a_i^2$, $\lvert\beta\rvert^2 = \sum_{i=1}^{n}b_i^2$ 이다. 따라서 코시 슈바르츠 부등식을 증명하였다.□
해석적방법증명	다음 이차 함수 $f(x) = \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)x + \left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) = \sum_{i=1}^{n}(a_ix - b_i)^2$는 실수 내의 모든 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이므로, $f(x)$의 판별식은 0보다 작거나 같아야 한다. 따라서 $\left(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right) \leq 0$ 이 만족한다.□
수학적귀	$n=1$일 때는 자명하다. $n=2$일 때 $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 = a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2$ $\leq a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 = \left(a_1^2 + a_2^2\right)\left(b_1^2 + b_2^2\right)$ 를 만족한다.

납 법	$n=k$일 때 코시-슈바르츠 부등식이 성립한다고 가정하면 즉, $\left(\sum_{i=1}^{k} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{k} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{k} b_i^2\right)$ 이 식을 만족하면 $\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2 + a_{k+1}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2 + b_{k+1}^2}$ $\ge \sqrt{\sum_{i=1}^{k} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k} b_i^2} + \lvert a_{k+1} b_{k+1} \rvert$ $\ge \sum_{i=1}^{k} \lvert a_i b_i \rvert + \lvert a_{k+1} b_{k+1} \rvert = \sum_{i=1}^{k+1} \lvert a_i b_i \rvert$이다. 따라서 $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$ 이 만족한다.□

면담이 종료되었습니다.

자유롭게 묻고 싶은 것이 있으시면 물으셔도 됩니다.

정말로 수고하셨습니다.

고맙습니다.

부록 2. 사전 질문지

연구참여자 배경

이름	학번/학년	수강한 수학과목	수강한 교육과목	교직 경험		
				유무	방법	년차
(예시)	08/4학년	해석개론1, 해석개론2, 미분방정식개론, 복소변수함수론,	교육과정, 수학교재연구 및 지도법, 수학교육론	유	과외	3년

아래의 과목 중 수강한 과목을 위에 적어주세요.

수학 과목:
해석개론1, 해석개론2, 기하학, 이산수학, 미분방정식개론, 선형대수학1, 선형대수학2, 정수론, 확률론, 현대대수학1, 현대대수학2, 다변수함수론, 미분기하학개론, 복소변수함수론, 수리통계, 위상수학1, 위상수학2, 해석학, 수치해석
수학교육 과목:
수학교육과 교육공학, 교육방법 및 교육공학, 교육과정, 수학교재연구 및 지도법, 수학교육론, 교육평가, 수학사와 수학교육, 수리논리와 논술, 교직실무
(이름은 모두 수정 처리하여 A, B 과 같이 들어갑니다. 걱정하지 마세요)
(혹시 적기 어려우신 것이 있으시면 안 적으셔도 됩니다.)

면담 이외의 좀 더 거시적인 관점에서 두 가지 추가 질문 드려요.
1. 본인에게 수학에서 증명활동이란?(증명의 장점, 단점, 필요성 등)
에 대해 평소에 생각하셨던 대로 적어주시면 감사하겠습니다.

ABSTRACT

A Study on Proving Inequalities of Preservice Teachers

-Focusing on Cauchy-Schwarz Inequalities-

Kwak Moon-Young
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

Proof is one of the important mathematical standards to guess a mathematical fact, justify by logical analysis and reflect on the process. Mathematical proof is followed by strict definitions expressed mathematical symbols. However, in the process of configuring the proof, people can use intuitive reasoning through the examples or other methods. In that, there can be classified a proof by semantic proof and syntactic proof. Syntactic proof production is occur when the prover draws inferences by manipulating symbolic formulae in a logically permissible way. Semantic proof production is occur when the prover uses instantiations of mathematical concepts to guide the formal inferences that one draws.

6 Preservice math teachers participated in this study and carried out a case study about how to prove the inequalities. Classifying proof method is analyzed by concepts used to proving. As a result, proof of absolute inequality like cauchy-schwarz inequality could be classified as syntactic

proof and semantic proof.

First of all, proof could be classified into seven types, 4 types are classified by syntactic proof production and 3 types are classified by semantic proof production. Participants who constructed proofs syntactically were made immediately planning to prove by using proof experiences on similar proof productions. Also Concepts used in the proof production are used as symbols or tools to connect the process of proof and formal definitions and properities stated in representation system of proof. In particular, participants to successfully perform syntactic proof showed competence in formula transition by replacing complex expressions or changing expression on vector or $\sum$ to simply the formula.

Participants who constructed proof semantically established proof plan by concept image about inequalities using vector representation. In the proving, participants used pictures to visualize the size of vectors and justified the inequalities using size of vector, and then transformed the ideas to representation system of proof. That is, the proving of cauchy-schwarz inequality is to compare the size of the left and right sides when participants construct semantic proof production.

For a further studies, this finding suggests that whether proving inequalities factors also affect problem solving or not. Also it may be to analyze the understanding of the inequalities over a large number of participants in order to compensate for the weakness of a small number of participants in a qualitative study.

Keywords: Inequalities, syntactic proof, semantic proof.

***Student Number*: 2013-23371**