교육학석사 학위논문

수형도를 활용한 곱의 법칙 지도에 대한 연구

- 세기를 중심으로 -

2017년 02월

서울대학교 대학원

수학교육과

박 연 미

수형도를 활용한 곱의 법칙 지도에 대한 연구

- 세기를 중심으로 -

지도교수 김 서 령

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함
2016 년 11월

서울대학교 대학원
수학교육과
박 연 미

박연미의 교육학석사 학위논문을 인준함
2016년 12월

위 원 장 ______ 이 경 화 ______ (인)

부위원장 ______ 유 연 주 ______ (인)

위   원 ______ 김 서 령 ______ (인)

국문초록

수형도를 활용한 곱의 법칙 지도에 대한 연구
- 세기를 중심으로 -

곱의 법칙은 세기 문제의 가장 기본적인 해결 방법이자 이후 순열과 조합 학습에서 논리적 정당화 과정을 이해하는 기초 토대가 된다. 따라서 조합론 영역의 학습에서는 학생들이 곱의 법칙의 개념을 이해하고 이런 이해를 바탕으로 곱의 법칙을 이용하여 세기 문제를 해결하는 과정이 필요하다. 그러나 실제로 학교 현장에서 곱의 법칙은 논리적 정당화 과정을 소홀히 다루고 있다. 학생들은 곱의 법칙에 대해 제대로 이해하지 못하고 이를 이용해 문제 풀이만 하는 기계적인 학습을 하고 있다. 그 결과 어떤 경우에 곱의 법칙을 적용하는지 알지 못하고 '이고' 나 '동시에' 라는 특정 단어에 관심을 집중하는 인식론적 장애를 보이는 학생들이 많다.

이 논문에서는 세기의 곱의 법칙을 학습하는데 있어서 학생들이 겪는 어려움을 극복하는 방법으로 수형도를 활용한 학습-지도 과정을 제안한다. 수형도는 구체적이고 시각적인 이미지를 갖지만 가능한 경우들을 모두 배열하는 주체의 사고 과정을 드러낸다는 점에서 개념적 표상이라 할 수 있다. 수학적 개념은 조직화된 이론을 언어적 형식을 이용하여 상징적으로 나타낸 것이기 때문에 학생들이 이것을 이해하는 것은 어려울 수 있다. 따라서 수학적 표현과 표상을 이용하여 학습하게 되면 수학적 개념을 이해하는데 도움이 될 뿐만 아니라 문제 해결력을 키울 수 있다. 수형도를 그리고 해석하는 학습-지도 과정을 통해 학생들이 수형도를 개념적 표상으로 구성하고 이 표상을 이용하여 곱의 법칙을 논리적으로 정당화할 수 있음을 보이고자 하였다. 그리고 수형도를 표상으로 갖게 되면 순열과 중복순열 문제를 곱의 법칙으로 해결할

수 있음을 보이고자 하였다.

본 연구는 먼저 수형도를 활용하여 세기의 곱의 법칙을 지도할 수 있는 학습-지도 과정을 설계하였다. 설계한 교수 절차를 바탕으로 학생들과 수업을 실시하였고 그 결과를 분석하였다. 설계된 학습-지도 과정에 따라 수업을 실시한 결과 학생들은 수형도를 그리고 해석하는 과정을 통해 세기의 곱의 법칙을 논리적으로 정당화할 수 있다는 것을 확인하였다. 또한, 학생들이 순열과 중복 순열의 문제를 곱의 법칙을 이용하여 해결할 수 있음을 확인하였다.

주요어 : 곱의 법칙, 개념적 표상, 수형도.

학 번 : 2014-22850

목 차

국문 초록 ······ i

목차 ······ iii

표 목차 ······ v

그림 목차 ······ vi

Ⅰ. 서론 ······ 1

1. 연구의 목적 및 필요성 ······ 1

2. 연구문제 ······ 4

Ⅱ. 이론적 배경 ······ 5

1. 곱의 법칙 ······ 5

1.1 곱의 법칙 ······ 5

1.2 곱의 법칙의 중요성 ······ 7

1.3 곱의 법칙에 대한 현행 교육과정 및 교과서 분석 ······ 10

2. 개념적 표상으로서의 수형도를 이용한 수학 학습 ······ 18

2.1 수학적 표현과 표상 ······ 18

2.2 개념적 표상으로서의 수형도 ······ 20

2.3 조합적 사고 모델을 이용한 수학 학습 ······ 22

Ⅲ. 곱의 법칙 학습-지도 과정 설계 ······ 28

1. 학습-지도 과정 설계 ······ 28

2. 수업 대상자 및 표집방법 ······ 37

2.1 수업 대상자 ······ 37

2.2 표집방법 ······ 38

3. 수업절차 38

Ⅳ. 수업 및 평가 결과 40

1. 수업 결과 40
2. 평가 결과 47
3. 인터뷰 결과 50

Ⅴ. 결론 52

참고문헌 55
부록 57
영문 초록 62

표 목차

<표 Ⅱ-1> 수학과 공통교육과정 수학 중 확률과 통계 영역의 내용 체계 ······11
<표 Ⅱ-2> 경우의 수 단원의 학습내용 성취 기준과 교수·학습상의 유의점 ······11
<표 Ⅱ-3> 수학과 선택교육과정 확률과 통계 중 순열과 조합 영역의 내용 체계 ······14
<표 Ⅱ-4> 순열과 조합 단원의 학습내용 성취 기준과 교수·학습상의 유의점 ······14
<표 Ⅱ-5> 순열과 순열의 수 내용 체계. 확률과 통계. 미래엔 ·····16
<표 Ⅲ-1> 수업에 참여한 학생들의 수학 성적 ······38
<표 Ⅲ-2> 수업 절차 ······39

그림 목차

[그림 Ⅱ-1] 곱의 법칙의 수형도 ······6
[그림 Ⅱ-2] 일반적인 곱의 법칙의 수형도 ······7
[그림 Ⅱ-3] 순열의 수 ${}_nP_r$ 의 수형도 ······10
[그림 Ⅱ-4] 곱의 법칙. 중학교 수학②. 좋은책신사고 ······12
[그림 Ⅱ-5] 곱의 법칙. 확률과 통계. 미래엔 ······15
[그림 Ⅱ-6] 세 자리수의 수형도 ······22
[그림 Ⅱ-7] Elise의 조합적 사고 모델 ······23
[그림 Ⅱ-8] 서로 다른 구조를 가진 두 개의 결과물들의 집합 ······24
[그림 Ⅱ-9] [그림 Ⅱ-8]에서 (a)의 수형도 ······25
[그림 Ⅳ-1] 사전 평가 1-1번에 대한 학생2의 풀이 ······40
[그림 Ⅳ-2] 사전 평가 1-2번에 대한 학생1, 2의 풀이 ······41
[그림 Ⅳ-3] 사전 평가 1-1, 2번에 대한 학생1의 풀이 ······42
[그림 Ⅳ-4] 학습지 2번에 대한 학생3의 풀이 ······45
[그림 Ⅳ-5] 학습지 3번에 대한 학생1의 풀이 ······46
[그림 Ⅳ-6] 평가 2번에 대한 학생3의 풀이 ······48
[그림 Ⅳ-7] 평가 3번에서 학생들이 사용한 함수의 개념적 표상 ·50

Ⅰ. 서 론

1. 연구의 목적 및 필요성

복잡하고 전문화되어가는 미래 사회에서 사회 구성원에게 필요한 핵심 역량은 창의적 사고 능력, 문제 해결 능력, 정보처리 능력, 의사소통 능력이다(교육과학기술부, 2011). 특히 넘쳐나는 정보들 속에서 필요한 내용들 선택하고 이것들을 이용하여 창의적으로 문제를 해결하는 능력이 중요하다고 볼 수 있다. 이런 상황에서 경우의 수를 고려하여 최적의 방안을 찾아야 하는 경우가 종종 있다. 또한 논리적 추론을 통해 문제를 해결해야 하는 경우도 있다. Kapur(1970)는 경우의 수를 세는 과정을 통하여 예상, 일반화, 최적화, 존재성, 구조적 사고 등을 훈련시킬 수 있고, 모든 가능성을 고려하면서 그 경우의 수를 세고 가장 적합한 것을 발견하려는 태도를 계발할 수 있으므로 조합론은 학교수학에서 중요하게 다루어져야 한다고 주장하였다.

그러나 현재의 조합론 교육은 순열과 조합의 공식을 적용하여 답을 구하는 데에 치우치고 있다. 확률 계산을 위하여 경우의 수를 세는 방법론적 측면에서 조합론을 다루는 경향이 있기 때문이다(이지현, 2003). 정작 학생들은 순열과 조합의 개념이나 공식은 알고 있지만 이것을 이용하여 문제를 해결하는 데는 어려움을 느끼고 있다. 학생들이 조합론 영역의 문제를 푸는데 있어서 어려움을 겪는 원인을 조합 문제의 유형이나 조합 문제의 변수들에서 찾는 선행 연구들이 있었다(Batanero, Navarro-Pelayo & Godino, 1997; 이지현, 2003; 이주영, 2005; 최연화, 2011).

이러한 선행 연구들과 다르게 정인철(2009)은 순열과 조합에 대한 연구는 근본적으로 ‘수세기’라는 수학 기초 활동과 밀접한 관련이 있으므로 수세기와 관련된 단원의 내적 이해를 강조해야 한다고

주장하였다. 초등학교에서 나열하기와 같은 비형식적인 과정을 거쳐 사칙연산을 이용한 형식화 과정을 거치게 되고 중등과정에서 순열과 조합을 통해 비형식적 지식과 형식적 지식의 결합을 추구한다고 설명하였다.

세기 문제에 있어서 곱의 법칙은 기초적인 사칙 연산 즉, 곱하기를 사용하는 가장 기본적인 법칙이지만 강력한 해결 방법이다. 게다가 이후 학습할 순열과 조합의 논리적 정당화 과정에서 이론적 토대가 된다(교육과학기술부, 2011). 그러나 실제 학교 현장에서는 곱의 법칙을 이용하는데 어려움을 느끼는 학생들이 많다. 곱의 법칙에 대한 충분한 고찰 없이 순열과 조합의 공식을 학습하고 이를 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결하는 데만 무게를 두기 때문이다. 그래서 이 단원을 학습한 후에도 어떤 경우에 곱의 법칙을 적용하는지 알지 못하고 ‘이고’ 나 ‘동시에’ 라는 특정 단어에 관심을 집중하는 인식론적 장애를 보이는 학생들이 많다(김서령·박혜숙·김완순, 2007). 또한 서로 다른 종류의 원소들을 갖는 집합들에서 각각의 원소를 선택하는 문제에서는 곱의 법칙을 적용하여 해결한 학생들이 순열 문제에서는 오류를 범하는 경우도 있다(Mary & Bárbara, 2016). 예를 들면 10명의 학생 중 회장, 부회장, 총무 3명을 선출하는 경우의 수를 10×3이라고 답하는 학생들이 있었다. 문제의 구조를 파악하지 않고 그저 문제에 표면적으로 보이는 수들을 곱한 것은 이 학생들이 곱의 법칙을 잘못 이해했기 때문이다.

본 연구에서는 세기의 곱의 법칙을 학습하는데 있어서 학생들이 겪는 어려움을 극복하는 방법으로 수형도를 활용한 학습-지도 과정을 제안한다. 수학적 개념이 학습자의 의식 내부에 조직화된 개념이나 아이디어로 자리 잡는데 수학적 표현이나 표상은 큰 도움이 된다. 수형도는 다이어그램의 한 종류로 구체적이고 시각적인 이미지를 갖는 세기 전략에 사용되는 수학적 표현이라고 볼 수 있다. 더불어 수형도는 가능한 경우들을 모두 배열하는 사고 과정을 나타내는 일종의 순서

도로서 주체의 사고를 드러낸다는 점에서 개념적 표상이라고도 할 수 있다. 수형도의 단계별 나뭇가지수가 일정할 경우에 수형도에서 구한 순서 지어진 n짝의 개수를 세는 것이 바로 곱의 법칙이다. 본 연구에서는 수형도를 활용한 곱의 법칙의 논리적 정당화 과정을 학습자가 이해할 수 있는지 확인하고자 하였다. 그리고 곱의 법칙으로 순열과 중복순열의 수를 구할 수 있는지를 알아보았다.

구체적으로 각 장과 절에서는 다음과 같은 내용을 다루고자 한다.

서론에 이어 Ⅱ장에서는 이론적 배경을 살펴보고자 한다. 1절에서는 세기의 곱의 법칙을 수형도를 이용하여 논리적으로 정당화할 것이며 일반화된 곱의 법칙까지 유도하려고 한다. 그리고 조합론 영역을 학습하는데 있어 곱의 법칙이 중요한 이유를 선행 연구들을 통해 살펴보려고 한다. 그리고 학생들이 곱의 법칙을 이해하고 활용하는데 어려움을 겪는 이유를 알아보기 위하여 현행 교육과정과 교과서를 분석하여 곱의 법칙을 어떻게 지도하고 있는지 살펴볼 것이다. 그리고 곱의 법칙을 이론적 토대로 하는 순열의 수를 학습하는 과정을 살펴보려고 한다. 2절에서는 수학적 표현과 표상에 대해 알아보고자 한다. 수학적 표현과 표상을 이용한 학습이 학생들이 수학적 개념을 이해하는데 미치는 영향에 대해 선행연구를 통해 알아볼 것이다. 그리고 개념적 표상으로서의 수형도의 특성을 살펴보고 학생들이 세기 문제를 풀 때 일어나는 개념화 과정을 조합적 사고 모델을 이용하여 분석해보고자 한다.

Ⅲ장에서는 본 연구에서 진행할 학습-지도 과정을 설계하고자 한다. 1절에서는 구체적인 수업 강의안을 통해 학습-지도 과정을 설계하고 2절에서는 연구 참여자 및 표집방법을 살펴볼 것이다. 3절에서는 수업 절차에 대해 살펴볼 것이다.

Ⅳ장에서는 앞에서 설계한 학습-지도 과정을 따라 실험 수업을 한 후, 교수 및 연구 결과를 살펴보고자 한다. 실험 수업, 평가 및 인터뷰에서 어떤 과정과 결과가 있었는지에 대해 살펴본 후, 이 결과를 분석하여 학생들이 이 학습-지도 과정을 얼마나 의미있게 받아들였

는지 알아보려고 한다.

Ⅴ절에서는 본 연구의 결론을 제시하고 향후 연구를 위한 제언을 한 후 논문을 마무리하고자 한다.

2. 연구문제

곱의 법칙은 세기 문제 해결하는 가장 기본적이고 강력한 원리이고 이후 순열과 조합 학습에서 공식을 이해할 수 있는 기본 토대가 된다는 점에서 이에 대한 학습자들의 의미 충실한 이해가 반드시 필요하다. 그러나 현행 교육과정에서 곱의 법칙은 논리적 정당화 과정 없이 학습-지도되고 있다. 그 결과 학생들은 곱의 법칙의 개념을 이해하고 문제에 적용하는데 어려움을 겪고 있다. 한편 수형도는 가능한 모든 경우의 수를 순서 지어진 n짝으로 보여주는 수학적 표현인 동시에 이것을 구하는 주체의 사고 과정을 드러내는 개념적 표상이다. 수학적 표현과 표상이 수학 학습에서 개념을 이해하고 문제 해결력을 키우는데 도움이 된다는 점에서 본 논문에서는 수형도를 활용하여 세기의 곱의 법칙을 지도하는 방안을 연구하고자 한다. 수형도를 활용하여 세기의 곱의 법칙을 논리적으로 정당화하고 순열과 중복 순열의 수를 곱의 법칙으로 구하도록 지도하는 방안을 찾아보고자 한다.
따라서 본 연구에서는 다음과 같은 연구 문제를 설정하였다.

연구문제1. 학생들이 수형도를 활용하여 세기의 곱의 법칙을 논리적으로 정당화하도록 지도할 수 있는가?
연구문제2. 학생들은 순서 지어진 n짝의 모든 경우가 수형도로 표시되는 것을 이해하고 이 표상을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?
연구문제3. 학생들은 순열과 중복순열의 수를 곱의 법칙으로 구할 수 있는가?

Ⅱ. 이론적 배경

본 연구를 설계하고 수행하기 위한 이론적 배경으로 세기의 곱의 법칙에 대해 우선 살펴보고자 한다. 수형도를 활용하여 곱의 법칙을 논리적으로 정당화하고 일반화된 곱의 법칙도 유도해 낼 것이다. 그리고 조합론 영역을 학습하는데 있어 곱의 법칙이 중요한 이유를 선행 연구들을 통해 살펴보려고 한다. 다음으로 학생들이 곱의 법칙을 학습하는데 어려움을 겪는 이유를 현행 교육과정에서 찾아보고자 한다.

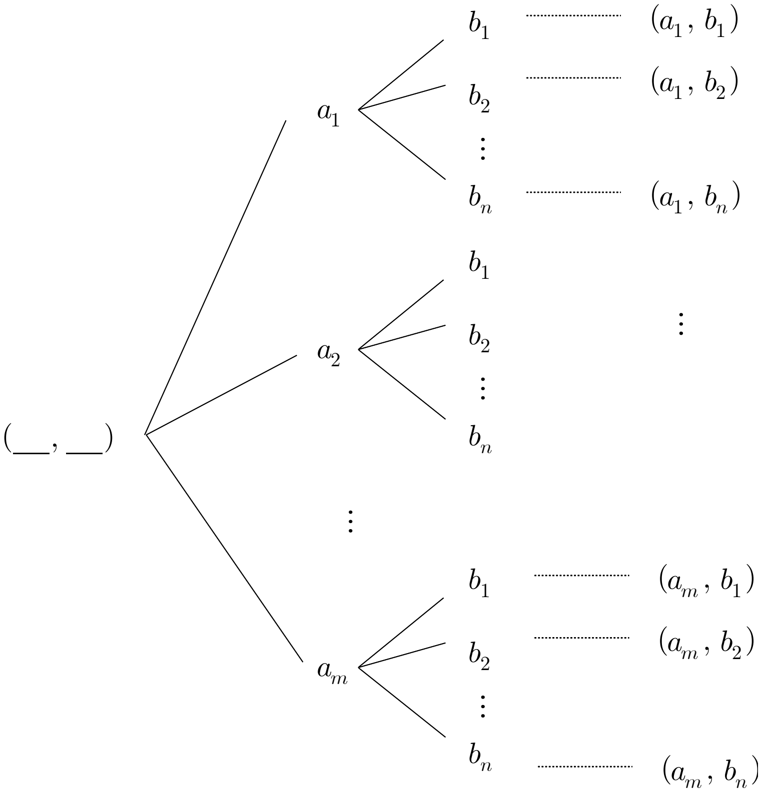
한편 수학적 개념을 학습하는데 있어서 교수학적 효과가 있다고 알려진 수학적 표현과 표상에 대해 살펴보고자 한다. 특히 개념적 표상인 수형도의 특징에 대해 알아볼 것이다. 그리고 조합론의 표현과 표상이 상호작용하면서 학습자의 인지 구조가 형성되는 과정을 Elise의 조합적 사고 모델의 측면에서 살펴보고자 한다.

1. 곱의 법칙

1.1 곱의 법칙

일반적으로 두 사건 A, B에 대하여 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m이고, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이라고 하자. 이 때, 두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우는 A의 한 경우 a와 B의 한 경우 b의 순서쌍 (a, b)로 나타낼 수 있다. 따라서 두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 이러한 순서쌍의 개수를 세는 것과 같다. A의 근원 사건을 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_m$, B의 근원 사건을 $b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n$이라 두면 수형도는 아래 [그림 Ⅱ-1]과 같이 표현된다. 각 $a_i\,(i=1, 2, \cdots, m)$에 대하여 오른쪽으로 뻗어나간 가지수가 모두 n개로 동일하다는 것을 알 수 있다. 따라서 가능한 모든

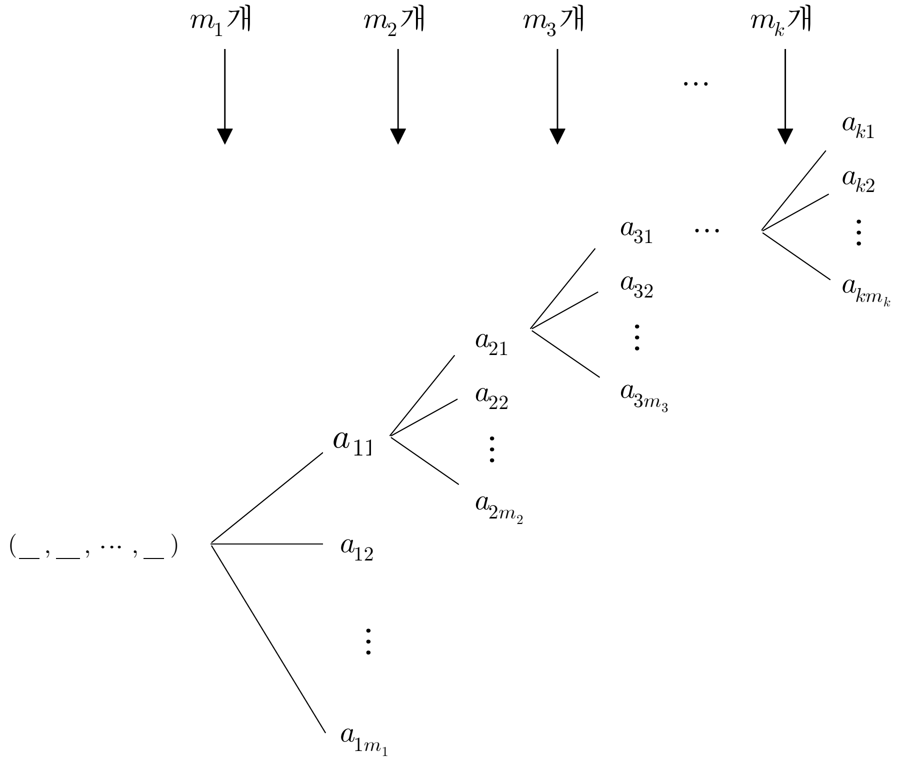
순서쌍의 개수, 즉 경우의 수는 $m \times n$으로 곱을 사용하여 셀 수 있다.



[그림 Ⅱ-1] 곱의 법칙의 수형도

마찬가지로 k개의 사건 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k$에 대하여 각 사건이 일어나는 경우의 수가 $m_1, m_2, m_3, \cdots, m_k$ 일 때, k개의 사건 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_k$가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m_1 \times m_2 \times m_3 \times \cdots \times m_k$이다. 이것을 수형도를 그려 확인하기 위하여 $A_i\,(i=1, 2, \cdots, k)$의 근원사건들을 $a_{ij}\,(j=1, 2, \cdots, m_i)$라 하면 수형도는 [그림 Ⅱ-2]와 같다. A_i의 각 근원사건과 A_{i+1}의 근원사건을 짝짓는 나뭇가지수가 m_{i+1}개로 일정하므로 각 단계에서 뻗어나간 나뭇가지수를 모두 곱하여 경우의 수를 구할 수 있다.

즉, 단계별로 동일한 개수의 나뭇가지가 그려지는 수형도에서 순서 지어진 n짝을 세는 것이 곱의 법칙이다.



[그림 Ⅱ-2] 일반적인 곱의 법칙의 수형도

1.2 곱의 법칙의 중요성

곱의 법칙은 조합론 영역의 세기 문제에 있어서 가장 기본적인 법칙인 동시에 강력한 해결 방법이다. 곱의 법칙을 적용할 수 있도록 경우 나누기를 할 수 있다면 곱과 합의 연산만으로 경우의 수를 구할 수 있다. 곱의 법칙은 기초적인 사칙 연산에 기반을 두고 있기 때문에 조합 공식처럼 기억이 나지 않거나 잘못 적용할 염려가 없다는 점에서 세기 문제 해결에 좋은 방법이다. 이주영(2005)은 조합

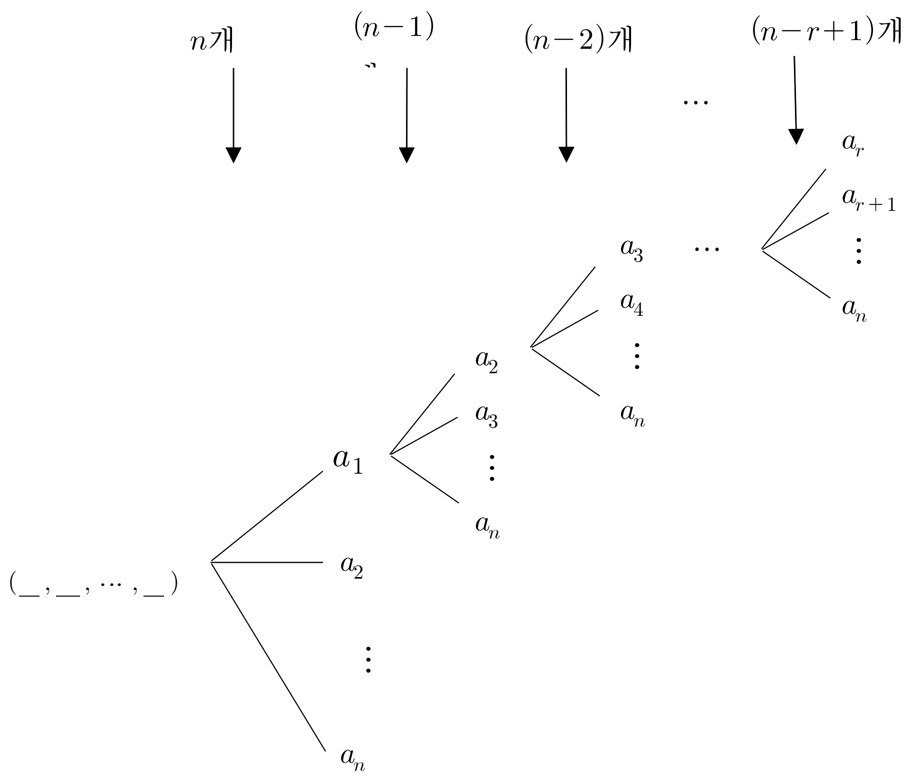
론의 문제 해결을 위한 학습에 있어서는 많은 정리가 필요한 것이 아니라 상황을 고려한 적절한 경우 나누기와 적합한 기본 법칙의 적용이 중요하다고 주장하였다. 세기의 기본 법칙인 곱의 법칙을 적용하려면 이에 대한 명확한 이해가 선행되어야 한다. 따라서 공식을 암기하는 것이 아니라 논리적 정당화 과정을 유도하는 학습 과정을 통해 학습자가 이것을 의미충실하게 이해할 수 있도록 해야 한다.

곱의 법칙은 기초적인 수학 지식으로도 충분히 이해할 수 있기 때문에 순열과 조합의 개념을 이해할 수 있는 연령대 이전의 학생들도 곱의 법칙을 이해하도록 지도할 수 있다. English(1991)는 4세에서 9세의 아동들이 인형 옷을 입히는 경우의 수를 구하는 문제 상황을 통해 곱의 법칙을 발견할 수 있음을 보여주었다. 또한 진선미(2015)는 중학교 1학년 학생들이 초등학교에서 학습한 수형도와 나열하기의 방법을 이용하여 사칙연산만으로도 간단한 순열, 같은 것을 포함한 순열의 문제들을 해결할 수 있음을 보였다. Elise, Craig & John(2015)은 수업 실험을 통해 학부과정 학생들이 기본적인 곱의 법칙으로 순열과 조합의 연산 공식들을 유도해 낼 수 있다는 것을 확인하였다. 학생들은 단계별로 제시되는 문제들을 나열하기, 경우나누기와 곱의 법칙을 이용하여 풀고 자신들의 풀이를 정당화하는 과정을 거쳐 순열과 조합의 수를 구하는 일반화된 형태의 공식을 만들어냈다. 이 선행 연구들은 곱의 법칙이 순열과 조합을 학습하는데 있어서 수학적 구조를 이해하는 기본 원리가 되며 공식을 논리적으로 정당화하는 이론적 토대가 된다는 것을 보여준다.

곱의 법칙은 순열과 조합의 공식을 만들어내는 이론적 기초 토대가 된다(교육과학기술부, 2011). 정인철(2009)은 순열과 조합의 지도는 ‘수세기’ 특히, 곱셈과 나눗셈을 중심으로 연구되어야 한다고 강조하여 곱의 법칙과 기본적인 계산 법칙의 중요성을 언급하였다. 동수묶음을 통한 동수 누가 곱셈 상황과 수형도 그리기를 통한 경우의 수 찾기를 통해 데카르트 곱(cartesian product)을 의식화하는 과정이 순열과 조합을 학습하기 전에 선행되어야 한다고 주장하였

다.

서로 다른 n개에서 $r(0 \le r \le n)$개를 택하여 순서대로 나열할 때, 첫 번째 자리에 올 수 있는 경우는 n가지이고, 그 각각에 대하여 두 번째 자리에 올 수 있는 경우는 첫 번째 자리에 놓인 1개를 제외한 $(n-1)$가지, 세 번째 자리에 올 수 있는 경우는 앞의 두 자리에 놓인 2개를 제외한 $(n-2)$가지이다. 이와 같은 과정을 계속하면 r번째 자리에 올 수 있는 경우는 이미 앞에 놓인 $(r-1)$개를 제외한 $n-(r-1)$, 즉 $(n-r+1)$가지이다. 이것을 수형도로 나타내면 [그림 Ⅱ-3]과 같다. 각 단계의 나뭇가지수가 n개, $(n-1)$개, $(n-2)$개, $\cdots$, $(n-r+1)$개로 일정하므로 순서 지어진 r짝의 개수, 즉 가능한 모든 경우의 수를 구할 때 곱의 법칙을 적용한다. 따라서 순열의 수는 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$이다. 이렇게 곱의 법칙으로 순열의 수를 구한다는 것을 학생들이 이해하게 되면 순열과 조합 단원을 학습할 때 공식을 암기하지 않아도 곱의 법칙을 이용하여 문제를 해결할 수 있다. 더 나아가 학생이 스스로 공식을 유도해낼 수도 있다.



[그림 Ⅱ-3] 순열의 수 ${}_nP_r$ 의 수형도

1.3 곱의 법칙에 대한 현행 교육과정 및 교과서 분석

앞에서 살펴본 바와 같이 곱의 법칙은 세기 문제에서 기본적인 법칙이고 효율적인 해결 방법이며, 이후 학습하게 될 순열과 조합의 이론적 토대가 됨에도 불구하고 많은 학생들은 곱의 법칙을 사용하는데 어려움을 겪고 있다. 지금부터는 세기의 곱의 법칙이 학교에서 어떻게 지도되고 있는지 살펴봄으로써 학생들이 어려움을 겪는 이유를 알아보고자 한다. 중학교 2학년 교과서 3종(김원경 외, 2014:이강섭 외, 2014: 황선욱 외 2014)과 고등학교 확률과 통계 교과서 3종(우정호 외, 2015:이강일 외, 2015: 황선욱 외 2015) 및 2009 개정 수학과 교육과정을 참고하였다.

세기의 곱의 법칙과 관련된 경우의 수는 중학교 과정 확률과 통계 단원에서 처음 학습하게 된다. 2009 개정 교육과정에서 내용의 중복을 막고 학습량을 감축하기 위해 초등학교에서 중학교로 이동 통합되었기 때문이다(한국과학창의재단, 2011). 중학교 과정에서 확률과 통계의 내용 체계는 <표 Ⅱ-1>, 학습내용 성취 기준 및 교수·학습상의 유의점은 <표 Ⅱ-2>와 같다.

<표 Ⅱ-1> 수학과 공통교육과정 수학 중 확률과 통계 영역의 내용 체계

학교급 / 학년군 / 영역	중학교		
	1~3학년군		
확률과 통계	·줄기와 잎 그림, 도수분포표, 히스토그램, 도수분포다각형 ·도수분포표에서의 평균 ·상대도수의 분포	·경우의 수 ·확률의 뜻과 기본 성질 ·확률의 계산	·중앙값, 최빈값, 평균 ·분산, 표준편차

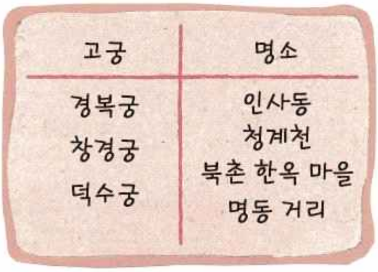
<표 Ⅱ-2> 경우의 수 단원의 학습내용 성취 기준과 교수·학습상의 유의점

단원	학습내용 성취 기준	교수·학습상의 유의점
경우의 수	경우의 수를 구할 수 있다.	경우의 수는 두 경우의 수를 합하거나 곱하는 경우 정도로만 다룬다.

위 표를 보면 이 단원의 성취 기준 및 유의점은 경우의 수를 구하는데 주안점을 두고 있으며 합의 법칙과 곱의 법칙은 간단한 두 경우의 수에 대해서만 다루도록 하고 있다. 실제로 중학교 2학년 교과서에서는 두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수를 구하고 예시 문제를 통해 곱의 법칙을 유도하고 있다.

[생각열기] 두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수는 어떻게 구하는가?

혜민이는 서울을 방문한 외국인 친구와 함께 다음 표를 이용하여 관광 코스를 짜려고 한다.



고궁	명소
경복궁 창경궁 덕수궁	인사동 청계천 북촌 한옥 마을 명동 거리

고궁 중에서 한 곳을 선택하는 경우는 3가지, 그 각각에 대하여 명소 중에서 한 곳을 선택하는 경우는 4가지이므로 고궁과 명소 중에서 각각 한 곳씩을 선택하는 경우는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

경복궁
- 인사동
- 청계천
- 북촌 한옥 마을
- 명동 거리

창경궁
- 인사동
- 청계천
- 북촌 한옥 마을
- 명동 거리

덕수궁
- 인사동
- 청계천
- 북촌 한옥 마을
- 명동 거리

따라서 고궁과 명소 중에서 각각 한 곳씩을 선택하는 경우의 수는
$3 \times 4 = 12$ 이다.

일반적으로 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면 두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수는 다음과 같다.

(두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수)$= m \times n$

[그림 Ⅱ-4] 곱의 법칙. 중학교 수학②. 좋은책신사고

[그림 Ⅱ-4]와 같이 중학교 교과서에서는 곱의 법칙을 유도하기 전에 두 사건이 잇달아 일어나는 경우의 수를 구하는 예시 문제를 제시하고 그 해결 방법으로 단순화된 수형도를 제시하고 있다(김원경 외, 2014:이강섭 외, 2014: 황선욱 외 2014). 그러나 2009 개정 교육과정에 따라 초등학교에서는 수형도를 학습하지 않았기 때문에 수형도와 관련된 수학적 활동을 학생들에게 제시하지 않으며 수형도란 용어도 사용하지 않는다. 수형도에서 각 단계별로 한 근원사건에서 뻗어나간 나뭇가지수가 일정할 때에 그 수들을 곱하면 모든 경우의 수를 구할 수 있다는 것을 학생들이 이해하는 과정이 생략된 채, 두 수를 곱하여 문제를 해결하고 이후 이것을 일반화하여 곱의 법칙이 제시된다. 그리고 이어지는 예제들과 문제들도 수형도를 그리거나 순서쌍을 구하는 활동 없이 곱의 법칙을 적용하여 해결하도록 교과서가 구성되어 있다. 결국 학생들은 교과서와 교사의 일방적인 설명을 통해 세기의 곱의 법칙을 '안다'라고 받아들이게 되는 것이다. Schoenfeld는 '안다'는 것의 의미는 학습자의 입장에서 스스로가 교사의 도움과 안내를 통해 좀 더 적극적으로 구성하고 남에게 그 구성된 지식을 공표함으로써 인정받는 것을 의미하는 반면, Lampert는 학습자의 소극적인 지식의 축적과정의 일부로서 '안다'의 의미를 제시한다. 이런 경우에 학습자는 스스로 지식을 구성할 수 있는 기회가 박탈되고 교사의 일방적인 안내에 의해 지배되고 기계적인 암기와 훈련으로 이들의 지식이 축적되어 간다(정인철, 2003). 이렇게 논리적 과정이 내면화되지 못한 상태에서 개념을 기계적으로 암기하고 문제 풀이를 훈련함으로써 어떤 경우에 곱의 법칙을 적용해야 하는지를 제대로 판단하지 못하고 특정 표현에 따라 곱의 법칙을 사용하는 학생들이 생기게 된다.

고등학교에서는 선택과목인 확률과 통계에서 세기의 곱의 법칙을 학습하게 된다. 곱의 법칙은 순열과 조합 영역에 들어가는데 이 영역의 내용 체계는 아래 〈표 Ⅱ-3〉 과 같다. 그리고 경우의 수, 순열과 조합 단원의 학습내용 성취 기준 및 교수·학습상의 유의점은 〈표

Ⅱ-4>와 같다.

<표 Ⅱ-5> 수학과 선택교육과정 확률과 통계 중 순열과 조합 영역의 내용 체계

영 역	내 용
순열과 조합	· 경우의 수
	· 순열과 조합
	· 분할
	· 이항정리

<표 Ⅱ-4> 순열과 조합 단원의 학습내용 성취 기준과 교수·학습상의 유의점

단원	학습내용 성취 기준	교수·학습상의 유의점
경우의 수	합의 법칙과 곱의 법칙을 이해하고, 이를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있다.	① 합의 법칙과 곱의 법칙은 구체적인 예를 통해 직접 나열해 보거나 수형도를 그려 보는 등의 활동을 통해 그 의미를 이해하고 설명해 보게 한다. ② 경우의 수, 순열, 조합, 분할을 이용하여 실생활 문제를 해결해 봄으로써 그 유용성을 인식하게 한다.
순열과 조합	① 순열의 뜻을 알고, 순열의 수를 구할 수 있다. ② 조합의 뜻을 알고, 조합의 수를 구할 수 있다. ③ 원순열, 중복순열, 같은 것이 있는 순열을 이해하고, 그 순열의 수를 구할 수 있다. ④ 중복조합을 이해하고, 그 조합의 수를 구할 수 있다.	

교수·학습상의 유의점을 보면 '합의 법칙과 곱의 법칙은 구체적인 예를 통해 직접 나열해보거나 수형도를 그려보는 등의 활동을 통해 그 의미를 이해하게 한다.' 고 제시하여 이후에 학습할 순열과 조합 등 다양한 경우의 수 계산의 기본 원리에 해당하는 합의 법칙과 곱의 법칙에 대한 이해가 충실하게 이루어지도록 하고자 했다(한

국과학창의재단, 2011). 곱의 법칙이 조합론 교육에서 중요한 기본 토대가 됨을 명시하고 있는 것이다. 그리고 수학적 활동으로 나열하기와 수형도 그리기가 교육과정에서 구체적으로 제시되었다.

그렇다면 고등학교 교과서에서 곱의 법칙이 어떻게 제시되는지 살펴보자. 확률과 통계 교과서에서는 보통 [그림 Ⅱ-5]와 같이 중학교 때 사용한 '동시에'라는 단어 대신 '잇달아'란 단어를 사용하여 설명하고 있다. 그동안 곱의 법칙이 순서 지어진 것을 세는 것임에도 불구하고 '동시에'란 단어로 인해 학생들이 오개념을 갖는 경우가 많았다. 그러나 '잇달아'라는 단어를 사용하게 되면 사건이 일어나는 순서에 따라 배열한 순서 지어진 n짝의 개수를 세는 것이 곧 곱의 법칙이라는 것을 이해하기가 쉽다. 곱의 법칙을 설명하는 수학적 표현은 개선되었으나 논리적 정당화 과정은 확률과 통계 교과서에서도 여전히 생략되어 있다. 교수·학습상의 유의점에서 나열하기와 수형도 그리기 등의 활동을 통한 이해를 강조하고 있지만 교과서에서는 이것을 제대로 반영하지 못했다.

> 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n일 때, 두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다.

[그림 Ⅱ-5] 곱의 법칙. 확률과 통계. 미래엔.

이제 교과서에서 순열의 수가 어떻게 설명되고 있는지 알아보자. 교과서에 제시된 순열의 수를 학습하는 순서는 <표 Ⅱ-5>와 같다.

〈표 Ⅱ-5〉 순열과 순열의 수 내용 체계. 확률과 통계. 미래엔

[1단계] 순열의 정의 서로 다른 n개에서 $r(0 < r \le n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 순열이라고 한다.

↓

[2단계] 기호 ${}_nP_r$ 정의 순열의 수를 기호로 ${}_nP_r$ 와 같이 나타낸다.

↓

[3단계] 순열의 각 단계의 경우의 수 구하기 서로 다른 n개에서 r개를 택하여 순서대로 나열할 때, 첫 번째 자리에 올 수 있는 경우는 n가지이고, 그 각각에 대하여 두 번째 자리에 올 수 있는 경우는 첫 번째 자리에 놓인 1개를 제외한 $(n-1)$가지, 세 번째 자리에 올 수 있는 경우는 앞의 두 자리에 놓인 2개를 제외한 $(n-2)$가지이다. 이와 같은 과정을 계속하면 r번째 자리에 올 수 있는 경우는 이미 앞에 놓인 $(r-1)$개를 제외한 $n-(r-1)$, 즉 $(n-r+1)$가지이다.

↓

[4단계] 순열의 수 구하기 따라서 순열의 수는 ${}_n\mathrm{P}_r = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r}$ 이 성립한다.

총 9종의 확률과 통계 교과서 중 3개(우정호 외, 2015:이강일 외, 2015: 황선욱 외 2015)를 분석해보니 〈표 Ⅱ-5〉처럼 구성되어 있었다. 순열을 정의한 후, 순열의 수를 표현할 기호 ${}_nP_r$을 먼저 제시한다. 그리고 첫 번째 자리부터 r번째 자리까지 배열 가능한 경우의 수들 $n, (n-1), (n-2), \cdots, (n-r+1)$를 구한다. 그리고 앞에서 약속한 기호 순열의 수 ${}_nP_r$을 $n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$로 계산하도록 제시한다. 그런데 3단계에서 구한 r개의 수들을 곱하는 이유를

설명하지 않고 있다. 앞 절에서 살펴본 바와 같이 이 순열의 수형도([그림 Ⅱ-3] 참고)는 각 단계의 나뭇가지수가 n개, $(n-1)$개, $(n-2)$개, $\cdots$, $(n-r+1)$개로 일정하므로 곱의 법칙을 적용할 수 있기 때문에 $n, (n-1), (n-2), \cdots, (n-r+1)$를 모두 곱하여 순열의 수를 구할 수 있다.

Mary와 Bárbara(2016)는 학생들이 순열을 학습할 때도 나열하기, 수형도 그리기와 같은 구체적인 수학적 활동을 해야 한다고 주장하였다. 이들은 곱의 법칙 문제는 서로 다른 종류의 원소들을 갖는 집합들에서 각각의 원소를 택하여 만든 순서 지어진 n짝의 개수를 세는 것이고 순열 문제는 한 집합 안에서 뽑은 원소들을 배열하는 문제이기 때문에 다르다고 보았다. 그런데 곱의 법칙 문제에서 순열 문제로 단원이 넘어갈 때 교사들이 이런 차이를 인식하지 못한 채 지도하고 있다고 지적했다. 즉, 나열하기와 수형도 그리기 활동은 이미 앞에서 곱의 법칙을 학습할 때 했기 때문에 순열을 학습할 때는 이러한 활동을 생략해도 된다고 교사들이 생각한다는 것이다. 학생들이 순열 문제에 곱의 법칙을 틀리게 적용하는 경우가 있었는데, 예를 들면 10명의 학생 중 회장, 부회장, 총무 3명을 선출하는 경우의 수를 10×3 또는 $10!$이라고 틀리게 답했다. 이런 오류를 해결하기 위해서는 학생들이 순열에서도 나열하기와 수형도 그리기 등의 수학적 활동을 통해 순열에 대한 수학적 개념을 구성할 수 있도록 학습 과정을 만들어야 한다고 주장했다. 실제로 본 연구에서 분석한 3종의 교과서들도 경우의 수 단원은 서로 다른 집합에서 원소를 택하는 경우의 문제들로 구성되어 있고 순열 단원은 한 집합에서 원소를 택하여 배열하는 문제들로 구성되어 있다. 그리고 경우의 수 단원에서는 나열하기와 수형도 그리기의 활동을 하고 있으나 순열 단원에서는 이러한 수학적 활동은 생략되고 기호와 공식 등의 상징적 표현들만 사용하고 있다. 그래서 많은 학생들이 순열의 수를 구하는 문제는 공식을 사용해서 풀어야한다고 생각하며, 기호 ${}_nP_r$이 기억나지 않거나 기호는 기억하는데 파라메타의 의미를 몰라서 문

제를 해결하기가 어렵다고 말한다(이지화, 2005).

본 연구는 순열의 수를 구할 때도 곱의 법칙을 적용한다는 점에서 순열 문제는 곱의 법칙 문제와 다를 바가 없다고 본다. 그러나 Mary와 Bárbara의 연구에서 지적한 것처럼 순열 학습에서도 수학적 표현을 이용한 학습자의 활동이 강조되어야 한다. 나열하기와 수형도를 이용한 수학적 활동을 통해 학생들이 곱의 법칙의 개념을 제대로 이해하게 되면 순열의 수를 곱의 법칙을 적용하여 쉽게 구할 수 있다. 물론 문자를 이용한 일반화란 측면에서 볼 때, 순열의 수를 ${}_nP_r$, 중복 순열의 수를 ${}_n\Pi_r$로 기호화하는 것은 필요하지만 공식을 기계적으로 암기하는 방식의 학습은 지양되어야 하고 공식을 논리적으로 정당화하는 과정에 곱의 법칙이 사용된다는 것을 학생들이 인지하도록 지도해야 한다.

이상에서 현재 교육과정과 교과서를 살펴본 결과 다음과 같은 사실을 확인할 수 있었다. 곱의 법칙에 대한 충분한 고찰 없이 이를 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결하는 데만 무게를 두고 있으며 순열의 수를 구할 때 곱의 법칙이 사용된다는 설명도 부족하다. 그 결과 학생들은 곱의 법칙의 개념을 이해하지 못하여 인지적 장애를 갖기 쉽고, 순열의 수를 곱의 법칙으로 구할 수 있다는 사실을 알지 못한 채 순열 공식을 암기하고 그 수를 계산하는 학습만 반복 연습하게 되어 학습에서 어려움을 겪을 수 있다.

2. 개념적 표상으로서의 수형도를 이용한 수학 학습

2.1. 수학적 표현과 표상

수학의 다양한 표현은 수학 학습에서 개념을 이해하고 문제해결력을 키우는데 도움이 된다. 특히 다이어그램이나 함수의 그래프, 수형도와 같은 시각적 표현은 오랜 기간 동안 수학의 중요한 부분이 되어 왔으며 이러한 수학적 표현들은 원래의 개념의 의미를 좀 더 직관적으로 전달

해 줄뿐만 아니라 문제의 원형을 구체적으로 표현해주는 기능을 가지고 있다(이대현, 2003).

Bruner는 학습 활동에서 사용되는 표현 수단을 활동적 표현, 영상적 표현, 상징적 표현의 세 단계로 구분하였는데 아동의 인지적 능력이 발달함에 따라 활동적 표현, 영상적 표현, 상징적 표현의 순서로 표현 수단의 수준이 향상되거나 그 사이의 조정 능력이 증대된다고 보았다. 학문의 기본 원리나 구조를 아동의 능력에 맞추어 구체적인 활동적 양식으로 제시할 수도 있고 시각적 표현이나 추상적인 기호적 표현을 하여 제시할 수도 있다는 것이다(김응태 · 박한식 · 우정호, 1984).

지식의 구조를 아동의 능력에 맞는 표현 양식으로 제시하면 학생의 이해를 도울 수 있다는 것은 교사의 교수 활동에 초점을 둔 것이라 볼 수 있다. 즉, 수학 학습이 표현에 내재된 것을 반영하는 수학적 관계나 구조를 인식하는 과정이라 본다면 학생은 교사의 일방적인 교수에 의해 표현을 익혀야 한다. 이러한 고전적 관점에서는 인식의 대상과 주체가 분리되게 된다. 반면 구성주의적 관점에서는 표현에 주어지는 수학적 의미를 학생의 해석 활동의 산물로 본다. 수학자는 수학적 표현에 내재한 수학적 관계와 구조를 쉽게 읽어낼 수 있지만 학생들은 충분한 조작을 통해 의미를 구성해내야 한다. 이러한 상호주체적 과정을 통해 수학적 표현에 대한 의미를 마음속에 구성한 것을 표상이라 한다. 즉, 학생이 다양한 수학적 표현에 대한 해석, 표현의 산출, 표현 간의 번역 등의 활동을 통해 수학적 표현에 적합한 표상을 구성할 때, 수학 학습이 이루어졌다고 보는 것이 구성주의적 입장이다. 시각적 표현이 지닌 구체성으로 인한 개념적 한계 때문에 수학적으로는 언어적 기호적 표현을 중시하지만 중등학교 수준에서의 수학적 활동에서 학생들은 언어적 표상보다 시각적 표상에 의존하는 편이다. 시각적 표상으로의 적절한 수학적 활동이 장려될 필요가 있다고 말할 수 있다(장혜원, 1996).

NCTM(2007)에서는 표현(representation)이라는 용어를 수학적 개념이나 관계를 파악하는 행동이나 형태, 그 자체를 모두 일컬으며 외적으로 관찰 가능한 과정들과 산물뿐만이 아니라, 수학을 하는 사람들의 정신 속

에서 내적으로 일어나는 과정들과 그 산물들 모두를 지칭하는 것으로 간주하고 있다. 그러나 본 연구에서는 표현은 수학적 내용을 표현하는 다양한 기호나 다이어그램, 구체적인 그림, 그래프, 식, 표 등의 물리적인 대상을 지칭하는 것이고, 표상은 주체의 정신적 실체인 이미지, 관념을 뜻하는 것이라는 Janvier과 von Glasersfeld(장혜원, 1996, 재인용)의 구분에 따라 용어를 사용하고자 한다.

수학 학습에서의 표상은 크게 두 가지로 구분할 수 있다. 그중 하나는 표현에 대응하는 내적 구성물로서의 표상으로 감각 인상으로서의 표상이며 또 다른 하나는 내적 원인으로부터 비롯된 관념으로서의 표상이다. 전자는 주로 문제 해결과 관련 있고 후자는 개념적 사고활동과 관련 있지만 이 둘이 상호 분리된 영역인 것은 아니다. 특히, 수학적 개념에 대해 학습자가 지닌 내적 구성물을 수학적인 개념 표상이라 부른다. 수학적 개념은 조직화된 이론에 종속된 실체로서 언어적 형식을 갖춘 상징적 표상이지만 개념적 표상은 심리적인 것으로서 조직화된 이론과는 별개로 학습 과정에서 형성된다. 또한 개념적 표상은 언어적 형식에 국한되지 않고 그와 전혀 다른 형식의 표상을 형성할 수도 있다(장혜원, 1996).

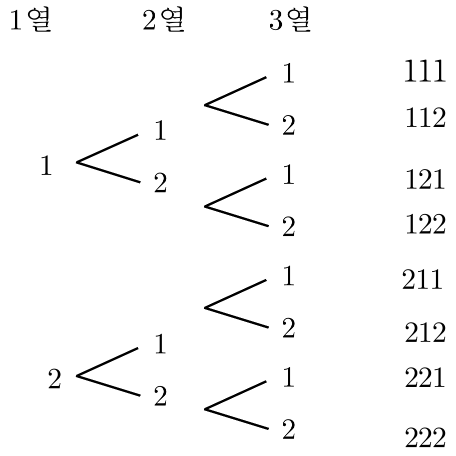
학생의 머릿속 구성물인 표상을 드러냄으로써 교사에게 실질적인 교육적 함의를 줄 수 있다는 점에서 수학적 표현과 표상을 이용한 학습은 교육학적 의의를 갖는다. 수학적 개념에 대해 학생이 지닌 표상을 외면화함으로써 교사는 학생의 개념 표상을 이해하고 학생의 오개념을 파악하여 수학적 개념에 이르기까지의 과정을 도울 수 있다.

2.2. 개념적 표상으로서의 수형도

수형도는 다이어그램의 한 종류로 구체적이고 시각적인 이미지를 갖는 세기 전략에 사용되는 수학적 표현이라고 볼 수 있다. 그러나 수형도

는 가능한 경우들을 모두 배열하는 사고 과정을 나타내는 일종의 순서도로서 주체의 사고를 드러낸다는 점에서 개념적 표상이라 할 수 있다. 또한 수형도는 구조적이고 시각적인 그림으로 표현되어 있기 때문에 시각적 표상의 성질도 가지고 있다. 언어적 표현에 대한 해석을 위해서는 언어적 표상만으로는 부족하며 시각적 표상과의 통합에 의해 더욱 의미 있는 해석이 가능하다(최연화, 2011, 재인용). 가능한 경우들을 배열하는 사고 과정을 시각적 이미지를 갖는 수형도로 표현하는 활동을 통해 학생들은 수형도를 개념적 표상으로 갖게 되고 이를 이용하여 곱의 법칙이란 수학적 개념을 쉽게 이해하고 문제 해결에도 적용할 수 있다.

그런데 수형도는 실체를 그대로 나타내는 표현이 아니라 수학적 개념을 구조적이고 시각적으로 나타내는 추상적 표상이기 때문에 수형도를 만들거나 그 의미를 해석하기 위해서는 수형도가 사용하는 규약체계를 학습해야만 한다. 예를 들어 1과 2를 반복 사용하여 만들 수 있는 세 자리 수를 구하기 위해 수형도를 그려보자. 수형도의 1열에는 첫 번째 자리에 쓸 수 있는 수를 쓴다. 2열에는 두 번째 자리에 쓸 수 있는 수를 쓰고, 3열에는 세 번째 자리에 쓸 수 있는 수를 쓴다. 그리고 서로 짝지어지는 1열과 2열 사이, 2열과 3열 사이에는 선을 긋는다. 그리고 가장 오른쪽에 이런 사고 과정을 거쳐 만들어지는 세 자리수를 쓴다([그림 Ⅱ-6] 참고). 이와 같이 수형도의 규약 체계를 따라 세 자리 수들을 만드는 과정을 시각적으로 표현할 수 있고 반대로 수형도가 사용하는 그래프 용어를 이용하여 이 과정을 번역할 수도 있다. 이 번역은 개념적 구조의 중개를 통해서 이루어진다. 어떤 실재의 개념적 해석과 실제적 표현을 잇기 위한 이상적 도구로서 기호적 표현과 영상적 표현을 종합한 것이다. 따라서 학생은 수형도를 그리는 것과 각 단계에서 얻어진 이미지의 의미를 학습해야 한다. 부채모양으로 얻어진 수형도를 가능한 배열의 집합으로 번역하는 것을 학습해야 하는 것이다(Fischbein, 2006).



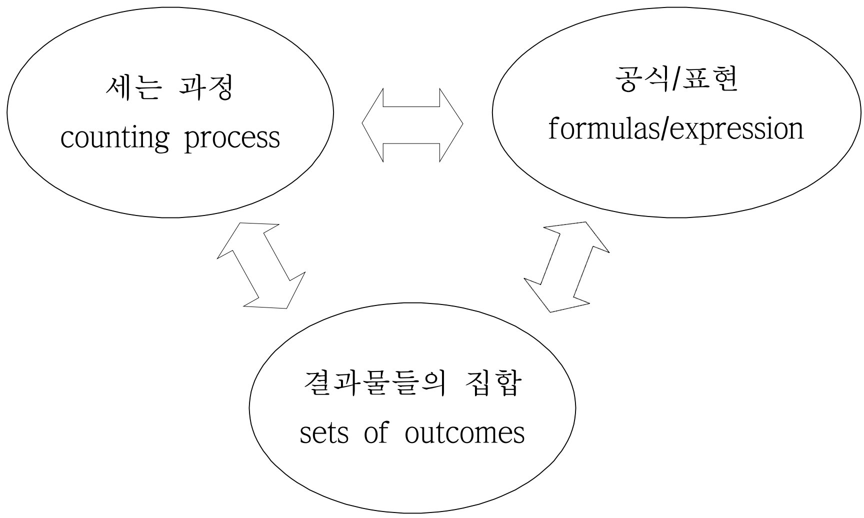
[그림 Ⅱ-6] 세 자리수의 수형도

실제 교육 현장에서는 공식 도출 과정에서만 수형도를 사용하고 이후에는 공식을 적용하는데 치우치는 경향이 있다. 그러나 시각적 표현 및 표상을 이용하는 것이 수학적 개념을 형성하고 문제 해결력을 신장시키는데 도움이 되므로 수형도를 문제 해결 전략으로 사용하도록 해야 한다. 그리고 표현 간의 번역 활동도 포괄적인 표상 활동으로써 의미 충실한 개념 학습에 효과가 있으므로 교사가 일방적으로 제시하지 말고 학생들이 직접 수형도를 그리고 관찰, 번역하는 활동을 하도록 권장해야 한다(장혜원, 1996).

2.3. 조합적 사고 모델을 이용한 수학 학습

Elise(2013)는 세기 문제를 푸는 수학적 활동에 있어서 학생들의 사고에 대한 개념적 분석을 하기 위해 [그림 Ⅱ-7]와 같이 조합적 사고 모델을 제시하였다. 공식/표현(formulas/expressions), 세는 과정(counting processes), 결과물들의 집합(sets of outcomes)의 세 요소가 상호 작용하는 모델이다.[1] 예를 들어 A, B, C, D 네 개의 선택지를 가진 8개의 문제에 답을 작성할 때 가능한 경우의 수를 구할 때, 4^8은 공식/

표현이고, 곱의 법칙을 사용하여 사고하는 과정을 세는 과정이라 한다. 결과물들의 집합은 AAAAAAAA, ABABCDCD, … 와 같이 네 개의 선택지 중 하나를 골라 문항 순서대로 나열한 것들을 원소로 갖는 집합이다. 그리고 그 집합의 원소의 개수가 바로 문제의 답이다(Elise, Craig & Johl, 2015).



[그림 Ⅱ-7] Elise의 조합적 사고 모델

Elise(2013)는 조합 문제를 풀 때 학생들의 사고 안에서 위의 세 가지 요소가 상호작용한다는 것을 다음 예를 통해 설명하였다. "A, B, C 세 개의 문자를 중복 사용하여 만들 수 있는 3개의 문자를 가진 단어는 몇 개인가?" 라는 문제를 보고 서로 다른 구조를 갖는 결과물들의 집합을 구하는 학생들이 있다고 하자([그림 Ⅱ-8] 참고).

1) 공식/표현, 결과물들의 집합 간의 상호작용은 아직 검증되지 않았기 때문에 점선 화살표로 나타내었다.

AAA, AAB, AAC
ABA, ABB, ABC
ACA, ACB, ACC

BAA, BAB, BAC
BBA, BBB, BBC
BCA, BCB, BCC

CAA, CAB, CAC
CBA, CBB, CBC
CCA, CCB, CCC

(a)

AAA, BBB, CCC

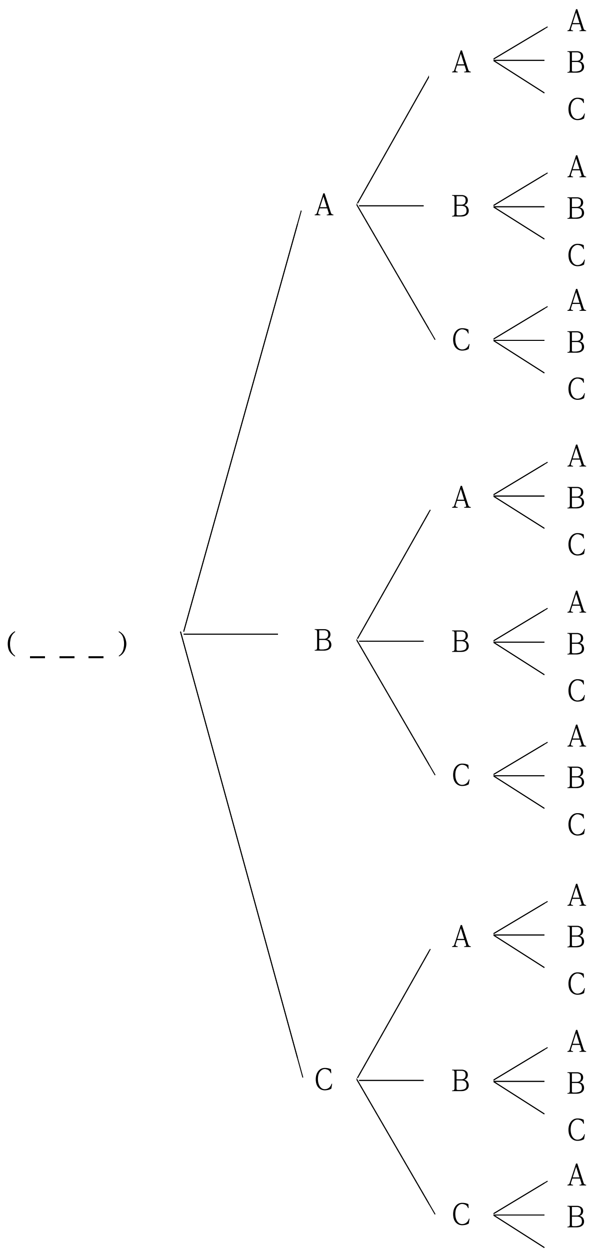
AAB, ABA, BAA　AAC, ACA, CAA　BBC, BCB, CBB
BBA, BAB, ABB　CCA, CAC, ACC　CCB, CBC, BCC

ABC, ACB
BAC, BCA
CAB, CBA

(b)

[그림 Ⅱ-8] 서로 다른 구조를 가진 두 개의 결과물들의 집합

[그림Ⅱ-8]에서 (a)는 첫 번째 자리에 올 수 있는 문자를 기준으로, (b)는 서로 다른 문자의 개수를 기준으로 각각 세 경우로 나누어져 있다. (a)와 같이 사고하는 학생들은 수형도를 그리는데 필요한 규약 체계만 알게 되면 [그림Ⅱ-9]의 수형도를 그릴 수 있고 곱의 법칙을 적용하여 세는 과정을 추론할 수 있다. 즉, 수형도의 나뭇가지수가 각 단계별로 일정하므로 그 수들을 곱하면 문제의 답이 나올 것이라고 사고할 수 있다. 따라서 $3\times3\times3$이란 표현을 얻게 된다. [그림 Ⅱ-8]에서 (b)와 같이 사용하는 문자의 개수에 따라 결과물들을 구하려는 학생들은 서로 다른 문자의 개수에 따라 경우를 나누고 합의 법칙을 적용하는 세기 과정을 떠올릴 것이다. 서로 다른 문자의 개수가 한 개일 때는 3가지, 서로 다른 문자의 개수가 두 개일 때는 18가지, 서로 다른 문자의 개수가 세 개일 때는 6가지이므로 $3+18+6$이란 표현을 얻게 된다.



[그림 Ⅱ-9] [그림 Ⅱ-8]에서 (a)의 수형도

이처럼 결과물들의 집합→세는 과정→공식/표현의 방향으로 사고하는 과정을 수학적 표현과 표상이란 관점에서 생각해보면 결과물들의 집합은 구체적인 수학적 표현이고 이에 대응하는 개념적 표상이 수형도가 된다. 표현과 표상은 서로 상호작용하며 주체의 인지구조에 수학적 개념을 형성하는데 도움을 주게 된다.

이번에는 표현/공식이나 결과물이 세는 과정에 영향을 주는 예를 살펴보려한다. '8개의 알파벳으로 만들어진 비밀번호가 있다. 적어도 3개의 E를 포함하는 비밀번호는 몇 개인가?' 라는 문제에 대해 한 학생은 $\binom{8}{3}\times 26^5$ 이라고 틀리게 대답하였다. 그런데 이 학생에게

$$\binom{8}{3}\times 25^5+\binom{8}{4}\times 25^4+\binom{8}{5}\times 25^3+\binom{8}{6}\times 25^2+\binom{8}{7}\times 25^1+\binom{8}{8}\times 25^0$$

란 표현을 제시한 후, 이것이 만들어진 과정을 설명하도록 했더니 앞서 제시한 자신의 답이 틀리고 이것이 문제의 답이란 것을 스스로 알아차렸다. 그리고 위 수식은 비밀번호에 사용된 E의 개수로 경우를 나누어 세는 과정을 표현한 식이라고 대답했다.

이 학생이 처음에 답한 $\binom{8}{3}\times 26^5$ 가 틀린 이유를 찾는 데는 결과물들을 나열해보는 것이 도움이 된다. $\binom{8}{3}\times 26^5$이란 표현은 우선 세 개의 E가 들어갈 자리를 선택하는 방법의 수를 구하고 남은 다섯 자리에 E를 포함한 26개의 문자 중 하나를 넣을 때 가능한 방법의 수를 곱한 것이다. 이런 세기 과정에 따라 결과물을 구하면 E가 들어갈 자리를 선택하는 경우의 수, $\binom{8}{3}$에서 $\mathrm{EEE\_\,\_\,\_\,\_\,\_}$ 와 $\mathrm{\_\,\_\,\_\,\_\,\_EEE}$ 는 다른 경우로 취급된다. 그런데 남은 다섯 자리가 각각 $\mathrm{EEE\underline{A}\,\underline{A}\,\underline{E}\,\underline{E}\,\underline{E}}$ 가 되는 경우와 $\mathrm{\underline{E}\,\underline{E}\,\underline{E}\,\underline{A}\,\underline{A}EEE}$ 가 되는 경우에 결과적으로 두 비밀번호는 같다. 이렇게 결과물들의 집합을 모두 구하지 않더라도, 일부를 구하는 과정에서 자신의 세는 과정에 오류가 있다는 것을 알 수 있다(Elise, 2013).

이 모델은 조합 문제를 해결하는데 있어서 학생들의 개념화 과정에 대한 분석적 모델이 되며 교수학습에서도 충분히 활용될 수 있다. 특히, 학생들이 문제 해결에 어려움을 느끼는 경우 상호작용이 원활히 이루어지지 않은 요소들의 관계를 찾아 도움을 줄 수도 있고, 학생이 쉽게 알아낼 수 있는 구성 요소인 수학적 표현이나 표상에서 시작해서 답으로 다가갈 수 있다는 주장을 뒷받침한다. 즉, 결과물들의 집합과 공식/표현 사이의 사고 작용이 원활하지 않은 경우 세는 과정을 드러내는 표상 활동으로 수형도를 그려보는 것이 문제해결에 도움이 된다는 것을 보여주는 연구 결과이다.

Ⅲ. 곱의 법칙 학습-지도 과정 설계

1. 학습-지도 과정 설계

본 연구는 수형도를 이용하여 세기의 곱의 법칙을 논리적으로 정당화하고, 순열의 수를 구하는 방식을 수형도 표상을 이용하여 곱의 법칙을 적용하는 것으로 지도할 수 있음을 보이는 것이 목적이다. 이에 따라 순서 지어진 열들이 모든 나열된 것을 표상하는 수형도를 그리는 방법을 학습하고 이를 이용하여 곱의 법칙을 유도해 낸 다음 수형도를 표상으로 하여 순열 문제를 해결하는 내용을 다루는 강의안을 작성하고 3인 1개 조의 학습 집단을 구성하여 수업을 실시하고자 한다. 수업 후 평가를 실시하고 설문지를 통해 수형도를 활용하여 곱의 법칙을 정당화하는 과정이 학생들이 곱의 법칙의 개념을 이해하는데 도움이 되었는지, 순열 문제를 곱의 법칙으로 해결할 수 있는지 확인하고자 하였다.

지도 형태는 기본적으로 발견적 접근 방법을 택했지만 수형도를 처음 도입하거나 순열의 개념을 설명할 때는 교사의 강의식 방법을 선택했다. 이것은 수형도를 처음 배우는 학생들이 그것이 갖고 있는 특징을 관찰하는데 집중하지 못하고 수형도를 그리는 데만 관심을 가질 우려가 있기 때문이다. 마찬가지로 순열의 수를 구할 때 수형도를 개념적 표상으로 가지고 곱의 법칙을 이용하는 학습에 초점을 맞추기 위해 순열의 개념은 교사가 간단히 제시하는 방법을 택했다. 그리고 학생들의 발표와 학생들 간의 토론을 권장하였다. Elise(2013)의 조합적 사고 모델의 세 가지 구성 요소들, 즉 공식/표현, 세는 과정, 결과물들의 집합 간의 상호 작용이 일어날 수 있도록 학생들에게 구체적인 예를 들어 설명하도록 하고 각자 구한 답과 표현, 세는 과정을 공유하게 하였다.

학습-지도 과정은 총 2단계이다. 중학교 때 학습한 곱의 법칙에 대한 학생들의 이해 정도를 확인하기 위해서 0단계로 사전 평가를 실

시했다. 그리고 1단계에서는 수형도를 이용하여 곱의 법칙을 논리적으로 정당화하고 문제를 해결할 수 있도록 학습-지도 과정을 설계했다. 그리고 2단계에서는 곱의 법칙을 이용하여 순열의 수를 문자로 일반화하여 구하고 중복 순열의 수를 구하도록 구성하였다.

0단계 - 사전평가

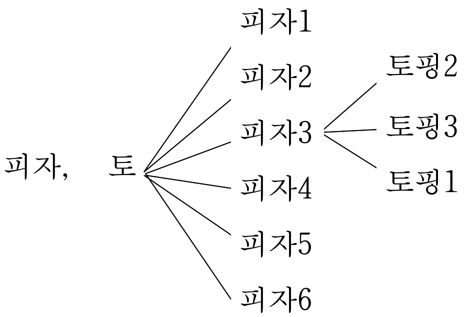
사전 평가는 두 문제로 구성하였다.

첫 번째 문제는 경우의 수를 구하는 문제의 풀이과정을 제시하고 어떤 경우에 곱의 법칙을 사용하는지 생각해보도록 하였다. 그리고 이를 이용하여 곱의 법칙을 논리적으로 정당화할 수 있는지 확인하기 위해 다음과 같은 문제를 설계하였다.

1. 일반적으로 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면 두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다. 이것을 곱의 법칙이라 한다.
   어느 피자 가게에서 6종류의 피자와 3종류의 추가 토핑을 판매하고 있다. 이 가게에서 피자와 추가 토핑을 각각 한 가지씩 주문하는 경우의 수는 $6 \times 3 = 18$ 가지이다.

1-1. 곱의 법칙을 적용하여 두 수를 곱한 것이라면 위 문제가 곱의 법칙을 사용하기 위한 조건을 만족하는지 확인해보아라.

1-2. 이 예를 사용하여 곱의 법칙에서 두 수를 곱하는 이유를 설명해보아라.

<table>
<tr><td colspan="2">과제
진행 흐름</td><td>프린트로 제시하여 학생들이 풀이를 쓰도록 함.</td></tr>
<tr><td rowspan="2">예상
답변</td><td>1</td><td>1. 피자와 토핑을 같이 주문하니까 곱의 법칙을 써도 돼요
2. 6종류의 피자 각각에 대하여 토핑을 추가로 주문하는 경우의 수가 3으로 일정하니까 곱의 법칙을 사용하면 돼요.</td></tr>
<tr><td>2</td><td>1. 곱의 법칙은 원래 곱하는 거잖아요.
2.


이렇게 피자 각각마다 3종류의 토핑을 추가할 수 있으므로 두 수를 곱해요.</td></tr>
<tr><td colspan="2">추가
발문</td><td>1. 곱의 법칙은 어떤 경우에 사용하나요?
2. ‘동시에(이고)’라는 표현이 없는데 곱의 법칙을 써도 되나요?</td></tr>
</table>

1-1번 문항은 곱의 법칙을 설명하는데 사용된 ‘그 각각에 대하여’, ‘동시에’라는 단어를 학생들이 이해하고 있는지 확인하기 위한 것이다. 제시된 문제에는 ‘동시에’란 단어가 포함되지 않도록 구성하여 그동안 이 단어를 보고 곱의 법칙을 사용해온 학생들에게 인지적 갈등이 일어나도록 설계하였다. 1-2번 문항은 구체적인 예를 통해 두 경우의 수를 곱하는 이유를 설명해보도록 하는 것인

데, 대부분의 학생은 이유를 설명할 수 없으리라 예상했다.

두 번째 문제는 서로 다른 집합에서 각각 대상을 택하는 1번 문항과 달리 2번 문항은 한 집합에서 대상을 택하도록 설계했다. 이것은 Ⅱ장에서 살펴본 Mary와 Bárbara(2016)의 연구에서 순열 문제를 곱의 법칙으로 해결하지 못하는 경우의 예시 문제였다. 그리고 이 문항은 순열 단원에서 제시되지만 곱의 법칙을 이해하고 있다면 순열을 배우지 않은 상황에서도 이 문제를 해결할 수 있다고 예상하였다.

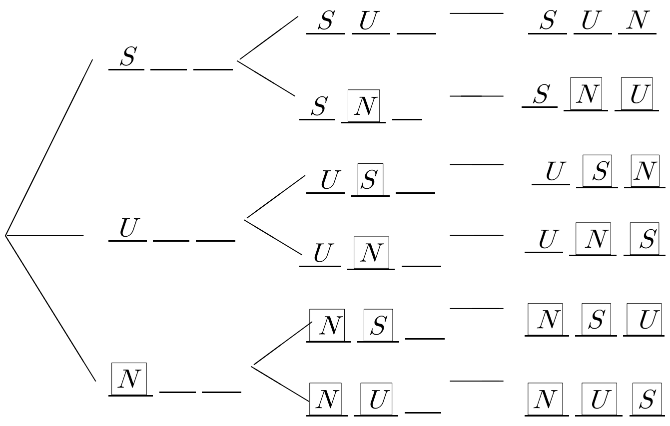
2. 10명의 학생 중 회장 1명, 부회장 1명, 총무 1명을 뽑는 경우의 수는 $10\times9\times8=720$ 이다. 이때 세 수를 곱하여 경우의 수를 구한 것은 곱의 법칙에 의한 것인가? 앞의 피자 문제와 비교하여 답하여라.

과제 진행 흐름	프린트로 제시하여 학생들이 풀이를 쓰도록 함.
예상 답변	1. 이 풀이도 곱의 법칙을 사용했어요. 앞의 문제랑 같아요. 2. 곱의 법칙을 쓰면 안 될 것 같아요. 앞의 문제는 피자, 토핑이 각각 6종류, 3종류여서 두 수를 곱하면 되는데, 이 문제는 학생이 10명이고 임원이 3종류니까 곱의 법칙을 쓰면 $10\times3=30$ 아닌가요? $10\times9\times8=720$는 곱의 법칙을 쓴 게 아니에요. 3. 이건 곱의 법칙이 아니에요. 곱의 법칙은 동시에 일어나야 하는데 이건 반장을 먼저 뽑고 다음에 부반장, 그리고 마지막으로 총무를 뽑는 거니까 동시에 일어나는 게 아니에요.
추가 발문	곱의 법칙을 사용한 것이 아니라면 경우의 수들을 왜 곱했을까요?

1단계 - 수형도를 이용하여 곱의 법칙을 논리적으로 정당화하기

이 단계에서는 나열하기 활동을 통해 수형도를 그려보고 각 단계별로 나뭇가지 수가 일정할 때는 그 수들을 곱하면 경우의 수를 구할 수 있다는 것을 학생들이 직관적으로 이해할 수 있도록 구성하였다.

1. S, U, N 세 개의 알파벳을 모두 사용하여 일렬로 배열하는 경우의 수를 구하려고 한다. 다음 질문에 답하여라. 1-1. 가능한 모든 경우를 나열하여라. 1-2. 1의 답을 첫 번째 문자가 같은 것끼리 묶어보아라. 1-3. 2의 답을 이용하여 아래 빈칸에 알맞은 문자를 넣어 그림을 완성하여라. 1-4. 3번처럼 사건이 일어나는 모든 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타낸 것을 **수형도**라고 한다. 위 수형도의 특징을 이용하여 경우의 수를 구하는 방법에 대해 설명하여라.

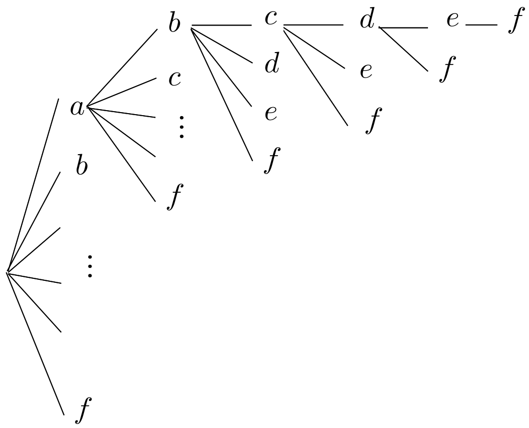
<table>
<tr><td colspan="2">과제
진행 흐름</td><td>1-1,2,3은 학생들이 각자 프린트에 풀이를 쓰게 하고, 학생들의 답변을 바탕으로 교사가 풀이를 진행한다.
1-4는 교사가 수형도를 그리는 방법에 대해 설명한 후, 그려진 수형도의 특징을 학생들이 발견할 수 있도록 발문한다.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">예상
답변</td><td>1-1</td><td>SUN, SNU, USN, UNS, NSU, NUS</td></tr>
<tr><td>1-2</td><td>SUN, SNU / USN, UNS / NSU, NUS</td></tr>
<tr><td>1-3</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1-4</td><td>1. 하나씩 세어보면 6개에요.
2. 3번에서 그린 수형도를 보면 처음에는 나뭇가지수가 3개이고 그 다음 나뭇가지 수는 모두 2개로 같아요. 그리고 마지막 나뭇가지는 1개로 모두 같아요.</td></tr>
<tr><td colspan="2">추가 발문</td><td>이 문제에서 수형도의 나뭇가지수와 경우의 수는 어떤 관계가 있을까요?</td></tr>
</table>

1단계의 첫 번째 과제는 나열하기 활동에서 시작하여 이것을 분류하게 하였다. Elise(2013)의 연구에서 살펴본 바와 같이 학생들이 결과물들의 집합을 구하는 방법에 따라 세는 과정이 달라질 수 있다.

따라서 1-2번 문항에서 첫 번째 자리에 오는 문자의 순서대로 나열하게 하여 이것이 수형도로 이어질 수 있도록 구성하였다. 수형도는 학습지에 그려진 상태로 제시했는데 이것은 학생들이 수형도를 그리는 활동에 집중하느라 수형도의 특징을 찾고 그 특징을 이용하여 곱의 법칙을 이해하는 사고 과정을 간과할 가능성이 있기 때문이다.

두 번째 문제는 학생들의 반성적 사고를 촉진하기 위하여 좀 더 큰 수를 사용했다. 또한 수형도를 전부 정확하게 그리지 않아도 학생들의 인지 구조에 자리 잡은 표상으로 곱의 법칙을 적용하여 문제를 해결할 수 있으리라 예상하였다.

2. 6명의 친구 a, b, c, d, e, f가 극장 좌석에 한 줄로 나란히 앉는 경우의 수를 구하고자 한다. 다음 질문에 답하여라. 2-1. 수형도를 그려보아라. 2-2. 위 수형도의 특징을 이용하여 경우의 수를 구하여라.

과제 진행흐름		학생들이 프린트에 직접 풀이한 후 발표함.
예상 답변	2-1	
	2-2	수형도의 첫 번째 나뭇가지는 6개로 일정하고, 두 번째는 5개, 세 번째는 4개, 네 번째는 3개, 다섯 번째는 2개, 마지막은 1개로 각각 일정하므로 곱의 법칙을 써서 $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, 720가지입니다.
추가 발문		1. 수형도를 그리는데 나뭇가지가 많아서 모두 그리기가 힘들지 않나요? 2. 수형도를 완성하지 않고도 경우의 수를 구할 수 있을까요?

2단계 - 곱의 법칙으로 순열, 중복 순열의 수 구하기

2단계에서는 곱의 법칙을 이용하여 순열의 수를 구하는 것을 목표로 하였기 때문에 순열의 개념은 교사가 제시하도록 하고 학생들은 순열의 수를 구하는데 집중하도록 했다. 수형도를 그려보고 곱의 법칙을 적용하는 전략은 직접적으로 명시하지 않아도 이것을 이용하는 학생이 있을 것이라 예상했다.

3. 서로 다른 n개에서 $r(0<r\leq n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 **순열**이라고 한다. 순열의 수를 구하여라.

과제 진행 흐름	1. 순열의 개념은 교사가 예를 들어서 설명함. 2. 프린트로 제시하여 학생들이 각자 풀어본 후 토론을 통해 공동의 결과를 도출하도록 함.
예상 답변	1. $\underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}_{r}$ 2. $n(n-1)(n-2)\cdots$ 인 건 알겠는데 어디까지 곱하는지는 모르겠어요
추가 발문	수형도의 첫 번째 단계의 나뭇가지의 수가 n이고 두 번째 단계의 나뭇가지의 수가 $n-1$이면, r번째 단계의 나뭇가지의 수는 무엇일까요?

순열의 개념은 1단계 두 번째 과제를 예로 들어 교사가 설명하도록 하였다. 이 과제는 문자로 제시되었지만 학생들이 앞서 곱의 법칙을 학습했으므로 이를 이용하여 구할 수 있을 것이라고 예상했다. 그러나 문자로 일반화하는 과정에서 학생들이 첫 번째, 두 번째 단계의 수는 쉽게 구할 수 있지만 r번째 단계의 수를 구하는데 어려움을 겪으리라 예상하여 추가 발문을 준비하였다. 그리고 학생들이 토론을 통해 정답을 함께 도출하도록 설계하였다.

2단계 두 번째 과제는 중복 순열을 다루었다. 이 단계에서는 수형도가 이미 학생들의 인지 구조 속에 개념적 표상으로 자리 잡았다고 간주하고 학생들이 수형도 이미지를 떠올려서 결과물들의 집합을 구할 수 있다고 예상하였다. 결과물들이 순서 지어진 n짝으로 표현된다는 것을 과제에서 제시하였고 학생들이 순서 지어진 n짝의 개수를 곱의 법칙을 이용하여 셀 것이라고 예상하여 설계하였다. 동

일한 문제를 표현을 달리하여 제시하였는데 4-1은 문제에 순서의 개념이 드러나도록 ‘네 번’이란 단어를 사용하였고 4-2는 순서의 개념이 드러나지 않도록 구성하였다. 추가 발문을 통해 두 문제가 같은 수학적 구조를 가지고 있다는 것을 학생들이 발견하도록 하였다.

4-1. 한 개의 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 각각 a, b, c, d 라고 할 때, 가능한 (a, b, c, d)의 모든 경우의 수를 구하여라. 4-2. 네 개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수를 각각 a, b, c, d 라고 할 때, 가능한 (a, b, c, d)의 모든 경우의 수를 구하여라.

과제 진행 흐름		프린트로 제시하여 학생들이 풀이를 쓰고 난 뒤 발표함.
예상 답변	1	$6\times6\times6\times6=6^4$
	2	$6\times6\times6\times6=6^4$
추가 발문		두 문제는 같은 문제일까요? 다른 문제일까요?

2. 수업 대상자 및 표집방법

2.1 수업 대상자

두 사건 A, B가 잇달아 일어나는 경우의 수를 구할 때 사용하는 곱의 법칙은 중학교 2학년 과정에서 처음 학습하게 된다. 그래서 본 연구에서는 이미 중학교 과정에서 곱의 법칙을 학습한 고등학생을 대상으로 곱의 법칙에서 두 수를 곱하는 이유를 설명할 수 있는지 확인해보았다. 현행 교육과정에서는 선택교육과정 교과인 확률과 통계에서 곱의 법칙과 순열을 학습하도록 되어있다. 본 연구에서는 학생들이 곱의 법칙을 이해하면 순열과 중복순열의 문제들을 곱의 법

칙으로 해결할 수 있다고 가정하였기 때문에 순열을 배우기 직전인 학생들을 대상으로 이 실험을 진행하였다.

2.2 표집방법

경기도 A 고등학교 문과 계열 2학년 학생들 중 연구 참여 희망자를 모집하였다. 이과 계열의 학생들은 이미 확률과 통계 교과를 배운 상황이라 문과 계열로 한정하였다. 그 중에서 담임교사와 수학교사의 추천을 받아 수업 중에 의사소통이 원활히 이루어질 수 있을 만한 학생 3명을 선정하였다. 이 학생들의 2학년 1학기 수학 성적은 <표Ⅲ-1>과 같고 이 중 순열과 조합 영역을 선행 학습한 학생은 없다.

<표 Ⅲ-1> 수업에 참여한 학생들의 수학 성적

학생	1학기 수학성적	석차 등급
학생1	100	1
학생2	89	3
학생3	84	4

3. 수업 절차

수업은 <표Ⅲ-2>와 같은 절차로 70분간 진행할 것이다. 사전 평가는 곱의 법칙을 논리적으로 정당화할 수 있는지를 확인하는 두 문제로 구성하였다. 수업은 총 2단계로 구성하였는데 1단계에서는 수형도를 그리고 해석하는 활동을 통해 학생들이 곱의 법칙을 논리적으로 정당화해보고 이를 이용하여 문제를 해결하도록 하였고 2단계에서는 곱의 법칙을 적용하여 순열과 중복순열의 수를 구하도록 구성하였다. 평가는 4개 문항으로 구성하였는데 수업에서 제시한 과제보다 난이도를 높여서 학생들이 수형도를 표상으로 하여 곱의 법칙

을 적용하는 사고 과정을 스스로 통제하고 개념적 이해를 바탕으로 문제를 해결할 수 있는지 알아보았다. 마지막으로 수형도를 표상으로 이용하여 곱의 법칙을 이해하는 학습이 개념이해에 도움이 되었는지, 세기 문제를 해결하는데 이러한 학습-지도 과정이 어떤 영향을 주었는지를 설문지와 인터뷰를 통해 학생들의 의견을 살펴보고자 한다.

〈표 Ⅲ-2〉 수업 절차

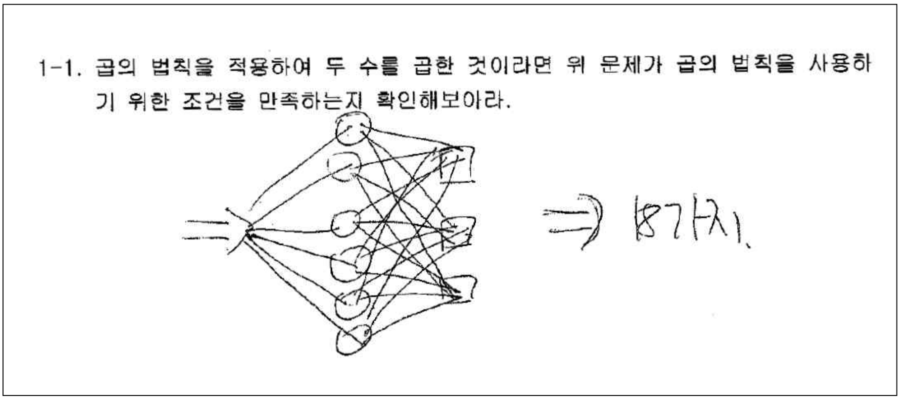
사전 평가(10분)
↓
수업(40분)
↓
평가(10분)
↓
설문지 작성 및 인터뷰(10분)

Ⅳ. 수업 및 평가 결과

1. 수업 결과

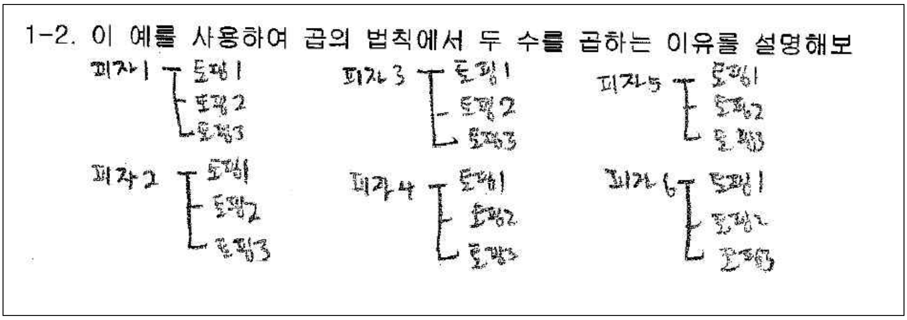
0단계 사전 평가 결과

첫 번째 문제는 중학교 과정에서 학습한 곱의 법칙을 학생에게 제시한 후, 경우의 수를 구하는 문제의 풀이과정을 제시하여 어떤 경우에 곱의 법칙을 사용하는지 생각해보도록 하였다.

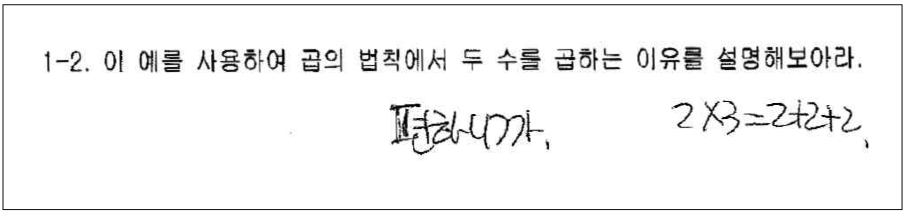


[그림 Ⅳ-1] 사전 평가 1-1번에 대한 학생2의 풀이

학생2는 수형도와는 다른 표현의 그림을 그려서 곱의 법칙을 설명하려고 했다([그림 Ⅳ-1] 참고). 학생2에게 이런 표현을 사용한 이유를 물어보니, 중학생 때 이런 그림을 그려서 문제를 푸는 걸 본 기억이 있다고 답하였다. 형식적인 수학적 정의를 배웠음에도 불구하고 그것이 잊혀진 상태이거나 또는 마음속에 있더라도 작용하지 못하는 상황에서 이 학생은 언어적 표상보다 시각적 표상에 의존하여 개념을 이해하고 있음을 알 수 있다(장혜원, 1996).



<학생1>



<학생2>

[그림 Ⅳ-2] 사전 평가 1-2번에 대한 학생1, 2의 풀이

학생1은 1-2번 문항에 대해 수형도를 그려서 대답하였고 학생2의 경우 곱의 법칙이 동수 누가 상황에서 생긴다는 것을 인지하고 있음을 확인할 수 있다. 1-2번 문항에 대한 답을 보면 학생1은 곱의 법칙의 개념을 표상을 이용하여 정확히 인지하고 있다고 생각할 수도 있지만 1-1번과 2번 문제에 대한 답을 보면 '동시에'라는 단어를 보고 곱의 법칙을 사용하는 인식론적 장애를 보이고 있음을 알 수 있다([그림Ⅳ-3] 참고). 학생1은 이후 수업에서 수형도를 이용하여 곱의 법칙을 논리적으로 정당화하는 과정을 학습한 뒤에는 제시되는 모든 문제를 수월하게 해결하는 모습을 보였다. 따라서 사전 평가에서 보였던 인지적 갈등이 해소되었다고 보인다. 학생2의 경우 곱의 법칙을 제대로 설명하지는 못하지만 수형도와는 다른 표현을 통해 이해하고 있었다. 학생3은 사전 평가 문항에 거의 답하지 못했다.

1-1. 곱의 법칙을 적용하여 두 수를 곱한 것이라면 위 문제가 곱의 법칙을 사용하기 위한 조건을 만족하는지 확인해보아라.

피자와 토핑은 동시에 사용 되기 때문에 곱의 법칙 사용가능

2. 10명의 학생 중 회장 1명, 부회장 1명, 총무 1명을 뽑는 경우의 수는 $10 \times 9 \times 8 = 720$ 이다. 이때 세 수를 곱하여 경우의 수를 구한 것은 곱의 법칙에 의한 것인가? 앞의 피자 문제와 비교하여 답하여라.

아니다.

1번에서 보면 곱의 법칙은 동시에 일어나는 일이지만 이 경우는 순차적으로 일어나는 일이다.

[그림 Ⅳ-3] 사전평가 1-1, 2번에 대한 학생1의 풀이

학생들은 문항지를 받기 전에는 중학교에서 곱의 법칙을 배웠다는 것을 기억하지 못했고 문항지에 제시된 곱의 법칙을 읽어본 후에도 생소하다는 반응이었다. 그러나 예시를 보고 난 뒤에는 학습한 경험을 기억해내고 풀이에 몰두했는데, 별도의 언급 없이도 학생들이 그림을 가지고 설명하는 것을 보고 시각적 표현이 상징적 표현으로 제시된 수학적 개념보다 기억이 오래 간직된다는 것을 확인할 수 있었다. 교육과정 상 수형도를 배우지 않았지만 교사나 교과서가 제시한 수형도를 본 적이 있었겠지만 세 학생 모두 수형도를 본 기억이 없다고 대답하였다. 교사가 일방적으로 제시하는 수학적 표현은 학생의 인지 구조로 정착되기 어렵고 학생이 수학적 개념에 대한 표상을 스스로 구성해 내도록 다양한 수학적 활동을 경험하는 것이 필요하다는 사실을 확인할 수 있다.

서로 다른 집합에서 각각 대상을 택하는 1번 문항과 달리 2번 문항은 한 집합에서 대상을 택하도록 설계되었다. Mary와 Bárbara(2016)는 곱의 법칙 문제는 서로 다른 종류의 원소들을 갖는 집합들에서 각각의 원소를 택하여 만든 순서 지어진 n짝의 개수를 세는 것이고 순열 문제는 한 집합 안에서 뽑은 원소들을 배열하는

문제이기 때문에 서로 다르다고 구분한 연구의 예시 문제였다. 학생 2, 3은 곱의 법칙을 사용한 것이라고 답했지만 학생1은 사건이 ‘동시에’ 일어나지 않았기 때문에 곱의 법칙을 적용한 게 아니라고 답해서 곱의 법칙 개념에 대해 인지적 장애가 있다는 것을 확인하였다.

1단계 학습-지도 결과

이 단계에서는 수형도를 이용하여 곱의 법칙을 논리적으로 정당화하는 과정을 학습하고 조금 큰 수를 사용하는 문제를 통해 학생들이 수형도를 완전하게 그리지 않고 개념적 표상으로 이용하여 문제를 해결하도록 구성하였다. 1-1번 나열하기에서 세 명의 학생은 별도의 발문이 없었음에도 불구하고 첫 번째 자리에 오는 문자별로 분류하여 썼다. Elise(2013)의 조합적 사고 모델로 설명하면 세 명의 학생이 동일한 구조를 갖는 결과물들의 집합을 떠올린 것이다. 세 학생 모두, 첫 번째 자리, 두 번째 자리, 세 번째 자리의 순서로 위치하는 문자를 나열하는 방식의 사고 작용을 했기 때문에 1-3번의 수형도를 쉽게 작성할 수 있었다. 1-3번에서 수형도는 그려진 상태로 제시했는데 이것은 학생들이 수형도를 그리는 활동에 집중하느라 수형도의 특징을 찾고 그 특징을 이용하여 곱의 법칙을 이해하는 사고 과정을 간과할 수 있기 때문이었다. 수형도를 완성한 후 학생들에게 이 수형도의 특징을 찾도록 발문하였다. 다음은 녹취록의 일부이다.

교사: 중학교 때 이런 수형도 그려본 적 있어요?
학생3: 아뇨. 우린 다 썼는데... (1-1번 문항의 나열된 답을 가리키며) 이렇게요.
학생1: 우리도.
학생2: 나도.
교사: 그럼 수형도는 처음 보는 거네요? 자 그럼 1-3에서 그린 수형도를 보고 이 문제의 경우의 수가 6가지임을 설명할 수 있을까요?

하나씩 헤아려서 하지 말고.

학생1: (앞에 나와 칠판에 쓰면서)첫 번째에 올수 있는 문자가 3개이고 그 다음 자리에 올수 있는 문자가 2개 남고 그러면 그 다음에 남는 문자가 1개니까...

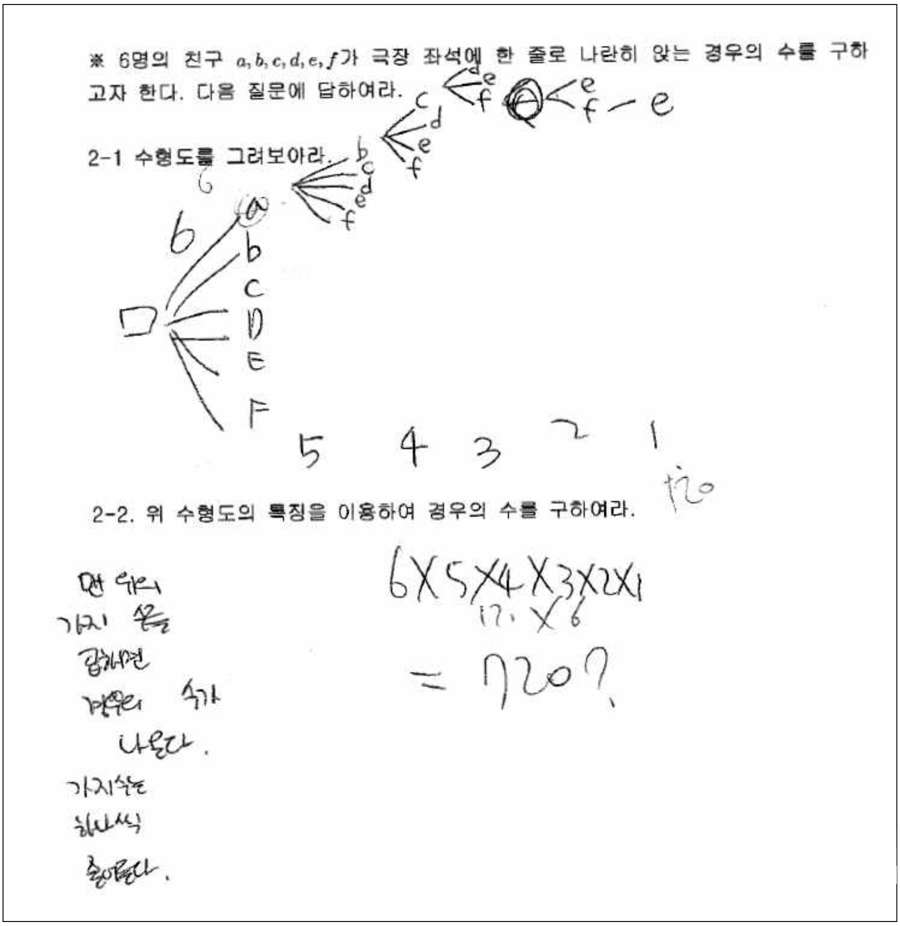
교사: 수형도의 영어이름이 tree예요. 이 선들이 나뭇가지처럼 보이죠? 이걸 이용해서 설명해볼까요?

학생2: 나뭇가지수를 곱해요!

학생3: 그런데 나뭇가지수가 3개, 2개, 1개니까 더해서 6일수도 있잖아? 그럼 곱하긴지 더하긴지 문자 4개로 해볼까? 그럼 확실해지잖아.

학생 1, 2는 수형도의 나뭇가지수를 곱하면 경우의 수가 나온다는 것을 발견하였지만 학생3은 수형도를 그려서 보았음에도 불구하고 곱하는 이유를 이해하지 못했다.

2번 문항은 더 큰 수를 사용한 문제를 풀어봄으로서 자신의 사고과정을 반성해보도록 구상한 것이었다. 세 학생 모두 수형도 전체가 아닌 부분수형도를 그려본 후 단계별로 나뭇가지 수가 일정한 것을 확인하고 그 수들을 모두 곱해서 경우의 수를 구하였다. 수형도가 구체적이고 시각적인 특성을 갖는 수학적 표현의 단계를 지나서 상징적 특성을 갖는 개념적 표상으로써 학생들의 인지 구조에 자리잡았음을 알 수 있다. 학생3은 1번 문제에서 가진 의문을 이 문제를 통해 해결하였는데, 2번 문제에서 세는 과정에서 곱의 법칙을 사용한다는 것을 인지하고 $6\times5\times4\times3\times2\times1$이란 표현을 구한 것처럼 1번 문제도 해결할 수 있다는 것을 깨달았다.



[그림 Ⅳ-4] 학습지 2번에 대한 학생3의 풀이

2단계 학습-지도 결과

2단계에서는 순열의 수를 곱의 법칙으로 구하는 것을 목표로 하였지만 수형도를 그려본 후 곱의 법칙을 적용하는 전략을 직접적으로 명시하지는 않았다.

3번 문제를 풀기 전에 순열의 개념은 교사가 직접 설명하여 제시하였다. 그리고 학생들에게 문자로 제시된 순열의 수를 구하도록 했는데, 세 학생들은 곱의 법칙을 이용한다는 것을 인지하고 있었다. 그러나 예상대로 r번째에 곱해지는 수를 찾는 것은 어려워했다. 다

음은 녹취록의 한 부분이다.

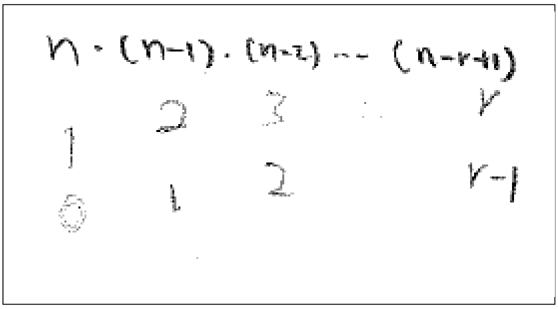
학생3: r 곱하기, $r-1$ 곱하기...

교사: 처음 자리에 올 수 있는 것은 몇 개가 있을까요?

학생3: 아, n 곱하기, $n-1$ 곱하기... 그런데 끝이 뭐야? $n-r$ 이야? $n-r+1$이야?

학생1: (칠판에 나와 자신의 풀이를 쓰면서) 처음이 n이고, 두 번째가 $n-1$이고, 세 번째가 $n-2$이니까... r번째는 $n-(r-1)$이니까 $n-r+1$까지야.

학생3: 아 그러네.



[그림 Ⅳ-5] 학습지 3번에 대한 학생1의 풀이

2단계의 두 번째 문제는 중복 순열의 수를 곱의 법칙으로 구할 수 있는지를 확인하고 동시에 곱의 법칙이 순서 지어진 n짝의 모든 경우의 수를 구하는 것이라는 것을 학생들이 이해할 수 있는지 확인하기 위해 설계하였다. 이 단계에서는 수형도가 이미 학생들의 인지구조 속에 개념적 표상으로 자리 잡았다고 간주하고 학생들이 수형도 이미지를 떠올려서 결과물들의 집합을 구할 수 있다고 예상하였다. 실제로 학생들은 수형도를 그려보지 않고도 답을 쉽게 구했다. 그런데 '두 문제는 같은 문제일까요? 다른 문제일까요?' 라고 추가 발문하자 학생1이 '네 개의 주사위를 동시에 던졌을 때' 라는 부분에서 똑같은 주사위들이라 구분할 수 없는 상황을 예로 들며 앞에

서 구한 답이 틀렸다고 주장했다. 다음은 이 상황에 대한 녹취록의 일부이다.

학생1: 똑같은 게(주사위) 네 개 있어. 하나는 1이 나오고, 얘는 2가 나오고 얘는 3이 나오고 얘는 4 나와. 그런데 (주사위 네 개를 섞는 시늉을 하면서)이러면 $(1,2,3,4)$와 $(4,3,2,1)$이 같은 거잖아. 그니까 위랑 이 문제는 다르지.

학생2: 미리 주사위 색깔을 정해놓고 던지면 되잖아. 빨간 주사위에서 1이 나온 거랑 4가 나온 건 다른 거잖아.

학생3: $1,2,3,4$가 하나씩 나온 건 같지만 a가 1인 것과 a가 4인 건 다르지. $1,2,3,4$를 배열하는 것에 따라서 (a,b,c,d)는 달라지잖아.

사건의 결과물들을 순서 지어진 n짝으로 표현하는 방법은 문제에서 제시해주었는데 학생들은 그 표현을 이용하여 상황을 설명하였다. 두 문제의 구조가 같다는 것을 학생들이 쉽게 찾아낼 것이라 예상하고 설계한 문항이었는데 한 학생이 실생활에서 겪을 수 있는 상황을 예를 들어 예상하지 못한 문제가 생겼다. 그런데 오히려 학생들이 직접 결과물들의 집합들을 떠올려서 그 원소들을 비교해보고 세는 과정에서의 오류를 바로 잡는 것을 볼 수 있었다. 그리고 학생들은 순서 지어진 n짝으로 표현되는 결과물들의 개수를 곱의 법칙을 이용하여 구하였다.

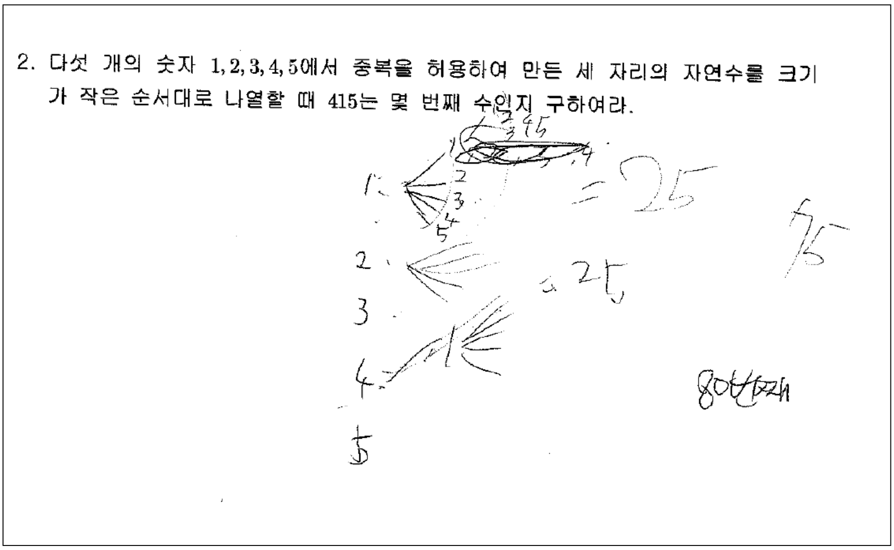
2단계 학습-지도 과정을 진행한 결과 학생들이 수형도를 개념적 표상으로 하여 세는 과정에서 곱의 법칙을 떠올리며 이를 이용하여 순열과 중복순열의 수를 구할 수 있다는 것을 확인하였다.

2. 평가 결과

평가는 4개 문항으로 구성하였는데 수업에서 제시한 과제보다 난

도를 높여서 학생들이 수형도를 개념적 표상으로 하여 곱의 법칙을 적용하는 사고 과정을 스스로 통제하고 개념적 이해를 바탕으로 문제를 해결할 수 있는지 알아보았다.

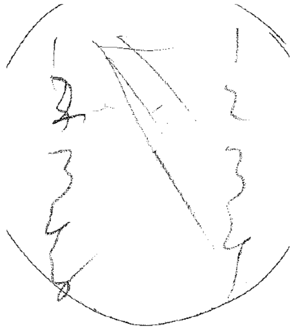
1번, 4번 문제는 세 학생이 모두 수형도를 생략하고 곱의 법칙으로 쉽게 해결하였지만 2번 문제는 수형도를 그려서 풀었다. 이에 대해 학생들은 이후 실시한 인터뷰에서 조건이 많아서 답을 바로 구하기 어려울 때, 수형도를 떠올려서 풀었다고 대답했다. 수학적 표상이 수학적 개념의 이해를 도울 뿐만 아니라 문제 해결에 있어서 아이디어를 제공한다는 것을 확인할 수 있었다.



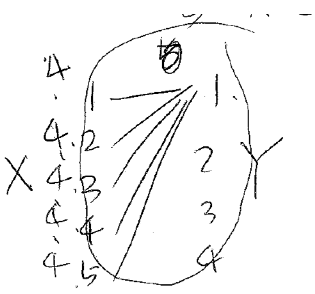
[그림 Ⅳ-6] 평가 2번에 대한 학생3의 풀이

3번 문제에서는 순서 지어진 n짝을 세는 것이 곧, 곱의 법칙이라는 개념을 학생들이 이해했는지를 평가하기 위해 함수를 사용하였다. 학생들이 함수의 개념을 인지하지 못하고 있을 경우를 염려하여 그 개념을 제시하였는데, 세 학생 모두 수형도가 아니라 함수의 개념을 시각적 표상으로 나타내어 문제를 해결하였다([그림 Ⅳ-7]참고). 이것은 본 연구에서 예상하지 못했던 부분이었다. 이후 인터뷰

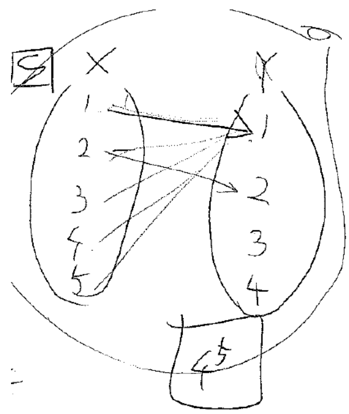
에서 학생들은 원래 함수의 개념을 기억하지 못했고 문제에 제시된 함수의 정의도 이해하기 어려웠다고 대답했다. 그런데 벤다이어그램이 떠올랐고 그것을 그려두고 문제에서 언어적 표현으로 제시한 함수의 정의를 읽어보고 나서야 답을 구할 수 있었다고 답했다. 수학적 표상이 수학적 개념 이해에 도움이 된다는 사실을 다시 확인할 수 있었다. 세 학생은 함수의 개념 이해가 어려웠을 뿐, 곱의 법칙을 이용하여 문제의 답은 쉽게 구했다.



〈학생1〉



〈학생2〉



〈학생3〉

[그림 Ⅳ-7] 평가 3번에서 학생들이 사용한 함수의 개념적 표상

3. 인터뷰 결과

수업을 마친 후 작성한 설문지와 인터뷰를 바탕으로 학생들의 반응을 살펴보았다. 세 학생 모두 이 학습 전에는 곱의 법칙에 대해

어렴풋이 알고 있었는데 학습을 통해 명확하게 알게 되었다고 대답했다. 특히, 곱의 법칙에서 두 수를 곱하는 이유에 대해 생각해 본 적도 없고 당연한 것으로 받아들였는데 수형도를 그려서 이유를 논리적으로 설명할 수 있다는 사실이 놀라웠다는 대답을 하였다. 그리고 조건이 복잡한 세기 문제를 푸는데 도움이 되는 것 같다는 대답을 세 학생이 공통으로 하였다. 2단계 학습-지도 과정에서 순열의 수를 곱의 법칙으로 구해본 후 그 공식을 학생들에게 설명해 주었는데 학생들은 곱을 법칙을 이용하는 것이 더 쉬운 것 같다고 대답하였다. 실제로 순열과 중복 순열의 공식을 사용하지 않고도 평가 문항들을 해결할 수 있다는 것을 확인했다.

V. 결론

곱의 법칙은 세기 문제에 있어서 기본적인 해결 방법일 뿐만 아니라 이후 학습할 순열과 조합의 논리적 정당화 과정에서 이론적 토대가 되기 때문에 이에 대한 충실한 학습은 중요하다. 그러나 실제 학교 현장에서는 곱의 법칙을 이용하는데 어려움을 느끼는 학생들이 많다. 이것은 곱의 법칙에 대한 충분한 고찰 없이 순열과 조합의 공식을 학습하고 이를 이용하여 경우의 수를 구하는 문제를 해결하는 데만 무게를 두기 때문이다. 그래서 이 단원을 학습한 후에도 어떤 경우에 곱의 법칙을 적용하는지 알지 못하고 '이고' 나 '동시에' 라는 특정 단어에 관심을 집중하는 인식론적 장애를 보이는 학생들이 많다

이러한 문제점을 해결하기 위하여 본 연구는 수형도를 활용하여 곱의 법칙을 논리적으로 정당화하는 학습-지도 과정을 제안하였다. 수학적 개념이 학습자의 의식 내부에 조직화된 개념이나 아이디어로 자리 잡는데 수학적 표현이나 표상은 큰 도움이 된다. 수형도는 구체적이고 시각적인 이미지를 갖지만 가능한 경우들을 모두 배열하는 주체의 사고 과정을 드러낸다는 점에서 개념적 표상이라 할 수 있다. 특히 조합론 영역의 문제를 해결하는 과정에서 학생들은 공식/표현, 세는 과정, 결과물들의 집합 간의 상호작용에 의해 사고가 촉진되는 것으로 알려져 있는데 나열된 결과물들의 집합이나 이것을 구하는 사고 과정의 순서도인 수형도는 각각, 수학적 표현과 표상으로써 학생들의 사고를 촉진한다. 이러한 이론적 근거를 바탕으로 하여 학생들이 수형도를 그리고 해석하는 과정을 통해 수형도를 개념적 표상으로 구성하고 이 표상을 이용하여 곱의 법칙을 논리적으로 정당화하고 이러한 개념적 이해를 바탕으로 문제를 해결하는 학습-지도 과정을 설계하였고 실험 수업을 실시하였다.

사전 평가를 통해 학생들이 곱의 법칙을 제대로 이해하지 못하고

있음을 확인하였다. 수형도를 배우지 않았음에도 불구하고 이와 비슷한 표현을 통해 설명하려는 학생도 있었지만 이 학생도 특정 단어에 초점을 맞추어 곱의 법칙을 적용하는 모습을 보였다. 학습-지도 과정은 2단계로 이루어졌다. 1단계에서는 수형도를 활용하여 곱의 법칙을 논리적으로 정당화하였고 문제를 풀어봄으로서 인지적 강화를 하였다. 학생들은 수형도를 해석하는 활동을 통해 곱의 법칙을 논리적으로 설명할 수 있었고, 조금 큰 수를 사용하는 문제에서는 완전한 수형도를 그리지 않고도 표상을 떠올려 문제를 해결하였다. 학생들은 수업 후 인터뷰에서 이번 학습 이후로 수형도는 머릿속에서 쉽게 떠오르기 때문에 이제 직접 그려보지 않아도 곱의 법칙을 쉽게 적용할 수 있게 되었다고 대답하였다. 2단계에서는 곱의 법칙을 적용하여 순열과 중복순열의 수를 구해보았다. 문자를 이용한 일반화 과정이었음에도 불구하고 어렵지 않게 결론을 도출해 내었다. 이 과정을 통해 학생들이 순열과 중복순열의 수를 곱의 법칙으로 충분히 해결할 수 있음을 확인하였다. 그리고 곱의 법칙이 순서 지어진 n짝의 모든 경우의 수를 세는 것이란 것도 2단계의 문제들을 통해 학습할 수 있었다.

두 단계에 걸친 학습-지도 과정 후에 4개의 문항으로 평가를 실시하였다. 학생들은 수형도를 직접 그려보거나 표상으로 이미지를 떠올려 문제를 해결했다. 학생들은 함수의 개념이 포함된 문제를 접했을 때 함수의 시각적 표상을 그렸는데 이것은 본 연구에서 예상하지 못했던 부분이었다. 형식적인 수학적 정의를 배웠음에도 불구하고 학생들이 언어적 표상보다 시각적 표상에 의존하여 개념을 이해하는 경향이 있다는 것을 알 수 있다. 학생들은 함수의 개념을 이해하는데 표상을 사용했고 문제의 답은 곱의 법칙으로 수월하게 구했다. 그러나 학생들은 함수 값들을 순서 지어진 n짝으로 표현하여 해결하지는 못했다. 곱의 법칙과 또 다른 수학적 개념이 문제에 함께 포함된 경우, 곱의 법칙의 개념을 이해하고 이를 사용하여 문제

를 해결할 수는 있었지만 다른 수학적 개념으로 인한 어려움 때문에 세는 과정을 수학적 기호를 사용하여 정확히 설명하는 것은 어려웠던 걸로 해석된다. 이 결과에 대해서는 연구가 더 필요하다고 생각한다.

결과를 정리해보면 나열된 결과물들을 나열하는 사고 과정을 수형도로 나타내는 학습을 통해 수형도는 개념적 표상으로 학생들의 인지 구조에 자리를 잡게 되었다. 그리고 이 표상을 이용하여 곱의 법칙의 개념을 이해하고 논리적으로 정당화할 수 있었다. 그리고 순열과 중복 순열의 수를 곱의 법칙으로 구할 수 있음을 확인하였다. 학생들은 세기 문제를 풀면서 생기는 인지적 갈등에 대해서는 공식/표현, 결과물들의 집합, 세는 과정의 세 요소들의 상호 작용을 이용하여 해결하는 모습도 보여주었다. 따라서 개념적 표상인 수형도를 활용한 학습은 곱의 법칙의 개념화와 세기 문제 해결에 있어서 학생들에게 도움이 되었다고 본다. 본 연구는 실제 중고등학교에서 곱의 법칙을 지도하는 기초 자료로서 도움이 될 것으로 생각한다.

본 연구의 한계점은 먼저 연구에 참여한 학생들의 사례 수가 적어 모든 수준의 학생들을 대표하지 못했다는 점이다. 자발적으로 참여한 학생들이어서 수학 학업 성취도가 낮고 흥미가 없는 학생은 참여하지 않았기에 하 수준의 학생은 없었다. 그리고 세기 문제는 실생활과 연계된 소재나, 다양한 수학적 개념을 포함하는 경우가 많은데 이로 인해 생기는 오류나, 문제에 복합적으로 나오는 다른 수학적 개념 때문에 어려움이 생길 수도 있다. 이로 인해 학습-지도 과정을 평가하는데 한계가 있을 수 있다. 이러한 한계점에 대한 보완과 후속연구가 필요할 것이다.

참 고 문 헌

교육과학기술부(2011). **수학과 교육과정**. 교육과학기술부 고시.

김서령, 박혜숙, 김완순(2007). 조합문제에서의 인식론적 장애-곱의 법칙과 합의 법칙 중심으로-, **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 46(2), pp 193~205.

김원경 외(2014). **중학교 수학②**. 서울:비상교육.

우정호 외(2015). **확률과 통계**. 서울:두산동아.

이강섭 외(2014). **중학교 수학②**. 서울:두산동아.

이강일 외(2015). **확률과 통계**. 서울:미래엔.

이대현(2003). 수학교육에서 시각적 표현에 대한 소고, **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 42(5), pp 637~646.

이주영(2005). 조합 문제 사이의 구조적 동형. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

이지현(2003). 조합 문제에 대한 학생들의 이해와 해결 전략 - 조합 문제의 유형을 중심으로-. 서울대학교 대학원 석사학위논문.

이지화(2005). 학습도구를 활용한 순열과 조합의 지도에 관한 연구, 단국대학교 교육대학원 석사학위논문.

장혜원(1996). 수학 학습에서의 표현 및 표상에 관한 연구-표상 모델 개발을 중심으로-, 서울대학교 대학원 박사학위논문.

정인철(2003). 수학교육에서 ‘이해’의 의미와 구조에 대한 고찰, 문제 사이의 구조적 동형. **한국수학교육학회지 시리즈 A <수학교육>**, 42(1), pp 11~18.

정인철(2009). 수세기를 통한 순열과 조합의 이해. *East Asian Matematical Journal*, 25(3), pp 247~262.

진선미(2015). 중학교 1학년 학생들의 경우의 수 문제해결과정에서 드러난 세기 활동 분석, 한국교원대학교 대학원 석사학위논문.

최연화(2011). 점거 문제를 이용한 중복 조합의 지도 방안, 서울대학교

대학원 석사학위논문.

한국과학창의재단(2011). **2009 개정 교육과정에 따른 수학과 교육과정 연구**. 서울:한국과학창의재단

황선욱 외(2015). **확률과 통계**. 서울:좋은책신사고.

황선욱 외(2014). **중학교 수학②**. 서울:좋은책신사고.

Batanero, C., Navarro-Pelayo, V. and Godino, J.(1997). Effect of the Implicit combinatorial model on combinatorial reasoning of secondary school students. *Educational Studies in Mathematics,* 32, pp 181~199.

Elise Lockwood(2013). A model of students' combinatorial thinking, *The Journal of Mathematical Behavior*, 32, pp 251~265.

Elise Lockwood, Craig A. Swinyard & John S. Caughman(2015). Patterns, Sets of Outcomes, and Combinatorial Justification: Two Students' Reinvention of Counting Formulas. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, Vol 1, Issue 1, pp 27-62.

English. L. D(1991). Young children's combinatoric strategies. *Educational Studies in Mathematics*, 22(5), pp 451~474.

Fischbein. E(2006). **수학 과학 학습과 직관**. 우정호 외 역. 서울:경문사.(원저 1987 출간).

Kapur. J. N(1970). Combinatorial Analysis and School Mathematics, *Educational Studies in Mathematics*, 3, pp 111~127.

Mary C. Caddle, Bárbara M. Brizuela(2016). Multiplication Principle Problems and Permutation Problems, *The Mathematics Teacher*, 109(6), pp 463-467.

NCTM(2007). 학교수학을 위한 원리와 규준. 류희찬 외 5인 역. 서울:경문사.(원저 2000 출간).

부 록

1. 사전 평가

1. 일반적으로 사건 A가 일어나는 경우의 수가 m, 그 각각에 대하여 사건 B가 일어나는 경우의 수가 n이면 두 사건 A와 B가 동시에 일어나는 경우의 수는 $m \times n$이다. 이것을 **곱의 법칙**이라 한다.

   어느 피자 가게에서 6종류의 피자와 3종류의 추가 토핑을 판매하고 있다. 이 가게에서 피자와 추가 토핑을 각각 한 가지씩 주문하는 경우의 수는 $6 \times 3 = 18$ 가지이다.

1-1. 곱의 법칙을 적용하여 두 수를 곱한 것이라면 위 문제가 곱의 법칙을 사용하기 위한 조건을 만족하는지 확인해보아라.

1-2. 이 예를 사용하여 곱의 법칙에서 두 수를 곱하는 이유를 설명해보아라.

2. 10명의 학생 중 회장 1명, 부회장 1명, 총무 1명을 뽑는 경우의 수는 $10 \times 9 \times 8 = 720$ 이다. 이때 세 수를 곱하여 경우의 수를 구한 것은 곱의 법칙에 의한 것인가? 앞의 피자 문제와 비교하여 답하여라.

2. 학습지

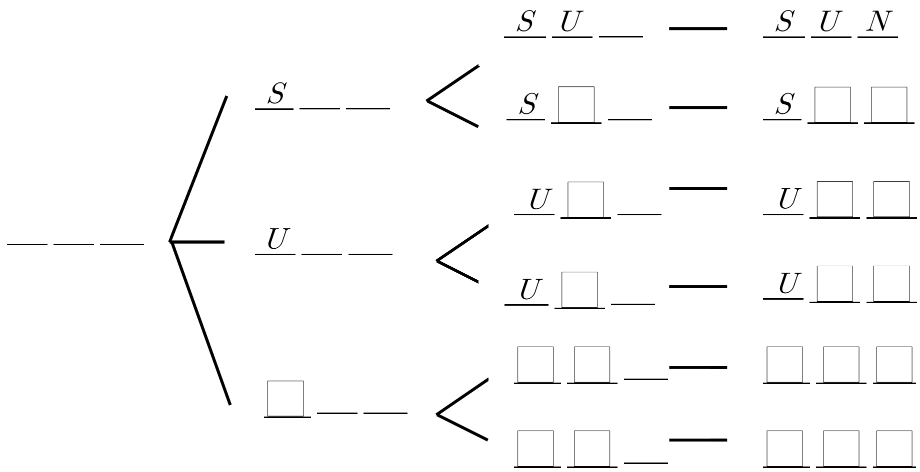
[1단계]

※ S, U, N 세 개의 알파벳을 모두 사용하여 일렬로 배열하는 경우의 수를 구하려고 한다. 다음 질문에 답하여라.

1-1. 가능한 모든 경우를 나열하여라.

1-2. 1의 답을 첫 번째 문자가 같은 것끼리 묶어보아라.

1-3. 2의 답을 이용하여 아래 빈칸에 알맞은 문자를 넣어 그림을 완성하여라.



1-4. 3번처럼 사건이 일어나는 모든 경우를 나뭇가지 모양의 그림으로 나타낸 것을 **수형도**라고 한다. 위 수형도의 특징을 이용하여 경우의 수를 구하는 방법에 대해 설명하여라.

※ 6명의 친구 a, b, c, d, e, f가 극장 좌석에 한 줄로 나란히 앉는 경우의 수를 구하고자 한다. 다음 질문에 답하여라.

2-1 수형도를 그려보아라.

2-2. 위 수형도의 특징을 이용하여 경우의 수를 구하여라.

[2단계]

3. 서로 다른 n개에서 $r(0 < r \leq n)$개를 택하여 일렬로 나열하는 것을 **순열**이라고 한다. 순열의 수를 구하여라.

※ 다음 질문에 답하시오.

4-1. 한 개의 주사위를 네 번 던져 나온 눈의 수를 차례로 각각 a, b, c, d 라고 할 때, 가능한 (a, b, c, d)의 모든 경우의 수를 구하여라.

4-2. 네 개의 주사위를 동시에 던져 나온 눈의 수를 각각 a, b, c, d 라고 할 때, 가능한 (a, b, c, d)의 모든 경우의 수를 구하여라.

3. 평가

※ 다음 질문에 답하시오.

1. 6개의 수 $1, 2, 3, 4, 5, 6$에서 중복을 허용하여 만들 수 있는 네 자리의 홀수는 모두 몇 개인지 구하여라.

2. 다섯 개의 숫자 $1, 2, 3, 4, 5$에서 중복을 허용하여 만든 세 자리의 자연수를 크기가 작은 순서대로 나열할 때 415는 몇 번째 수인지 구하여라.

3. 두 집합 X, Y에 대하여 X의 각 원소에 Y의 원소가 오직 하나씩 대응할 때, 이 대응을 X에서 Y로의 함수라고 한다. 집합 X의 원소 중에서 대응하지 않고 남아 있는 원소가 있거나 X의 한 원소에 집합 Y의 원소가 두 개 이상 대응하면 그 대응은 함수가 아니다. 두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X를 정의역, Y를 공역으로 하는 함수의 개수를 구하여라.

4. $12=2^2\times3$으로 소인수분해가 된다. $1, 2, 2^2$ 중 하나를 선택하고 $1, 3$ 중 하나를 선택하여 두 수를 곱한 값은 12의 약수가 된다. 따라서 12의 약수의 개수는 $3\times2=6$개다. 300의 약수의 개수를 구하여라.

ABSTRACT

A Study on Teaching Multiplication Principle via Tree diagrams - Focused on counting -

Park, Yeun Mi
Major Advisor Kim, Suh Ryung
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

In combinatorics, the multiplication principle is the most basic method for solving counting problems and fundamental to understanding logical proofs or justifications that leads to learning combinations and permutations. Thus understanding of the multiplication principle and problem solving experiences in which students solve counting problems with their understanding of the multiplication principle are necessary in learning combinatorial concepts of mathematics. However, in mathematics class rooms, the multiplication principle is presented without any logical justification and students rarely capture true meaning of the multiplication principle. This gives rise to a phenomenon in which many students have epistemological obstacle such as concentration on certain words like 'and' and 'at the same time'.

This paper suggests an instructional process model that adopts tree diagrams as a main tool to overcome difficulties in learning the multiplication principle of counting. Though a tree diagram is a concrete visual image, it can be thought as a conceptual representation since a tree diagram expresses thinking process of sequencing every possible cases. Students' difficulties in understanding mathematical concepts originated from the fact that a mathematical concept is a symbolic expression of a developed theory in formal language. Therefore, concrete and specific mathematical representations and expressions can assist students in learning abstract mathematical concepts and increasing their problem solving ability. In this paper, we intend to show that students can logically justify the multiplication principle with the conceptual representation of tree diagrams, which is constructed through process of drawing and interpreting tree diagrams. Moreover, we try to show that if a student has a representation of tree diagrams then this student can solve problems of permutation and permutation with repetition using the multiplication principle.

In this research, firstly, we designed an instructional process model for the multiplication principle that adopts tree diagrams. We conducted mathematics classes based on designed model and evaluated results. Results show that students can justify the multiplication principle logically thorough process of drawing and interpreting tree diagrams. Results also show that students can use the multiplication principle through tree diagrams inherent in their minds solve problems of permutation and permutation with repetition.

Keyword : Multiplication Pprinciple, Tree Diagram, Conceptual Representation.

Student's number : 2014-22850