



저작자표시-비영리-동일조건변경허락 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.
- 이차적 저작물을 작성할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:



저작자표시. 귀하는 원 저작자를 표시하여야 합니다.



비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.



동일조건변경허락. 귀하가 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공했을 경우에는, 이 저작물과 동일한 이용허락조건하에서만 배포할 수 있습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리와 책임은 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 [이용허락규약\(Legal Code\)](#)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

[Disclaimer](#)



이학석사학위논문

**초대칭적 Yang-Mills 이론에서  
BCFW-재귀관계를 통한 산란  
진폭의 입문**

**Introduction to Scattering Amplitudes in  
Supersymmetric Yang-Mills theory via  
BCFW-Recursion Relations**

2014년 8월

서울대학교 대학원  
물리천문학부 물리학전공  
주부경

# 초대칭적 Yang-Mills 이론에서 BCFW-재귀관계를 통한 산란 진폭의 입문

Introduction to Scattering Amplitudes in  
Supersymmetric Yang-Mills theory via  
BCFW-Recursion Relations

지도교수 이 상 민

이 논문을 이학석사 학위논문으로 제출함  
2014년 5월

서울대학교 대학원  
물리천문학부 물리학전공  
주부경

주부경의 석사 학위논문을 인준함  
2014년 6월

위 원 장 김 석



부위원장 이상민



위 원 이 수 종



# 초 록

접동적 양자장이론은 전통적으로 Feynman 도형을 이용해 산란 진폭을 계산한다. 그러나 비 가환 게이지 이론에서는 산란에 참여하는 입자들의 개수가 늘어남에 따라 Feynman 도형의 계산량이 심각하게 늘어나기 때문에 이 방법을 통한 산란 진폭의 계산은 가지 단계에서조차 어려움이 있다. E.Witten의 [1]은 산란 진폭에 대한 현대적 접근의 새 지평을 열었고 이러한 어려움을 해결하는 실마리를 제공했다. 이후 BCFW-재귀방법의 도입은 게이지 이론의 가지 단계 산란 진폭 계산의 복잡성을 줄여 주었다. 최근 쌍대 등각 대칭성의 발견으로 산란 진폭을 운동량 트위스터공간에서 다루는 것이 자연스럽게 이뤄지고 있다. 또한 고리 단계에서도 산란 진폭을 BCFW-재귀관계를 통해 구하고자 하는 시도가 진행 중이다.

이 논문에서는 BCFW-재귀관계를 초대칭과 함께 자세히 검토할 것이다. 먼저 비 가환 게이지 이론에서 색 대수를 통해 균론적 정보와 운동학적 정보가 분리되는 성질을 다룬다. 이렇게 분리된 산란 진폭 중 운동학적 정보를 간단하게 표현해주는 ‘스피너-나선도’ 표기법을 통해 부분 산란 진폭이라는 양으로 표현한다. 또한 초대칭에 대한 간단한 소개와 함께 고리 단계 산란 진폭계산의 보편적인 방법인 일반화된 유니타리티 방법을 살펴본다. 이러한 논의를 마친 후 BCFW-재귀관계를 도입하여 산란 진폭의 계산이 더 간결해짐을 알아보고 학계의 최신 연구동향에 대한 짧은 소개를 통해 이 글을 마무리하고자 한다.

**주요어 :** 게이지이론, KK& BCJ 관계식, 스피너-나선도표현, BCFW-관계,  $\mathcal{N} = 4$  SYM, 유니타리티 방법, Yangian 대칭성, 운동량 트위스터 공간

**학번 :** 2011-23280

# 목 차

I.	서론	1
II.	가지 단계 형식 (Tree-Level Formalism)	4
2.1	비 가환 게이지 이론 (Non-Abelian Gauge Theory)	4
2.1.1	Yang-Mills 이론 (Yang-Mills Theory)	5
2.1.2	색 대수 (Color Algebra)	9
2.2	스피너-나선도 표기법 (Spinor-Helicity Formalism)	14
2.3	KK & BCJ 관계식	22
2.3.1	Kleiss-Kuijf 관계식	22
2.3.2	Bern, Carrasco, Johansson 관계식	27
2.4	$\mathcal{N} = 4$ 초 Yang-Mills 이론	31
2.4.1	$\mathcal{N} = 4$ SYM 의 대칭성	37
III.	고리 단계 형식 (Loop-Level Formalism)	42
3.1	일반화된 유니타리티 방법	43
3.2	1-고리 단계 4 입자 산란 진폭	49
IV.	BCFW-재귀관계식과 그 응용	54
4.1	가지 단계 BCFW-재귀관계식	54
4.1.1	Britto-Cachazo-Feng-Witten 재귀관계식	55

4.1.2	$z \rightarrow \infty$ 에서의 $\mathcal{A}_n(z)$ 의 거동 . . . . .	62
4.1.3	예제: $n=6$ NMHV 산란 진폭 . . . . .	68
4.2	$\mathcal{N} = 4$ SYM에서의 BCFW-재귀관계식 . . . . .	72
4.2.1	초대칭적 BCFW-재귀관계식 . . . . .	72
4.2.2	초 BCFW-재귀관계를 통한 MHV 초 산란 진폭 . .	73
4.3	KK & BCJ 관계식 . . . . .	75
4.3.1	Kleiss-Kuijf 관계식 . . . . .	75
4.3.2	Bern-Carrasco-Johansson 관계식 . . . . .	81
4.4	운동량 초 트위스터공간에서의 산란 진폭 . . . . .	84
4.4.1	쌍대 초 등각 대칭성 . . . . .	85
4.4.2	초 트위스터 공간 . . . . .	87
4.4.3	초 트위스터공간에서의 BCFW-재귀관계식 . . . .	91
4.4.4	가지 단계 $N^K$ MHV 산란 진폭 . . . . .	94
4.5	고리 단계 BCFW-재귀관계식 . . . . .	97
4.5.1	고리 단계 BCFW-재귀관계식 . . . . .	97
4.5.2	4 입자 1-고리 산란 진폭 . . . . .	102
V.	토의 . . . . .	107
	참고 문헌 . . . . .	110
	<b>Abstract</b> . . . . .	116
	찾아보기 . . . . .	118

# 표 목 차

표 1.	Yang-Mills 이론에서 산란입자에 따른 Feynman 도형 수 . . . . .	1
표 2.	$\mathcal{N} = 4$ SYM에서 나선도에 따른 상태 수 . . . . .	31
표 3.	$\mathcal{N} = 4$ SYM on-shell 초장에서 각 상태별 Grassmann 미분 연산자 . . . . .	34

# 제 1 장

## 서론

양자전기역학의 섭동 이론적 성공은 ‘게이지 이론’(gauge theory)이라는 큰 학문 분야를 만들었다. 게이지 이론은 양자전기역학으로부터 시작됐다. 이는 가환(abelian) 군인  $U(1)$  군을 통해 기술되는 이론이며 양자전기역학을 매우 성공적으로 기술한다. 이러한 성공을 바탕으로 비 가환(non-abelian) 군을 통해 기술하는 ‘비 가환 게이지 이론’이 정립됐다.

양자장 이론에서 산란 진폭은 보통, Feynman 도형을 통해 섭동적으로 계산된다. 비 가환 게이지 이론에서의 산란 진폭계산 또한 이 방법을 이용하면 원리적으로는 계산 할 수 있지만, 산란에 참여하는 입자의 개수가 늘어감에 따라 계산할 도형의 개수가 엄청나게 늘어나기 때문에 실질적으로 계산하는 데에는 어려움이 있다. 비 가환 게이지이론의 대표적인 예인 Yang-Mills 이론을 생각해보자. 이 이론에서 글루온에 대한 산란 진폭을 가지 단계에서 계산할 때 등장하는 도형의 개수는 산란에 참여하는 입자의 개수가 늘어남에 따라 다음과 같이 나타난다.

입자 수	3	4	5	6	7	...
도형 수	1	3	10	38	149	...

표 1: Yang-Mills 이론에서 산란입자에 따른 Feynman 도형 수

그러나 이 방법을 통하여 얻게 되는 결과는 계산량에 비해 너무나 간단하다. 한 예로 글루온의 MHV(Maximally Helicity Violating) 산란 진폭은 다음과 같다.

$$\mathcal{A}_n(1^+, 2^+, \dots, i^-, \dots, j^-, \dots, n^+) = \frac{\langle i j \rangle^4}{\langle 1 2 \rangle \langle 2 3 \rangle \dots \langle n 1 \rangle} \quad (1.0.1)$$

Feynman 도형을 통한 산란 진폭의 계산과 달리 재귀적인 방법을 통하여 산란 진폭이 비교적 최근에 개발 되었고[2, 3] 이는 산란 진폭의 계산량을 획기적으로 줄여주었다. 이 방법은 먼저 실수 값을 가지는 운동량을 다음과 같은 조건을 통해 운동량을 복소화시킨다.

$$\begin{aligned} p_i \rightarrow p_i(z) &= p_i - z\zeta, & p_j \rightarrow p_j(z) &= p_j + z\zeta \\ \zeta^2 &= 0, & p_i \cdot \zeta &= p_j \cdot \zeta = 0 \end{aligned} \quad (1.0.2)$$

그리하여 다음과 같은 적분을 통해 복소화된 산란 진폭의 해석적 구조를 탐색한다.

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} \frac{dz}{z} \mathcal{A}(z) = \mathcal{A}(0) + \sum_{\text{poles}} \text{Res} \left[ \frac{\mathcal{A}(z)}{z} \right]_p \quad (1.0.3)$$

이 방법을 통하여 구하고자 하는 산란 진폭을 더 적은 입자들의 산란 진폭의 곱들로 표현하는 재귀적 방법을 통해 얻을 수 있다. 이는 산란 진폭의 계산량을 획기적으로 줄여준다. 우리가 다루고자 하는 계는 비 가환 계이지이론에서 비교적 간단한 계인 4차원  $\mathcal{N} = 4$  초대칭적 Yang-Mills 계이다. 이 계는 Yangian 불변을 가지는 거대한 대칭군을 담고 있다. 이 계에서는 운동량 초 트위스터라는 양을 통해 이론을 기술하는 것이 매우 편리하다. 이 양은 E. Witten 의 [1]에서도 입된 위치공간 트위스터와 같은 구조를 가지며 A. Hodges의 [4]에서 처음 도입됐다. 이 운동량 초 트위스터와 BCFW 재귀방법을 통해 가지 단계 산란 진폭에서부터 고리 단계 산란 진폭까지 소개할 것이다. 게이지 이론의 고리 단계 산란 진폭은 유니타리티 방법을 통해 기술되어 왔다. [5, 6] 최근에는 BCFW-재귀관계를 통해 고리 단계 산란 진폭을 이해하고자 하는 시도가 있으며, [7] positive Grassmannian이라는 도구를 통하여 산란 진폭을 이해하는 연구도 진행 중이다.[8]

이 논문에서는 BCFW-재귀관계를 통하여 게이지 이론의 산란 진폭에 대해 알아보고자 한다. 먼저 제2장에서는 기존의 비 가환 게이지 이론의

기초와 색 대수, KK, BCJ 관계식에 대해 간단히 살펴볼 것이다. 이 과정에서 앞으로의 논의 전개를 편리하게 해 주는 ‘스피너-나선도 표기법’이라는 유용한 도구에 관해 소개 할 것이다. 또한, 우리의 관심 계인  $\mathcal{N} = 4$ , 초 Yang-Mills를 간단히 알아 볼 것이다. 제3장에서는 ‘일반화된 유니타리티 방법’을 통해 고리 단계 산란 진폭을 구하는 방법에 대하여 알아 볼 것이다. 이 장에서는 1-고리 4 입자 산란 진폭에 대해 간단한 계산을 함으로써 유니타리티 방법에 대한 이해도를 높이고자 했다. 제4장에서는 BCFW-재귀방법에 대한 소개와 그 응용에 대하여 논의 할 것이다. 이 방법을 통하여 가지, 고리 단계 산란 진폭과 게이지 이론의 관계식들이 간단하게 얻어질 수 있음을 알아 볼 것이다. 또한, 이 장에서는 쌍대 초 등각 대칭과 초운 동량 트위스터라는 양을 소개하여 Yangian 대칭을 가지는 계에서의 산란 진폭을 깔끔하게 표현하는 방법 또한 소개될 것이다. 끝으로, 5장에서는 전장들에서 다루지 않은 최신 동향들에 대해 짧은 소개를 하며 논의를 마칠 것이다.

산란 진폭에 관한 연구는 최근 활발히 연구되는 주제이다. 하지만 국내에서는 아직 이 분야에 관해 연구하는 사람들이 적은 편이다. 이 논문을 통해 국내의 학생들이나 연구자들에게 이 분야를 알릴 수 있기를 희망 한다.

## 제 2 장

# 가지 단계 형식 (Tree-Level Formalism)

이 장에서는 가지 단계 산란 진폭에 대해 살펴본다. 가지 단계에서 글루온(gluon) 산란 진폭이 4차원  $\mathcal{N} = 4$  초대칭적 Yang-Mills 이론과 초대칭이 없는 순수(pure) Yang-Mills 이론에서 같은 값을 가진다는 점과 Yang-Mills 이론이 비 가환(non-abelian) 게이지 이론의 출발점이라는 점에서 Yang-Mills 이론을 먼저 살펴보고자 한다. 또한 비 가환 게이지 이론을 다룸에 있어서 유용한 표기법과 성질들에 대해 논의한 뒤  $\mathcal{N} = 4$  초 Yang-Mills 이론에 대해 알아보고 이 장을 마친다.

## 2.1 비 가환 게이지 이론 (Non-Abelian Gauge Theory)

이 절에서는 Yang-Mills 이론을 통해 비 가환(non-abelian) 게이지 이론을 알아보고자 한다. 어떤 물리 계가 있을 때, 이 계가 어떤 변환에 대해 불변이도록 계를 확장하게 되면 물리 계를 기술하는데 매우 편리해 진다. 게이지 이론은 물리 계에 이러한 ‘중복성(redundancy)’을 인가하여 이론을 쉽게 기술하고 난 뒤 이 중복성에 대한 고려를 통해 원래의 물리량을 얻는 방법이다. 이러한 방법은 전자기학의 이론에  $U(1)$  대칭성을 인가하는 데서부터 출발했다.[9] 비 가환 게이지 이론은 이  $U(1)$  대칭성을 갖는 계 대신 비 가환 군  $SU(N)$  군에 대한 대칭성을 갖는 계를 고려하며 얻게 된 이론이다. 이 때 이 계는 임의의 연속 대칭군  $G$ 에 대해 국소(local)

불변성을 가진다. 이 군은 Lie 군으로 기술되며, Lie 군  $G$ 는 다음과 같은 교환관계를 만족하는 생성원(generator)  $T^a$ 에 의해 만들어진다. 생성원  $T^a$ 는 다음과 같은 대수 구조를 가지며 이를 Lie 대수라 부른다.

$$[T^a, T^b] = if^{abc}T^c \quad (2.1.1)$$

이때  $f^{abc}$ 는 그룹  $G$ 의 구조상수라 부르며 이 상수가 0이 아닌 경우 비 가환(non-Abelian)군이라 부른다. 이 구조상수는 지표  $a, b, c$ 에 대해 반대칭(antisymmetric)구조를 가진다. 물리 계를 이 군에 대해 대칭성을 가지고 록 확장하게 되면 경로적분을 하게 되는 경우 이에 대한 중복성이 인가된다. 최종적으로 게이지 불변에 대한 중복성(redundancy)을 없애주는 게이지 고정(gauge fixing)을 하게 되면 원하는 물리량들을 얻게 된다.

### 2.1.1 Yang-Mills 이론 (Yang-Mills Theory)

전자기학을  $U(1)$  게이지 이론으로 확장하여 기술한 것처럼  $SU(N)$  군에 대해 같은 논의를 하여 얻은 이론이 Yang-Mills 이론이다. 양자장 이론에서는 Lorentz 군의 기약 표현(irreducible representation)을 통해 입자들을 분류한다. 이 분류는 입자들의 스플에 해당하는 양자수를 통한 것이다. 이러한 상황에서  $SU(N)$  게이지 군까지 추가적으로 고려하는 이론으로 확장시켜보자. 우리가 다루고자 하는 비 가환 게이지 군  $SU(N)$  군은 행렬식이 1인  $N^2 - 1$  개의 독립적인 생성자들이 존재하는 군이다. 이렇게 확장된 계에서 입자들은 다음과 같이 변환된다.

$$\phi_i(x) \rightarrow U_{ij}\phi_j(x) \quad (2.1.2)$$

여기서  $\phi_i(x)$ 는 임의의 Lorentz 군의 기약 표현으로 표현된 장이고  $U_{ij}$ 는  $N \times N$  행렬이며 미소 변환에 대해서는 다음과 같다.

$$U_{jk}(x) = \delta_{jk} - i\theta^a(x)(T^a)_{jk} + \mathcal{O}(\theta^2) \quad (2.1.3)$$

이때 아래첨자  $j, k$  는  $j, k = 1, \dots, N$ 이며, 색 지표  $a$  는  $a = 1, \dots, N^2 - 1$ 이다.  $T^a$  는 군 생성원(generator) 이라 불리며 식 (2.1.1)을 만족시킨다. 앞으로 이 논문에서는 다음과 같은 규격화를 이용할 것이다.<sup>1</sup>

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \delta^{ab} \quad (2.1.4)$$

또한 이 군은 다음과 같은 Jacobi 항등식을 만족한다.

$$f^{ade} f^{bcd} + f^{bde} f^{cad} + f^{cde} f^{abd} = 0 \quad (2.1.5)$$

이 성질은 소절2.3의 KK-관계식을 증명하는데 핵심이 되는 관계식이다. Lorentz 군과 함께  $SU(N)$  계이지 군이 이론에 포함돼있기 때문에 Lorentz 군에서 벡터들이 모두 이 이론에서 벡터가 되는 것은 아니다. 예를 들면 스칼라 장에 대한 미분 연산  $\partial_\mu \phi(x)$ 는 더이상 벡터가 아니다. 이에 대한 올바른 벡터 표현은 다음과 같이 표현된다.<sup>2</sup>

$$D_\mu \phi(x) = \partial_\mu \phi(x) - i A_\mu(x) \phi(x) \quad (2.1.6)$$

여기서  $A_\mu(x)$ 는 계이지 장이라 한다. 이는 휘어진 공간에서 미분연산자를 정의 할 때 등장하는 Christoffel 기호와 같은 구조이다.

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_{\mu\lambda}^\nu V^\lambda \quad (2.1.7)$$

식(2.1.6)은 계이지 변환에 대하여 다음과 같이 변한다.

$$D_\mu \rightarrow U(x) D_\mu U^\dagger(x) \quad (2.1.8)$$

이에 따라, 계이지 장은 다음과 같이 변환된다.

$$A_\mu(x) \rightarrow U(x) A_\mu(x) U^\dagger(x) + i U(x) \partial_\mu U^\dagger(x) \quad (2.1.9)$$

<sup>1</sup> $\tilde{f}^{abc} = \sqrt{2} f^{abc}$ ,  $\tilde{f}^{abc} \rightarrow f^{abc}$ 를 이용했다.

<sup>2</sup>표준 교과서에서는 구조상수  $g$ 를 명시적으로 표현했으나 현대적인 표기법에서는 군 구조상수  $f^{abc}$ 나 계이지 장  $A_\mu(x)$ 에 흡수된 형태로 사용한다.

이에 따른 장-세기 텐서는 다음과 같이 정의 되고<sup>3</sup>

$$F_{\mu\nu} \equiv i[D_\mu, D_\nu] \quad (2.1.10)$$

게이지 변환에 대하여 다음과 같이 변한다.

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow U(x)F_{\mu\nu}U^\dagger(x) \quad (2.1.11)$$

게이지 변환에 대하여 불변인 라그랑지안은 다음과 같이 표현 된다.

$$\mathcal{L}_{YM} = -\frac{1}{4g^2}\text{Tr}(F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}) \quad (2.1.12)$$

이 이론은 원래 이론에 이러한 중복성을 인가했기 때문에 알맞은 게이지 고정이 필요하다. 이는 Faddeev-Popov 방법을 통해 해결된다. [9] 최종적으로 비 가환 게이지 이론의 경로적분을 통해 비 가환 게이지 이론에 대한 Feynman 규칙을 얻을 수 있다. 이러한 Feynman 규칙을 주는 라그랑지안은 다음과 같다.<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{YM} &= -\frac{1}{4g^2}F^{e\mu\nu}F_{\mu\nu}^e \\ &= -\frac{1}{2}\partial^\mu A^{ev}\partial_\mu A_v^e + \frac{1}{2}\partial^\mu A^{ev}\partial_\nu A_\mu^e \\ &\quad - f^{abe}A^{a\mu}A^{bv}\partial_\mu A_v^e - \frac{1}{4}f^{abe}f^{cde}A^{a\mu}A^{bv}A_\mu^c A_\nu^d \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

이고 이를 이용하여 얻은 퍼뜨리개(propagator)는 다음과 같다.

$$\tilde{\Delta}_{\mu\nu}^{ab}(k) = \frac{\eta_{\mu\nu}}{k^2 - i\epsilon}\delta^{ab} \quad (2.1.14)$$

여기서  $R_\xi$  게이지 고정항을  $\xi = 1$ 로 선택했다. 또한 3-꼭짓점 함수(3-point vertex function), 4-꼭짓점 함수(4-point vertex function)는 다음과 같다.

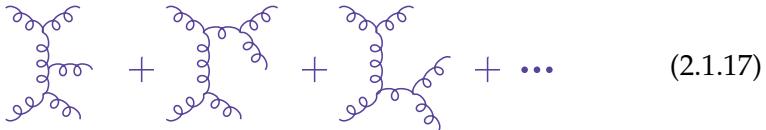
$$i\mathbf{V}_{\mu\nu\rho}^{abc} = f^{abc}[(q-r)_\mu\eta_{\nu\rho} + (r-p)_\nu\eta_{\rho\mu} + (p-q)_\rho\eta_{\mu\nu}] \quad (2.1.15)$$

<sup>3</sup>중력이론에서는 Riemann 곡률 텐서가 이와 관련된 항임을 알 수 있다.

<sup>4</sup>여기서,  $A_{\mu u} = A_{\mu u}^a T^a$ ,  $F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a$ 이다.

$$\begin{aligned}
iV_{\mu\nu\rho\sigma}^{abcd} = & -i[f^{abe}f^{cde}(\eta_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) \\
& + f^{ace}f^{dbe}(\eta_{\mu\sigma}\eta_{\rho\nu} - \eta_{\mu\nu}\eta_{\rho\sigma}) \\
& + f^{ade}f^{bce}(\eta_{\mu\nu}\eta_{\sigma\rho} - \eta_{\mu\rho}\eta_{\sigma\nu})]
\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

이런 방법을 통해 원리적으로는 산란 진폭(scattering amplitude)을 구할 수 있지만 계산할 양이 아주 많아진다. 예를 들어 5 입자 가지 단계 산란 진폭을 Feynman 도형을 통해 계산하는 경우 다음과 같은 도형들을 고려해야 한다.



이에 대한 계산의 일부는 다음과 같다.<sup>5</sup>

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

(2.1.18)

이 방법을 통해 산란 진폭을 계산하면 게이지 의존적인 개개의 Feynman 도형들을 모두 합하는 방식이며, 계산 과정 또한 복잡하다. 하지만 계산 결과는 게이지 불변적이고 계산과정에 비해 간단하게 표현된다. 이러한 과정과 결과의 차이를 줄이기 위해 여러 방법들이 개발되었고, 앞으로 다루고자 하는 BCFW-재귀관계 또한 이러한 방법의 하나이며 아주 효율적인 도구로 알려져 있다.

<sup>5</sup>이 자료는 Z.Bern 의 2005년 Oxford Twistor Strings Conference 자료에서 발췌했다. <http://people.maths.ox.ac.uk/lmason/Tws/Bern.pdf>

### 2.1.2 색 대수 (Color Algebra)

이 소절에서는 Yang-Mills 이론에서 ‘색 대수’(color algebra)를 살펴볼 것이다. 임의의  $n$  입자 글루온 산란 진폭은 3,4-꼭짓점 함수를 통해 결정된다. 하지만 색 대수를 이용하면 이러한 임의의  $n$  입자 산란 진폭이 3-꼭짓점 함수만으로 표현된다. 또한 산란 진폭은  $SU(N)$  게이지 군(gauge group)의 구조상수  $f^{abc}$ 와 운동량과 편광 벡터로 이뤄진 운동학적 정보를 가지는 ‘부분 산란 진폭’ (partial amplitude)으로 분리된다. 여기서 군 구조상수의 정렬된 지수마다 부분 산란 진폭을 대응시켜 산란 진폭을 표현하면, 군 구조상수는 색 벡터공간(color vector space)에서의 기저(basis)로 다룰 수 있다. 이 기저의 성분(component)에 해당되는 부분 산란 진폭을 ‘색 정렬된’ (color ordered) 부분 산란 진폭이라 부른다. 따라서 모든 색 정렬된 부분 산란 진폭을 구하면 우리가 원하는 산란 진폭을 구하게 되므로 앞으로의 논의에서는 이 ‘색 정렬된 부분 산란 진폭’에 대해 다룬다. 오해의 소지가 없는 범위 내에서 이 ‘색 정렬된 부분 산란 진폭’을 산란 진폭으로 표기한다.  $SU(N)$  게이지 이론에서 게이지 장은 이 군의 수반(adjoint) 표현으로 나타낼 수 있고 수반지표  $a = 1, 2, 3, \dots, N^2 - 1$ 를 사용한다. 이 군의 생성자는  $N \times N$  Hermitian 기본 행렬  $(T^a)_i^j$ 로 표현된다. 여기서 아래 첨자를 기본(fundamental), 위 첨자를 반-기본(anti-fundamental) 표현으로 사용한다.<sup>6</sup> 이 소절에서는 군의 구조상수  $f^{abc}$ 가 생성자들의 곱들의 대각합(trace)로 표현됨을 적극적으로 활용할 것이다. 이에 따른 군의 구조상수  $f^{abc}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$f^{abc} = -i\text{Tr}[[T^a, T^b], T^c] \quad (2.1.19)$$

글루온(gluon) 산란 진폭 중 가장 간단한 예는 세 개의 글루온 산란 진폭이다. 이는 3-꼭짓점 함수(3-point vertex function)을 통해 얻을 수 있다.

---

<sup>6</sup>이런 구분을 통해 앞으로는 반-기본 표현의  $j$ 에서 막대를 생략한다.

3-꼭짓점 함수(3-point vertex function)는 다음과 같다.

$$iV_{\mu\nu\rho}^{abc} = f^{abc}[(q-r)_\mu\eta_{\nu\rho} + (r-p)_\nu\eta_{\rho\mu} + (p-q)_\rho\eta_{\mu\nu}] \quad (2.1.20)$$

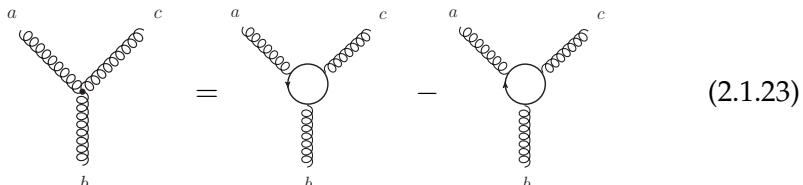
여기서 각 게이지 보존들의 편광(polarization)벡터를 내적하고 가능한 모든 색 지표(color index)들에 대한 합을 통해 산란 진폭을 얻을 수 있다. 산란 진폭은 일반적으로 위의 꼭짓점 함수들의 곱으로 표현된다. 따라서 산란 진폭의 군의 정보는 구조상수  $f^{abc}$ 가 담고 있고 나머지 항은 입자의 운동학적 정보를 담고 있다는 점을 알 수 있다. 이러한 정보들이 산란 진폭에 어떻게 등장하는지 살펴보도록 하자. 식 (2.1.19)를 이용하여 3-꼭짓점 함수를 다시 표현해보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} iV_{\mu\nu\rho}^{abc} &= (\text{Tr}(T^a T^b T^c) - \text{Tr}(T^b T^a T^c))[(q-r)_\mu\eta_{\nu\rho} + (r-p)_\nu\eta_{\rho\mu} + (p-q)_\rho\eta_{\mu\nu}] \\ &\quad (2.1.21) \end{aligned}$$

기본/반기본 표현에서 임의의 벡터장(vector field)  $A_\mu$ 는 다음과 같이 나타내진다.

$$(A_\mu)_i^j = A_\mu^a (T^a)_i^j \quad (2.1.22)$$

이 표현에서는  $\text{Tr}(T^a T^b T^c) = (T^a)_i^j (T^b)_j^k (T^c)_k^i$ 로 나타내진다. 이를 이용하면 위의 3-꼭짓점 함수를 다음과 같이 나타낼 수 있다.



이 도식은 다음과 같은 과정을 통해 그려진다. 생성원  $T^a$ 는 다음과 같은 유용한 항등식을 만족한다.

$$(T^a)_i^j (T^a)_k^l = \delta_i^l \delta_k^j \quad (2.1.24)$$

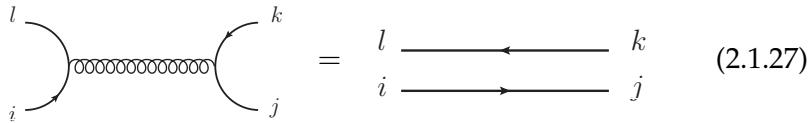
이 항등식은 Fierz 항등식이라 불린다. 전 소절에서 본 Yang-Mills 계의 퍼뜨리개를 이 표현을 통해 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{(T^a)_i^j(T^a)_k^l}{k^2 - i\epsilon} \quad (2.1.25)$$

군의 생성원  $T^a$ 는 완비 집합(complete set)을 이루기 때문에 완비성 관계를 이룬다는 사실을 알 수 있고 이는 위에서 언급한 Fierz 항등식으로 나타내어진다. 이를 통해 퍼뜨리개를 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\tilde{\Delta}_i^{j,l}(k^2) = \frac{\delta_i^l \delta_k^j}{k^2 - i\epsilon} \quad (2.1.26)$$

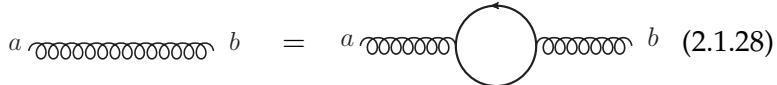
이 표현을 통해 Feynman 도형을 기본/반기본 표현을 통해 나타내면 다음과 같은 등식에서 좌변의 도식을 우변의 도식처럼 간단하게 나타낼 수 있다. 이런 표기법(notation)을 이중선 표기법(double line notation)이라고 한다.



The diagram shows a loop with two external legs. The top-left leg is labeled  $i$  and  $l$ , and the bottom-left leg is labeled  $j$ . The right side of the loop is labeled  $k$ . This is followed by an equals sign. To the right of the equals sign is a horizontal double line with four labels:  $l$  at the top left,  $i$  at the bottom left,  $k$  at the top right, and  $j$  at the bottom right. Arrows on the double line point from left to right. The entire equation is labeled (2.1.27).

$$= \quad l \xrightarrow[i]{\quad} k \quad j \quad (2.1.27)$$

이 표기법에 의하면  $\text{Tr}(T^a T^b) \rightarrow (T^a)_i^j (T^b)_j^i$ 는 다음과 같이 표현된다.



The diagram shows a horizontal sequence of symbols:  $a$ , a wavy line,  $b$ , an equals sign,  $a$ , a wavy line, a circle with a clockwise arrow, another wavy line, and  $b$ . The circle is positioned between the two wavy lines. The entire equation is labeled (2.1.28).

$$= \quad a \text{~~~~~} b \quad (2.1.28)$$

생성자의 대각합(trace)이 0인 사실은 다음과 같은 도형을 통해 표현된다.



The diagram shows a horizontal sequence of symbols:  $a$ , a wavy line, a circle with a clockwise arrow, and an equals sign followed by the number 0. The entire equation is labeled (2.1.29).

$$= 0 \quad (2.1.29)$$

또한  $\delta_i^j$ 의 대각합은 다음과 같이 나타낸다.



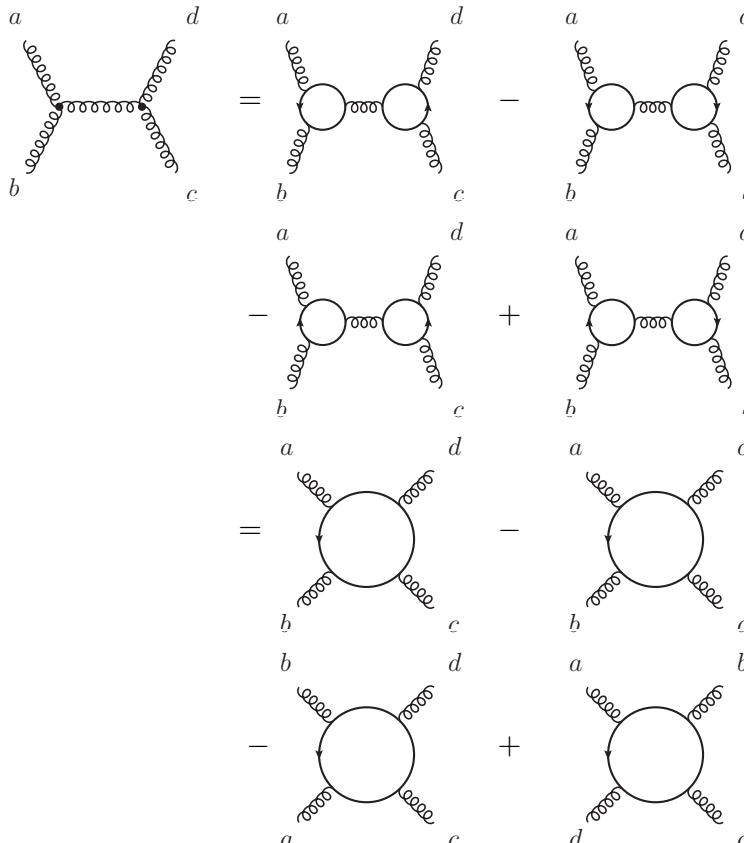
The diagram shows a horizontal sequence of symbols: a circle with a clockwise arrow, an equals sign, and the letter  $N$ . The entire equation is labeled (2.1.30).

$$= N \quad (2.1.30)$$

이를 이용하면 3개의 글루온 산란 진폭  $A_3$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$A_3 = \sum_{\sigma_i \in S_3 / \mathbb{Z}_3} \text{Tr}(T^{a_{\sigma_1}} T^{a_{\sigma_2}} T^{a_{\sigma_3}}) \mathcal{A}_3(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \quad (2.1.31)$$

여기서 대각합의 대칭성으로 인해  $\sigma_i$ 는 비순환(non-cyclic) 순열들의 집합  $S_3 / \mathbb{Z}_3$ 에 속하게 된다. 그리고  $\mathcal{A}_3$ 은 이렇게 주어진 순열들에 대하여 색 정렬된 입자들의 운동학적(kinematic)정보가 담긴 항이다. 같은 방법으로 4개의 글루온 산란에 대한 도형을 생각해 보자. 이 경우 위의 표현을 이용하면 색 정렬된 도형은 다음과 같이 표현된다.



(2.1.32)

위의 도식을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$A_4 = \sum_{\sigma_i \in S_4 / \mathbb{Z}_4} \text{Tr}(T^{a_{\sigma_1}} T^{a_{\sigma_2}} T^{a_{\sigma_3}} T^{a_{\sigma_4}}) \mathcal{A}_4(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4) \quad (2.1.33)$$

위의 논의를 통해 임의의  $n$  입자 산란 진폭은 다음과 같이 표현된다.

$$(2.1.34)$$

임의의  $n$  입자 가지 단계 산란 진폭은 각 꼭짓점들마다 3-꼭짓점 함수들로 이뤄져 있다. 따라서 산란 진폭의 다음과 같이 표현된다.

$$A_n^{tree} = \sum_{\sigma_i \in S_n / Z_n} \text{Tr}(T^{a_{\sigma_1}} T^{a_{\sigma_2}} \dots T^{a_{\sigma_n}}) \mathcal{A}_n^{tree}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \quad (2.1.35)$$

여기서  $\mathcal{A}_n^{tree}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  항은 색 정렬된  $n$  입자 가지 단계 부분 산란 진폭이다. 가장 간단한 부분 산란 진폭  $\mathcal{A}_3$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3(1, 2, 3) \\ = -\sqrt{2} [(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2)(\epsilon_3 \cdot p_1) + (\epsilon_2 \cdot \epsilon_3)(\epsilon_1 \cdot p_2) + (\epsilon_3 \cdot \epsilon_1)(\epsilon_2 \cdot p_3)] \end{aligned} \quad (2.1.36)$$

다음 절에서는 스피너-나선도(spinor-helicity) 표기법을 통해 위의 식을 보다 간편하게 나타내는 방법을 알아 볼 것이다.

## 2.2 스피너-나선도 표기법 (Spinor-Helicity Formalism)

질량이 없는 글루온(massless gluon) 간의 산란 진폭을 계산할 때, 기존의 Feynman 규칙을 통해 산란 진폭을 계산하면 계산할 식들이 많을 뿐만 아니라 계산하는 항들이 많아짐에 따라 내적된 벡터들의 4-벡터 표기법 또한 계산의 복잡성을 준다. 이 절에서는 이러한 어려움을 줄이기 위해 ‘스피너-나선도’(spinor-helicity) 표기법을 통해 운동량과 편광 벡터를 표현하고자 한다. 4차원 Minkowski 공간에서 정의된 물리량들은 Lorentz 대칭성을 갖고 있다. 군론적으로는 우리의 계가  $SO(1, 3)$ 군에 대해 대칭성을 갖고 있다고 말한다. 유클리드 공간에서 비 상대론적(non-relativistic) 계의 회전 대칭성은  $SO(3)$  대칭군을 통해 표현된다. 스피너를 고려하는 경우 계의 대칭군은  $SU(2)$  대칭군으로 확장시킬 수 있음을 잘 알고 있다. 일반적으로는  $SO(N)$  군은 이중 덮개(double cover)  $Spin(N)$  군을 가진 사실이 수학적으로 잘 알려져 있다. 따라서  $SO(1, 3)$  군 또한 이중 덮개(double cover)를 갖고 있고 이는  $SL(2, \mathbb{C})$  군이다.  $SL(2, \mathbb{C})$  군은  $2 \times 2$  행렬로 이루어져 있으며 행렬식(determinant)이 1인 복소수들로 이루어진 행렬이다. 이 군의 원소를  $M$ 이라 할 때 ( $M \in SL(2, \mathbb{C})$ )  $M^*, (M^T)^{-1}, (M^+)^{-1}$  모두  $SL(2, \mathbb{C})$ 를 표현한다. 이 군의 원소들에 의해 변환되는 양들은  $\lambda_a, \tilde{\lambda}_{\dot{a}}$ 와 같은 양들이며, 이 표현들은 2개의 성분을 가지는  $2 \times 1$  행렬이다. Weyl 스피너는 행렬  $M$ 에 대해 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} \lambda'_a &= M_a{}^b \lambda_b, & \tilde{\lambda}_{\dot{a}} &= M^*{}_{\dot{a}}{}^{\dot{b}} \tilde{\lambda}_{\dot{b}} \\ \lambda'^a &= M^{-1}{}_b{}^a \lambda^b, & \tilde{\lambda}^{\dot{a}} &= (M^*)^{-1}{}_{\dot{b}}{}^{\dot{a}} \tilde{\lambda}^{\dot{b}} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

여기서 첨자  $a, \dot{a}$ 는  $a = 1, 2, \dot{a} = 1, 2$ 이다. 또한  $\lambda$  와  $\tilde{\lambda}$ 는 스피너  $\frac{1}{2}$ 인 대상이다. 이들은 왼손 잡이(left-handed), 오른손 잡이(right-handed) Weyl 스피너로 분류되고 이들을 각각  $\lambda$ 는  $(\frac{1}{2}, 0)$ ,  $\tilde{\lambda}$ 는  $(0, \frac{1}{2})$ 로 표현한다. 또한

$SL(2, \mathbb{C})$ 의 원소들은 행렬식이 1 이기 때문에 다음과 같은 반대칭(anti-symmetric) 불변텐서가 존재한다.

$$\epsilon'_{ab} = M_a{}^c M_b{}^d \epsilon_{cd} = \det(M) \epsilon_{ab} = \epsilon_{ab} \quad (2.2.2)$$

$$\epsilon'^{ab} = \epsilon^{cd} M_c{}^a M_d{}^b = \det(M) \epsilon^{ab} = \epsilon^{ab} \quad (2.2.3)$$

위 첨자와 아래 첨자를 가진 스피너들은 반대칭텐서인  $\epsilon$ -텐서를 통해 다음과 같은 올림(raising), 내림(lowering)-관계를 얻는다.

$$\lambda^a = \epsilon^{ab} \lambda_b, \quad \lambda_a = \epsilon_{ab} \lambda^b \quad (2.2.4)$$

여기서  $\epsilon^{12} = \epsilon_{21} = 1$ 이다. 점 첨자  $a$ 에 대한 식 또한 위와 같은 방식으로 정의된다. 이를 통해  $SL(2, \mathbb{C})$  변환에 대하여 불변인 스칼라들이 다음과 같이 정의된다.

$$[ij] \equiv \lambda_i^a \lambda_j a = \epsilon_{ab} \lambda_i^a \lambda_j^b \quad (2.2.5)$$

$$\langle ij \rangle \equiv \tilde{\lambda}_{ia} \tilde{\lambda}_j^a = \epsilon^{ab} \tilde{\lambda}_{ia} \tilde{\lambda}_{jb} \quad (2.2.6)$$

이와 함께 4-벡터들을  $SL(2, \mathbb{C})$ 에서 표현할 수 있도록 Clebsh-Gordan 계수의 역할을 하는 Pauli 행렬  $\sigma_{aa}^\mu$ 이 존재한다.

$$\sigma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \sigma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (2.2.7)$$

위의 불변텐서와 파울리 행렬을 이용하면 다음과 같은 유용한 식을 얻을 수 있다.

$$(\bar{\sigma}^\mu)^{aa} \equiv \epsilon^{ab} \epsilon^{ab} (\sigma^\mu)_{bb} \quad (2.2.8)$$

산란 진폭은 모두 운동량과 편광 벡터로 표현된다. 이 양들은 모두  $SL(2, \mathbb{C})$  군의 표현을 통해 표현 가능하다. 이를 통해 운동량 벡터의 표현을 얻기 위해 다음을 살펴보자.

Dirac 방정식은 Klein-Gordon 방정식 또한 만족한다. 따라서 Dirac 방정식의 해는 평면파(plain wave)로 전개가 가능하며, 네 개의 해가 존재한다. 이 해들은 다음과 같은 관계를 만족한다.

$$\not{p}u(p) = 0 \quad \text{그리고}, \quad -\not{p}v(p) = 0 \quad (2.2.9)$$

이때  $\not{p} = \gamma^\mu p_\mu$ 이고,  $\gamma^\mu$  행렬은 다음과 같은 Clifford 대수를 만족한다.<sup>7</sup>

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}\mathbb{I}_{n \times n} \quad (2.2.10)$$

이 행렬을 통해 다음과 같은 양을 정의하자.

$$S_{\mu\nu} \equiv \frac{i}{4}[\gamma^\mu, \gamma^\nu] \quad (2.2.11)$$

그러면  $S_{\mu\nu}$ 는 다음과 같은  $SO(1, 3)$  Lie 대수를 따른다.

$$[S^{\mu\nu}, S^{\rho\sigma}] = i(\eta^{\mu\rho}S^{\nu\sigma} - \eta^{\nu\rho}S^{\mu\sigma} - \eta^{\mu\sigma}S^{\nu\rho} + \eta^{\nu\sigma}S^{\mu\rho}) \quad (2.2.12)$$

또한 Clifford 대수에서 다음과 같은 양이 존재하여,

$$\gamma^5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 \quad (2.2.13)$$

아래 같은 성질을 만족한다.

$$\{\gamma^5, \gamma^\mu\} = 0 \quad (\gamma^5)^2 = 1 \quad (2.2.14)$$

이를 통해 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

$$[\gamma^5, S^{\mu\nu}] = 0 \quad (2.2.15)$$

식 (2.2.14)의 오른쪽 식을 통해 다음과 같은 사영(projection) 연산자를 정의할 수 있다.

$$P_\pm \equiv \frac{1 \pm \gamma^5}{2} \quad (2.2.16)$$

---

<sup>7</sup> $n$  은 4 이상의 짝수인 경우에 한하여 정의된다.

또한, 식 (2.2.15)를 통해  $S^{\mu\nu}$  와  $\gamma^5$ 가 동시 고유 벡터(simultaneous eigen vector)를 가지는 것을 알 수 있고, 이 때문에 사영 연산자의 고유값(eigenvalue)을 기준으로  $S^{\mu\nu}$  을 두  $2 \times 2$  행렬의 직합(direct sum)으로 표현할 수 있다. 이를 이용해 적절한 기저(basis)를 선택하면  $SL(2, \mathbb{C})$  를 통해 위의 양들을 표현할 수 있다. 예를 들어  $\gamma$ -행렬을 다음과 같이 찾을 수 있다.<sup>8</sup>

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{a\dot{a}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu\dot{a}a} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.17)$$

따라서 Dirac 방정식에 등장하는  $\not{p}$  또한  $SL(2, \mathbb{C})$ 로 표현할 수 있다.<sup>9</sup>

$$\not{p} = \begin{pmatrix} 0 & p_{a\dot{a}} \\ p^{\dot{a}a} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.18)$$

이때 4-벡터  $p_\mu$  와  $p_{a\dot{a}}$ ,  $p^{\dot{a}a}$  는 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$p_{a\dot{a}} = p_\mu (\sigma^\mu)_{a\dot{a}}, \quad p^{\dot{a}a} = p_\mu (\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{a}a} \quad (2.2.19)$$

이에 따라 Dirac 방정식은 다음과 같이 표현된다.

$$p_{a\dot{a}} \tilde{\lambda}^{\dot{a}} = 0, \quad p^{\dot{a}a} \lambda_a = 0 \quad (2.2.20)$$

질량 없는 Dirac 방정식의 해들은 사영연산자를 통해 ±나선도(helicity)를 가진 두 부류의 해들로 분리가 가능하고 이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} u_\pm(p) &= \frac{1 \pm \gamma_5}{2} u(p), & v_\mp(p) &= \frac{1 \pm \gamma_5}{2} v(p), \\ \bar{u}_\pm(p) &= \bar{u}(p) \frac{1 \mp \gamma_5}{2}, & \bar{v}_\mp(p) &= \bar{v}(p) \frac{1 \pm \gamma_5}{2} \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

이들은 나선도(helicity) 고유 상태(eigenstate)이다. 이들은 앞서 정의된  $SL(2, \mathbb{C})$ 의 양으로 다시 표현할 수 있다.

---

<sup>8</sup> 이를 통해  $SL(2, \mathbb{C})$  가  $SO(1, 3)$ 의 이중 덮개 군인 사실을 볼 수 있다.

<sup>9</sup> 일반적으로 임의의 벡터 또한 이 표현을 통해 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} |i\rangle = v_-(p_i) &= \begin{pmatrix} 0 \\ |p_i\rangle_{\dot{a}} \end{pmatrix} & |i] = v_+(p_i) &= \begin{pmatrix} |p_i]_a \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.2.22) \\ \langle i| = \bar{u}_-(p_i) &= \begin{pmatrix} 0 & \langle p_i|_{\dot{a}} \end{pmatrix} & [i] = \bar{u}_+(p_i) &= \begin{pmatrix} [p_i]^a & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

여기서 산란 진폭의 모든 입자들을 나가는(out-going) 입자들로 설정하였다.<sup>10</sup>  $SL(2, \mathbb{C})$ 에서 정의한  $\lambda$ -스피너들과 위의 식에서 표현한 각진 팔호  $| \rangle$  와 사각 팔호  $| ]$ 들의 관계는 다음과 같다.

$$\lambda_{ia} \rightarrow |i]_a, \quad \tilde{\lambda}_{i\dot{a}} \rightarrow \langle i|_{\dot{a}} \quad (2.2.23)$$

이를 통해 Dirac 방정식을 다시 써보면 다음과 같다.

$$p^{\dot{a}a}|p]_a = 0, \quad p_{a\dot{a}}|p\rangle^{\dot{a}} = 0, \quad [P]^a p_{a\dot{a}} = 0, \quad \langle p|_{\dot{a}} p^{\dot{a}a} = 0 \quad (2.2.24)$$

$p_\mu p^\mu = 0$  는  $SL(2, \mathbb{C})$ 에서  $\det(p) = 0$ 로 표현된다. 이에 따라 운동량은 두 스피너의 곱으로 표현가능하다. 이와 함께 스피너의 완전성(completeness)관계를 이용하면 운동량 벡터는 다음과 같은  $SL(2, \mathbb{C})$  양-스피너(bispinor)로 표현된다.

$$-\not{p} = |p\rangle[p] + |p]\langle p| \quad (2.2.25)$$

이를 이용하면 다음과 같은 유용한 표현을 얻는다.

$$\bar{u}_+(p_i)\not{p}_j u_+(p_l) \equiv [i|\not{p}_j|l\rangle, \quad \bar{u}_+(p_i)\not{p}_j\not{p}_m u_-(p_l) \equiv [i|\not{p}_j\not{p}_m|l\rangle \quad (2.2.26)$$

스피너들은 다음과 같은 성질들을 갖고 있다.

• 반대칭성 :

$$\langle ij\rangle = -\langle ji\rangle, \quad [ij] = -[ji] \quad (2.2.27)$$

---

<sup>10</sup> 이로 인해,  $u_\pm, \bar{v}_\pm$ 은 등장하지 않는다.

• **Schouten 항등식 :**

$$\langle i|j\rangle\langle k|l\rangle + \langle i|k\rangle\langle l|j\rangle + \langle i|l\rangle\langle j|k\rangle = 0 \quad (2.2.28)$$

• 전하 결레짓기(charge conjugation) :

$$\langle q|\gamma^\mu|p\rangle = [p|\gamma^\mu|q\rangle \quad (2.2.29)$$

• **Fierz 재배열 :**

$$[i|\gamma^\mu|j\rangle[k|\gamma_\mu|l\rangle = 2[i|k\rangle\langle l|j\rangle \quad (2.2.30)$$

위의 식들을 이용하면 다음을 얻는다.<sup>11</sup>

$$\langle i|j\rangle[j|i] = -\langle i|\not{p}_j|i\rangle = -2p_i \cdot p_j = -(p_i + p_j)^2 \equiv s_{ij} \quad (2.2.31)$$

이렇게 얻은 식을 통해 다음의 항등식을 얻는다.

• **Gordon 항등식 :**

$$\langle i|\gamma^\mu|i\rangle = [i|\gamma^\mu|i\rangle = 2p_i^\mu \quad (2.2.32)$$

산란 진폭은 운동량과 편광(polarization) 벡터들로 이루어져 있다. 때문에 위에서 얻은 운동량의 스피너 표현과 함께 편광 벡터의 스피너 표현을 얻으면 산란 진폭을 스피너를 통해 나타낼 수 있다. 편광 벡터는 다음과 같은 식을 만족한다.

$$\epsilon_\pm(p) \cdot p = 0, \quad \epsilon_\pm^2 = 0, \quad \epsilon_\pm \cdot q = 0 \quad (2.2.33)$$

편광 벡터의 크기 또한 0이므로 편광 벡터 또한 두 스피너들의 곱으로 표현할 수 있다. 또한, 편광 벡터는 운동량 벡터와 수직이므로 운동량에 대한 정보를 갖고 있어야 한다. 이에 따라 편광 벡터를 4-벡터로 표현하면 다음과 같다.

$$\epsilon_-^\mu(p; q) = -\frac{\langle p|\gamma^\mu|q\rangle}{\sqrt{2}[qp]}, \quad \epsilon_+^\mu(p; q) = -\frac{\langle q|\gamma^\mu|p\rangle}{\sqrt{2}\langle qp\rangle} \quad (2.2.34)$$

---

<sup>11</sup> $s_{ij}$ 는 Mandelstam 변수이다.

이를  $SL(2, \mathbb{C})$  를 통해 나타내면 다음과 같다.

$$\epsilon_{a\dot{a}}^+ = \frac{\sqrt{2}}{\langle qp \rangle} |p]_a \langle q|_{\dot{a}}, \quad \epsilon_{a\dot{a}}^- = \frac{\sqrt{2}}{[qp]} |q]_a \langle p|_{\dot{a}} \quad (2.2.35)$$

이때  $q$ 는 임의의 값을 가진다. 이러한  $q$ 의 임의성은 게이지 불변성에 의해 나타나는 성질이다. 위의 편광 벡터에서  $q$ 에 대한 변분을 하면 편광 벡터는  $p_{a\dot{a}}$ 에 비례하는 양만큼 변한다. 이는 Ward 항등식을 통해  $\delta q$ 가 산란 진폭에 기여하지 않음을 알 수 있다. 따라서 산란 진폭은 운동량과 관련된 스피너를 통해 표현된다.

이제 스피너-나선도 표기법을 통해 가지 단계 세 글루온 산란 진폭을 구해보자. 이 산란 진폭은 BCFW-재귀관계 증명의 구성 요소가 된다. 운동량이 실수(real)인 경우에는 어떠한 나선도 배열이든 세 글루온 산란 진폭이 0이다. 이는 다음과 같은 운동량 보존을 통해 알 수 있다.

$$p_1 + p_2 + p_3 = 0 \quad (2.2.36)$$

세 입자 모두 질량이 0이므로  $p_1^2 = p_2^2 = p_3^2 = 0$ 이다. 이와 함께 운동량 보존을 이용하면 다음을 얻는다.

$$p_3^2 = (p_1 + p_2)^2 = 2p_1 \cdot p_2 = 0 \quad (2.2.37)$$

이는 세 운동량이 평행함을 암시하고 다음과 같이 나타낸다.

$$p_1 \sim p_2 \sim p_3 \quad (2.2.38)$$

이로 인해 산란 진폭이 0이 됨을 알 수 있다. 또한 운동량이 실수임을 통해

$$2p_i \cdot p_j = \langle ij \rangle [ij] = 0 \quad (2.2.39)$$

에서  $(\langle ij \rangle)^* = [ij]$  를 얻는다. 이는 다음과 같은 식이 각각 0임을 알 수 있다.

$$\langle ij \rangle = \pm \sqrt{s_{ij}} e^{i\phi_{ij}}, \quad [ij] = \pm \sqrt{s_{ij}} e^{-i\phi_{ij}} \quad (2.2.40)$$

하지만 운동량을 복소수로 가정하면 식 (2.2.39)에서  $|i] \sim |j]$  또는  $|i\rangle \sim |j\rangle$  이 되도록 선택할 수 있기 때문에  $p_i \cdot p_j = 0$  이 되게 하면서  $[ij]$  또는  $\langle ij\rangle$  값이 0이 되지 않도록 정할 수 있고, 이에 따라  $\mathcal{A}_3 \neq 0$  을 얻는다. BCFW-재귀관계식에서 세 글루온 산란 진폭이 증명의 구성 요소이기 때문에 이에 대한 표현을 얻는 것은 중요하다. 여기서  $|i]$  스피너들이 각각 비례하도록 선택하면 두 개의 글루온의 나선도(helicity)가 -1이고 하나의 글루온의 나선도가 +1인  $\mathcal{A}_3(1^-, 2^-, 3^+)$ 에 대해 얻게 된다. 편의상 1, 2번 글루온의 나선도를 -1로 두었다. 이에 따른 산란 진폭은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_3(1^-, 2^-, 3^+) \\ &= -\sqrt{2} [(\epsilon_1^- \cdot \epsilon_2^-)(\epsilon_3^+ \cdot p_1) + (\epsilon_2^- \cdot \epsilon_3^+)(\epsilon_1^- \cdot p_2) + (\epsilon_3^+ \cdot \epsilon_1^-)(\epsilon_2^- \cdot p_3)] \end{aligned} \quad (2.2.41)$$

편광 벡터에서  $q_i$ 는 임의의 값을 가질 수 있고, 편의상  $q_1 = q_2, k_3 = p_1$  으로 두면 세 글루온 산란 진폭을 다음과 같이 간단히 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_3(1^-, 2^-, 3^+) &= -\sqrt{2}(\epsilon_2^- \cdot \epsilon_3^+)(\epsilon_1^- \cdot p_2) \\ &= \frac{[k_1 3]\langle 1 2\rangle[k_1 2]\langle 2 1\rangle}{[k_1 2]\langle 1 3\rangle[k_1 1]} = \frac{\langle 1 2\rangle^4}{\langle 1 2\rangle\langle 2 3\rangle\langle 3 1\rangle} \end{aligned} \quad (2.2.42)$$

이는 세 개의 입자에 대한 MHV(Maximally Helicity Violating) 산란 진폭이다.<sup>12</sup> 일반적인  $n$  입자 MHV 산란 진폭은 다음과 같다.

$$\mathcal{A}_n(1^+, 2^+, \dots, i^-, \dots, j^-, \dots, n^+) = \frac{\langle i j\rangle^4}{\langle 1 2\rangle\langle 2 3\rangle \cdots \langle n 1\rangle} \quad (2.2.43)$$

이를 Parke-Taylor가 처음 주장했고 [10] Berends 과 Giele에 의해 증명됐다.[11] 제4장에서는 이를 기본으로 임의의 가지 단계 산란 진폭을 구하는 BCFW-재귀관계에 대해 알아볼 것이다.

---

<sup>12</sup>임의의  $n$  개의 입자 산란 진폭에서 두 개의 음의 나선도를 가진 입자를 제외하면 모두 양의 나선도를 가진 입자로 구성된 산란 진폭을 MHV 산란 진폭이라 부른다.

## 2.3 KK & BCJ 관계식

### 2.3.1 Kleiss-Kuijf 관계식

이 소절에서는 Kleiss-Kuijf 관계식 (KK-관계식)을 알아보고자 한다.

산란 진폭은 식 (2.1.35) 처럼  $(n - 1)!$  개의 독립적인 생성자들의 곱의 대각합(trace)을 기저로 표현할 수 있지만 산란 진폭을 군 구조상수  $f^{abc}$  를 기저로 표현하는 경우 Jacobi 항등식을 통해 독립적인 기저의 개수가  $(n - 2)!$  로 줄어든다. 따라서 생성자들의 곱의 대각합으로 나타나는 기저들도  $(n - 2)!$  개의 독립적인 기저가 존재하고 이에 따른 선형 종속 관계식이 존재한다. 이 관계식이 KK-관계식이다.[12] KK-관계식은 색반전 관계식과 U(1)-짜풀림 관계식의 일반화된 형태이다.<sup>13</sup> KK-관계식은 다음과 같다.

$$\mathcal{A}_n(1, \{\alpha\}, n, \{\beta\}) = (-1)^{n_\beta} \sum_{\sigma \in \text{OP}(\{\alpha\}, \{\beta^T\})} \mathcal{A}_n(1, \sigma, n) \quad (2.3.1)$$

이 식에서의 합은 집합  $\alpha \cup \beta^T$ 들의 모든 정렬된 순열들의 합이다. 특히 이 집합은  $\alpha$ 와  $\beta^T$ 의 상대적인 순서는 보존되도록 정렬된 집합이라는 의미로 OP(order preserved)라는 수식어가 붙었다.  $\beta^T$ 는 집합  $\beta$ 의 역순으로 정렬된 집합이다. 또한  $n_\beta$ 는 집합  $\{\beta\}$ 의 원소의 개수이고 이 집합이 공집합인 경우는 KK-관계식은  $\mathcal{A} = \mathcal{A}$ 인 항등식이 된다. 예를 들어  $\mathcal{A}_6(1, 2, 3, 6, 4, 5)$ 의 KK-관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_6(1, 2, 3, 6, 4, 5) &= \mathcal{A}_6(1, 2, 3, 5, 4, 6) + \mathcal{A}_6(1, 2, 5, 3, 4, 6) \\ &\quad + \mathcal{A}_6(1, 2, 5, 4, 3, 6) + \mathcal{A}_6(1, 5, 4, 2, 3, 6) \quad (2.3.2) \\ &\quad + \mathcal{A}_6(1, 5, 2, 4, 3, 6) + \mathcal{A}_6(1, 5, 2, 3, 4, 6) \end{aligned}$$

이 예에서  $\{\alpha\} = \{2, 3\}$ ,  $\{\beta\}^T = \{5, 4\}$ 의 순서가 보존되는 것이 명확히 보인다. 이제 일반적인 KK-관계식이 식 (2.3.1) 와 같음을 증명하자.

---

<sup>13</sup>이는 제4장에서 BCFW-재귀관계와 KK & BCJ 관계식에서 확인 할 것이다.

소절 2.1.2에서 색 대수를 통해 산란 진폭이 군론적 정보와 운동학적 정보로 나뉘는 성질을 알아 보았다. 이는 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$A_{\text{tot}} = \sum_J C_J A_J \quad (2.3.3)$$

이때  $C_J$ 는 군론적 정보를 담고 있고  $A_J$ 는 부분 산란 진폭인 운동학적 정보를 담고 있다. 그런데 이  $C_J$ 는 생성자들의 곱의 대각합(trace)으로 표현할 수도 있고 군의 구조상수를 통해 표현할 수도 있다. 각각의 경우 완비성(completeness)관계를 알 수 있기 때문에 이 두 경우 모두 선형 벡터공간을 만든다. 이에 따라 각각의 기저들의 변환에 대한 선형독립성을 확인할 수 있다. KK-관계식은 이 두 기저 간의 선형 종속성으로부터 얻을 수 있다. 색 정렬된 부분 산란 진폭과 그에 대한 군 구조상수 기저들은 모두 입자들의 정렬이 같기 때문에 군 구조상수와 완비성에 관련된 항을 다음과 같은 Feynman 도형을 통해 표현이 가능하다.

$$\begin{array}{ccc} \text{Diagram: two horizontal lines } a \text{ and } b \text{ meeting at a vertex} & = & \delta^{ab}, \\ & & \text{Diagram: horizontal line } a \text{ meeting a vertex, which splits into } b \text{ and } c & = & f^{abc} \end{array} \quad (2.3.4)$$

여기서 도식은 다음의 식들과 관계된다.

$$\text{Tr}(T^a T^b) = \delta^{ab}, \quad [T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (2.3.5)$$

이에 대한 Jacobi 항등식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} [[T^a, T^b], T^c] + [[T^c, T^a], T^b] + [[T^b, T^c], T^a] &= 0 \\ \rightarrow f^{bxd} f^{cax} - f^{bcx} f^{xad} &= f^{bax} f^{xcd} \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

이 항등식을 위에서 정한 도식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{array}{ccccc} \text{Diagram: } b \text{ (bottom), } c \text{ (top-left), } a \text{ (top-right), } d \text{ (bottom-right)} & = & \text{Diagram: } b \text{ (bottom), } c \text{ (top), } a \text{ (middle), } d \text{ (bottom-right)} & - & \text{Diagram: } b \text{ (bottom), } a \text{ (top), } c \text{ (middle), } d \text{ (bottom-right)} \end{array} \quad (2.3.7)$$

이를 이용하면 모든 가지 단계 산란 진폭은 3-꼭짓점 함수들로 구성됨을 알 수 있다. 예를 들어 4 입자 가지 단계 산란 진폭은 다음과 같은 도식으로 표현된다.

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} + \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \quad (2.3.8)$$

임의의  $n$  입자 가지 단계 산란 진폭을 3-꼭짓점 함수들을 통해 표현하고, Jacobi 관계식을 이용하면 어떤 두 입자를 기준으로 이 두 입자를 연결하는 선에 다른 입자들이 3-꼭짓점함수로 하나씩 붙는 도형들의 합으로 표현 할 수 있다. 이러한 도형을 “다중주변(multi-peripheral)” 도형이라 부른다.[13, 14] 도식적으로는 다음과 같다.

$$\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} \cdot \cdot \cdot = \sum_{\text{permutations}} \frac{(n-2)!}{\overbrace{\quad | \quad | \quad | \quad \dots \quad | \quad | \quad |}^{\text{ }}_1 \quad n} \quad (2.3.9)$$

이 경우  $(n-2)$  개의 입자들이 기준이되는 두 입자 사이에서  $(n-2)!$  개의 독립적인 방식으로 배열을 이룰 수 있다. 다중주변 도형의 구조상수를 외부입자의 배열이  $(1, \sigma_i, n)$ 인 경우  $c^f(1, \sigma_i, n)$ 이라 하면 이는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$c^f(1, \sigma_i, n) \equiv f^{1\sigma_1 x_1} f^{x_1 \sigma_2 x_2} \dots f^{x_{n-4} \sigma_{n-3} x_{n-3}} f^{x_{n-3} \sigma_{n-2} n} \quad (2.3.10)$$

여기서  $\sigma_i$ 는  $(n-2)!$  개의 독립적인 순열 배열 중 하나이다. 위의 Jacobi 항등식을 통해 임의의  $n$  입자 산란 진폭은 다음과 같다.

$$A_{\text{tot}} = \sum_{\sigma_i \in S_{n-2}} c^f(1, \sigma_i, n) \mathcal{A}^f(1, \sigma, n) \quad (2.3.11)$$

이제 대각합과 구조상수 간의 관계식을 얻기 위해 구조상수를 대각합을

통해 표현해 보면 다음과 같이 표현된다.

$$c^f(1, 2, \dots, n) = \sum_{(\alpha, \beta)} (-1)^{|\beta|} \text{Tr}(1\alpha n \beta^T) \quad (2.3.12)$$

여기서  $\text{Tr}(1\alpha n \beta^T)$ 는  $(1, \alpha, n, \beta^T)$  순서로 배열된 생성자들의 곱의 대각 합  $\text{Tr}(1\alpha n \beta^T) = \text{Tr}(T^1 \cdots T^{\alpha_i} \cdots T^n \cdots T^{\beta_k} \cdots)$ 이고, 순서쌍  $(\alpha, \beta)$ 는  $\{\alpha\} \cup \{\beta\} = \{2, 3, \dots, n-1\}$ 을 만족한다. 이 식은 구조상수의 성질 (2.1.19)을 통해 얻는다. 식 (2.3.12)은 4 개의 입자에 대해서 다음과 같이 간단하게 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned} f^{abx} f^{xcd} &= \begin{array}{c} b \\ | \\ a - - c \\ | \\ d \end{array} \\ &= \left( \begin{array}{c} b \\ | \\ a - \circlearrowright x \end{array} - \begin{array}{c} b \\ | \\ a - \circlearrowleft x \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} c \\ | \\ x - \circlearrowright d \end{array} - \begin{array}{c} c \\ | \\ x - \circlearrowleft d \end{array} \right) \\ &= \begin{array}{c} b \\ | \\ a - \circlearrowright c - d \end{array} - \begin{array}{c} b \\ | \\ a - \circlearrowleft d - c \end{array} - \begin{array}{c} c \\ | \\ a - \circlearrowright d - b \end{array} + \begin{array}{c} d \\ | \\ a - \circlearrowleft c - b \end{array} \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

이제 이를 이용하여 전체 산란 진폭을 표현해 보자.

$$\begin{aligned} A_{tot} &= \sum_{\sigma} c^f(1, \sigma, n) \mathcal{A}^f(1, \sigma, n) \\ &= \sum_{\sigma} \left[ \sum_{(\alpha, \beta) \in Sp(\sigma)} (-1)^{|\beta|} \text{Tr}(1\alpha n \beta^T) \right] \mathcal{A}^f(1, \sigma, n) \\ &= \sum_{(\alpha, \beta)} \left[ \sum_{\sigma: (\alpha, \beta) \in Sp(\sigma)} (-1)^{|\beta|} \mathcal{A}^f(1, \sigma, n) \right] \text{Tr}(1\alpha n \beta^T) \\ &= \sum_{(\alpha, \beta)} \left[ \sum_{\sigma \in OP(\{\alpha\}, \{\beta\})} (-1)^{|\beta|} \mathcal{A}^f(1, \sigma, n) \right] \text{Tr}(1\alpha n \beta^T) \end{aligned} \quad (2.3.14)$$

식 (2.3.13)의 두 번째 그림에서 반시계방향으로 나열된 그림과 시계방향

으로 나열된 그림이 곱해질 때 반시계방향으로 나열된 입자들의 수평방향을 기준으로 180도 회전하면 시계방향배열의 대각합을 얻고 이에 따른 결과가 이 식의 마지막 줄과 같다. 이 식의 마지막 그림을 보면 첫 점  $a$ 와 끝 점  $d$ 을 기준으로 앞에서 언급한 위로 향한 입자들의 배열을  $\{\alpha\}$ , 아래로 향한 입자들의 배열을  $\{\beta\}^T$ 라 하자. 이 때  $\{\beta\}^T$ 는  $\{\alpha\}$ 의 배열과 비교했을 때 역순으로 나타나기 때문에 전치기호(transpose)를 사용했다. 그리고 식 (2.3.14)에서 두 번째줄에 나오는  $Sp(\sigma)$ 는 이러한 과정에서 발생되는 집합  $\{\alpha\}$ 와  $\{\beta\}$ 의 개수의 변화로 인해 생기는 순서쌍  $(\alpha, \beta)$ 를 가지고 있는 집합이다. 이 식을 생성자 곱들의 대각합을 기저로 표현한 식과 비교하면 다음을 얻는다.

$$\mathcal{A}^t(1\alpha n\beta^T) = (-1)^{|\beta|} \sum_{\sigma \in OP(\{\alpha\}, \{\beta\})} \mathcal{A}^f(1, \sigma, n) \quad (2.3.15)$$

이 때  $(-1)^{|\beta|}$ 는 식 (2.3.14)에서 합의 순서를 바꿔주는 과정에서  $\alpha, \beta$ 가 고정된 값이 되어 합 밖으로 빼냈다. 끝으로 위 식에서  $\{\beta\} = \phi$ 인 경우,  $\mathcal{A}^t = \mathcal{A}^f$ 를 얻게 되고 다음의 식을 얻는다.

$$\mathcal{A}_n^{가지}(1\alpha n\beta) = (-1)^{|\beta|} \sum_{\sigma \in OP(\{\alpha\}, \{\beta^T\})} \mathcal{A}_n^{가지}(1, \sigma, n) \quad (2.3.16)$$

이를 *Kleiss-Kuijf* 관계식이라 부른다.

### 2.3.2 Bern, Carrasco, Johansson 관계식

전 소절에서 KK-관계식을 알아 보았다. 이 관계식은 산란 진폭의 군론적 성질으로부터 나왔다. 산란 진폭의 운동학적 성질과 KK-관계식을 이용하면 산란 진폭에서 독립적인 도형의 개수는  $(n - 2)!$ 에서  $(n - 3)!$ 로 줄어드는 성질을 알 수 있고, 이와 관련된 관계식이 BCJ-관계식이다. 이 관계식은 [15]에서 처음 주장 됐고 [16]에서 증명됐다. 이 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_n^{\text{가지}}(1, 2, \{\alpha\}, 3, \{\beta\}) \\ &= \sum_{\{\sigma\}_j \in \text{POP}(\{\alpha\}, \{\beta\})} \mathcal{A}_n(1, 2, 3, \{\sigma\}_j) \prod_{k=4}^m \frac{\mathcal{F}(3, \{\sigma\}_j, 1|k)}{s_{2,4,\dots,k}} \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

여기서  $\{\alpha\}$ ,  $\{\beta\}$ 는 다음과 같다.

$$\{\alpha\} \equiv \{4, 5, \dots, m-1, m\}, \quad \{\beta\} \equiv \{m+1, m+2, \dots, n-1, n\} \quad (2.3.18)$$

또한, POP(partially ordered permutations)는 집합  $\{\beta\}$ 의 상대적 순서를 유지하는 집합  $\{\alpha\} \cup \{\beta\}$ 의 모든 가능한 순열을 의미한다. 이때  $\mathcal{F}(3, \{\sigma\}_j, 1|k)$ 는 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}(3, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{n-3}, 1|k) \equiv \mathcal{F}(\{\rho\}|k) \\ &= \left\{ \begin{array}{ll} \sum_{l=t_k}^{n-1} \mathcal{G}(k, \rho_l), & t_{k-1} < t_k \\ -\sum_{l=t_k}^{n-1} \mathcal{G}(k, \rho_l), & t_{k-1} > t_k \end{array} \right\} \\ &+ \left\{ \begin{array}{ll} s_{2,4,\dots,k}, & t_{k-1} < t_k < t_{k+1} \\ -s_{2,4,\dots,k}, & t_{k-1} > t_k > t_{k+1} \\ 0, & \text{그 외} \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (2.3.19)$$

여기서  $t_k$ 는 집합  $\{\rho\}$ 에서  $k$ -번 째 입자의 위치이고  $t_3, t_{m+1}$ 는 다음과 같이 정의된다.<sup>14</sup>

$$t_3 \equiv t_5, \quad t_{m+1} \equiv 0 \quad (2.3.20)$$

그리고 함수  $\mathcal{G}$ 는 다음과 같이 주어진다.

$$\mathcal{G}(i, j) = \begin{cases} s_{i,j}, & i < j \text{ 또는 } j = 1, 3 \\ 0, & \text{그 외} \end{cases} \quad (2.3.21)$$

이때, 위의 식들에 등장하는 운동학적 불변량들은 다음과 같다.

$$s_{i,j} = -(k_i + k_j)^2, \quad s_{2,4,\dots,i} = -(k_2 + k_4 + \dots + k_i)^2 \quad (2.3.22)$$

이 식은  $n = 4, 5$ 에서 간단하게 확인할 수 있다. 위의 식 (2.3.17) 을 통해  $n = 4, 5$ 를 나타내면 다음과 같다.

$$\mathcal{A}_4(1, 2, \{4\}, 3) = \mathcal{A}_4(1, 2, 3, 4) \frac{s_{14}}{s_{24}} \quad (2.3.23)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_5(1, 2, \{4\}, 3, \{5\}) = \frac{1}{s_{24}} & \left( \mathcal{A}_5(1, 2, 3, 4, 5)(s_{14} + s_{45}) \right. \\ & \left. + \mathcal{A}_5(1, 2, 3, 5, 4)s_{14} \right) \quad (2.3.24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_5(1, 2, \{4, 5\}, 3) = \frac{1}{s_{24}s_{245}} & \left( -\mathcal{A}_5(1, 2, 3, 4, 5)(s_{34}s_{15}) \right. \\ & \left. + \mathcal{A}_5(1, 2, 3, 5, 4)s_{14}(s_{245} + s_{35}) \right) \quad (2.3.25) \end{aligned}$$

$n = 4$ 인 경우 다음과 같은 논의를 통해 간단하게 구할 수 있다. 이 경우  $U(1)$ -분리(decoupling) 성질을 생각 해 보자.  $U(1)$ -분리의 수식적인 표현은 다음과 같다.

$$\mathcal{A}_4^{가지}(1, 2, 3, 4) + \mathcal{A}_4^{가지}(1, 3, 4, 2) + \mathcal{A}_4^{가지}(1, 4, 2, 3) = 0 \quad (2.3.26)$$

---

<sup>14</sup> 이렇게 정의되면  $m = 4$ 인 경우  $t_3 = t_{m+1} = 0$  된다.

가지 단계 산란 진폭은 일반적으로 편광 벡터들, 스피너들, 운동량들, 그리고 Mandelstam 불변량들에 대하여 유리함수이다. 그런데 이 관계식은 산란 진폭의 균론적 성질로부터 나온 것이기 때문에 특정 편광상태나 시공간의 차원에 영향을 받지는 않을 것이다. 따라서 위의 항등식이 0이 되는 성질은 온전히 Mandelstam 변수들에 의존하게 될 것이다. Mandelstam 변수들의 합이 0인 성질을 이용하면 적당한 비례상수  $\chi$ 를 도입하여  $U(1)$ -분리가 다음과 같음을 알 수 있다.

$$(s + t + u)\chi = 0 \quad (2.3.27)$$

그런데  $\mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 2, 3, 4)$ 는  $s, t$ -통로의 산란 진폭에 대한 기여도가 동등하기 때문에  $u$ -통로에 비례함을 알 수 있고, 이를 정리하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 2, 3, 4) &= u\chi, & \mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 3, 4, 2) &= t\chi, & \mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 4, 2, 3) &= s\chi \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

위의 식에서  $\chi$ 를 소거하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$\begin{aligned} t\mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 2, 3, 4) &= u\mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 3, 4, 2) \\ s\mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 2, 3, 4) &= u\mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 4, 2, 3) \\ t\mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 4, 2, 3) &= s\mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 3, 4, 2) \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

이 식은 식 (2.3.25) 과 같음을 알 수 있다. 이와 함께 부분 산란 진폭을 극(pole)을 통한 표현을 이용하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 2, 3, 4) &\equiv \frac{n_s}{s} + \frac{n_t}{t}, \\ \mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 3, 4, 2) &\equiv -\frac{n_u}{u} - \frac{n_s}{s}, \\ \mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 4, 2, 3) &\equiv -\frac{n_t}{t} + \frac{n_u}{u} \end{aligned} \quad (2.3.30)$$

식 (2.3.29)와 KK-관계식을 이용하면 식 (2.3.25)의  $n = 4$ 인 경우를 얻게 된다.  $n = 4$ 인 경우 식 (2.3.28)와 함께 다음을 얻는다.

$$n_t = n_s - n_u \quad (2.3.31)$$

이 식은 게이지군의 구조상수들 간의 Jacobi 관계식과 닮아 있다. 산란 진폭의 운동학적 관계식에서 Jacobi 관계식과 같은 형태의 식을 얻었기 때문에 이를 색-쌍대(colorful duality)라 부른다.  $n = 5$ 에 대한 관계또한 Jacobi 항등식을 만족하는 항들에 대해 같은 형태의 관계를 갖는 운동학적 항들이 존재함을 얻을 수 있다. 예를 들어보면 다음과 같다.

$$c_3 - c_5 + c_8 = 0, \quad \Rightarrow \quad n_3 - n_5 + n_8 = 0 \quad (2.3.32)$$

이러한 성질을 모든 도형에 대하여 고려하면 식 (2.3.25)의  $n = 5$ 의 결과를 얻는다.[15] 이에 대한 일반적인 관계식은 다음과 같다.

$$\sum_{\{\sigma\} \in P(O\{\alpha\} \cup O\{\beta\})} \sum_{i=1}^r \sum_{\sigma_j < \sigma_{\beta_i}} s_{\beta_i J} \mathcal{A}_n(1, \{\sigma\}, n) = 0 \quad (2.3.33)$$

여기서  $P(O\{\alpha\} \cup O\{\beta\})$  는 각각의 상대적인 순서가 보존되는 집합  $\{\alpha\}$ ,  $\{\beta\}$ 의 모든 가능한 순열을 의미한다. 이 식을 BCJ-관계식이라 부른다. 이에 대한 증명은 끈이론의 장론적 극한을 통한 증명은[17]와 [18]에서 잘 다루었고, 장론적인 방법을 통한 증명은 [16]에 잘 소개돼 있다. 이 관계식을 이용하면  $(n-2)!$ 개의 독립적인 색-정렬된 산란 진폭의 개수를  $(n-3)!$ 개의 독립적인 색-정렬된 산란 진폭인 최소-기저 전개(minimal-basis expansion)를 얻는다.[16] 최소-기저 전개는 독립적인 색-정렬 된 산란 진폭의 개수가  $(n-2)! \rightarrow (n-3)!$  이 된 상황을 명확히 보여준다. 앞으로 BCFW 재귀방법을 통한 산란 진폭에 대해 논의할 예정인데 이 논의에서 BCJ-관계식(2.3.33)의 장론적 증명을 다룰 예정이다.

## 2.4 $\mathcal{N} = 4$ 초 Yang-Mills 이론

$\mathcal{N} = 4$  초대칭적 Yang-Mills 이론의 라그랑지안(Lagrangian)  $\mathcal{L}$ 은

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2g^2} \text{Tr} \left( -\frac{1}{2} F^2 - (D\Phi_I)^2 + i\bar{\Psi}\not{D}\Psi + \bar{\Psi}\Gamma^I[\Phi_I, \Psi] + \frac{1}{2} [\Phi_I, \Phi_J]^2 \right) \quad (2.4.1)$$

이다. 위의 라그랑지안에서  $D_\mu$ 는 공변미분  $D_\mu = \partial_\mu - i[A_\mu, *]$ 이다. 4차원  $\mathcal{N} = 4$  SYM(super Yang-Mills) 이론에서는 나선도(helicity)에 따라 다음과 같은 16개의 초여러겹(supermultiplets) 상태가 있다.

나선도	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-1
상태 수	1	4	6	4	1

표 2:  $\mathcal{N} = 4$  SYM에서 나선도에 따른 상태 수

이 여러겹들은  $SU(N)$  게이지 군의 수반(adjoint) 표현으로 기술된다. 따라서 식 (2.4.1)에 나타나는 교환자들은 이  $SU(N)$  게이지 군에서 장(field)들의  $SU(N)$  행렬구조와 관계된다. 위의 [표 2]에 나온 초여러겹 상태들(supermultiplets)은 각각 벡터 장  $A_\mu(x)$ , [반] 페르미온 장  $\Psi(x)$ , 스칼라 장  $\Phi_I(x)$ 로 이루어져 있다. 4차원  $\mathcal{N} = 4$  SYM의 라그랑지안은 10차원  $\mathcal{N} = 1$  SYM 라그랑지안에서 차원 환원(dimensional reduction)을 통해 얻을 수 있다는 것을 잘 알고 있다 [19]. 이에 의하면 페르미온들은 10차원 Majorana-Weyl 장  $\Psi(x)$ 로 표현되고 라그랑지안의  $\Gamma^I$  행렬들은 10차원 Clifford 대수를 따른다. 6개의 실(real) 스칼라장  $\Phi_I(x)$ 는 온곳(global)  $SO(6)$  R-대칭을 가지고 이에 대한 첨자를  $I = 1, \dots, 6$ 로 표현한다. 6개의 실 스칼라장  $\Phi_I(x)$ 를  $SO(6)$  군의 이중 덮개(double covering)인  $SU(4)$  군의 표현에서 3개의 복소 스칼라장  $\phi^{AB}(x) = -\phi^{BA}(x)$ 으로 나타내자. 이때  $\phi^{AB}(x)$ 는 자체 이중성(self-duality) 조건을 만족한다:  $\bar{\phi}_{AB}(x) = \frac{1}{2}\epsilon_{ABCD}\phi^{CD}(x)$ . 여기서  $\epsilon_{ABCD}$ 는  $SU(4)$  군에서의 Levi-Civita

기호이다. 이 표현에서 10차원 페르미온 장  $\Psi(x)$ 는 4+4 gluino 상태인  $\lambda^A$ 와  $\bar{\lambda}_A$ 로 나타낸다. 이에 따라 [반] 페르미온들은  $SU(4)$  군의 [반] 기본 표현으로 나타내고 라그랑지안의 모든 장들은  $SU(4)$  군의 표현으로 나타낼 수 있어 편리하다. 초대칭적 모형에서 스칼라 포텐셜  $V = 0$ 인 경우 초대칭은 보존되고,  $V > 0$ 인 경우 초대칭은 깨진다.  $\mathcal{N} = 4$  SYM의 스칼라 포텐셜  $V$ 는  $V = [\Phi_I(x), \Phi_J(x)]^2$  이므로  $\mathcal{N} = 4$  SYM 이론은  $[\Phi_I(x), \Phi_J(x)] = 0$ 에서 모듈리(moduli) 공간을 가진다. 스칼라 진공기 대값(vacuum expectation value:VEV)  $\langle \phi^{AB}(x) \rangle = 0$ 인 모듈리 공간의 원점에서 모든 상태들은 질량이 없고 차원변수(dimensionful parameter)를 갖지 않게 된다. 따라서 이 이론은 등각 불변성(conformal invariance)을 가지며, 베타함수(beta-function)가 섭동 이론의 모든 차수에서 상쇄되기 때문에 결합 상수의 주행(running of coupling constant)은 생기지 않는다. 등각 불변성으로 이 이론은 등각군  $SO(2, 4)$ 에 대한 대칭성을 가지고, 초대칭으로 초대칭적 등각군  $PSU(2, 2|4)$ 에 대해 대칭성을 갖는다. 우리는 이러한 초 등각 대칭성을 갖는 이론에서 질량이 없는 글루온의 산란 진폭에 관심이 있다. 그런데 질량이 없는 입자들의 이론이 등각 대칭성을 갖고 있을 때 접근 상태(asymptotic state)를 정의하기 어려워서 LSZ 방법을 통한 산란 진폭을 정의하기 어렵다. 이를 해결하는 한 가지 방법은 4차원의 계를  $4 - \epsilon$  차원의 계로 바꾸는 것이다. 이 경우 산란 진폭은 정이되지만 등각 대칭성이 보존되지 않아 계의 대칭성이 명시적으로 보이지 않는다. 이러한 대칭성을 명시적으로 볼 수 있는 곳에서 산란 진폭을 정의하는 또 다른 방법이 존재한다. 먼저  $V = 0$ 에서 스칼라 진공기 대값이 0이 아닌 상황을 생각하자. 그러면 산란 진폭이 정의된다. 이제 이 진공기 대값이 0으로 가는 극한을 생각하면 우리가 원하는 산란 진폭을 얻을 수 있다.<sup>15</sup> 어떤 경우든  $\mathcal{N} = 4$  SYM 이론의 산란 진폭이 정의 된다. 이제 이 계의 산란 진폭을 얻기 위해 이 계의 모든 장들의 소멸(annihilation

---

<sup>15</sup>이러한 영역을 Coulomb 갈래(branch)라 부른다.

tion) 연산자들을 생각하자. 이 소멸 연산자들은 장들을 모드 전개(mode expansion)를 통해 얻고 이들은 다음과 같다.

$$\begin{array}{ccccc}
 \underbrace{a}_{1 \text{ gluon } g^+}, & \underbrace{a^A}_{4 \text{ gluinos } \lambda^A}, & \underbrace{a^{AB}}_{6 \text{ scalars } \phi^{AB}}, & \underbrace{a^{ABC}}_{4 \text{ gluinos } \lambda^{ABC} \sim \bar{\lambda}_D}, & \underbrace{a^{1234}}_{1 \text{ gluon } g^-}
 \end{array} \quad (2.4.2)$$

위 식의  $A, B, C, D$ 는 모두  $SU(4)$ 군의 첨자이며  $A, B, \dots = 1, 2, 3, 4\circ$ 이다.  $SU(4)$  R-대칭에 대해 변환되는 대상은 초대칭 생성자  $Q^A$ 와  $\tilde{Q}_A \equiv Q_A^\dagger$ 이며, 나선도  $h$ 인 상태는  $SU(4)$ 군의 변환에 대해 완전히 반대칭적인  $2(1 - h)$ 개의 첨자 표현으로 변환된다.  $\tilde{Q}_A$  연산자는 모든 연산자의 나선도를  $\frac{1}{2}$ 만큼 올려주고  $SU(4)$ 첨자  $A$ 를 제거해 준다. 첨자가 없는 경우는 연산자가 소멸된다.  $Q^A$ 연산자는 이와 반대되는 역할을 한다. 이를 이용하면  $\mathcal{N} = 4$  SYM에서 초대칭적 Ward 항등식들을 얻을 수 있다. 초대칭적 Ward 항등식은 산란 진폭들에 대한 특별한 관계식들을 준다. 예를 들어  $\langle 0 | [\tilde{Q}_A, a_1^B, a_2, \dots, a_n] | 0 \rangle = 0$ 과 같은 초대칭적 Ward 항등식을 생각해보자. 이 경우,  $\tilde{Q}_A$ 연산자가  $a$ 연산자를 소멸시키기 때문에, 이 항등식은  $\langle 0 | [\tilde{Q}_A, a_1^B], a_2, \dots, a_n | 0 \rangle = 0$ 이고 이는  $\delta_A^B | 1 \rangle A_n(g^+ g^+ g^+ \dots g^+) = 0$ 을 준다. 이 때문에 모든 + 글루온( $g^+$ ) 산란 진폭은 섭동이론의 모든 차수에서 0임을 알 수 있다. 비슷하게, 나선도  $-1$ 인 글루온과 나머지는 나선도  $+1$ 인 글루온들의 산란 진폭 또한 모든 차수에서 0이 됨을 알 수 있고, 이를 나타내면 다음과 같다.

$$A_n^{\text{L-loop}}(g^+ g^+ g^+ \dots g^+) = A_n^{\text{L-loop}}(g^- g^+ g^+ \dots g^+) = 0$$

이러한 초대칭적 Ward 항등식을 이용하면 산란 진폭에 대한 다음의 관계식을 얻을 수 있다.

$$A_n(g^- \lambda^{123} \lambda^4 g^+ \dots g^+) = \frac{\langle 13 \rangle}{\langle 12 \rangle} A_n(g^- g^- g^+ g^+ \dots g^+) \quad (2.4.3)$$

$$A_n(g^- \phi^{12} \phi^{34} g^+ \dots g^+) = \frac{\langle 13 \rangle^2}{\langle 12 \rangle^2} A_n(g^- g^- g^+ g^+ \dots g^+) \quad (2.4.4)$$

$$A_n(g^+ g^+ \dots g_i^- \dots g_j^- \dots g^+) = \frac{\langle ij \rangle^4}{\langle 12 \rangle^4} A_n(g^- g^- g^+ g^+ \dots g^+) \quad (2.4.5)$$

가지 단계 글루온 산란 진폭에서는 나선도 보존으로 내부 퍼뜨리개 또한 글루온이다. 하지만 고리 단계에서는 내부의 입자들이 글루온 이외에도 생성될 수 있다. 고리 단계 산란 진폭을 구하는 한 가지 방법으로 일반화된 유니타리티 방법이 있다. 이 방법을 통해 1-고리 단계(1-loop level) 산란 진폭을 가지 단계 산란 진폭의 정보를 통해 얻는데 이때 초대칭적 Ward 항등식이 사용된다. 이 방법은 제3장에서 자세히 다룬다. 이 경우 위의 초대칭적 Ward 항등식을 이용하면 내부의 입자들의 가지 단계 산란 진폭을 글루온 산란 진폭으로 나타낼 수 있는 점이 매우 유용하다. 초여러겹 상태들과 산란 진폭을 잘 다루기 위해 온-쉘(on-shell) 초공간(superspace)을 도입하는 것은 매우 편리하다. 이는  $SU(4)$  첨자를 가진 Grassmann 변수  $\eta_A$ 를 도입하여  $\mathcal{N} = 4$  SYM의 16개의 상태를 하나의 손지기(chiral) 초장(superfield)으로 나타낸다:

$$\Omega = g^+ + \eta_A \lambda^A - \frac{1}{2!} \eta_A \eta_B \phi^{AB} - \frac{1}{3!} \eta_A \eta_B \eta_C \lambda^{ABC} + \eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4 g^- \quad (2.4.6)$$

성분 장(component field)는 다음을 통해 얻는다.

상태(입자)	$g^+$	$\lambda^A$	$\phi^{AB}$	$\lambda^{ABC}$	$g^- = g^{1234}$
미분연산자	1	$\partial_i^A$	$\partial_i^A \partial_i^B$	$\partial_i^A \partial_i^B \partial_i^C$	$\partial_i^1 \partial_i^2 \partial_i^3 \partial_i^4$

표 3:  $\mathcal{N} = 4$  SYM on-shell 초장에서 각 상태별 Grassmann 미분 연산자

온-쉘 형식에서 초전하(supercharge)들은 다음과 같이 정의된다:

$$q^{Aa} \equiv [p|^a \frac{\partial}{\partial \eta_A}, \quad q_A^{\dagger a} \equiv |p\rangle^a \eta_A \quad (2.4.7)$$

여기서  $|p\rangle$  과  $|p]$  스피너들은 입자의 운동량  $p$ 와 관련된 스피너들이다. 초전하들은 초대수(superalgebra)를 만족시킨다:

$$\{q^{Aa}, \tilde{q}_B^b\} = \delta_B^A |p\rangle^b [p]^a = -\delta_B^A p^{ba} \quad (2.4.8)$$

위의 사실로 부터 우리는  $\Omega(p_i)$ 를  $i$ 번 째 외부입자(external particle)의 초파동함수(superwavefunction)로 보는 초 산란 진폭(superamplitude)  $\mathcal{A}_n^{\text{Super}}(\Omega_1, \dots, \Omega_n)$ 을 생각할 수 있다. 이 초 산란 진폭은 온-셀 운동량  $p_i$  와 Grassmann 변수  $\eta_{iA}$ 에 의존하는 물리량이다. 따라서 초 산란 진폭은 Grassmann 변수들의 다향식으로 전개가 가능하다. MHV산란 진폭에서  $h = +1$ 인 나선도를 가지는 글루온들 중  $K$ 개의 글루온이  $h = -1$ 인 나선도를 가지는 글루온으로 대체된 경우를  $N^K$ MHV 산란 진폭이라 한다. 이 경우  $K+2$ 개의  $h = -1$ 나선도 상태의 글루온이 존재한다.  $N^K$ MHV 산란 진폭에서  $h = -1$ 나선도를 가지는 외부입자 상태는  $K+2$ 개 존재하기 때문에 이를 초 산란 진폭에서 표현하면  $(K+2)$ 개의 Grassmann 변수  $\{\eta_1 \eta_2 \eta_3 \eta_4\}$ 가 존재한다. 따라서  $N^K$ MHV 초 산란 진폭은 Grassmann 변수에 대해  $4(K+2)$ 차 다향식이 된다. 이를 통해 (성분)산란 진폭은 초 산란 진폭의 Grassmann 변수들을 적분하여 얻는다. 예를 들어 MHV 산란 진폭인  $A_n(1^+ \dots i^- \dots j^- \dots n^+)$ 는 다음을 통해 얻는다.

$$\begin{aligned} A_n(1^+ \dots i^- \dots j^- \dots n^+) \\ = \left( \prod_{A=1}^4 \frac{\partial}{\partial \eta_{iA}} \right) \left( \prod_{B=1}^4 \frac{\partial}{\partial \eta_{jB}} \right) \mathcal{A}_n^{\text{Super}}(\Omega_1, \dots, \Omega_n) \Big|_{\eta_{kC}=0} \end{aligned} \quad (2.4.9)$$

따라서 가지 단계 초 산란 진폭  $\mathcal{A}_n^{\text{Super}}$ 은  $n$  입자 가지 단계 산란 진폭의 가능한 모든 합이므로 다음과같이 표현된다.

$$\mathcal{A}_n^{\text{Super}} = \mathcal{A}_n^{\text{MHV}} + \mathcal{A}_n^{\text{NMHV}} + \mathcal{A}_n^{\text{N}^2\text{MHV}} + \dots + \mathcal{A}_n^{\text{anti-MHV}} \quad (2.4.10)$$

온-쉘 초공간(superspace)에서 초대칭적 Ward 항등식은 초대칭 생성자  $Q^A$ ,  $\tilde{Q}_A$ 가 초 산란 진폭을 소멸시킨다는 말로 표현된다. 이때 초대칭 생성자들은 다음과 같이 정의된다.

$$Q^A \equiv \sum_{i=1}^n q_i^A = \sum_{i=1}^n [i] \frac{\partial}{\partial \eta_{iA}} \quad \text{이고}, \quad \tilde{Q}_A \equiv \sum_{i=1}^n q_{iA}^\dagger = \sum_{i=1}^n |i\rangle \eta_{iA}$$

(2.4.11)

이 공간에서 초대칭적 Ward 항등식은 다음과 같다.

$$Q^A \mathcal{A}_n^{\text{Super}} = 0 \quad \text{그리고}, \quad \tilde{Q}_A \mathcal{A}_n^{\text{Super}} = 0 \quad (2.4.12)$$

산란 진폭의 이러한 성질은  $\{Q^{aA}, \tilde{Q}_B^a\} \mathcal{A}_n^{\text{Super}} = -\delta_B^A p^{aa} \mathcal{A}_n^{\text{Super}} = 0$  을 만족하기 때문에 운동량보존을 포함한다. 또한 다음과 같은 Grassmann  $\delta$ -함수를 도입하면 초 산란 진폭에 초전하 보존을 인가할 수 있다.

$$\delta^{(8)}(\tilde{Q}) = \frac{1}{2^4} \prod_{A=1}^4 \tilde{Q}_{A\dot{a}} \tilde{Q}_A^{\dot{a}} = \frac{1}{2^4} \prod_{A=1}^4 \sum_{i,j=1}^n \langle ij \rangle \eta_{iA} \eta_{jA} \quad (2.4.13)$$

초전하 보존은  $\tilde{Q}_A \mathcal{A}_n^{\text{Super}} = 0$  으로부터 얻고 이에 따라  $N^K \text{MHV}$  초 산란 진폭은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathcal{A}_n^{N^K \text{MHV}} = \delta^{(8)}(\tilde{Q}) P_{4K} \quad (2.4.14)$$

여기서  $P_{4K}$ 는  $4K$ 차 Grassmann 변수 다향식이다. 이 표현에 따르면 MHV 산란 진폭은  $K = 0$  이므로 Grassman 변수 다향식에 대해 상수항이고 규격화의 이유로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathcal{A}_n^{\text{MHV}} = \frac{\delta^{(8)}(\tilde{Q})}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \cdots \langle n1 \rangle} \quad (2.4.15)$$

이렇게 나타낸 MHV 산란 진폭 표현은 Parke-Taylor 표현을 만족시킨다.

### 2.4.1 $\mathcal{N} = 4$ SYM 의 대칭성

$\mathcal{N} = 4$  SYM 이론에는 기본적으로 Poincaré 대칭과 등각(conformal) 대칭 그리고 초대칭(supersymmetry)을 포함하는 초 등각(superconformal) 대칭이 존재한다. 초 등각 대칭군은 시공간에 대해 Poincaré 군과 등각군 대칭을 가지며 초대칭으로 각각의 군에 관련된 초대칭군으로 확장된다. 이 초대칭 군은  $\mathcal{N} = 4$  초대칭을 가지고 이는  $SU(4)$  R-대칭을 가진 군이다. 이를 스피너-나선도 표기법을 통해 알아보자. 먼저, Poincaré 군에는 10개의 생성자가 존재한다. 이는 4개의 병진(translation) 생성자  $P^\mu$  와 6개의 Lorentz 생성자  $M_{\mu\nu}$ 로 이루어져 있다. Pauli 행렬을 통해 이들을  $SL(2, \mathbb{C})$ 에서 표현하면 다음과 같다.<sup>16</sup>

$$\begin{aligned} P^{\dot{a}a} &= - \sum_i \tilde{\lambda}_i{}^{\dot{a}} \lambda_i^a, \\ M_{ab} &= \sum_i \frac{1}{2} \left( \lambda_{ia} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^b} + \lambda_{ib} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^a} \right), \quad M_{\dot{a}\dot{b}} = \sum_i \frac{1}{2} \left( \tilde{\lambda}_{i\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{b}}} + \tilde{\lambda}_{i\dot{b}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}} \right) \end{aligned} \quad (2.4.16)$$

우리는 임의의  $n$ 개의 입자들에 대한 계를 생각하기 때문에  $i = 1, 2, \dots, n$ 이다. 또한 산란 진폭에는 항상 운동량 보존 멘타 함수  $\delta^4(\sum_i p_i)$ 가 포함된다. 따라서  $P^{\dot{a}a} \delta^4(P) = 0$ 임을 통해  $P^{\dot{a}a}$ 는 산란 진폭을 소멸 시킨다는 것을 알 수 있다. Lorentz 생성자에 대해서도

$$\sum_i \tilde{\lambda}_{i\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{b}}} \langle jk \rangle = \epsilon_{\dot{a}\dot{b}} \langle jk \rangle, \quad \sum_i \tilde{\lambda}^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{b}}} \delta^4(P) = -2\delta^{\dot{a}}_{\dot{b}} \delta^4(P) \quad (2.4.17)$$

임을 이용하면  $M_{\dot{a}\dot{b}}$  또한 산란 진폭을 소멸 시킨다는 것을 알 수 있고 산란 진폭이 Poincaré 대칭성을 갖는 것을 알 수 있다. 게다가 식 (2.4.7)에 나온 초대칭 생성자가 더해져 Poincaré 군 대칭은 초Poincaré 군 대칭으로 확장된다. 이 확장된 이론은 운동량 보존과 함께 초전하 보존까지 포함한다.

---

<sup>16</sup>이 소절에서는 스피너들을 팔호표현 대신  $\lambda, \tilde{\lambda}$ 로 표현한다.

이는 온-쉘 초공간의 도입으로 Grassmann-델타 함수  $\delta^{(8)}(\sum_i |i\rangle\eta_i)$  를 통해 초전하가 보존됨을 표현한다. 이 때문에  $\tilde{Q}_A$ 가 초 산란 진폭을 소멸시키는 것을 알 수 있고 이는 앞서 언급한 초대칭적 Ward 항등식(SWI)을 의미한다. 등각 군은 Poincaré 군에서 5개의 생성자가 더 존재하고 이는 1 개의 팽창(dilatation) 생성자  $D$  와 4개의 특수 등각 생성자  $K^\mu$ 이다. 특수 등각 생성자는 반전(inversion) 연산자  $\mathcal{I}$ 를 통해 표현된다.  $\mathcal{I}$ 의 시공간 좌표에 연산시키는 경우 다음과 같다.

$$\mathcal{I}(x^\mu) = \frac{x^\mu}{x^2} \quad (2.4.18)$$

이에 따른 특수 등각 생성자는

$$K^\mu = \mathcal{I}P^\mu\mathcal{I} \quad (2.4.19)$$

로 정의된다. 이를 팽창 생성자와 함께 다시 나타내면 다음과 같다.

$$D = -x \cdot \partial, \quad K_\mu = x^2 \partial_\mu - 2x_\mu x \cdot \partial \quad (2.4.20)$$

이 군의 생성자들을 스피너-나선도 표현으로 나타내면 다음과 같다.

$$K_{a\dot{a}} = -\frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}} \frac{\partial}{\partial \lambda_i^a}, \quad D = \sum_i \left( \frac{1}{2} \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}} + \frac{1}{2} \lambda_a^a \frac{\partial}{\partial \lambda_{ia}} + 1 \right) \quad (2.4.21)$$

식 (2.4.7)의 반-교환자가 병진 생성자를 만들어 내는 것 처럼 특수 등각 생성자를 만들어 내는 등각 초대칭 생성자  $S_{aA}$ 와  $\tilde{S}_{\dot{a}}^A$  가 존재하여 등각 군을 초대칭적 등각군으로 확장시킨다. 또한,  $\mathcal{N} = 4$  초대칭 이론을 하기 때문에 자연스럽게  $SU(4)$  R-대칭을 갖고 있다. 따라서  $\mathcal{N} = 4$  SYM 이론의 대칭군의 생성자들은 다음과 같이 나열된다.

$$R_A{}^B = \sum_i \left( \eta_{iA} \frac{\partial}{\partial \eta_{iB}} - \frac{1}{4} \delta_A{}^B \eta_{iC} \partial_{\eta_{iC}} \right)$$

$$Q^{aA} = \sum_i \lambda_i^a \frac{\partial}{\partial \eta_{iA}}, \quad P^{\dot{a}\dot{b}} = -\sum_i \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} \lambda_i^{\dot{b}}, \quad \tilde{Q}_A^{\dot{a}} = \sum_i \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} \eta_{iA}$$

$$\begin{aligned}
M_{ab} &= \sum_i \frac{1}{2} \left( \lambda_{ia} \frac{\partial}{\partial \lambda_i^b} + \lambda_{ib} \frac{\partial}{\partial \lambda_i^a} \right), \quad M_{\dot{a}\dot{b}} = \sum_i \frac{1}{2} \left( \tilde{\lambda}_{i\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{b}}} + \tilde{\lambda}_{i\dot{b}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}} \right) \\
S_{aA} &= \sum_i \frac{\partial}{\partial \lambda^a} \frac{\partial}{\partial \eta_{iA}}, \quad K_{a\dot{a}} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}} \frac{\partial}{\partial \lambda_i^a}, \quad \tilde{S}_{\dot{a}}^A = \sum_i \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}} \eta_{iA} \\
D &= \sum_i \left( \frac{1}{2} \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}} + \frac{1}{2} \lambda_a \frac{\partial}{\partial \lambda_{ia}} + 1 \right)
\end{aligned} \tag{2.4.22}$$

이 생성자들은 초등각 군의 등급화된(graded)  $\text{su}(2, 2|4)$  Lie 대수를 따르고 생성자들을 하나의 표현인  $G^A{}_B = \sum_i G_i^A{}_B$ 로 나타내자. 여기서 첨자  $A$ 는  $SL(2, \mathbb{C})$ 와  $SU(4)$  R-대칭 첨자들의 모임인  $\circ(a, \dot{a}, A)$ 이고,  $G_i^A{}_B$ 는 개별 입자에 대한 초등각 생성자이다. 더불어 다음과 같은 나선도 생성자  $H$ 를 정의하자.

$$H = \sum_i \left[ \tilde{\lambda}_{i\dot{a}} \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}} - \lambda_{ia} \frac{\partial}{\partial \lambda_{ia}} - \eta_{iA} \frac{\partial}{\partial \eta_{iA}} + 2 \right] \tag{2.4.23}$$

나선도 생성자가 스피너와 Grassmann 변수에 작용하면 다음과 같다.

$$H\tilde{\lambda}_{i\dot{a}} = \tilde{\lambda}_{i\dot{a}}, \quad H\lambda_a = -\lambda_a, \quad H\eta_A = -\eta_A \tag{2.4.24}$$

$N^K$ MHV 산란 진폭의 경우  $K+2$  개의 음의 나선도를 포함하고 있고, 이에 따라  $4(K+2)$  개의 Grassmann 변수가 곱해져 있기 때문에 나선도 연산자 또한  $N^K$ MHV 산란 진폭을 소멸 시킨다.

$$H\mathcal{A}_n^{N^K MHV} = 0 \tag{2.4.25}$$

이 나선도 연산자와 함께 식 (2.4.22)의 생성자들은 닫힌 대수(closed algebra)를 이룬다. 산란 진폭 단계에서 초등각 대칭은 다음과 같이 표현되고, 이러한 사실은 [1]에 자세하게 알려져 있다.

$$G^A{}_B \mathcal{A}_n = 0 \tag{2.4.26}$$

식 (2.4.22) 의 생성자들의 스피너 표현들에서 미분연산자가 선형적으로 등장하지 않는 항들도 존재한다. 트위스터(Twistor) 공간이라 불리는 곳으로 Fourier 변환을 하면 이 생성자들은 모두 선형적으로 표현 가능해진다. 이 변환은 다음과 같은 양의 나선도 스피너를 Fourier 변환하여 얻는다.

$$\tilde{\lambda}_{i\dot{a}} \rightarrow i \frac{\partial}{\partial \tilde{\mu}_i^{\dot{a}}}, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{\lambda}_i^{\dot{a}}} \rightarrow -i \tilde{\mu}_{i\dot{a}} \quad (2.4.27)$$

이 공간에서 모든 변수들의 모임을  $\mathcal{W}_i^A = (\lambda_i^a, \tilde{\mu}_i^{\dot{a}}, \eta_{iA})$  라 하고, 이를 초 트위스터(supertwistor)라 부른다. 여기서 첨자  $A$ 는  $A = (\dot{a}, a, A)$  이다. 초 트위스터를 통해 초 등각 대수의 생성자들은 모두 선형화되고, 이를 직접적으로 나타내면 다음과 같다.

$$G^A{}_B = \sum_i^n G_i^A{}_B = \sum_i^n \left( \mathcal{W}_i^A \partial_{\mathcal{W}_i^B} - \frac{1}{4} \delta^A{}_B \mathcal{W}_i^C \partial_{\mathcal{W}_i^C} \right) \quad (2.4.28)$$

트위스터 공간에서 산란 진폭의 성질을 간단히 알아보기 위해 anti-MHV 산란 진폭을 트위스터 공간에서 표현해 보자. anti-MHV 산란 진폭은  $|i\rangle$  스피너의 의존도가 운동량 보존항외에는 없다. 간단한 계산을 통해 트위스터 공간에서 산란 진폭의 특징을 볼 수 있다. Fourier 변환을 통해 산란 진폭은  $\mathcal{A}_n^{\text{anti-MHV}}(\lambda_i, \tilde{\lambda}_i, \eta_{iA})$ 에서  $\mathcal{A}_n^{\text{anti-MHV}}(\mathcal{W})$ 로 변환 되고 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} & \tilde{\mathcal{A}}_n^{\text{anti-MHV}}(\mathcal{W}) \\ &= \int \left( \prod_{j=1}^n d^2 \tilde{\lambda}_j e^{i\langle j\tilde{\mu}_j \rangle} \right) \mathcal{A}_n^{\text{anti-MHV}} = \int \left( \prod_{j=1}^n d^2 \tilde{\lambda}_j e^{i\langle j\tilde{\mu}_j \rangle} \delta^4(P) \right) f(\lambda_i) \\ &= \int d^4 x \int \left( \prod_{j=1}^n d^2 \tilde{\lambda}_j e^{i\langle j\tilde{\mu}_j \rangle - ix_{a\dot{a}} \sum_j \tilde{\lambda}_j^{\dot{a}} \lambda_j^a} \right) f(\lambda_i) \\ &= \int d^4 x \left( \prod_{j=1}^n \delta^2 \left( \tilde{\mu}_{j\dot{a}} + \lambda_j^a x_{a\dot{a}} \right) \right) f(\lambda_i) \end{aligned} \quad (2.4.29)$$

이 공간에서 anti-MHV 산란 진폭은 다음과 같은 2 개의 방정식이 만족하는 곳 외의 점에서는 0이 된다.

$$\tilde{\mu}_{j\dot{a}} + \lambda_j^a x_{a\dot{a}} = 0 \quad (2.4.30)$$

이 2개의 방정식과 사영적 성질 때문에  $x_{a\dot{a}}$ 는 차수(degree) 1인 곡선을 표현한다.[1] 이는 트위스터 공간의  $n$ 개의 점들이 이 공간에서 한 직선상에 있는 것을 말한다. 제4장에서는 이와 유사한 구조를 갖는 운동량 초 트위스터 공간에 대해 살펴볼 것이다.<sup>17</sup>

---

<sup>17</sup> 운동량 초 트위스터는 여기서 등장한 트위스터와는 다른 양이나 같은  $\mathbb{CP}^{3|4}$ 의 구조를 가진다.

## 제 3 장

# 고리 단계 형식 (Loop-Level Formalism)

전 장에서는  $\mathcal{N} = 4$  SYM 이론의 가지 단계(tree-level) 산란 진폭을 간단하게 알아보았다. 이 장에서는 이 이론에서 고리 단계(loop-level) 산란 진폭에 대해 알아보려 한다. 임의의 D차원에서 L-고리 산란 진폭은 다음과 같은 형태를 갖는다.

$$\mathcal{A}_n^{\text{L-loop}} = i^L \sum_j \int \left( \prod_{k=1}^L \frac{d^D \ell_k}{(2\pi)^D} \right) \frac{1}{S_j} \frac{n_j c_j}{\prod_{\alpha_j} p_{\alpha_j}^2} \quad (3.0.1)$$

첨자  $j$  는 가능한 모든 L-고리 Feynman 도형들에 대응된다. 각각의 도형에서  $\ell_k$  는 L-고리 운동량이고  $\alpha_j$ 는 퍼뜨리개에 대응된 첨자이다. 또한  $S_j$ 는 Feynman 도형의 대칭인자(symmetry factor)이다. 산란 진폭의 운동학적(kinematic) 정보를 담고있는  $n_j$ 는 외부입자들의 운동량, 고리 운동량들 그리고 편광 벡터들의 내적으로 이루어진 Lorentz 불변인 다항식들로 표현된다. 그리고 상수  $c_j$ 는 결합들(couplings)과 게이지 군에 대한 인자에 대한 정보를 담당하는 부분이다. 고리 단계에서의 산란 진폭의 해석적(analytic) 구조는 가지 단계에서보다 좀 더 복잡하다. 가지 단계에서 와 달리 극(pole)들이 갈래-자름(branch-cut) 특이성을 가지기 때문이다. 이번 장에서는 고리 단계 산란 진폭을 구하는 방법 중 하나인 일반화된 유니타리티 방법(generalized unitarity method)에 대해 알아보도록 할 것이다.

### 3.1 일반화된 유니타리티 방법

이 절에서는 고리 단계 산란 진폭을 계산하는 데 있어서 널리 사용되는 ‘유니타리티(unitarity)’ 방법에 대해 알아보고자 한다. L개의 고리를 갖는 산란 진폭은 식 (3.0.1) 처럼 표현되고 이를 다음과 같이 나타내자.

$$\int d^D \ell \sum_j J_j \quad (3.1.1)$$

여기서  $J_j$ 는 식 (3.0.1)에 표현된 피적분함수이다. 이 적분은 Wick 회전을 통해  $\mathbb{R}^{1,3}$ 에서  $\mathbb{R}^4$ 로 회전된 공간에서 적분한다. 유니타리티 방법은 기본적으로 산란 진폭에 등장하는 퍼뜨리개에 온-셀 조건을 주어 산란 진폭의 극 구조의 성질을 이용하여 고리 단계 산란 진폭을 구하는 방법이다. 따라서 다음과 같은 조건을 만족하는 영역에 대해 생각해 보는 것이 유니타리티-방법에 대해 알아보는 시작단계라고도 할 수 있다.

$$\ell^2 = (\ell - p_1 - p_2)^2 = 0 \quad (3.1.2)$$

이처럼 고리 내부의 운동량을 온-셀에 두게 하는 과정을 유니타리티-자름 (unitarity-cut)이라고 부른다. 특히 이 경우는 2개의 내부 입자의 운동량을 온-셀에 두었기 때문에 이를 ‘2 입자 유니타리티-자름’이라 한다. ‘유니타리티-자름’을 하는 경우 피적분함수

$$J_i = \frac{1}{S_i \cdots (\ell^2) \cdots (\ell - p_1 - p_2)^2} \frac{c_i n_i}{\cdots} \quad (3.1.3)$$

는 특이성(singularity)을 갖는 점들이 존재한다. ‘2 입자 유니타리티-자름’에서 이 특이점은 위의 조건에서처럼 두 퍼뜨리개의 운동량이 온-셀에 있는 운동학적 배열과 관련있다. 유니타리티 방법은 광학적 정리(optical theorem)로부터 확장된다. 광학적 정리는 산란 진폭 행렬(S-행렬)에 유니타리티(unitarity)를 부여함으로 얻는다. S-행렬의 유니타리티는 다음과

같은 식을 통해 나타낸다.

$$S = 1 + iT$$

$$\begin{aligned} S^\dagger S &= (1 - iT^\dagger)(1 + iT) = (1 - i(T^\dagger - T)) + T^\dagger T \\ \implies T^\dagger T &= -i(T - T^\dagger) \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

식 3.1.4의 마지막 식을 보면 다음과 같은 사실을 알 수 있다.

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{i \rightarrow f} &= \langle f | T | i \rangle \text{임을 이용하여,} \\ \langle f | T^\dagger T | i \rangle &= \sum_s \langle f | T^\dagger | s \rangle \langle s | T | i \rangle \\ &= \mathcal{M}_{s \rightarrow f}^* \mathcal{M}_{i \rightarrow s} = \text{Im } \mathcal{M}_{i \rightarrow f} \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

이는 섭동적 산란 진폭에서 높은 차수의 산란 진폭의 허수부는 그 보다 낮은 차수의 산란 진폭의 곱으로부터 구할 수 있음을 말해준다. 1-고리 단계에서 이 관계는 다음과 같이 도식적으로 표현된다.

$$\text{Im} \left( \text{1-Loop} \right) = \text{Tree} \otimes \text{Tree} \quad (3.1.6)$$

The diagram shows a 1-loop Feynman diagram on the left, labeled "1-Loop". It has four external legs with momenta \$p\_1, p\_2, p\_3, p\_4\$. The loop is shaded gray. On the right, the same loop is shown as a sum of two tree-level diagrams connected by a tensor product symbol (\$\otimes\$). The left tree diagram has an incoming leg \$p\_1\$ and an outgoing leg \$\ell\$. The right tree diagram has an incoming leg \$\ell\$ and an outgoing leg \$p\_4\$. The internal line connecting the two trees is labeled \$\ell - p\_1 - p\_2\$ above and \$\ell\$ below. External legs \$p\_2\$ and \$p\_3\$ are also shown.

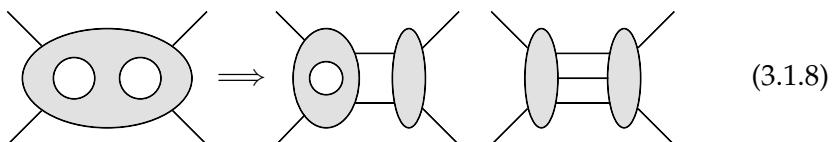
도식 3.1.6의 우변에서  $\otimes$ 는 가능한 모든 상태들을 고려한다는 것을 표현한 것이다. 1-고리 산란 진폭의 내부 입자들은 글루온뿐만 아니라  $\mathcal{N} = 4$  SYM 이론의 모든 가능한 입자들과 함께 게이지 고정을 이유로 등장하는 유령(ghost)입자들도 존재한다. 하지만 광학적 정리로부터 구하는 1-고리 산란 진폭의 허수부는 가지 단계 산란 진폭으로 이루어져 있기 때문에 모두 물리적인 입자로 이루어져 있으며 글루온만이 등장하고 이에 따라 계산이 더 수월해진다. 유니타리티-자름 과정은 운동량을 온-쉘에 두는 제한조건 때문에 고리-적분에 다음과 같은  $\delta$ -함수를 포함하게 한다.<sup>1</sup>

$$\int d^D \ell \delta_+(\ell^2) \delta_+((\ell - p_1 - p_2)^2) \quad (3.1.7)$$

---

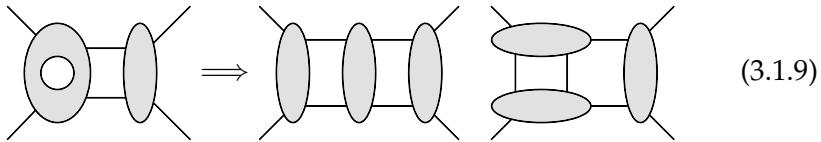
<sup>1</sup>여기서는 2 입자 유니타리티-자름에 관해 기술한다.

여기서  $+$ 는 온-셀 조건을 만족하는 두 개의 해 중  $\ell^0 > 0$  인 해를 의미 한다. 일반적으로 고리가 있는 도형에서 유니타리티-자름은 내부-운동량 가지 수에 따라 여러 번 자를 수 있다. 일반적으로  $N$ -번 자름을 할 경우 고리 내부의 운동량 중  $N$ 개의 운동량을 온-셀에 둔다. 이러한 자름 과정을 통해 고리 단계 산란 진폭을 재구성할 수 있다. 이러한 과정을 일반화된 유니타리티 방법이라 부른다. 일반적으로 고리 단계 산란 진폭은 ‘생성 집합(spanning set)’들의 자름들(cuts)로 부터 완전히 결정된다. 이 생성 집합은 유니타리티 자름을 통해 얻을 수 있다. 생성 집합은 다양한 방법으로 구할 수 있는데 그 중 하나는 ‘기본 유니타리티 자름’을 통한 방법이다. 이 자름은 주어진 산란 진폭의 두 개의 더 낮은 단계의 고리 단계 산란 진폭으로 나눠주는 자름이다.  $L$ -고리 산란 진폭의 경우 이 기본 유니타리 자름으로부터 점차 자름 되는 고리 내부의 입자들을 늘려가며  $(L+1)$ -개의 입자들까지의 유니타리티 자름을 모든 통로(channel)를 통해 얻게 되면 생성 집합이 정해진다. 이러한 과정을 통해 가지 단계 산란 진폭만 포함한 생성 집합으로 바꿀 수 있다. 예를 들면 2-고리 4 입자 산란 진폭을 생각해 보자. 첫 번째 단계는 이 산란 진폭을 두 개의 낮은 단계의 산란 진폭으로 표현하는 것이다. 도식적으로는 다음과 같다.



이 과정에서는 하나의 1-고리 단계 산란 진폭과 하나의 가지 단계 산란 진폭으로 나뉘어진 두 개의 산란 진폭과 각각 가지 단계 산란 진폭으로 나뉘어진 두 개의 산란 진폭 이렇게 두 부류로 나뉜다. 그리고 이 두 산란 진폭 중 고리를 포함하는 산란 진폭은 고리 부분의 산란 진폭을 더 낮은 단계의 산란 진폭으로 나누면서 가지 단계 산란 진폭의 자름으로 표현이

가능하다. 도식적으로는 다음과 같다.



이러한 자름을 모든 가능한 통로(channel)를 통하여 고려하면 생성집합을 얻게된다. 생성 집합을 구하는 또 다른 방법은 앞에서 설명한 방식과 반대의 방향으로 진행되는 ‘최대 자름’부터 시작하여 구하는 방법이 있다. 이 방법은  $\mathcal{N} = 4$  SYM에서 특히 유용하다. 산란 진폭의 내부 퍼뜨리개를 모두 온-셀에 둔 뒤 내부 퍼뜨리개들을 하나씩 온-셀의 조건을 없앰으로써 종국에는 퍼뜨리개에 대한 아무런 제한을 두지 않는 방법을 통하여 생성집합을 구한다. 어떤 방법을 통하여 생성 집합을 구했다면 남은일은 모든 통로에서의 올바른 자름에 관한 산란 진폭의 적분표현을 찾는 것이다. 산란 진폭을 유니타리-자름했을 때의 피적분 함수와 생성집합의 자름을 잘 비교하면 산란 진폭의 완전한 형태를 결정짓게 된다. 이러한 과정 또한 다음과 같은 두 가지 방법이 존재한다.

- 1) 자름-병합(cut-merging) 과정을 통한 산란 진폭 구축
- 2) 가설풀이(ansatz)를 이용한 산란 진폭 구축

1)의 과정은 서로 다른 자름들을 자름 조건을 없앤 피적분함수로 만드는 방법이다. 이 방법은 [20]에 잘 소개된 병합-과정(merging-process)을 적용시켜 구한다. 2)의 과정은 반대의 방향으로 산란 진폭을 구하는 과정이다. 이 경우 먼저 미지의 매개변수를 포함한 가설풀이(ansatz)를 통해 산란 진폭을 표현하고 유니타리티 자름을 통해 이 미지수를 결정하게 된다. 산란 진폭이 가져야 할 성질들을 고려하여 산란 진폭의 형태를 가늠 할 수 있기 때문에 2)의 과정과 같은 방법으로 산란 진폭을 구하는 방법이 좀 더 선호된다. 이 장에서 사용되는 방법은 2)를 통한 방법이다. 이 과정을 1-고리 단계에서 생각해 보자. 1-고리 단계 산란 진폭은 일반적으로 다음과

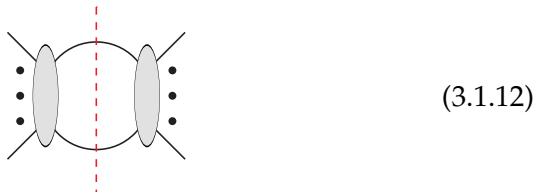
같이 표현 된다.[21]

$$\mathcal{A}^{\text{1-고리}} = \sum_i C_D^{(i)} I_D^{(i)} + \sum_j C_{D-1}^{(j)} I_{D-1}^{(j)} + \cdots + \sum_k C_2^{(k)} I_2^{(k)} + R \quad (3.1.10)$$

여기서  $I_m^{(i)}$ 은  $\phi^n$ 이론의 스칼라 적분이며  $R$ 은 유리(rational) 항이다.  $m$ 에 따라 고리의 모양이 결정 되고  $i$ 에 따라 외부 가지 수가 결정 된다. 예를 들어  $I_4^{(i)}$ 와 같은 박스 적분은 다음과 같이 표현 된다.

$$I_4^{(i)} = \begin{array}{c} K_1^{(i)} \\ \vdots \\ \ell \\ \vdots \\ K_4^{(i)} \end{array} = \int \frac{d^D \ell}{(2\pi)^D} \frac{1}{\ell^2 (\ell - K_1^{(i)})^2 (\ell - K_1^{(i)} - K_2^{(i)})^2 (\ell + K_4^{(i)})^2} \quad (3.1.11)$$

$\mathcal{N} = 4$  SYM에서는 1-고리 산란 진폭은 박스항 만을 가짐이 잘 알려져 있다.[5][22] 이러한 사실은 끈이론을 통해 얻은 결과이지만, 다음장에서 배우게 될 BCFW-재귀관계의 논리를 통해 쉽게 볼 수 있다.[23, 24] 개략적으로 BCFW-재귀관계는 산란 진폭을 복소수의 영역에 두개하여 이에대한 해석적 구조를 살펴봄으로써 산란 진폭을 얻는 방법이다.  $\mathcal{N} = 4$  SYM은 복소화된 산란 진폭이 모두 큰  $z$ 에 대해,  $\frac{1}{z}$ 로 행동한다. 이를 이용하면 거품(bubble)항과 삼각형(triangle) 항이 없어짐을 볼 수 있다. 또한 모든 초대칭 이론은  $R = 0$ 이다. 이 경우, 유니타리티-자름을 통해서 산란 진폭을 완전히 결정 할 수 있기 때문에 이를 자름 구축가능(cut constructible)이라 부른다.[5, 24]. 먼저 거품항에 대해 살펴보자. 거품항은 2 입자 유니타리티-자름을 통해 살펴 볼 수 있다. 도식적으로는 다음과 같다.



이렇게 자름을 하면 두 개의 가지 단계 산란 진폭의 곱으로 표현된다.

$$\begin{aligned} & \int d^4\eta_1 d^4\eta_2 \mathcal{A}_L \mathcal{A}_R \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{C_\infty} \frac{dz}{z} \int d^4\eta_1(z) d^4\eta_2(z) \mathcal{A}_L(z) \mathcal{A}_R - \sum_{finite poles} \text{Res} \left[ \frac{\mathcal{A}_L(z) \mathcal{A}_R(z)}{z} \right] \end{aligned} \quad (3.1.13)$$

이 경우 유한한 극에서의 유수는 삼각형항이나 박스항으로 표현되는 퍼 뜨리개와 관련있는 극이기 때문에 첫 째항이 거품항에 대한 기여를 줄 것임을 알 수 있다. 그런데 이 경우 Grassmann 변수를  $z$ 에 무관하게 바꾸는 것이 가능하고 전체 적분 값은 큰  $z$ 에 대하여  $\frac{1}{z}$ 이 되는 것을 알 수 있어 거 품항이 산란 진폭에 등장하지 않음을 알 수 있다. 마찬가지로 삼각형항은 3 입자 자름에 대한 항을 고려함으로 얻을 수 있고  $\mathcal{N} = 4$  SYM에서는 이 항도 없어짐을 알 수 있다.[24] 이에 따라  $\mathcal{N} = 4$  SYM에서 1-고리 단계 산란 진폭은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathcal{A}_{n,\mathcal{N}=4}^{1\text{-고리}} = \sum_i C_4^{(i)} I_4^{(i)} \quad (3.1.14)$$

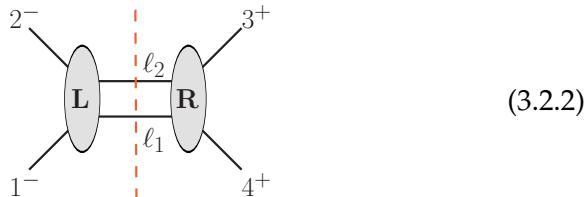
이렇게 스칼라적분의 전개를 통해 산란 진폭이 표현되면 유니타리티 자름을 통해 적분앞의 계수를 결정 할 수 있다. 이 이론에서는 박스적분만 존재하기 때문에 2 입자 자름을 통해서든 최대-자름을 통해서든 계수를 구하기가 쉬워진다. 여기서, 최대-자름에 대한 각각의 해들을 앞선 특이점 (leading singularity)이라 부르고 이 앞선 특이점은 온-쉘 도형(on-shell diagram)이라는 양에 대응되어 게이지 이론의 구조를 연구하는데 이용되고 있다. 다음 절에서는 이 유니타리티-방법을 통하여 1-고리 단계 4 입자 산란 진폭에 대해 살펴 볼 것이다.

## 3.2 1-고리 단계 4 입자 산란 진폭

이 절에서는  $\mathcal{N} = 4$  SYM 이론에서 4 입자 1-고리 글루온 산란 진폭에 대해 계산해 보자. 이 경우 0이 아닌 산란 진폭은 각각 두 개의 음과 양의 나선도를 가진 입자들의 산란 진폭인 경우이고 일반적으로 색-정렬된 1-고리 산란 진폭은 다음과 같다.<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4^{1\text{-고리}}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+) &= \mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+) I_4^{(4)}(N) \\ I_4^{(4)}(N) &= \int \frac{d^{4-2\epsilon} p}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \frac{N}{p^2(p-k_1)^2(p-k_1-k_2)^2(p+k_4)^2}\end{aligned}\quad (3.2.1)$$

여기서 산란 진폭은 t'Hooft 극한인 평면(planar) 산란 진폭을 고려한다. 이때  $\mathcal{A}_4^{\text{가지}}$ 는 색-대각합  $N_c \text{Tr}(T^{a_1} T^{a_2} T^{a_3} T^{a_4})$ 의 계수에 대한 항이다. 이 계수는 기본적으로 가지 단계 산란 진폭으로 나오지는 않지만 적절한 항을 삽입하여 가지 단계 산란 진폭으로 만들어 줄 수 있고 이를 적분밖으로 꺼낼 수 있다. 이 과정에서 남게 되는 항은 모두  $N$ 에 넣어준다. 이렇게 산란 진폭을 표현할 때  $N$ 을 결정하게 되면 1-고리 단계 산란 진폭을 구하게 된다.  $\mathcal{N} = 4$  SYM의 경우 삼각형(triangle)이나 거품(bubble)에 의한 기여가 없으며 오로지 박스 적분에 의해서 4 입자 산란 진폭이 결정된다. 먼저 s-통로 자름에 대해 고려해 보자. 이 경우 1-고리 산란 진폭은 자름을 기준으로 두 개의 가지 단계 산란 진폭으로 나뉜다. 이를 도식적으로 표현하면 s-통로 유니타리 자름은 다음과 같이 표현된다.



자름 된 산란 진폭은 자름을 지나는 이론상 가능한 모든 입자들을 고려해 주어야 한다.  $\mathcal{N} = 4$  SYM에 등장하는 입자들은 글루온(1), 페르미온

<sup>2</sup>편의상 나선도의 배열은  $(-, -, +, +)$ 로 두자.

(4), 스칼라(6), 반-페르미온(4), 반-글루온(1) 이 있고, 내부 퍼뜨리개에서 등장할 수도 있다. 하지만 위의 나선도 배열에서 s-통로 자름의 경우에는 내부 퍼뜨리개로 가능한 산란 진폭은 글루온만 존재한다. 예를 들어 고리 내부에 페르미온이 들어오는 경우를 보면 나선도 보존으로 가지 단계 산란 진폭이  $\mathcal{A}_4(g^+, g^+, f^+, f^-)$  와 같이 나타나고 초대칭적 Ward 항등식에 의해 이 항은 산란 진폭에 기여를 하지 않는다. 스칼라의 경우도 이 항등식을 이용하면 구하고자하는 나선도 배열에서 산란 진폭은 0이 된다. 따라서 s-통로 유니타리 자름으로 표현되는 산란 진폭은 다음과 같은 두 개의 글루온 가지 단계 산란 진폭의 곱으로 표현된다.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4^{\text{가지}}(-\ell_1^+, 1^-, 2^-, \ell_2^+) &= \frac{\delta^{(8)}(\mathbf{L})}{\langle -\ell_1 1 \rangle \langle 12 \rangle \langle 2 \ell_2 \rangle \langle \ell_2 - \ell_1 \rangle} \\ \mathcal{A}_4^{\text{가지}}(-\ell_2^-, 3^+, 4^+, \ell_1^-) &= \frac{\delta^{(8)}(\mathbf{R})}{\langle -\ell_2 3 \rangle \langle 34 \rangle \langle 4 \ell_1 \rangle \langle \ell_1 - \ell_2 \rangle}\end{aligned}\quad (3.2.3)$$

여기서 델타 함수들의 인자 L, R 들은 각각 다음과 같다.

$$\mathbf{L} = -|\ell_1\rangle\eta_{\ell_1} + |1\rangle\eta_1 + |2\rangle\eta_2 + |\ell_2\rangle\eta_{\ell_2} \quad (3.2.4)$$

$$\mathbf{R} = -|\ell_2\rangle\eta_{\ell_2} + |3\rangle\eta_3 + |4\rangle\eta_4 + |\ell_1\rangle\eta_{\ell_1} \quad (3.2.5)$$

스피너의 해석적 연속 조건인

$$|-p\rangle = -|p\rangle, \quad |-p] = |p] \quad (3.2.6)$$

를 이용했음을 유의하자. 이제 위의 관계들을 이용하여 s-통로 자름 산란 진폭을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}C_s &= \int d^4\eta_{\ell_1} d^4\eta_{\ell_2} \frac{\delta^{(8)}(\mathbf{L})\delta^{(8)}(\mathbf{R})}{\langle \ell_1 1 \rangle \langle 12 \rangle \langle 2 \ell_2 \rangle \langle \ell_2 \ell_1 \rangle \langle \ell_2 3 \rangle \langle 34 \rangle \langle 4 \ell_1 \rangle \langle \ell_1 \ell_2 \rangle} \\ &= \frac{\delta^{(8)}(\tilde{Q})}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle} \int d^4\eta_{\ell_1} d^4\eta_{\ell_2} \frac{\delta^{(8)}(\mathbf{R})}{\langle \ell_1 1 \rangle \langle 2 \ell_2 \rangle \langle \ell_2 \ell_1 \rangle \langle \ell_2 3 \rangle \langle 4 \ell_1 \rangle \langle \ell_1 \ell_2 \rangle} \\ &= \mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+) \frac{\langle 23 \rangle \langle 41 \rangle \langle \ell_1 \ell_2 \rangle^4}{\langle \ell_1 1 \rangle \langle 2 \ell_2 \rangle \langle \ell_2 \ell_1 \rangle \langle \ell_2 3 \rangle \langle 4 \ell_1 \rangle \langle \ell_1 \ell_2 \rangle}\end{aligned}$$

$$= -\mathcal{A}_4^{\gamma\gamma}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+) \frac{\tilde{N}}{(\ell_2 + k_2)^4 (\ell_1 + k_4)^4} \quad (3.2.7)$$

Grassmann 적분의 계산을 하는데 다음과 같은 관계식을 이용했다.

$$\delta^{(8)}(\mathbf{R}) = \frac{1}{4!} \prod_{A=1}^4 R_A^A R^{A\dot{A}}$$

$$\delta^{(8)}(\mathbf{L}) \delta^{(8)}(\mathbf{R}) = \delta^{(8)}(\mathbf{L} + \mathbf{R}) \delta^{(8)}(\mathbf{R}) = \delta^{(8)}(\tilde{Q}) \delta^{(8)}(\mathbf{R})$$

그 결과로 나온 항들은 다음을 통해 정리했다.

$$\langle 2\ell_2 \rangle [\ell_2 2] = -2k_2 \cdot k_{\ell_2} = -(k_2 + k_{\ell_2})^2, \quad (k_3 + k_{\ell_2})^2 = (k_4 + k_{\ell_1})^2$$

$$\langle 4\ell_1 \rangle [\ell_1 4] = -(k_4 + k_{\ell_1})^2, \quad (k_1 + k_{\ell_1})^2 = (k_2 + k_{\ell_2})^2$$

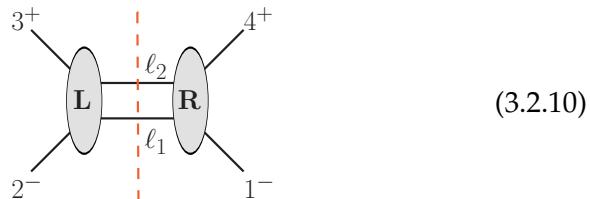
이 과정에서 남게되는 식 3.2.7 의 마지막 줄의 항  $\tilde{N}$ 은 다음과 같다.

$$\tilde{N} = -su(k_2 + k_{\ell_2})^2 (k_4 + k_{\ell_1})^2 \quad (3.2.8)$$

모두 정리하여 s-통로 유니타리티 자름 산란 진폭을 나타내면 다음과 같다.

$$C_s = \mathcal{A}_4^{\gamma\gamma}(1^- 2^- 3^+ 4^+) \frac{su}{(\ell_2 + k_2)^2 (\ell_1 + k_4)^2} \Big|_{\ell_1^2 = \ell_2^2 = 0} \quad (3.2.9)$$

또한 t-통로에서 자름된 산란 진폭은 다음과 같이 표현된다.



t-통로 자름에서는 나선도 배열 때문에  $\mathcal{N} = 4$  SYM의 이론에서 존재하는 모든 입자들이 내부가지에 등장한다. 하지만 초대칭적 Ward 항등식을 통해 이 산란 진폭들은 모두 글루온 산란 진폭으로 표현할 수 있고 이 상황에서 글루온 산란 진폭은 모두 MHV 산란 진폭이므로 Parke-Taylor

표현을 통해 간단히 구할 수 있다. 이를 이용하면 t-통로 유니타리티 자름으로 나뉜 가지 단계 산란 진폭은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4^{\text{가지}}(-\ell_1^{-h}, 2^-, 3^+, \ell_2^h) &= \frac{\langle -\ell_1 2 \rangle^{2+2h} \langle \ell_2 2 \rangle^{2-2h}}{\langle -\ell_1 2 \rangle \langle 23 \rangle \langle 3\ell_2 \rangle \langle \ell_2 - \ell_1 \rangle} \\ \mathcal{A}_4^{\text{가지}}(-\ell_2^{-h}, 4^+, 1^-, \ell_1^h) &= \frac{\langle -\ell_2 1 \rangle^{2+2h} \langle \ell_1 1 \rangle^{2-2h}}{\langle -\ell_2 4 \rangle \langle 41 \rangle \langle 1\ell_1 \rangle \langle \ell_1 - \ell_2 \rangle}\end{aligned}\quad (3.2.11)$$

이 식을 통해 t-통로 유니타리티 자름 산란 진폭을 구하면 다음과 같다.

$$\mathcal{A}_4^{1\text{-고리}}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+) \Big|_{t\text{-통로}} = su \mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+) I_4(s, t) \Big|_{t\text{-통로}} \quad (3.2.12)$$

여기서  $I_4(s, t)$ 는 다음의 적분식을 나타낸다.

$$I_4(s, t) = \int \frac{d^{4-2\epsilon} p}{(2\pi)^{4-2\epsilon}} \frac{1}{p^2(p-k_1)^2(p-k_1-k_2)^2(p+k_4)^2} \quad (3.2.13)$$

이는 임의의 통로에 대해 유니타리티 자름이 모두 같은 값을 주는 것을 의미한다. 임의의 통로에서 2 입자 유니타리티 자름을 살펴보면 자름되지 않은 내부 퍼뜨리개가 두 개 더 존재한다. 이는 1-고리 단계 4 입자 산란 진폭에 거품(bubble) 적분이나 삼각(triangle) 적분이 등장하지 않음을 의미한다. 따라서  $(1^-, 2^-, 3^+, 4^+)$  나선도 배열의 1-고리 4 입자 산란 진폭은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4^{1\text{-고리}}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+) &= C_4 I_4^4 + C_3 I_3^4 + \dots = C_4 I_4^4 \\ &= su \mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1^-, 2^-, 3^+, 4^+) I_4^4 \\ &= \mathcal{A}_4^{\text{가지}}(1, 2, 3, 4) \left\{ -\frac{1}{\epsilon^2} \left[ (-\mu^{-2} y_{13}^2)^{-\epsilon} + (-\mu^{-2} y_{24}^2)^{-\epsilon} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \log^2 \left( \frac{y_{13}^2}{y_{24}^2} \right) + \frac{\pi}{2} + O(\epsilon) \right\}\end{aligned}\quad (3.2.14)$$

위 식의 마지막 단계에서는 스칼라 적분을  $D = 4 - 2\epsilon$ 로 하는 차원 조절(dimensional regularization) 방법을 통해 계산 하였다. 질량 없는 상태

들을 다루는 이론은 모두 IR(infrared) 발산을 갖고 있다.  $\mathcal{N} = 4$  SYM 이론 또한 IR 발산을 가진다. 하지만 이러한 IR 발산항은 아주 잘 알려져 있다. IR 항은  $D = 4 - 2\epsilon$ 으로 차원 조절을 하면 L-고리 산란 진폭에  $\frac{1}{\epsilon^{2L}}$  항으로 등장하게 된다. 이는 고리 내의 운동량이 외부 입자와 함께 동일 선형(collinear)<sup>3</sup>이 될 때와 무른(soft) 극한에서 각각이  $\frac{1}{\epsilon}$ 으로 기여한다.<sup>4</sup> 우리의 예에서는  $-\frac{1}{\epsilon^2} ((-\mu^{-2}y_{13}^2)^{-\epsilon} + (-\mu^{-2}y_{24}^2)^{-\epsilon})$  항이 이에 해당한다. QED에서 제동복사(Bremsstrahlung)와 꼭짓점 보정(vertex correction)을 산란 단면적(scattering cross section)을 계산하면서 물리적 측정량 단계에서는 IR 발산이 사라짐을 확인한 것과 마찬가지로 적당한 가측 물리량들을 얻을 때는 IR 발산항이 상쇄됨을 알 수 있다.[26] 이와 함께  $\mathcal{N} = 4$  SYM에서 뾰족 비정상 차원(cusp anomalous dimension)을 통해서 IR 발산을 상쇄되는 물리량을 설정할 수도 있다.[27, 28] 또한 이 IR 발산항이 범용적(universal)한 성질을 갖고 있다는 사실을 통해 산란 진폭을 ABDK/BDS 가설을 통해 표현했고 [29, 30] 이로부터 파생된 잉여 함수(remainder function)나 심볼(symbol)이라는 물리량의 도입으로 고리 단계 산란 진폭 분야에 대한 연구도 활발히 진행되고 있다. 다음 장에서는 이제까지 살펴본 게이지 이론의 산란 진폭을 BCFW-재귀관계를 통하여 살펴볼 것이다. 제4장의 마지막에서는 이 장에서 얻은 1-고리 4 입자 산란 진폭이 BCFW를 통해 구한 결과와 같음을 확인할 것이다.

---

<sup>3</sup>두 입자의 운동량이 서로 비례하는 관계가 될 때 collinear 라 부른다. 게이지 이론에서 collinear 극한에 대한 논의는 1970년대 후반 이후로 연구가 진행 됐고, 이에 대한 논의는 [25]에 잘 소개돼 있다.

<sup>4</sup>적분에서 이 입자들의 자유도와 차원상의 문제로 등장한다.

## 제 4 장

# BCFW-재귀관계식과 그 응용

전 장까지는 Feynman 도형에 의존하는 계산을 통하여 비 가환 게이지이론을 섭동적인 양자장 이론을 통하여 살펴보았다. 이 방법은 외부가지가 늘어남에 따라 계산의 복잡도 또한 엄청나게 늘어난다. 하지만 이를 통해 얻게되는 결과는 너무나도 간단했다. 이러한 점에 대한 의문을 해결하기 위한 한 가지 노력으로 Britto, Cachazo, Feng, Witten 이 제안한 방법이 있다.[2, 3] 이를 BCFW-재귀관계라 부른다. 이 장에서는 이들이 제안한 가지 단계 산란 진폭에 대한 논의와 함께 이를 이용하면 전 장에서 언급한 양들에 대한 일반적 증명을 할 것이다. 최근에는 이 방법이 고리 단계에서도 논의되고 있으며 이를 운동량 초 트위스터(momentum supertwistor)공간에서 어떻게 표현되는지 살펴보고자 한다.

### 4.1 가지 단계 BCFW-재귀관계식

이 절에서는 가지 단계 BCFW-재귀 관계식에 대한 일반적인 논의와 함께 Yang-Mills 이론에서 BCFW-재귀관계의 유효성에 대하여 살펴볼 것이다. 또한 Feynman 도형을 통해 계산 할 경우 38개의 항을 계산해야 한다. 색-대수와 관련된 항등식과 BCFW-재귀관계를 이용하면 Feynman 도형을 계산하는 방법으로는 상당한 계산이 필요한  $n = 6$  NMHV 산란 진폭을 보다 간단하게 구하게 됨으로써 BCFW-재귀관계의 강력함을 확인 해 볼 수 있다.

### 4.1.1 Britto-Cachazo-Feng-Witten 재귀관계식

이 소절에서는 BCFW-재귀관계에 대해 알아보도록 하자. 이 관계식은 가지 단계에서의 글루온(gluon)산란 진폭의 계산량을 대폭 줄여준다. 처음 이 관계식이 도입됐을 때는 가지 단계에서의 산란 진폭에 대한 이론이었지만 최근에는 이 관계가 고리 단계에서도 활용된다는 것을 알게 되었다. 향후 고리 단계에 대한 논의에서 이에 관한 내용을 다룰 것이다.

BCFW 재귀 관계식은 가지 단계 산란 진폭에서 어떤 임의의 두 입자의 운동량을 **복소화**시켜 임의의 가지 단계 산란 진폭이 두 개의 더 적은 가지들의 on-shell 산란 진폭의 곱으로 나타난다는 관계에 대한 식이다. 이 관계식은 크게 세 단계의 과정을 거쳐 얻을 수 있다.

#### 1) 산란 진폭에서 $n$ 개의 입자들 중 2개의 입자들을 복소화시킨다.

이 단계에서 복소화 되는 운동량들을 편의상  $p_i, p_j$ 라고 하고 운동량을 다음과 같이 변화시키자.

$$\begin{aligned} p_i \rightarrow p_i(z) &= p_i - z\zeta, & p_j \rightarrow p_j(z) &= p_j + z\zeta \\ \zeta^2 = 0, & & p_i \cdot \zeta = p_j \cdot \zeta &= 0 \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

이렇게 운동량을 복소화 시키면 다음과 같은 조건을 만족시킨다.

$$\begin{aligned} p_i(z)^2 = p_j(z)^2 &= 0 && (\text{온-쉘 조건}) \\ p_i(z) + p_j(z) &= p_i + p_j && (\text{운동량 보존}) \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

식 (4.1.1)에서  $\zeta$ 를  $SL(2, \mathbb{C})$ 의 표현으로 나타내면 다음과 같다.<sup>1</sup>

$$\zeta_{a\dot{a}} = |j]_a \langle i|_{\dot{a}}, \quad \zeta^{\dot{a}a} = |i\rangle^{\dot{a}} [j|^a \tag{4.1.3}$$

---

<sup>1</sup> $i \leftrightarrow j$ 를 바꿔서 선택해도 식 4.1.1을 만족 한다.

이를 이용하면 운동량은 다음과 같이 표현된다.<sup>2</sup>

$$p_{ia\dot{a}}(z) = -(|i]_a + z|j]_a)\langle i|_{\dot{a}}, \quad p_j^{\dot{a}a}(z) = -(|j\rangle^{\dot{a}} - z|i\rangle^{\dot{a}})[j|^a \quad (4.1.4)$$

그러면 복소화 된 스피너들은 다음과 같이 표현된다.

$$|i]_a \rightarrow |i]_a + z|j]_a, \quad |j\rangle^{\dot{a}} \rightarrow |j\rangle^{\dot{a}} - z|i\rangle^{\dot{a}} \quad (4.1.5)$$

이를  $[ij]\rangle$ -변형이라 부른다.

## 2) 복소화된 산란 진폭으로 원래의 산란 진폭을 표현한다.

산란 진폭은 운동량과 편광 벡터에 대한 함수이므로 운동량이 복소화됨에 따라 편광 벡터 또한 복소화 되고 이에 따라 산란 진폭 또한 복소화 됨을 알 수 있다. 이 산란 진폭을 복소수  $z$ 의 함수인  $\mathcal{A}_n(z)$ 라 두자. 당분간  $z \rightarrow \infty$ 에 따라  $\mathcal{A}(z) \rightarrow 0$ 이 됨을 가정하자. 산란 진폭이 큰  $z$ 에 대해 0으로 가는 거동에 대해서는 다음 절에서 다룬다. 위의 과정을 통해 운동량을 복소화 시키면 산란 진폭  $\mathcal{A}$ 는  $\mathcal{A}(z)|_{z=0}$ 임을 알 수 있고 이는 다음과 같은 적분을 통하여 구할 수 있다.

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} \frac{dz}{z} \mathcal{A}(z) = \mathcal{A}(0) + \sum_{\text{poles}} \text{Res} \left[ \frac{\mathcal{A}(z)}{z} \right]_p \quad (4.1.6)$$

앞서 언급했듯, 이 적분에서는  $z \rightarrow \infty$ 에서의 기여도는 무시하였다.

## 3) 과정 2)의 식 4.1.6에 등장하는 유수 값(residue)을 구한다.

이 식에서 표현된 유수 값은  $\mathcal{A}_n(z)$ 의 해석적 구조에 의해 결정된다. 가지 단계 산란 진폭에서는 분지 절단(branch cut) 같은 특이성이 존재하지 않는 단순 극점(simple pole)만을 가진다. 가지 단계의 Feynman 도형에서

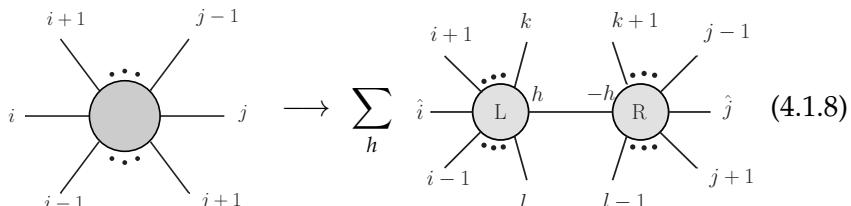
---

<sup>2</sup>여기서  $\zeta_{a\dot{a}} = |j]_a \langle i|_a$ 로 선택하여 식을 전개했다.

내부의 퍼뜨리개(Propagator)의 형태가  $\frac{1}{P_I^2}$ 이므로  $\mathcal{A}_n(z)$ 의 단순 극점은  $P_I^2 = 0$ 인 곳에 위치한다. 따라서  $P_I^2 = 0$ 이 되는 복소변수  $z$ 를 통해 위 적분의 유수(residue)값을 구한다. 그런데 내부 퍼뜨리개가 온-쉘 조건을 가지면 이 산란 진폭은 온-쉘 조건을 갖는 퍼뜨리개를 중심으로 두 개의 더 적은 개수의 가지 단계 산란 진폭과 그 퍼뜨리개의 곱(factorization)으로 표현된다.[31, 32] 가지 단계  $n$  입자 산란 진폭을 구할 때 어떤 두 운동량의 복소화에 임의성이 존재하지만, 위의 논의가 성립되기 위해서는 내부 퍼뜨리개를 기준으로 분해(factorization)되는 두 산란 진폭이 각각 하나의 복소화된 운동량을 갖는 외부 입자를 가져야 한다. 만일 어느 하나의 산란 진폭에만 복소화된 두 운동량이 할당돼 있다면 우리가 설정한 내부 퍼뜨리개는 단일 극점을 갖게 되지 않게 되고 위의 논의를 시작할 수 없다. 따라서 어떤 두 운동량을 복소화 시키면 이 두 운동량은 단일 극점을 갖게 되는 퍼뜨리개를 중심으로 각각 양쪽으로 나눠지게 된다. 이제 위의 방법을 통해 실제 이 관계식을 정량적으로 구해 보자. 이 관계식을 구하는 데 있어서 퍼뜨리개에 대한 논의가 아주 중요하다. 계산을 보다 간단하게 하고자 다음과 같은 양을 정의한다.

$$P_{l,k} \equiv p_l + p_{l+1} + \cdots + p_{k-1} + p_k \quad (4.1.7)$$

이때 위의 과정은 도식적으로 다음과 같이 표현된다.



도식 (4.1.8)에서 퍼뜨리개를 중심으로 왼쪽에 있는 산란 진폭을  $\mathcal{A}_L(z)$ , 오른쪽에 있는 산란 진폭을  $\mathcal{A}_R(z)$ 라 하자. Feynman 도형으로부터 구하는 산란 진폭은 섭동적 전개에서 동일 차수(order)들의 가능한 모든 합이라

는 점을 통해  $n$ 개의 글루온에 관한 가지 단계 산란 진폭은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\lim_{P_I(z)^2 \rightarrow 0} \mathcal{A}_n(z) \longrightarrow \sum_{l,k \in \mathcal{P}} \sum_{h=\pm} \frac{\mathcal{A}_L^h(z) \mathcal{A}_R^{-h}(z)}{P_{l,k}^2(z)} \quad (4.1.9)$$

여기서  $\mathcal{P}$ 는  $i$ 을 포함하는 가능한 모든 범위의 정수 집합이고 이때 나뉘어진 하위 산란 진폭은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_L(z_{l,k}) &= \mathcal{A}(-\hat{P}_{l,k}^h, l, \dots, k), \\ \mathcal{A}_R(z_{l,k}) &= \mathcal{A}(k+1, \dots, l-1, \hat{P}_{l,k}^{-h}) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

여기서 ♦표현은 복소화 된 운동량  $\hat{p}_i$  또는  $\hat{p}_j$ 를 구분 짓기 위해 나타낸 표현이다. 그렇다면 이제  $\hat{P}_{l,k}^2 = 0$ 이 되는  $z$ 를 찾자.

$$\begin{aligned} \hat{P}_{l,k}^2 &= (P_{l,k} - z\zeta)^2 = P_{l,k}^2 - 2z\zeta \cdot P_{l,k} \\ &\longrightarrow z_{l,k} = -\frac{P_{l,k}^2}{\langle i | \hat{p}_{l,k} | j \rangle} \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

이를 이용해서  $\mathcal{A}_n(z)$ 를 다시 나타내면 다음과 같다.

$$\mathcal{A}_n(z) = \sum_{l,k \in \mathcal{P}} \sum_{h=\pm} \frac{\mathcal{A}_L^h(z_{l,k}) \mathcal{A}_R^{-h}(z_{l,k})}{(z - z_{l,k}) \langle i | \hat{p}_{l,k} | j \rangle} \quad (4.1.12)$$

따라서

$$\text{Res} \left[ \frac{\mathcal{A}(z)}{z} \right]_p = - \sum_{l,k \in \mathcal{P}} \sum_{h=\pm} \frac{\mathcal{A}_L^h(z_{l,k}) \mathcal{A}_R^{-h}(z_{l,k})}{P_{l,k}^2} \quad (4.1.13)$$

임을 얻게 되고 최종적으로  $n$ 개의 글루온에 관한 가지 단계 산란 진폭  $\mathcal{A}_n(0)$ 은 다음과 같다.

$$\mathcal{A}_n = \sum_{l,k \in \mathcal{P}} \sum_{h=\pm} \frac{\mathcal{A}_L^h(z_{l,k}) \mathcal{A}_R^{-h}(z_{l,k})}{P_{l,k}^2} \quad (4.1.14)$$

이 관계식을 **BCFW-재귀관계식** 이라 한다. BCFW-재귀관계식은 어떤  $n$  입자 가지 단계 산란 진폭을 Feynman 도형을 직접 계산하지 않고 더 낫

은 가지의 결과를 이용하는 방법으로 산란 진폭을 구한다. 이를 이용하면 이전 절에서 소개된 임의의  $n$  입자에 대한 Parke-Taylor식의 표현에 대한 증명이 가능하다. 여기서는 간단하게  $\mathcal{A}_n(1^-, 2^-, 3^+, \dots, n^+)$ 에 대해 Parke-Taylor 식이 성립함을 보이자. 이를 보이면 초대칭적 Ward 항등식을 통해 임의의  $i, j$  번째 운동량의 나선도가 음인 MHV 산란 진폭을 얻는다. 먼저 도식적으로 이 식을 나타내면 다음과 같이 분해 된다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(1^-, 2^-, 3^+, \dots, n^+) &= \sum_{k=4}^n \text{Diagram} \\ &= \sum_{k=4}^n \sum_{h_1=\pm} \mathcal{A}_{n-k+3}(\hat{1}^-, -\hat{P}_I^{h_1}, k^+, \dots, n^+) \frac{1}{\hat{P}_I^2} \\ &\quad \times \mathcal{A}_{k-1}(\hat{P}_I^{-h_1}, \hat{2}^-, 3^+, \dots, (k-1)^+) \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

위의 도식 (4.1.15)를 살펴보자. 여기서  $\mathcal{A}_{n \geq 4}(-, +, +, \dots, +) = 0$ 이라 는 사실로부터 L이나 R에 세 개의 가지만 남는 경우만이 산란 진폭에 기여한다는 것을 알 수 있고 도식적으로는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(1^-, 2^-, 3^+, \dots, n^+) &= \text{Diagram} + \text{Diagram} \\ &= \text{Diagram} + \text{Diagram} \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

이렇게 나온 두 도형에서 첫 번째 도형을 먼저 계산해 보자.

$$\begin{aligned}
 & \hat{1}^- \quad \hat{2}^- \\
 & \text{L} \quad \text{R} \\
 & + \quad - \\
 & n^+ \quad (n-1)^+
 \end{aligned}
 \quad (4.1.17)$$

$$= \frac{[-\hat{P}_I n]^4}{[-\hat{P}_I n][n \hat{1}][\hat{1} - \hat{P}_I]} \frac{1}{P_I^2} \frac{\langle \hat{P}_I 2 \rangle^4}{\langle P_I 2 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \cdots \langle (n-1) \hat{P}_I \rangle}$$

여기서  $P_I = P_{n,1} = p_1 + p_n$ 이고 다음과 같은 해석적 연속(analytic continuation)을 이용하자:

$$| -p \rangle = -| p \rangle, \quad | -p ] = | p ] \quad (4.1.18)$$

이를 통해 식 4.1.17를 다시 나타내 보자. 식 (4.1.17)에서 분해된 산란진폭 중 왼쪽 산란진폭  $\mathcal{A}_L$ 은 다음과 같다.

$$\mathcal{A}_L = \frac{[-\hat{P}_I n]^4}{[-\hat{P}_I n][n \hat{1}][\hat{1} - \hat{P}_I]} = \frac{[\hat{P}_I n]^4}{[\hat{P}_I n][n \hat{1}][\hat{1} \hat{P}_I]}$$

위의 항은  $\hat{P}_{n,1}^\mu = \hat{p}_1^\mu + p_n^\mu$ 이고,  $\hat{P}_{n,1}^\mu$ 는 온-쉘 조건을 만족 하는 것을 이용 할 수 있다. 이를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \hat{P}_{n,1}^2 &= (\hat{p}_1^\mu + p_n^\mu)^2 = 2\hat{p}_1 \cdot p_n = -\langle 1 n \rangle [n \hat{1}] = \langle 1 n \rangle [\hat{1} n] = 0 \\
 & \quad (4.1.19)
 \end{aligned}$$

온-쉘 조건을 통해  $[\hat{1} n] = 0$ 을 얻고 이를 이용하면  $[\hat{P}_{n,1} n]$ 과  $[\hat{1} \hat{P}_{2n,1}]$ 의 값 또한 구할 수 있다.

$$|\hat{P}_{n,1}\rangle [\hat{P}_{n,1} n] = -\not{P}_{n,1}|n] = -(\not{p}_1 + \not{p}_n)|n] = |1\rangle [\hat{1} n] = 0 \quad (4.1.20)$$

$$|\hat{P}_{n,1}\rangle [\hat{P}_{n,1} \hat{1}] = -\not{P}_{n,1}|\hat{1}] = -(\not{p}_1 + \not{p}_n)|\hat{1}] = |n\rangle [n \hat{1}] = 0 \quad (4.1.21)$$

따라서 위의 도형은 산란 진폭에 아무런 기여를 하지 않는다. 이런 이유로 도식 (4.1.16)에서 두 번째 도형만 계산하면  $\mathcal{A}_n(1^-, 2^-, 3^+, \dots, n^+)$ 을

얻을 수 있다.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_n(1^-, 2^-, 3^+, \dots, n^+) &= \text{Diagram} \\
 &= \frac{\langle \hat{1}\hat{P}_I \rangle^4}{\langle \hat{1}\hat{P}_I \rangle \langle \hat{P}_I 4 \rangle \langle 45 \rangle \cdots \langle n\hat{1} \rangle} \frac{1}{P_I^2} \frac{[3 - \hat{P}_I]^4}{[-\hat{P}_I 2][23][3 - \hat{P}_I]} \\
 &= \frac{\langle \hat{1}\hat{P}_I \rangle^3}{\langle \hat{P}_I 4 \rangle \langle 45 \rangle \cdots \langle n\hat{1} \rangle} \frac{1}{P_I^2} \frac{[3\hat{P}_I]^3}{[\hat{P}_I \hat{2}][\hat{2}3]} \\
 &= \frac{\langle \hat{1}\hat{P}_{2,3} \rangle^3}{\langle \hat{P}_{2,3} 4 \rangle \langle 45 \rangle \cdots \langle n\hat{1} \rangle} \frac{1}{\langle 23 \rangle [2\hat{3}]} \frac{[3\hat{P}_{2,3}]^3}{[\hat{P}_{2,3} \hat{2}][\hat{2}3]} \\
 &\quad (4.1.22)
 \end{aligned}$$

위의 식 (4.1.22) 은 다음과 같은 계산을 통해  $\bullet$ 을 벗겨낼 수 있다.

$$\langle \hat{1}\hat{P}_{2,3} \rangle [3\hat{P}_{2,3}] = \langle \hat{1} | \hat{P}_{2,3} | 3 \rangle = \langle \hat{1} | \hat{p}_2 + \hat{p}_3 | 3 \rangle = -\langle \hat{1} 2 \rangle [23] = -\langle 12 \rangle [23] \quad (4.1.23)$$

$$\langle \hat{P}_{2,3} 4 \rangle [\hat{P}_{2,3} \hat{2}] = \langle 4 | \hat{P}_{2,3} | \hat{2} \rangle = -\langle 43 \rangle [32] \quad (4.1.24)$$

이를 통해 식 (4.1.22) 를 다듬어 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_n(1^-, 2^-, 3^+, \dots, n^+) &= \frac{(-\langle 12 \rangle [23])^3}{-\langle 43 \rangle [32] \langle 45 \rangle \cdots \langle n1 \rangle} \frac{1}{\langle 23 \rangle [23][23]} \\
 &= \frac{\langle 12 \rangle^4}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \langle 34 \rangle \cdots \langle n1 \rangle} \quad (4.1.25)
 \end{aligned}$$

BCFW 재귀공식을 통해서  $n < 6$ 에서는 MHV 산란 진폭만이 존재한다는 사실 또한 쉽게 보일 수 있다.

### 4.1.2 $z \rightarrow \infty$ 에서의 $\mathcal{A}_n(z)$ 의 거동

이전 절에서는 복소화된 산란 진폭이  $z \rightarrow \infty$ 에서 0이 됨을 가정하고 논의를 진행하여 BCFW-재귀관계를 얻었다. 이 절에서는 이러한 가정의 유효성에 대해 살펴본다. 특히 Yang-Mills 이론에서 논의를 진행한다. 논의에 앞서 Yang-Mills 이론에서  $z \rightarrow \infty$ 에 대한 MHV 산란 진폭의 거동에 대해 알아보자. MHV 산란 진폭은 Parke-Taylor 공식을 통해 표현된다.

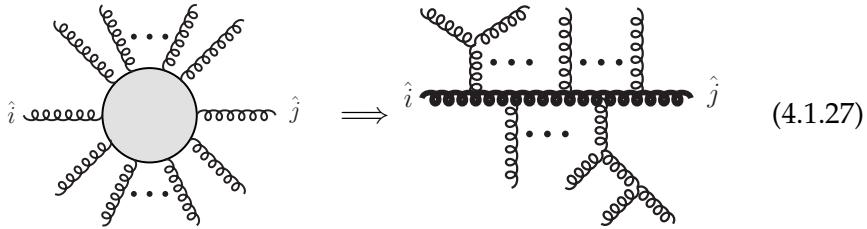
$$\mathcal{A}_n(1^+, 2^+, \dots, i^-, \dots, j^-, \dots, n^+) = \frac{\langle i j \rangle^4}{\langle 1 2 \rangle \langle 2 3 \rangle \cdots \langle n 1 \rangle} \quad (4.1.26)$$

BCFW-재귀 관계식에서는 산란에 관여하는  $n$ 개의 입자들 중, 두 개의 입자를 택하여 복소화 시킨다. MHV 산란 진폭은 이렇게 복소화된 두 입자의 나선도에 따라  $z$ 에 대한 의존성이 변하는 것이 명확하게 보인다. 복소화된 두 입자는 다음과 같은 네 부류로 나뉘고 이에 따른 산란 진폭의  $z$ 에 대한 의존성은 다음과 같다.

- |   |                                   |            |  |
|---|-----------------------------------|------------|--|
| 1) $\hat{p}_i = p_i - z\zeta_{[ij]}$                  | $\hat{p}_j = p_j + z\zeta_{[ij]}$ | $\implies$ | $\begin{cases} \mathcal{A}_n(z) \rightarrow z^{-1}, (i, j - \text{인접}) \\ \mathcal{A}_n(z) \rightarrow z^{-2}, (\text{그 외}) \end{cases}$ |
| 2) $\hat{p}_i = p_i - z\zeta_{[ik]} (k \neq j)$       | $\hat{p}_k = p_k + z\zeta_{[ik]}$ | $\implies$ | $\begin{cases} \mathcal{A}_n(z) \rightarrow z^{-1}, (i, k - \text{인접}) \\ \mathcal{A}_n(z) \rightarrow z^{-2}, (\text{그 외}) \end{cases}$ |
| 3) $\hat{p}_i = p_i - z\zeta_{[ki]} (k \neq j)$       | $\hat{p}_k = p_k + \zeta_{[ki]}$  | $\implies$ | $\begin{cases} \mathcal{A}_n(z) \rightarrow z^2, (i, k - \text{인접}) \\ \mathcal{A}_n(z) \rightarrow z^3, (\text{그 외}) \end{cases}$       |
| 4) $\hat{p}_k = p_k - z\zeta_{[kl]} (k, l \neq i, j)$ | $\hat{p}_l = p_l + \zeta_{[kl]}$  | $\implies$ | $\begin{cases} \mathcal{A}_n(z) \rightarrow z^{-1}, (l, k - \text{인접}) \\ \mathcal{A}_n(z) \rightarrow z^{-2}, (\text{그 외}) \end{cases}$ |

여기서  $[..]$ 은 변형되는 스피너를 의미한다. BCFW-변형에서 복소화되는 두 입자는 자유롭게 선택 할 수 있고 MHV에서는 언제든  $z \rightarrow \infty$ 에서 산란 진폭이 0이 되도록 하는 선택이 가능하다. Yang-Mills 이론에서 MHV가 아닌 일반적인 산란 진폭에 대해서도 이 주장은 유효하다. BCFW-변

형을 통해 얻는 산란 진폭의 큰  $z$ 에 대한 거동을 Feynman 도형을 통해서 간단하게 유추해 보자.  $z \rightarrow \infty$ 에서의 산란 진폭을 생각할 것이므로 산란에 참여하는  $n$ 개의 입자 중 산란 진폭에 지배적인 영향을 주는 입자는 복소화되는 두 개의 입자이다. 도식적으로는 다음과 같다.



편의상 복소화 되는 가지를  $i, j$  번 째 가지로 잡았다.  $z \rightarrow \infty$ 에서의 경향성을 볼 것이므로 이 상황에서 0이 되지 않는  $n$  입자 산란 진폭은 3-꼭짓점 함수  $n$ 개와  $n - 1$ 개의 내부 퍼뜨리개로 이루어져 있음을 알 수 있다. 이들은 각각  $z$ 에 대해 선형적으로 비례하기 때문에  $n$ -꼭짓점 함수는  $\frac{z^n}{z^{n-1}} = z$ 에 비례함을 알 수 있다. 산란 진폭은  $n$ -꼭짓점 함수에 편광 벡터를 내적 한 양이고 이 편광 벡터들 중  $i, j$  번 째 편광 벡터들은 복소화돼 있다. 식 (2.2.35)에서 편광 벡터들은 두 입자 모두  $\frac{1}{z}$ 에 비례함을 알 수 있고 이에 따른 산란 진폭은  $\frac{1}{z}$ 에 비례함을 알 수 있기 때문에  $z \rightarrow \infty$ 에서 산란 진폭이 0이 되는 복소화가 가능하다. 이제는 이 성질을 라그랑지안 단계에서 살펴보자.  $z \rightarrow \infty$ 으로 인해 복소 산란 진폭의 복소화된 두 입자의 운동량은 다른 입자에 비해 매우 크다. 이는 마치 부드러운(soft) 배경(background)에서 큰 운동량을 가진 두 입자가 충돌하는 것과 같은 효과를 준다. 따라서 복소화 되지 않은 입자들이 만들어내는 부드러운 배경에서 복소화 된 큰 운동량의 두 입자가 충돌하는 산란 진폭에 대한 계산을 통해  $z \rightarrow \infty$ 에서의 산란 진폭의 거동을 살펴볼 수 있음을 알게 된다. 복소화 되지 않은 글루온들이 만들어내는 배경 장(background field)에서 복소화 된 두 입자의 산란 진폭을  $M^{\mu\nu}$ 라 하고 이에 대해 살펴보자. 부드러운 배경에서의 게이지 장과 이에 따른 공변미분(covariant derivative)을 나타내보면

다음과 같다.

$$A_\mu = \mathcal{A}_\mu + a_\mu, \quad D_\mu = \mathcal{D}_\mu - ia_\mu \quad (4.1.28)$$

여기서 위 식의 우변의 첫 째항은 배경 장에 대한 항이고 두 번째 항은 이에 대한 요동 장(fluctuation field)에 의한 항이다. 이 경우 장 세기 텐서  $F_{\mu\nu}$ 는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$F_{\mu\nu} = \mathcal{F}_{\mu\nu} + \mathcal{D}_\mu a_\nu - \mathcal{D}_\nu a_\mu - i[a_\mu, a_\nu] \quad (4.1.29)$$

이에 따른  $a_\mu$ 에 관한 YM 라그랑지안  $\mathcal{L}_{\text{YM}}$ 의 이차 항은 다음과 같다.

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4g^2} \text{Tr}(\mathcal{D}_{[\mu} a_{\nu]} \mathcal{D}^{[\mu} a^{\nu]}) + \frac{i}{2g^2} \text{Tr}([a_\mu, a_\nu] \mathcal{F}^{\mu\nu}) \quad (4.1.30)$$

$\mathcal{D}$ 는 배경 장  $\mathcal{A}$ 에 대한 공변 미분이고,  $\mathcal{F}_{\mu\nu}$ 는 배경 장에 대한 장 세기 텐서이다. 여기서  $\mathcal{A}$ 와  $a$ 에 대한 게이지 대칭성이 존재하는데  $(\mathcal{D}_\mu a^\mu)^2$ 을 라그랑지안에 더해줌으로써  $a$ 에 대한 게이지 자유도를 고정하자. 게이지 고정된 라그랑지안은 다음과 같다.

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4g^2} \text{Tr}(\mathcal{D}_\mu a_\nu \mathcal{D}^\mu a^\nu) + \frac{i}{2g^2} \text{Tr}([a_\mu, a_\nu] \mathcal{F}^{\mu\nu}) \quad (4.1.31)$$

이 라그랑지안을 보면 첫 째항 만이  $\mathcal{O}(z)$ 인 꼭짓점 함수를 줄 것임을 알 수 있고 이에 따라  $z \rightarrow \infty$ 에서 산란 진폭에 기여하는 값은 이 항으로부터 나올 것을 알 수 있다. 또한 이 첫 번째 항은  $a_\nu$ 장의 첨자에 대해서만 Lorentz 변환을 하는 경우에도 변하지 않는다. 이 대칭을 강화된 Lorentz 스픈 대칭(enhanced Lorentz spin symmetry)이라고 부르고 이에 대해 첨자들을 바꿔 쓰면 다음과 같이 라그랑지안을 쓸 수 있다.

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4g^2} \text{Tr}(\eta^{ab} \mathcal{D}_\mu a_a \mathcal{D}^\mu a_b) + \frac{i}{2g^2} \text{Tr}([a_a, a_b] \mathcal{F}^{ab}) \quad (4.1.32)$$

이 라그랑지안을 통해 2 입자 산란에서  $\mathcal{O}(z)$ 에 비례하게 되는 꼭짓점 (vertex)은 배경 장과 요동장이 결합하여 나오는 항이다. 또한 이 항은 항

상  $\eta^{ab}$  항을 포함하므로 이 항에 의한 산란 진폭은 항상  $\eta^{ab}$ 에 비례하는 항이 된다. 식 (4.1.32)의 두 번째 항이 산란 진폭에 기여하면서 퍼뜨리개(propagator) 항이 항상 들어가고 이에 따른 항은  $z^{-1}$ 에 비례한다. 따라서 2 입자 산란 진폭에 대한 항은 다음과 같이 표현 할 수 있게 된다.

$$\mathcal{M}^{ab} = (cz + \dots) \eta^{ab} + A^{ab} + \frac{1}{z} B^{ab} + \dots \quad (4.1.33)$$

이때  $A^{ab}$ 는  $a, b$ 에 대하여 반대칭(antisymmetric)이다. Yang-Mills 이론에 대한 Ward 항등식은  $\mathcal{M}^{ab}$ 에 대한 제약조건(constraint)을 더 준다:

$$p_{ia}(z) \mathcal{M}^{ab} \epsilon_{jb} = 0 \quad (4.1.34)$$

여기서  $p_{ia}(z) = p_i - z\zeta^i$ 이고  $|ij\rangle$ -변형을 통해  $\zeta$ 를 설정한다. 편광 벡터에서 분모의 스피너 내적 값들은  $z$ 의 의존도가 없기 때문에<sup>3</sup> 이 논의에서는 편광 벡터의 분모를 생략하여 사용하자. 이를 이용하면  $\zeta = \epsilon_i^- = \epsilon_j^+$ 가 된다. 앞으로의 논의를 위해  $\epsilon_i^+, \epsilon_j^+$ 를  $SL(2, \mathbb{C})$ 에서 표현하자. 운동량의 복소화로 인해 편광 벡터에도 다음과 같은 변화가 생긴다<sup>4,5</sup>:

$$\begin{aligned} \epsilon_i^+(z) &= |i\rangle\langle j| + zp_j, & \epsilon_i^-(z) &= |j\rangle\langle i| \\ \epsilon_j^-(z) &= |i\rangle\langle j| - zp_i, & \epsilon_j^+(z) &= |j\rangle\langle i| \end{aligned} \quad (4.1.35)$$

이들을 이용하면 산란 진폭의  $z$ 의 의존도를 알 수 있다. 산란 진폭은 앞서 표현 된 식 (4.1.33)의 2-꼭짓점 함수  $\mathcal{M}^{ab}$ 에 편광 벡터들이 내적된 값이고 편광 벡터의 나선도에 따라  $\mathcal{M}^{-+}, \mathcal{M}^{--}, \mathcal{M}^{+-}$ , 그리고  $\mathcal{M}^{++}$ , 이렇게 네 가지 가능한 배열(configuration)의 산란 진폭들이 존재한다. 나열한 순서대로  $z$ 의 의존도를 알아보자. 여기서 Ward 항등식을 좀 더 풀어서 써 보면 이 항등식의 유용성이 좀 더 명확히 보인다. 예를 들면 다음과 같은

<sup>3</sup>  $\langle \hat{i}\hat{j} \rangle = \langle i|(|j\rangle - z|i\rangle) = \langle ij\rangle$

<sup>4</sup> 첨자는  $aa$ 순으로 명확하기 때문에 생략 했다.

<sup>5</sup> 운동량이  $|ij\rangle$ -변형을 통해 복소화 되는 경우, 이에 따른 편광 벡터는 운동량에 관한 편광상태에 대한 스피너만 복소화 된다. 식 4.1.35에서 편광 벡터들의 기준(reference) 운동량은 이에 대해 영향을 받지 않고, 기준 운동량을  $q_i, q_j$ 라 한다면  $q_i = p_j, q_j = p_i$ 로 설정했다.

Ward 항등식을 통해  $\mathcal{M}^{-+}$ 의  $z$  의존도를 알 수 있다:

$$\begin{aligned} p_{i\mu}(z)\mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_{j\nu}^+ &= (p_i - z\zeta)_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_{j\nu}^+ = 0 \\ \longrightarrow \zeta_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_{j\nu}^+ &= \frac{1}{z} p_{i\mu} \mathcal{M}^{\mu\nu}\epsilon_{j\nu}^+ \end{aligned} \quad (4.1.36)$$

1)  $\mathcal{M}^{-+}$ 인 경우:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{-+} &= \epsilon_{i\mu}^- \mathcal{M}^{\mu\nu} \epsilon_{j\nu}^+ = \zeta_\mu \mathcal{M}^{\mu\nu} \epsilon_{j\nu}^+ = \frac{1}{z} p_{i\mu} \mathcal{M}^{\mu\nu} \epsilon_{j\nu}^+ \\ &= \frac{1}{z} p_{i\mu} \left( (cz + \dots) \eta^{\mu\nu} + A^{\mu\nu} + \frac{1}{z} B^{\mu\nu} + \dots \right) \epsilon_{j\nu}^+ \\ &= \frac{1}{z} p_{i\mu} \left( A^{\mu\nu} + \frac{1}{z} B^{\mu\nu} + \dots \right) \epsilon_{j\nu}^+ \sim \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (4.1.37)$$

2)  $\mathcal{M}^{--}$ 인 경우:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{--} &= \epsilon_{i\mu}^- \mathcal{M}^{\mu\nu} \epsilon(z)_{j\nu}^- = \frac{1}{z} p_{i\mu} \mathcal{M}^{\mu\nu} (\zeta^* + z p_i)_\nu \\ &= \frac{1}{z} p_{i\mu} \left( (cz + \dots) \eta^{\mu\nu} + A^{\mu\nu} + \frac{1}{z} B^{\mu\nu} + \dots \right) (\zeta^* + z p_i)_\nu \\ &= \frac{1}{z} p_{i\mu} A^{\mu\nu} \zeta_\nu^* + \frac{1}{z} p_{i\mu} B^{\mu\nu} p_{i\nu} + \dots \sim \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (4.1.38)$$

$\zeta_{a\dot{a}}^* = |i]_a \langle j|_{\dot{a}} \circ |$ 고,  $p_i \cdot \zeta^* = 0$ ,  $p_i^2 = 0$ , 그리고  $p_{i\mu} p_{i\nu} A^{\mu\nu} = 0$ 을 이용했다.

3)  $\mathcal{M}^{+-}$ 인 경우:<sup>6</sup>

$$\begin{aligned} \mathcal{M}^{+-} &= \epsilon(z)_{i\mu}^+ \mathcal{M}^{\mu\nu} \epsilon(z)_{j\nu}^- \\ &= (\zeta^* - z p_j)_\mu \left( (cz + \dots) \eta^{\mu\nu} + A^{\mu\nu} + \frac{1}{z} B^{\mu\nu} + \dots \right) (\zeta^* + z p_i)_\nu \\ &\sim z^3 \end{aligned} \quad (4.1.39)$$

---

<sup>6</sup> $\mathcal{N} \leq 4$ 초대칭이 있는 경우, 이 항은  $z^{3-\mathcal{N}}$ 에 비례하게 된다.[33]

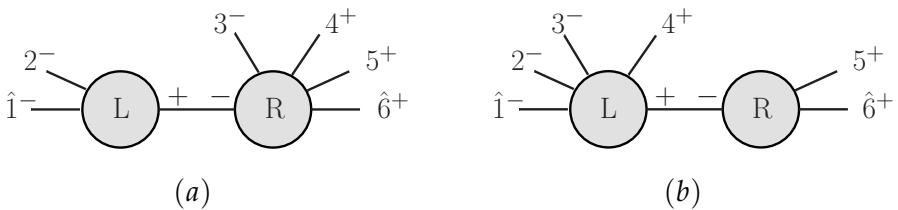
4)  $\mathcal{M}^{++}$ 인 경우:

$$\mathcal{M}^{++} \sim \frac{1}{z} \quad (4.1.40)$$

이 경우  $p_{j\mu} \mathcal{M}^{\mu\nu} \epsilon_{i\nu} = 0$ 을 이용했고  $\mathcal{M}^{--}$ 와 비슷한 방법을 통해 구할 수 있다. Yang-Mills 이론에서 글루온 간의 가지 단계 산란 진폭이  $z \rightarrow \infty$ 에서 상쇄되는  $\zeta$ 의 선택이 반드시 존재함을 알았다. 그리고  $\zeta$ 의 선택에 대한 자유도가 있기 때문에 앞서 구한 BCFW-재귀관계는 Yang-Mills 이론에서 유효한 관계라는 것을 알 수 있다.

### 4.1.3 예제: $n=6$ NMHV 산란 진폭

이 소절에서는 NMHV의 가장 간단한 예인  $\mathcal{A}_6(1,2,3,4,5,6)$  를 계산함으로써 BCFW-관계식의 효율성에 대해 살펴보자 한다. NMHV 산란 진폭은  $n \geq 6$ 부터 존재한다. 이 경우 가능한 나선도(helicity)의 배열은  $(-, -, -, +, +, +), (+, +, -, +, -, -), (+, -, +, -, +, -)$ 이다.  $\mathcal{A}_6(1^-, 2^-, 3^-, 4^+, 5^+, 6^+)$ 에 대해 계산해 보는 것 만으로 나머지 두 산란 진폭의 계산법은 충분히 알 수 있다. 따라서 이 배열에 대해서만 계산하도록 하자. 이 계산에서 변형된(deformed) 스피너는  $|1], \langle 6|$ 이고 이를  $[16\rangle$ -변형이라 부른다. NMHV 산란 진폭  $\mathcal{A}_6(1^-, 2^-, 3^-, 4^+, 5^+, 6^+)$ 는 BCFW-관계를 통해 세 종류의 분해된 도형들로 구성된다.  $n = 6$ 인 경우 산란 진폭이 BCFW분해 될 경우 분해되는 입자들이 모두 5 입자 이하의 산란 진폭으로 분해된다. 그런데,  $\mathcal{A}_5(-, +, +, +, +), \mathcal{A}_5(+, -, -, -, -), \mathcal{A}_4(-, +, +, +), \mathcal{A}_4(+, -, -, -), \mathcal{A}_3(+, +, +), \mathcal{A}_3(-, -, -)$ 는 모두 0이기 때문에 이를 포함하는 분해된 도형들은 모두  $\mathcal{A}_6(-, -, -, +, +, +)$ 에 기여하지 않는다. 따라서  $\mathcal{A}_6(-, -, -, +, +, +)$ 에 기여하는 분해된 산란진폭은 도식 (4.1.41)에 나온 두 개의 도형이다:



먼저 첫 번째 도형을 계산하자.

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\langle \hat{1}2 \rangle^4}{\langle \hat{1}2 \rangle \langle 2 - \hat{P}_{1,2} \rangle \langle -\hat{P}_{1,2} \hat{1} \rangle} \frac{1}{P_{1,2}^2} \frac{\langle \hat{P}_{1,2} 3 \rangle^4}{\langle \hat{P}_{1,2} 3 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 56 \rangle \langle 6 \hat{P}_{1,2} \rangle} \\
 &= \frac{\langle 12 \rangle^3}{\langle 2 \hat{P}_{1,2} \rangle \langle \hat{P}_{1,2} 1 \rangle} \frac{1}{P_{1,2}^2} \frac{\langle \hat{P}_{1,2} 3 \rangle^3}{\langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 56 \rangle \langle 6 \hat{P}_{1,2} \rangle}
 \end{aligned}$$

여기서  $\hat{P}_{1,2} = 0$  되게 하는 복소수  $z_{1,2}$ 를 구하자.

$$\hat{P}_{1,2}^2 = 0 = \langle 12 \rangle [\hat{1}2] = \langle 12 \rangle ([12] + z_{1,2}[62]) \rightarrow z_{1,2} = -\frac{[12]}{[62]} \quad (4.1.42)$$

이를 통해 변형된 스피너  $|\hat{1}|$ ,  $\langle \hat{6}|$ 를 나타내면 다음과 같다.

$$|\hat{1}| = |1| - |6| \frac{[12]}{[62]} \quad (4.1.43)$$

$$\langle \hat{6}| = \langle 6| + \frac{[12]}{[62]} \langle 1| \quad (4.1.44)$$

이제 식 (4.1.42)의 분자, 분모에  $[\hat{P}_{1,2}, 6]^3$ 을 곱하면 다음의 식이 등장한다.

$$\langle 2 \hat{P}_{1,2} \rangle [\hat{P}_{1,2} 6] = \langle 21 \rangle [\hat{1}6] \quad (4.1.45)$$

$$\langle 1 \hat{P}_{1,2} \rangle [\hat{P}_{1,2} 6] = \langle 12 \rangle [26] \quad (4.1.46)$$

$$\begin{aligned}
 \langle \hat{6} \hat{P}_{1,2} \rangle [\hat{P}_{1,2} 6] &= \langle 61 \rangle [16] + \langle \hat{6}2 \rangle [26] \\
 &= \langle 61 \rangle [16] + \langle 62 \rangle [26] + \langle 12 \rangle [21] = -P_{126}^2 \quad (4.1.47)
 \end{aligned}$$

$$\langle 3 \hat{P}_{1,2} \rangle [\hat{P}_{1,2} 6] = \langle 31 \rangle [16] + \langle 32 \rangle [26] = -\langle 3|1+2|6\rangle \quad (4.1.48)$$

여기서  $P_{126} = (p_1 + p_2 + p_6)$ 이고, ♦스피너들에 대한 내적은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$[\hat{1}6] = [16] \quad (4.1.49)$$

$$\begin{aligned}
\langle 5\hat{6} \rangle &= \langle 56 \rangle + \frac{[12]}{[62]} \langle 51 \rangle \\
&= \frac{1}{[62]} (\langle 56 \rangle [62] + \langle 51 \rangle [12]) = \frac{1}{[26]} (\langle 5|1+6|2])
\end{aligned} \tag{4.1.50}$$

이를 이용하여 첫 번째 도형을 다시 나타내면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned}
&\frac{\langle 12 \rangle^3 (\langle 3|1+2|6 \rangle)^3 [26]}{\langle 21 \rangle [16] \langle 12 \rangle [62] \langle 12 \rangle [12] \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 5|1+6|2] (-P_{126}^2)} \\
&= \frac{\langle 3|1+2|6 \rangle^3}{P_{126}^2 [21] [16] \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 5|1+6|2]}
\end{aligned} \tag{4.1.51}$$

이제 두 번째 도형을 계산하자.

$$\begin{aligned}
&\text{Diagram: Two circles labeled L and R connected by a horizontal line. Circle L has three outgoing lines labeled } 3^-, 2^-, \hat{1}^- \text{ and one incoming line labeled } 4^+. \text{ Circle R has two outgoing lines labeled } 5^+, \hat{6}^+ \text{ and one incoming line labeled } -. \\
&= \frac{[4\hat{P}_{56}]^4}{[4\hat{P}_{56}][\hat{P}_{56}\hat{1}][\hat{1}2][23][34]} \frac{1}{P_{56}^2} \frac{[56]^4}{[56][6-\hat{P}_{56}][-P_{56}5]} \\
&= \frac{[4\hat{P}_{56}]^3}{[\hat{P}_{56}\hat{1}][\hat{1}2][23][34]} \frac{1}{P_{56}^2} \frac{[56]^3}{[6\hat{P}_{56}][\hat{P}_{56}5]}
\end{aligned} \tag{4.1.52}$$

이번에는 분모 분자에  $\langle 1\hat{P}_{5,6} \rangle^3$  을 곱하자. 이 도형에서는  $\hat{P}_{5,6}^2 = 0$  되는  $z_{5,6}$  을 통해 극을 표현한다.

$$\hat{P}_{5,6}^2 = \langle 5\hat{6} \rangle [56] = (\langle 56 \rangle - z_{5,6} \langle 51 \rangle) [56] \rightarrow z_{5,6} = \frac{\langle 56 \rangle}{\langle 51 \rangle} \tag{4.1.53}$$

이를 통해 변형된 스피너  $|\hat{1}\rangle$ ,  $\langle \hat{6}|$  를 나타내면 다음과 같다.

$$|\hat{1}\rangle = |1\rangle + |6\rangle \frac{\langle 56 \rangle}{\langle 51 \rangle} \tag{4.1.54}$$

$$\langle \hat{6}| = \langle 6| - \frac{\langle 56 \rangle}{\langle 51 \rangle} \langle 1| \tag{4.1.55}$$

첫 번째 도형을 계산하는 방법과 마찬가지로 다음의 식을 이용한다.

$$\langle 1\hat{P}_{5,6} \rangle [\hat{P}_{5,6}\hat{1}] = \langle 15 \rangle [5\hat{1}] + \langle 16 \rangle [61] = -P_{156}^2 \quad (4.1.56)$$

$$\langle 1\hat{P}_{5,6} \rangle [\hat{P}_{5,6}6] = \langle 15 \rangle [56] \quad (4.1.57)$$

$$\langle 1\hat{P}_{5,6} \rangle [\hat{P}_{5,6}5] = \langle 16 \rangle [65] \quad (4.1.58)$$

$$\langle 1\hat{P}_{5,6} \rangle [\hat{P}_{5,6}4] = \langle 15 \rangle [54] + \langle 16 \rangle [64] = -\langle 1|5+6|4 \rangle \quad (4.1.59)$$

이를 이용하여 두 번째 도형을 다시 표현하면 다음과 같다.

$$\frac{[4\hat{P}_{56}]^3}{[\hat{P}_{56}\hat{1}][\hat{1}2][23][34]} \frac{1}{P_{56}^2} \frac{[56]^3}{[6\hat{P}_{56}][\hat{P}_{56}5]} = \frac{\langle 1|5+6|4 \rangle^3}{P_{156}^2[23][34]\langle 56 \rangle \langle 61 \rangle \langle 5|1+6|2 \rangle} \quad (4.1.60)$$

이를 종합하면  $(-, -, -, +, +, +)$  배열의 산란 진폭은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_6(1^-, 2^-, 3^-, 4^+, 5^+, 6^+) &= \text{Diagram showing a central vertex connected to six external lines labeled } 1^-, 2^-, 3^-, 4^+, 5^+, 6^+. \\ &= \text{Diagram showing two vertices, L and R, connected by a horizontal line. Vertex L has incoming lines } 1^-, 2^-, 3^-, 4^+, 5^+, 6^+ \text{ and outgoing lines } 1^-, 2^-. \text{ Vertex R has incoming lines } 1^-, 2^-, 3^-, 4^+, 5^+, 6^+ \text{ and outgoing lines } 3^-, 4^+, 5^+, 6^+. \\ &= \frac{\langle 3|1+2|6 \rangle^3}{P_{126}^2[21][16]\langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \langle 5|1+6|2 \rangle} + \frac{\langle 1|5+6|4 \rangle^3}{P_{156}^2[23][34]\langle 56 \rangle \langle 61 \rangle \langle 5|1+6|2 \rangle} \end{aligned} \quad (4.1.61)$$

NMHV 산란 진폭은 기존의 방식인 Feynman 도형을 통해 계산하면 아주 복잡하다. 위에서 확인했듯, BCFW-재귀관계를 이용하면 이 계산은 매우 간단하다. 이 절에서는 Yang-Mills 이론에서의 BCFW-재귀관계식에 대해 살펴보았다. 다음 절에서는 초대칭을 포함한 이론의 BCFW-재귀관계식을 알아볼 것이다. 특히 우리의 관심계인  $\mathcal{N} = 4$  SYM 이론에서의 초대칭적 BCFW-재귀관계를 살펴본다.

## 4.2 $\mathcal{N} = 4$ SYM 에서의 BCFW-재귀관계식

### 4.2.1 초대칭적 BCFW-재귀관계식

BCFW-변형은 운동량의 온-셀 조건과 운동량 보존을 유지한 상태에서 운동량을 복소화 시킨다. 그러나 이러한 변형은 초전하 보존( $\sum_{i=k}^n |k\rangle \eta_k = 0$ )을 만족하지 않는 것이 분명하게 보인다. 이에 대한 해결책으로 온-셀 초장의 Grassmann 변수  $\eta_A$ 를 운동량과 함께 복소화 시키면 올바른 초대칭적인 BCFW-재귀관계식을 얻을 수 있다.  $n$ 개의 입자가 산란되는 산란 진폭에서  $i, j$ 번 째 가지를  $|ij\rangle$ -변형을 통해 복소화 시킬 때, 추가로 이에 대응되는 Grassmann 변수도 함께 변형시키자:

$$|\hat{i}\rangle = |i\rangle + z|j\rangle, \quad |\hat{j}\rangle = |j\rangle - z|i\rangle, \quad \hat{\eta}_{iA} = \eta_{iA} + z\eta_{jA} \quad (4.2.1)$$

이 외의 모든 스피너와 Grassmann 변수들은 변형시키지 않는다. 이러한 변형은 초전하 보존도 함께 만족하게 한다. 초 BCFW(super BCFW) 재귀관계는 도식적으로 두 개의 초 산란 진폭 꼭짓점(vertex)과 그를 연결해 주는 온-셀 운동량  $\hat{P}$ 를 가지는 내부 퍼뜨리개가 있다. 이 내부 퍼뜨리개는  $\mathcal{N} = 4$  SYM 이론의 16개의 상태가 모두 가능하다. 하지만 우리는 글루온 간의 산란 진폭을 다루기 때문에 내부 퍼뜨리개 또한 글루온만 존재한다. 전체 산란 진폭은 가능한 모든 개별 나선도 배열의 산란 진폭들의 합이므로 이를 BCFW-재귀관계와 함께 나타내 보면 다음과 같다.

$$\left[ \left( \prod_{A=1}^4 \frac{\partial}{\partial \eta_{\hat{p}_A}} \right) \hat{\mathcal{A}}_L \right] \frac{1}{P^2} \hat{\mathcal{A}}_R + \hat{\mathcal{A}}_L \frac{1}{P^2} \left[ \left( \prod_{A=1}^4 \frac{\partial}{\partial \eta_{\hat{p}_A}} \right) \hat{\mathcal{A}}_R \right] \Big|_{\eta_{\hat{p}_A}=0} \quad (4.2.2)$$

Grassmann 변수의 성질로 인해 순서에 따른 부호 변화를 고려해서 위의 식을 한 번에 나타낼 경우 다음과 같다.

$$\left( \prod_{A=1}^4 \frac{\partial}{\partial \eta_{\hat{p}_A}} \right) \left[ \hat{\mathcal{A}}_L \frac{1}{P^2} \hat{\mathcal{A}}_R \right] \Big|_{\eta_{\hat{p}_A}=0} = \int d^4 \eta_{\hat{p}} \hat{\mathcal{A}}_L \frac{1}{P^2} \hat{\mathcal{A}}_R \quad (4.2.3)$$

### 4.2.2 초 BCFW-재귀관계를 통한 MHV 초 산란 진폭

이제 MHV 초 산란 진폭을 초 BCFW-재귀관계를 통해 구해보자. 4.1.1절에서와 같이 1, 2번 째 입자의 나선도가  $-1$ 인 MHV 초 산란 진폭을 생각해 보자. 이 경우 1, 2번 째 입자들을 복소화 시키면 분해된 초 산란 진폭의 도형은 하나가 존재하고 이를 구성하는 분해된 산란진폭은 모두 MHV 산란 진폭이다. 이를 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_n^{\text{MHV}}(1, 2, 3, \dots, n) &= \text{Diagram} \\
 &= \int d^4 \eta_{\hat{P}} \hat{\mathcal{A}}_{n-1}(\hat{1}, \hat{P}, 4, \dots, n) \frac{1}{\hat{P}^2} \hat{\mathcal{A}}_3(-\hat{P}, \hat{2}, 3) \\
 &= \int d^4 \eta_{\hat{P}} \frac{\delta^{(8)}(\sum_{i \in L} |i\rangle \hat{\eta}_i)}{\langle 1\hat{P} \rangle \langle \hat{P}4 \rangle \langle 45 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \frac{1}{\hat{P}^2} \frac{\delta^{(4)}([\hat{P}2]\eta_3 + [23]\eta_{\hat{P}} + [3\hat{P}]\eta_2)}{[23][3\hat{P}][\hat{P}2]} \\
 &\quad (4.2.4)
 \end{aligned}$$

여기서  $P = P_{23} = p_2 + p_3$ 이고,  $|\hat{1}\rangle = |1\rangle$ ,  $|\hat{2}\rangle = |2\rangle$ 이고  $|-P] = |P]$ 이다. 이제 Grassmann 적분 안의 적분인자들을 좀 더 계산하기 쉽게 바꿔보자. 적분인자 안의 L에 관한  $\delta$ -함수는 다음과 같다.

$$\delta^{(8)} \left( \sum_{i \in L} |i\rangle \hat{\eta}_i \right) = \delta^{(8)} \left( |1\rangle \hat{\eta}_1 + |\hat{P}\rangle \eta_{\hat{P}} + \sum_{i=4}^n |i\rangle \eta_i \right) \quad (4.2.5)$$

또한 R에 관한  $\delta$ -함수로 인해  $[\hat{P}2]\eta_3 + [23]\eta_{\hat{P}} + [3\hat{P}]\eta_2 = 0$ 이므로  $\eta_{\hat{P}} = -\frac{1}{[23]}([\hat{P}2]\eta_3 + [3\hat{P}]\eta_2)$ 을 얻는다. 이 식을 통해  $\eta_{\hat{P}} = \eta_2 + \eta_3$ 임을 알 수 있다. 이제 이 식을 (4.2.5)의 좌변의 팔호 안에 대입하여 생각해 보자.

$$\begin{aligned}
 |1\rangle \hat{\eta}_1 + |\hat{P}\rangle \eta_{\hat{P}} &= |1\rangle \hat{\eta}_1 - \frac{|\hat{P}\rangle}{[23]} ([\hat{P}2]\eta_3 + [3\hat{P}]\eta_2) \\
 &= |1\rangle \hat{\eta}_1 + |\hat{2}\rangle \eta_2 + |3\rangle \eta_3 \quad (4.2.6)
 \end{aligned}$$

$$= |1\rangle \eta_1 + |2\rangle \eta_2 + |3\rangle \eta_3 \quad (4.2.7)$$

이로 인해 식 (4.2.5) 은  $\delta^{(8)}(\sum_{i \in L}^n |i\rangle \eta_i) = \delta^{(8)}(\tilde{Q})$ 가 된다. 이제 식 (4.2.4) 의 마지막 식에서 적분에 관여하는 항은  $\delta^{(4)}([23]\eta_{\hat{P}} + \dots)$  항이며 이를 적분하면  $[23]^4$  이 된다. 따라서 MHV 초 산란 진폭은 다음과 같이 간소화 된다.

$$\mathcal{A}_n^{\text{MHV}}(1, 2, 3, \dots, n) = \frac{\delta^{(8)}(\tilde{Q})}{\langle 1\hat{P} \rangle \langle \hat{P}4 \rangle \langle 45 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \frac{1}{P^2} \frac{[23]^4}{[23][3\hat{P}][\hat{P}2]} \quad (4.2.8)$$

식 4.1.22 과 비교해 보면 문자 부분을 제외하고는 같은 형태이다.  $\langle 1\hat{P} \rangle [3\hat{P}] = -\langle 12 \rangle [23]$ 임과,  $\langle \hat{P}4 \rangle [\hat{P}2] = -\langle 34 \rangle [23]$ 임을 이용하여 MHV 초 산란 진폭을 다시 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^{\text{MHV}}(1, 2, 3, \dots, n) &= \frac{\delta^{(8)}(\tilde{Q})}{\langle 1\hat{P} \rangle \langle \hat{P}4 \rangle \langle 45 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \frac{1}{P^2} \frac{[23]^4}{[23][3\hat{P}][\hat{P}2]} \\ &= \frac{\delta^{(8)}(\tilde{Q})}{\langle 12 \rangle \langle 34 \rangle \langle 45 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \frac{1}{\langle 23 \rangle [23]} \frac{[23]^4}{[23][23][23]} \\ &= \frac{\delta^{(8)}(\tilde{Q})}{\langle 12 \rangle \langle 23 \rangle \dots \langle n1 \rangle} \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

수학적 귀납법(mathematical induction)에 의해  $\mathcal{N} = 4$  SYM 가지 단계 MHV 초 산란 진폭은 초 BCFW-재귀관계를 만족시킨다.

## 4.3 KK & BCJ 관계식

제2장 2.3 절에서 KK, BCJ관계식을 논의했다. KK-관계식은 군론적 성질(Jacobi 항등식)을 통해 증명할 수 있었고 BCJ 관계식은 이와 쌍대적 입장에서 운동학적 항들 또한 Jacobi 항들과 비슷한 관계를 갖고 있음을 4 입자 산란 진폭을 통해 알아보았다. 이 절에서는 KK-관계식과 BCJ관계식에 대한 증명을 BCFW-재귀관계를 통해 알아보고자 한다. 특히 BCJ관계식의 장론적 증명은 BCFW-재귀관계를 통해 처음 이뤄졌고 이 관계식을 이용하면 산란 진폭이  $(n - 3)!$ 의 독립적인 산란 진폭으로 되는 최소-기저전개(minimal-basis expansion)을 얻을 수 있다. 이에 대해 살펴보자.

### 4.3.1 Kleiss-Kuijf 관계식

이 소절에서는 KK-관계식에 대한 증명을 BCFW-재귀관계를 통해 알아본다. 제2장에서 소개한 KK-관계식을 다시 써보면 다음과 같다.

$$\mathcal{A}_n(1, \{\alpha\}, n, \{\beta\}) = (-1)^{n_\beta} \sum_{\sigma \in \text{OP}(\{\alpha\}, \{\beta^T\})} \mathcal{A}_n(1, \sigma, n) \quad (4.3.1)$$

이 식을 증명하기에 앞서 KK-관계식의 특별한 예인 색 반전(color reflection),  $U(1)$ -작풀림( $U(1)$ -decoupling) 관계식을 먼저 살펴본 뒤 일반적인 KK 관계식을 증명할 것이다. 먼저 색 반전 관계식을 KK-관계식으로부터 얻어보자. 색 반전 관계식은 KK-관계식에서  $\{\alpha\}$ 가 공집합인 경우 얻을 수 있다.  $\{\alpha\} = \phi$ 인 경우 KK-관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n(1, n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) &= (-1)^m \mathcal{A}_n(1, \beta_m, \beta_{m-1}, \dots, \beta_1, n) \\ &= (-1)^{m+2} \mathcal{A}_n(\beta_m, \beta_{m-1}, \dots, \beta_1, n, 1) \\ &= (-1)^n \mathcal{A}_n(\beta_m, \beta_{m-1}, \dots, \beta_1, n, 1) \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

이때  $n$  입자 산란 진폭에서  $\beta$ 는  $n - 2$ 개의 입자를 갖고 있기 때문에  $n_\beta = m = n - 2$ 이고, KK-관계식으로부터 색 반전 관계식을 얻는다.

$U(1)$ -짝풀림 관계식은 집합  $\{\alpha\}$ 나 집합  $\{\beta\}$ 중 둘 중 하나의 집합이 원소를 하나만 가지게 되면 얻을 수 있다. 먼저 집합  $\{\beta\}$ 가 하나의 원소를 가지는 집합인 경우 KK-관계식은 다음과 같다.

$$\mathcal{A}_n(1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, n, \beta) = - \sum_{i=1}^k \mathcal{A}_n(1, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \beta, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k, n) \quad (4.3.3)$$

이 식의 우변을 좌변으로 옮기고 산란 진폭의 순환적 성질을 이용하여  $\beta$  번 째 입자를 제일 앞으로 고정시켜 표현하면 다음과 같은  $U(1)$ -짝풀림 관계식을 얻게 된다.

$$\sum_{\sigma \in \text{cyclic}} \mathcal{A}_n(\beta, \sigma(n, 1, \alpha_1, \dots, \alpha_k)) = 0 \quad (4.3.4)$$

이제는  $\{\alpha\}$ 의 원소가 하나만 있는 경우 KK-관계식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_n(1, \alpha, n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) \\ &= (-1)^m \sum_{i=0}^m \mathcal{A}_n(1, \beta_m, \dots, \beta_{i+1}, \alpha, \beta_i, \dots, \beta_2, \beta_1, n) \\ &= (-1)^{m+n} \sum_{i=0}^m \mathcal{A}_n(n, \beta_1, \dots, \beta_i, \alpha, \dots, \beta_m, 1) \quad [\text{색 반전}] \\ &= (-1)^{2n-3} \sum_{i=0}^m \mathcal{A}_n(n, \beta_1, \dots, \beta_i, \alpha, \dots, \beta_m, 1) \end{aligned} \quad (4.3.5)$$

식을 모두 좌변으로 옮겨서 다시 나타내 보면,

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_n(1, \alpha, n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) + \sum_{i=0}^m \mathcal{A}_n(n, \beta_1, \dots, \beta_i, \alpha, \beta_{i+1}, \dots, \beta_m, 1) \\ &= \mathcal{A}_n(1, \alpha, n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m) + \sum_{i=0}^m \mathcal{A}_n(1, n, \beta_1, \dots, \beta_i, \alpha, \beta_{i+1}, \dots, \beta_m) \end{aligned}$$

$$= \sum_{\sigma \in \text{cyclic}} \mathcal{A}_n(1, \sigma(\alpha, n, \{\beta\})) = 0 \longrightarrow U(1)\text{-짝풀림관계식} \quad (4.3.6)$$

각각의 색 반전,  $U(1)$ -짝풀림 관계식 또한 BCFW-재귀관계를 통해 증명하는것이 가능하다.[34] 하지만 KK-관계식이 이 식들을 포함하기 때문에 KK-관계식에 대해서만 BCFW-재귀관계를 통해 증명하자. KK-관계식은 다음과 같은 방법으로 얻는다.

- 1) 식4.3.1의 양변을 BCFW-재귀관계를 통해 표현한다.
- 2) BCFW-재귀관계로 표현된 식 (4.3.1)의 좌변의 하위단계 산란 진폭이 KK-관계식을 만족함을 가정하여 좌변을 다시 표현한다.
- 3) 위의 1), 2) 단계에서 얻은 두 식이 같음을 보인다.

먼저 식 (4.3.1)의 우변을 BCFW-재귀관계를 통해 나타내면 다음과 같다.

$$\int d^4\eta_{\hat{P}_c} \sum_{\sigma_c} \sum_{c=1}^{m+k-1} \mathcal{A}(\hat{1}, \gamma_1, \dots, \gamma_c, \hat{P}_c; \eta_{\hat{P}_c}) \frac{1}{P_c^2} \mathcal{A}(-\hat{P}_c, \gamma_{c+1}, \dots, \gamma_{m+k}, \hat{n}; \eta_{\hat{P}_c}) \quad (4.3.7)$$

여기서  $\sigma_c$ 는 다음과 같은 순열들이다:

$$\sigma_c(\{\gamma_1, \dots, \gamma_{m+k-n-2}\}) = \text{OP}(\{\alpha\} \cup \{\beta^T\}) \quad (4.3.8)$$

또한  $n$  입자 산란 진폭에서 1,  $n$  을 제외한 나머지 입자들이  $m+n$ 개 이므로  $m+k = n-2$ 이다. 이 식과 좌변의 식을 비교하기 위해 식 (4.3.1)의 좌변을 BCFW-재귀관계를 통해 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{좌변} &= \int d^4\eta_{\hat{P}} \left[ \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m \mathcal{A}(\beta_{j+1}, \dots, \beta_m, \hat{1}, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \hat{P}_{ij}; \eta_{\hat{P}}) \frac{1}{P_{ij}^2} \right. \\ &\quad \left. \times \mathcal{A}(-\hat{P}_{ij}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k, \hat{n}, \beta_1, \dots, \beta_j; \eta_{\hat{P}}) \right]_{(i,j) \neq (0,m), (k,0)} \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

이제 이 식의 하위 단계 산란 진폭이 KK-관계식을 만족함을 가정하자:

$$\mathcal{A}(\beta_{j+1}, \dots, \beta_m, \hat{1}, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \hat{P}_{ij}; \eta_{\hat{P}}) = (-1)^{m-j} \sum_{\sigma_{ij}} \mathcal{A}(\hat{1}, \sigma_{ij}, \hat{P}_{ij}; \eta_{\hat{P}}) \quad (4.3.10)$$

$$\mathcal{A}(-\hat{P}_{ij}, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_k, \hat{n}, \beta_1, \dots, \beta_j; \eta_{\hat{P}}) = (-1)^j \sum_{\tilde{\sigma}_{ij}} \mathcal{A}(-\hat{P}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}, \hat{n}; \eta_{\hat{P}}) \quad (4.3.11)$$

이를 이용하여 식 (4.3.9)을 다시 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \mathcal{A}_n(1, \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, n, \{\beta_1, \dots, \beta_m\}) \\ &= (-1)^m \int d^4 \eta_{\hat{P}} \left[ \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m \sum_{\sigma, \tilde{\sigma}} \mathcal{A}(\hat{1}, \sigma_{ij}, \hat{P}_{ij}; \eta_{\hat{P}}) \frac{1}{P_{ij}^2} \mathcal{A}(-\hat{P}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}, \hat{n}; \eta_{\hat{P}}) \right]_{(i,j) \neq (0,m), (k,0)} \end{aligned} \quad (4.3.12)$$

마지막으로 위에서 표현한 양변이 서로 같음을 보이면 증명은 완료된다.  
이 단계를 위해서는 다음과 같은 하위단계 증명과정이 필요하다.

3-1) 식 (4.3.12)의 각각의 항들이 식 (4.3.7)와 대응됨을 보인다.

3-2) 이 두 식들의 항의 개수가 같음을 보인다.

위의 단계를 보이면 식 (4.3.1)의 양변이 서로 같음을 보이게 되므로 증명이 완료된다. 이제 이 단계를 진행하자.

식 (4.3.12)의 우변을 보면 산란 진폭에서  $\{\sigma_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}\}$ 의 조합은 식 (4.3.8)의 가능한 순열 중 하나임을 알 수 있다. 또한  $i, j$ 에 따라 BCFW-분해된 특정  $\sigma_c$ 가 결정됨을 알 수 있다. 결국 식 (4.3.12)의 우변의 항들은 식 (4.3.7)에서 모두 찾을 수 있다. 이제  $\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m \sum_{\sigma} \sum_{\tilde{\sigma}}$  가  $\sum_{\sigma_c} \sum_{c=1}^{n-3}$  라면 식 (4.3.1)의 우변은 식 (4.3.12)와 같게 되어 증명이 끝나게 된다. 이를 확인하기 위해

식 (4.3.7)에서 어떤 특정 배열  $c$ 를 생각해 보자.

$$\int d^4\eta_{\hat{P}_c} \sum_{\sigma_c} \mathcal{A}(\hat{1}, \gamma_1, \dots, \gamma_c, \hat{P}_c; \eta_{\hat{P}_c}) \frac{1}{\hat{P}_c^2} \mathcal{A}(-\hat{P}_c, \gamma_{c+1}, \dots, \gamma_{n-2}\hat{n}; \eta_{\hat{P}_c}) \quad (4.3.13)$$

식 (4.3.9)에서 분해된 도형들 중 왼쪽 산란 진폭  $\mathcal{A}(\beta_{j+1}, \dots, \beta_m, \hat{1}, \alpha_1, \dots, \alpha_i, \hat{P}_{ij}; \eta_{\hat{P}})$ 에서  $\{\alpha\}$ 의 원소 중 하나를  $i'$ ,  $\{\beta^T\}$ 의 원소 중 하나를  $j'$  라 하고 이들이  $i' + j' = c$ 를 만족하도록 하자. 여기서  $i = i'$ ,  $j = m - j'$ 으로 두면 이들의 정렬된 순열이  $\sigma_{ij}$ 를 준다.  $i$ 는 0부터  $k$  까지 가능하고  $j$ 는 0부터  $m$ 까지 가능하므로  $i' + j' = i + m - j = c$ 을 만족하는  $(i', j')$ 의 조합은  $i, j$ 의 합에 많이 등장한다. 이러한 조건  $i' + j' = i + m - j = c$ 을 만족하도록  $c$ 에 따른 BCFW-전개를 하여 이들을 다시 묶어보면  $\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m = \sum_{c=1}^{m+k-1}$  으로

바꾸고  $\sigma_{ij}$ 는  $\sum_{i=0}^c \text{OP}(\{\alpha_1, \dots, \alpha_i\} \cup \{\beta_m, \dots, \beta_{i+m-c+1}\})$  이 된다. 특정  $c$ 에 대해 식(4.3.7)에서  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_c\}$ 이고 알아보고자 했던 두 식이 같아지므로  $\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m$  의 항의 개수와  $\sum_{c=1}^{n-3}$  항의 개수가 같음을 확인하면 증명이 끝난

다. 먼저  $\sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m$  의 항의 개수를 살펴보자. 각  $i, j$ 에 대해 산란 진폭의 항의 개수는 식 (4.3.10)의 항의 개수  $C_{i+m-j}^i$ 와 식 (4.3.11)의 항의 개수  $C_{j+k-i}^j$

를 곱하여 가능한  $i, j$ 에 대해 합한 뒤, 제외돼야 할  $(i, j) \neq (0, m), (k, 0)$ 에 관한 항의 개수를 빼면 구할 수 있고 이는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{식 (4.3.9)의 항의 개수} &= \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m \frac{(i+m-j)!}{i!(m-j)!} \frac{(j+k-i)!}{j!(k-i)!} - 2 \frac{(k+m)!}{m!k!} \\ &= \frac{(k+1)(k+m+1)!}{(k+1)!m!} - 2 \frac{(k+m)!}{m!k!} \\ &= \frac{(k+m-1)(k+m)!}{k!m!} \end{aligned} \quad (4.3.14)$$

이제 식 (4.3.7)의 항의 개수를 세 보자. 각 항의 순열 개수는  $c$ 에 의해 나뉘더라도  $\gamma$ 의 배열은 변함이 없으므로  $c$ 에 관계없이  $\frac{(k+m)!}{k!m!}$  된다.  $c$ 는 0부터  $m+k-1$ 까지 값을 가지므로 항의 개수는 다음과 같이 계산된다.

$$\begin{aligned} \text{식 (4.3.7) 의 항의 개수} &= \sum_{c=0}^{m+k-1} \frac{(m+k)!}{k!m!} \\ &= \frac{(k+m-1)(k+m)!}{k!m!} \end{aligned} \quad (4.3.15)$$

따라서 식 (4.3.1)의 좌변 우변에 대한 항의 개수에 대한 관계는 다음과 같다.

$$\text{식 (4.3.9) 의 항의 개수} = \text{식 (4.3.7) 의 항의 개수}$$

이로 인해 KK-관계식은 다음과 같이 증명 된다.

$$\begin{aligned} &\mathcal{A}_n(1, \{\alpha_1, \dots, \alpha_k\}, n, \{\beta_1, \dots, \beta_m\}) \\ &=(-1)^m \int d^4\eta_{\hat{P}} \left[ \sum_{i=0}^k \sum_{j=0}^m \sum_{\sigma, \tilde{\sigma}} \mathcal{A}(\hat{1}, \sigma_{ij}, \hat{P}_{ij}; \eta_{\hat{P}}) \frac{1}{P_{ij}^2} \mathcal{A}(-\hat{P}_{ij}, \tilde{\sigma}_{ij}, \hat{n}; \eta_{\hat{P}}) \right]_{(i,j) \neq (0,m), (k,0)} \\ &=(-1)^m \sum_{\sigma_c} \int d^4\eta_{\hat{P}} \left[ \sum_{c=1}^{n-1} \mathcal{A}(\hat{1}, \gamma_1, \dots, \gamma_c, \hat{P}_{ij}; \eta_{\hat{P}}) \frac{1}{P_{ij}^2} \mathcal{A}(-\hat{P}_{ij}, \gamma_{c+1}, \dots, \gamma_{n-2}\hat{n}; \eta_{\hat{P}}) \right] \\ &=(-1)^m \sum_{\sigma_c} \mathcal{A}_n(1, \sigma_c, n) \end{aligned} \quad (4.3.16)$$

### 4.3.2 Bern-Carrasco-Johansson 관계식

이 절에서는 소절 2.3.2에서 알아본 BCJ-관계식을 BCFW-재귀관계를 통해 증명하고자 한다. 식 (2.3.17)는 산란 진폭의 **최소-기저 전개**(minimal-basis expansion)라 불린다. 이 결과를 얻기 위해서는 다음과 같은 일반적인(general) BCJ-관계식이 이용된다.

$$\sum_{\{\sigma\} \in P(O\{\alpha\} \cup O\{\beta\})} \sum_{i=1}^r \sum_{\sigma_j < \sigma_{\beta_i}} s_{\beta_i j} \mathcal{A}_n(1, \{\sigma\}, n) = 0 \quad (4.3.17)$$

이 식의 증명은 귀납적 방법을 통해 진행된다. 이 증명의 빌딩 블록(building block)은 3 입자 산란 진폭이다. 이 경우  $s_{12} = p_3^2 = 0$ 이고 BCJ 관계식은 다음과 같다.

$$s_{21} \mathcal{A}_3(1, 2, 3) = 0 \quad (4.3.18)$$

이제  $n$  입자 산란 진폭에 대한 BCJ-관계식을 살펴보자. 여기서는 1,  $n$  번째 입자를 BCFW-변형한다. 이 경우 운동학적 불변량인  $s_{ij}$ 는 변형된 운동량  $p_1$ 을 포함하는 항과 이를 포함하지 않는 항으로 나뉜다. 여기서  $s_{\beta_i 1} \rightarrow s_{\beta_i \hat{1}} + (s_{\beta_i 1} - s_{\beta_i \hat{1}})$ 으로 바꿔서 생각하자. 여기서  $s_{\beta_i \hat{1}}$  항과  $(s_{\beta_i 1} - s_{\beta_i \hat{1}})$  항, 두 부분으로 나눠서 증명을 진행하자. 먼저 후자를 포함하는 항에 대해 살펴보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \sum_{\{\sigma\} \in P(O\{\alpha\} \cup O\{\beta\})} \sum_{i=1}^r s_{\beta_i 1} \mathcal{A}_n(1, \{\sigma\}, n) \\ & - \sum_{\{\sigma\} \in P(O\{\alpha\} \cup O\{\beta\})} \sum_{i=1}^r \sum_{\text{모든 분해}} s_{\beta_i \hat{1}} \mathcal{A}_n(\hat{1}, \{\sigma_L\} | \{\sigma_R\}, \hat{n}) \\ & = \sum_{i=1}^r s_{\beta_i 1} \sum_{POP} \mathcal{A}_n(1, \{\sigma\}, n) + \sum_{i=1}^r \sum_{POP} \oint_{large z \neq 0} \frac{dz}{z} s_{\beta_i \hat{1}} \mathcal{A}_n(\hat{1}, \{\sigma\}, \hat{n}) \\ & = \sum_{i=1}^r \sum_{\{\sigma\} \in P(O\{\alpha\} \cup O\{\beta\})} \left[ - \oint_{z=\infty} \frac{dz}{z} s_{\beta_i \hat{1}} \mathcal{A}_n(\hat{1}, \{\sigma\}, \hat{n}) \right] \end{aligned}$$

$$= (-1)^{r+1} \sum_{i=1}^r \oint_{z=\infty} \frac{dz}{z} s_{\beta_i \hat{1}} \mathcal{A}_n(\{\beta^T\}, \hat{1}, \{\alpha\}, \hat{n}) \quad (4.3.19)$$

위 식의 두 번째 항에  $\{\sigma\} \in P(O\{\alpha\} \cup O\{\beta\})$ 를 편의상  $POP$ 로 나타냈다. 또한 이 식에서는 식 (4.1.6), (4.1.13)를 통해  $z \rightarrow \infty$ 에서의 적분으로 변형하였고, 마지막 줄에서 KK-관계식을 이용하여 식을 정리하였다. 그런데  $\hat{1}$ 과  $\hat{n}$ 이 바로 인접하지 않기 때문에 큰  $z$ 에 대하여 산란 진폭의 거동은  $\frac{1}{z^2}$ 이고 [35] 적분은 상쇄된다. 여기서  $\mathcal{A}(a|b)$ 는 막대를 기준으로 BCFW-분해된 산란 진폭을 표현한 것이다. ( $\mathcal{A}(a|b) = \mathcal{A}(a, P) \frac{1}{P^2} \mathcal{A}(-P, b)$ ). 이제  $s_{\beta_i \hat{1}}$  항이 결합된 산란 진폭을 살펴보자. 이는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} & \sum_{\{\sigma\} \in P(O\{\alpha\} \cup O\{\beta\})} \sum_{i=1}^r \sum_{\sigma_j < \sigma_{\beta_i}} s_{\beta_i J} \sum_{\text{모든 분해}} \mathcal{A}_n(\hat{1}, \{\sigma_L\} | \{\sigma_R\}, \hat{n}) \\ &= \sum_{i=1}^r \sum_{\sigma_j < \sigma_{\beta_i}} s_{\beta_i J} \sum_{\text{모든 분해}} \sum_{\{\sigma_L\} \in POP_L} \sum_{\{\sigma_R\} \in POP_R} \mathcal{A}_n(\hat{1}, \{\sigma_L\} | \{\sigma_R\}, \hat{n}) \\ &= \sum_{\text{모든 분해}} \left\{ \left[ \sum_{\sigma_L \in POP_L} \sum_{i=1}^{r_L} \sum_{0 \leq \sigma_j < \beta_{L_i}} s_{\beta_{L_i} J_L} \mathcal{A}_{r_L+s_L+2}(\hat{1}, \{\sigma_L\}, -\hat{P}_{\mathcal{I}}) \right] \times \frac{1}{P_{\mathcal{I}}^2} \right. \\ &\quad \times \left[ \sum_{\sigma_R \in POP_R} \mathcal{A}_{n-r_L-s_L-2}(\hat{P}_{\mathcal{I}}, \{\sigma_R\}, \hat{n}) \right] \\ &\quad + \left[ \sum_{\{\sigma_L\} \in POP_L} \mathcal{A}_{r_L+s_L+2}(\hat{P}_{\mathcal{I}}, \{\sigma_R\}, \hat{n}) \right] \times \frac{1}{P_{\mathcal{I}}^2} \\ &\quad \times \left[ \sum_{\{\sigma_R\} \in POP_R} \sum_{i=r_L+1}^r \sum_{r_L+s_L < \sigma_j < \beta_{R_i}} \left( s_{\beta_{R_i} J_R} + s_{\beta_{R_i} (\hat{P}_{\mathcal{I}})} \right) \right. \\ &\quad \left. \left. \times \mathcal{A}_{n-r_L-s_L-2}(\hat{P}_{\mathcal{I}}, \{\sigma_R\}, \hat{n}) \right] \right\} \quad (4.3.20) \end{aligned}$$

편의를 위해  $P(O\{\alpha_L\} \cup O\{\beta_L\}) = POP_L$ ,  $P(O\{\alpha_R\} \cup O\{\beta_R\}) = POP_R$ 로 표시했다. 여기서  $\{\alpha_L\}, \{\beta_L\}$ 는  $\alpha, \beta$  중에서 왼쪽에 있는 부분 집합이

고  $\{\alpha_R\}, \{\beta_R\}$  는  $\alpha, \beta$  중에서 오른쪽에 있는 부분 집합이다. 또한  $r_L, s_L, r_R, s_R$  은 각각  $\{\beta_L\}, \{\alpha_L\}, \{\beta_R\}, \{\alpha_R\}$  집합의 원소의 개수이다.  $\hat{P}_{\mathcal{I}}$ 는 주어진  $\mathcal{I}$ 로 BCFW-분해되는 산란 진폭의 왼쪽 산란 진폭의 운동량의 합이다. 낮은 단계의 산란 진폭이 BCJ-관계를 만족하는 것을 가정하면 위의 식 또한 BCJ-관계식을 만족한다. 이로써 일반적인 BCJ-관계식(4.3.17)이 증명된다. 이는 소절 2.3.2에 등장한 식 (2.3.31)의 일반적 표현이다. 이 식은 산란 진폭의 선형독립성을  $(n - 2)!$ 개  $(n - 3)!$ 개로 줄여 준다.

## 4.4 운동량 초 트위스터공간에서의 산란 진폭

지금까지 스피너-나선도 표기법을 이용하면서 산란 진폭 계산에 많은 이점이 있었다. 특히 다음과 같은 성질들이 중요하게 작용하였다.

- 1) 온-쉘 조건  $p^2 = 0$ 이 자명하게 나타난다.
- 2) 스피너 변수들의 Lorentz변환에 선형적인 성질로 인해 산란 진폭이 Lorentz 불변량이다.

편광 벡터와 운동량 벡터를 4-벡터를 이용하여 산란 진폭을 계산하면 계이지 중복성을 도입하여 Lorentz 불변성을 이끌어 낼 수 있다. 그러나 이 방법은 산란 진폭의 계산량을 지나치게 복잡하게 만든다. 더 나아가 Poincaré 불변인 계를 다루는 경우 스피너 변수들은 병진 이동(spatial translation)에 대해 선형적으로 변환되지 않는다. 도입된 변수들이 주어진 변환에 대하여 선형적으로 변환되는 것은 대칭성을 명시적으로 볼 수 있게 해주기 때문에 이러한 변수를 찾는 것은 매우 중요하다. 우리의 논의에서 사용되는 계는 초 등각 대칭성을 가지고 있다. 스피너를 도입함으로써 Lorentz 불변성을 명확히 본 것처럼 이제는 ‘운동량 초 트위스터’라는 양을 도입하여 초 등각 대칭성의 선형성을 볼 것이다.  $\mathcal{N} = 4$  SYM에서는 쌍대 초 등각 대칭성(dual superconformal symmetry)이라는 추가적인 대칭성이 있다. 초 등각 대칭성과 쌍대 초 등각 대칭성을 모두 아우르는 대칭성을 Yangian 대칭성이라 부른다. 운동량 초 트위스터는 Yangian 변환에 대해서 선형적으로 변환되는 성질을 갖고 있기 때문에 우리가 다루는 계의 대칭성을 명확히 볼 수 있는 적합한 변수이다. 이 절에서는 산란 진폭 단계에서 이러한 대칭성을 확인하기 위해 NMHV 산란 진폭과 BCFW-재귀관계를 통해 초 트위스터 공간에서 임의의 가지 단계 산란 진폭을 살펴볼 것이다.

### 4.4.1 쌍대 초 등각 대칭성

운동량 트위스터 공간을 논의하기 위해 새로운 변수를 도입하자.

$$y_i^{\hat{a}a} - y_{i+1}^{\hat{a}a} = p_i^{\hat{a}a} \quad (4.4.1)$$

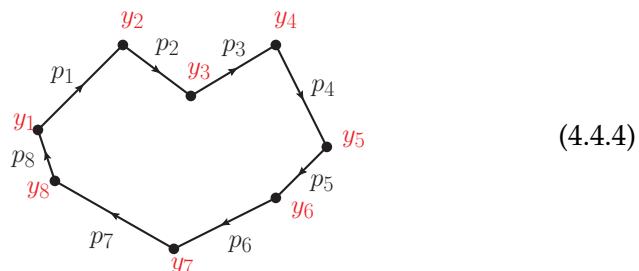
이렇게 정의된 운동량  $y$ 를 **쌍대 운동량**(dual momentum)이라 한다. 또한 부분 산란 진폭은 외부입자의 순서가 중요하므로 다음과 같은 양을 정의한다.

$$y_{ij} \equiv y_i - y_j = p_i + p_{i+1} + \cdots + p_{j-1} \quad (4.4.2)$$

이 변수의 도입에 따른 운동량 보존에 대한 관계를 알아보자. 초대칭을 포함한 운동량 보존은 다음과 같이 표현된다.

$$\delta(4) \left( \sum_{i=1}^n p_i^{\hat{a}a} \right), \quad \delta^{(2N)} \left( \sum_{i=1}^n |i\rangle \eta_i^A \right) \quad (4.4.3)$$

우리가 도입한 쌍대 운동량을 통한 운동량 보존은 어떻게 표현되는지 알아보기 위해 다음과 같은 도식을 생각해 보자.  $n = 8$ 인 경우 운동량 보존은 다음과 같은 닫힌 다각형을 통해 표현된다.



도식 (4.4.4)에서 각각의 변에 운동량이 할당돼 있다. 그러면 쌍대 운동량은 이 두 변이 만나는 꼭짓점에 할당되고 이에 따른 운동량 보존은 다음과 같이 표현된다.

$$y_1 = y_{n+1} \quad (4.4.5)$$

페르미온 변수  $\theta_{ijA}^a$ 에 대한 쌍대 변수는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} |\theta_{iA}\rangle - |\theta_{i+1,A}\rangle &= |i\rangle \eta_{iA} \\ |\theta_{ijA}\rangle &\equiv |\theta_{iA}\rangle - |\theta_{jA}\rangle \end{aligned} \tag{4.4.6}$$

이에 따른 가지 단계 MHV 산란 진폭은 다음과 같이 표현된다.

$$\mathcal{A}_n^{\text{MHV}} = \frac{\delta^{(4)}(y_1 - y_{n+1})\delta^{(8)}(\theta_1 - \theta_{n+1})}{\prod_{i=1}^n \langle i, i+1 \rangle} \tag{4.4.7}$$

NMHV 산란 진폭의 경우는 다음과 같다.

$$\mathcal{A}_n^{\text{NMHV}} = \mathcal{A}_n^{\text{MHV}} \sum_{j=2}^{n-3} \sum_{k=i+2}^{n-1} R_{njk} \tag{4.4.8}$$

여기서  $R_{njk}$ ,  $\Xi_{njk,A}$ 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} R_{njk} &= \frac{\langle j-1, j \rangle \langle k-1, k \rangle \delta^{(4)}(\Xi_{njk})}{y_{jk}^2 \langle n | y_{nj} y_{jk} | k \rangle \langle n | y_{nj} y_{jk} | k-1 \rangle \langle n | y_{nk} y_{kj} | j \rangle \langle n | y_{nk} y_{kj} | j-1 \rangle} \\ \Xi_{njk,A} &= \langle n | y_{nk} y_{kj} | \theta_{jn,A} \rangle + \langle n | y_{nj} y_{jk} | \theta_{kn,A} \rangle \end{aligned} \tag{4.4.9}$$

이 변수를 도입하여 표현되는 산란 진폭 또한 등각 대칭을 따른다는 사실이 발견됐다.[36, 37] 이를 쌍대 등각 대칭이라 한다. 이는 병진 대칭성을 기본적으로 가지며 반전(inversion)  $I$ 에 대해 다음과 같은 쌍대 반전 관계를 갖는다.

$$I[y_i^\mu] = \frac{y_i^\mu}{y_i^2}, \quad I[|\theta_{iA}\rangle^a] = \langle \theta_{iA}|_b \frac{y_i^{ba}}{y_i^2}, \quad I[[i]^a] = \frac{y_i^{ab}}{y_i^2} |i\rangle_b, \quad I[|i\rangle^a] = \langle i|_b \frac{y_{i+1}^{ba}}{y_i^2} \tag{4.4.10}$$

그러면 산란 진폭은 반전대칭에 대하여 다음과 같은 관계를 갖는다.

$$I[\mathcal{A}_n^{\text{가지}}] = \left( \prod_{i=1}^n y_i^2 \right) \mathcal{A}_n^{\text{가지}} \tag{4.4.11}$$

이에 따라 산란 진폭은 특수 등각 생성자  $\mathcal{K}^\mu$ 에 대해 다음과 같이 변환된다.

$$\mathcal{K}^\mu \mathcal{A}_n^{\text{가지}} = \left( - \sum_{i=1}^n y_i^\mu \right) \mathcal{A}_n^{\text{가지}} \quad (4.4.12)$$

이 생성자를 다음과 같이 재정의 하면 산란 진폭을 소멸시킬 수 있다.

$$\tilde{\mathcal{K}}^\mu \equiv \mathcal{K}^\mu + \sum_{i=1}^n y_i^\mu \quad (4.4.13)$$

이는 Yangian 대칭성 관점에서 기술한 것이다. 이에 대한 논의는 [38]에 잘 소개돼 있다. 초 등각 대칭성을 갖는 군에서 추가적으로 이러한 쌍대 등각 대칭을 발견했고 이 모든 대칭성을 갖는 대칭을 **Yangian** 대칭성이라 부른다.

#### 4.4.2 초 트위스터 공간

전 절에서는 쌍대 초 등각 대칭성에 대한 논의를 통해  $\mathcal{N} = 4$  SYM 이론이 Yangian 대칭성을 가진다는 것을 알았다. 이 절에서는 Yangian 대칭성을 명백히 보여주는 ‘초 운동량 트위스터’를 도입하고자 한다. 쌍대 운동량은  $p_i^\mu = y_i^\mu - y_{i+1}^\mu$ 로 정의 되므로 다음과 같은 관계를 만족시킨다.

$$[\mu_i]^a \equiv \langle i |_{\dot{a}} y_i^{\dot{a}a} = \langle i |_{\dot{a}} y_{i+1}^{\dot{a}a} \quad (4.4.14)$$

여기서 새롭게 정의된 변수  $[\mu]^a$ 와 스피너  $|i\rangle^{\dot{a}}$ 를 쌍으로 하는 새로운 변수  $Z_i^I = (|i\rangle, [\mu_i])$ 를 도입하자. 이때  $I = (\dot{a}, a)$ 이고  $SU(2, 2)$ 군의 기본 (fundamental) 표현 첨자이다. 이렇게 주어진 스피너 쌍들은 쌍대 운동량 공간의 두 점  $y_i, y_{i+1}$ 이 식 (4.4.14)를 항상 만족시키기 때문에 이 두 점으로 만들어지는 직선은 Z공간 상의 점  $Z_i^I$ 와 관계됨을 알 수 있다. 위의 식

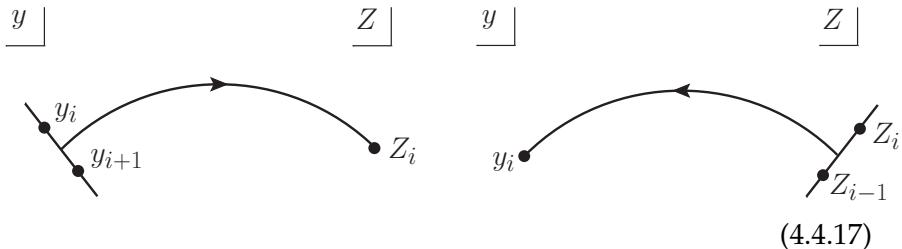
(4.4.14) 를 이용하면 다음과 같은 관계식을 얻는다.

$$y_i^{\dot{a}a} = \frac{|i\rangle^{\dot{a}}[\mu_{i-1}]^a - |i-1\rangle^{\dot{a}}[\mu_i]^a}{\langle i-1, i \rangle} \quad (4.4.15)$$

또한 이들을 통하여  $|i\rangle$ 에 대한 표현을 얻을 수 있고 이는 다음과 같다.

$$|i\rangle = \frac{\langle i+1, i \rangle [\mu_{i-1}] + \langle i, i-1 \rangle [\mu_{i+1}] + \langle i-1, i+1 \rangle [\mu_i]}{\langle i-1, i \rangle \langle i, i+1 \rangle} \quad (4.4.16)$$

이를 이용하면 운동량  $p_i = -|i\rangle[i]$ 를 표현 할 수 있음을 알 수 있다. 식 (4.4.15) 는 쌍대 운동량  $y_i$ 가  $Z$ -공간 상의 두 점  $Z_{i-1}^I, Z_i^I$ 에 의해 정의되는 직선으로 결정됨을 의미한다. 위의 관계들은 다음과 같은 그림으로 표현 된다.



이때 이러한 변수  $Z_i^I = (|i\rangle^{\dot{a}}, [\mu_i]^a)$ 를 운동량 트위스터(momentum twistor)라 부른다. 이 운동량 트위스터들은 꼬마 군 스케일링(little group scaling)에 대해  $Z_i^I \rightarrow t_i Z_i^I$  로 바뀌어서 사영적 성질을 가진다. 따라서 이를 은  $\mathbb{CP}^3$ 공간 상의 점들이다. 이렇게 변수를 변환하고 나면 쌍대 등각 군의 생성자들과 그에 대한 대수가 다음과 같이 간단하게 표현된다.

$$\mathcal{G}^I_J \equiv \sum_i Z_i^I \frac{\partial}{\partial Z_i^J}, \quad [\mathcal{G}^I_J, \mathcal{G}^K_L] = \delta_J^K \mathcal{G}^I_L - \delta_I^L \mathcal{G}^K_J \quad (4.4.18)$$

이런 운동량 트위스터들은 성질적인 측면에서 트위스터의 성질을 갖고 있지만 하나의 스피너를 Fourier변환을 통해 얻은 트위스터와는 달리 쌍대 운동량과 운동량 트위스터들의 대수적 관계식에서 나왔다는 차이점이 있다. 이제 쌍대 운동량 공간에서 했던 작업을 모두 운동량 트위스터 공간에서 진행해 보자. 이를 위해서는 다음과 같은  $SU(2, 2)$ 에서의 Levi-Civita

를 이용한 쌍대 등각 불변량을 정의하는 것이 필요하다.

$$\begin{aligned}\langle i, j, k, l \rangle &\equiv \epsilon_{IJKL} Z_i^I Z_j^J Z_k^K Z_l^L \\ &= \langle ij \rangle [\mu_k \mu_l] + \langle ik \rangle [\mu_l \mu_j] + \langle il \rangle [\mu_j \mu_k] \\ &\quad + \langle kl \rangle [\mu_i \mu_j] + \langle lj \rangle [\mu_i \mu_k] + \langle jk \rangle [\mu_i \mu_l]\end{aligned}\tag{4.4.19}$$

위 식에서 각진 팔호와 사각팔호들은 모두  $SL(2, \mathbb{C})$  불변량들이다. (여기서  $[\mu_i \mu_j] \equiv \mu_i^a \mu_j a$ 이다.) 위의  $SU(2, 2)$  불변량을 이용하면 다음을 얻는다.

$$\langle k, j-1, j, r \rangle = \langle j-1, j \rangle \langle r | y_{rj} y_{jk} | k \rangle\tag{4.4.20}$$

이를 이용하면 퍼뜨리개에 대한 운동량 트위스터 공간상의 표현을 얻는다.

$$\frac{1}{y_{ij}^2} = -\frac{\langle j-1, j \rangle \langle k-1, k \rangle}{\langle j-1, j, k-1, k \rangle}\tag{4.4.21}$$

위를 이용하면 산란 진폭에 대한 식들을 운동량 트위스터 공간에서 표현할 수 있다. 간단한 예로는 식 (4.4.20), (4.4.21)을 이용하여 식 (4.4.9)의  $R_{njk}$ 에 대한 식을 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$R_{njk} = \frac{\langle j-1, j \rangle^4 \langle k-1, k \rangle^4 \delta^{(4)}(\Xi_{njk})}{\langle n, j-1, j, k-1 \rangle \langle j-1, j, k-1, k \rangle \cdots \langle k, n, j-1, j \rangle}\tag{4.4.22}$$

이 때 분모는  $(n, j-1, j, k, k-1)$  순서로 순환성을 띠며  $SU(2, 2)$  불변이 명확히 보인다. 하지만 꼬마 군 스케일링에 대해서는 불변이 아니다. 분자의 양과 함께 고려하면 이에 대해서도 불변인 양이 된다. 이를 알아보기 위해  $\Xi_{njk}$ 에 대해 알아보자. 초대칭을 고려한 쌍대 초운동량 공간에서는 페르미온 변수가 존재한다. 위에서 운동량 트위스터를 정의한 것과 같은 방식으로 페르미온 변수에 대해 다음을 얻을 수 있다.

$$\chi_i^A = \langle i \theta_{iA} \rangle = \langle i \theta_{i+1,A} \rangle\tag{4.4.23}$$

이를 고려하면  $SU(2,2)$ 군 공간의 운동량 트위스터는  $SU(2,2|4)$  운동량 초 트위스터로 확장된다. 이는 다음과 같이 정의된다.

$$\mathcal{Z}_i^A \equiv (|i\rangle^{\dot{a}}, [\mu_i]^a, \chi_{iA}), \quad \mathcal{A} = (\dot{a}, a, A) \quad (4.4.24)$$

초 운동량 트위스터 또한 꼬마군 스케일링에 대해  $\mathcal{Z}_i^A \rightarrow t_i \mathcal{Z}_i^A$  로 변환되는 사영적 성질을 갖고 있어  $\mathbb{CP}^{3|4}$  공간 상에서 표현된다. 이 표현에 따르면  $\Xi_{njk,A}$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \Xi_{njk,A} &= \langle n | y_{nk} y_{kj} | \theta_{jn,A} \rangle + \langle n | y_{nj} y_{jk} | \theta_{kn,A} \rangle \\ &= \frac{[\langle j-1, j, k-1, k \rangle \chi_{nA} + cyclic]}{\langle j-1, j \rangle \langle k-1, k \rangle} \end{aligned} \quad (4.4.25)$$

두 번째 단계로 넘어갈 때 다음을 이용했다.

$$\begin{aligned} y_{jk}^2 \delta_a^b &= -(y_{nj} y_{jk} + y_{nk} y_{kj})_a^b \\ \langle k | y_{kr} y_{rj} | \theta_{jA} \rangle &= \frac{\langle k, r-1, r, j-1 \rangle \chi_{jA} - \langle k, r-1, r, j \rangle \chi_{j-1,A}}{\langle r-1, r \rangle \langle j-1, j \rangle} \end{aligned} \quad (4.4.26)$$

위에서 “cyclic”은 첫 항을 기준으로 첨자  $(n, j-1, j, k, k-1)$  이 순환적으로 더해져 있음을 의미한다. 이러한 사실들을 종합해 보면  $R_{njk}$ 를 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$R_{njk} = \frac{\delta^{(4)}(\langle j-1, j, k-1, k \rangle \chi_n + cyclic)}{\langle n, j-1, j, k-1 \rangle \langle j-1, j, k-1, k \rangle \cdots \langle k, n, j-1, j \rangle} \quad (4.4.27)$$

이 양은 꼬마 군 스케일링에 대해서도 불변인 Yangian-불변량이 된다. 앞으로 위 식을 다음과 같은 5-괄호 표기법을 통해 간단히 표현하도록 하자.

$$R_{njk} = [n, j-1, j, k-1, k] \quad (4.4.28)$$

이 표기법에서  $n$  입자 NMHV 산란 진폭은 다음과 같다.

$$\mathcal{A}_n^{\text{NMHV}} = \mathcal{A}_n^{\text{MHV}} \sum_{j=2}^{n-3} \sum_{k=j+2}^n [n, j-1, j, k-1, k] \quad (4.4.29)$$

### 4.4.3 초 트위스터공간에서의 BCFW-재귀관계식

초 트위스터 공간에서의 BCFW-재귀관계식은 다음과 같은 BCFW-변형을 통해 얻을 수 있다.

$$\hat{z}_i = z_i + w z_{i+1} \quad (4.4.30)$$

운동량 초 트위스터 공간 ( $\mathbb{CP}^{3|4}$  공간)의 점들은 모두 운동량 보존과 온-쉘 조건을 만족시키기 때문에 운동량공간에서 고려했던 조건들을 따로 생각할 필요는 없다. 초 트위스터 변수는 두 개의 인접한 스피너들로 구성돼 있기 때문에 한 점을 복소화 시키는 것이 운동량 공간에서의 두 스피너를 복소화 시키는 것과 관련돼 있다. 그리고  $w$ 는  $w \in \mathbb{C}$ 이다. 운동량 트위스터 공간에서의 직선과 평면에 대해 생각해 보자. 이 때 이 대상들은 모두 ‘복소변수적’ 관점에서의 대상들이다. 이 때 직선은  $(i, j) \equiv (z_i, z_j)$ 로, 평면은  $(i, j, k) \equiv (z_i, z_j, z_k)$ 로 표현한다. 이에 따르면 위의 BCFW-변형된 점  $\hat{z}_i$ 는 직선  $(i, i+1)$  상에 있게 된다. 이 변형을 스피너-나선도 표기법 상에서 확인해 보면 다음과 같다.

$$|\hat{i}\rangle = |i\rangle + w|i+1\rangle, \quad |\hat{\mu}_i\rangle = |\mu_i\rangle + w|\mu_{i+1}\rangle, \quad \hat{\chi}_{iA} = \chi_{iA} + w\chi_{i+1,A} \quad (4.4.31)$$

이를 이용하면 쌍대 운동량공간에서의 BCFW-변형 또한 확인할 수 있고 이는 다음과 같이 표현된다.

$$\hat{y}_i = y_i + z|i-1\rangle[i], \quad z = \frac{w\langle i, i+1 \rangle}{\langle i-1, i \rangle + w\langle i-1, i+1 \rangle} \quad (4.4.32)$$

이 결과를 운동량 공간에서 보면  $[i-1, i]$  변형을 통한 BCFW-변형임을 확인할 수 있다. 쌍대 운동량과 운동량 사이의 관계로 인해 이 변형은  $[i+1, i]$  변형과 같음을 알 수 있고 운동량 트위스터들의 사영적 성질로 인해 스케일된 형태로 표현된다. 예를 들어 각진(angle) 스피너의 변형은

$|i+1, i\rangle$  변형의 표현으로 보면 다음과 같다.

$$|\hat{i}\rangle = \frac{\langle i-1, i\rangle}{\langle i, i-1\rangle + w\langle i+1, i-1\rangle} (|i\rangle + w|i+1\rangle) \quad (4.4.33)$$

이제 이를 통해 초 트위스터 공간에서의 BCFW-재귀관계식을 구해보자. BCFW-재귀관계는 다음과 같은 적분식을 통해 얻게 된다.

$$\oint_C dw \frac{\hat{\mathcal{A}}_n(w)}{w} = \mathcal{B}_\infty - \hat{\mathcal{A}}(0) - \sum_{w_* \neq 0} \left( \text{Res} \left[ \frac{\hat{\mathcal{A}}_n(w)}{w} \right] \right) = 0 \quad (4.4.34)$$

이에 따라 구하고자 하는 산란 진폭은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\hat{\mathcal{A}}(0) = \mathcal{B}_\infty - \sum_{w_* \neq 0} \left( \text{Res} \left[ \frac{\hat{\mathcal{A}}_n(w)}{w} \right] \right) \quad (4.4.35)$$

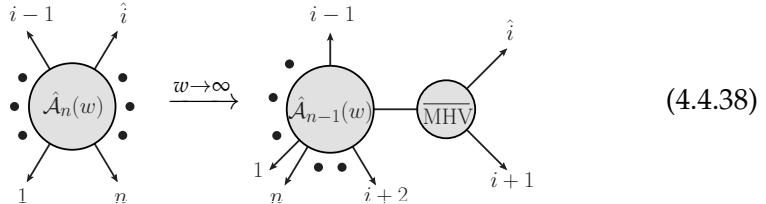
따라서 산란 진폭은  $w \rightarrow \infty$ 에서의 행동과 분해된 통로(factorization channel)에 대한 행동을 분석함으로써 얻게 된다. 먼저  $w \rightarrow \infty$ 에서의 행동을 살펴보자. 식 (4.4.32)의  $z$ 와  $w$ 의 관계로 인해 다음과 같은 관계를 얻게 된다.

$$w \rightarrow \infty \iff z \rightarrow z_* = \frac{\langle i, i+1\rangle}{\langle i-1, i+1\rangle} \quad (4.4.36)$$

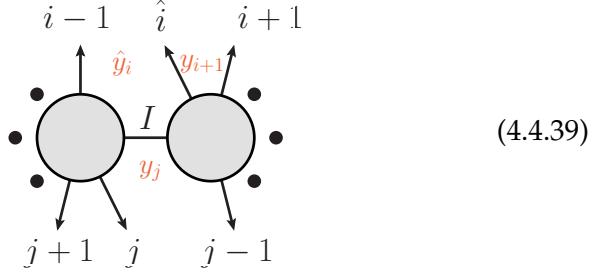
따라서  $\mathcal{B}_\infty$ 는 운동량공간에서의 유한한 극에 대한 산란 진폭을 통해 얻을 수 있다. 그런데,  $w \rightarrow \infty$ 에서 변형된 스피너  $|\hat{i}\rangle$ 는 다음과 같이 변한다.

$$|\hat{i}\rangle|_{w \rightarrow \infty} = \frac{\langle i-1, i\rangle}{\langle i-1, i+1\rangle} |i+1\rangle \quad (4.4.37)$$

$|\hat{i}\rangle$ 와  $|i+1\rangle$ 이 비례하는 것은  $\hat{P}_{i,i+1}^2 = (\hat{p}_i + p_{i+1})^2 \rightarrow 0$ 임을 의미한다. 이 상황은 다음과 같은 도식으로 표현된다.



이제 유한한 극을 갖는 곳의 구조를 살펴보자. 유한한 극을 중심으로 산란 진폭이 분해되는 상황은 다음과 같은 도식적으로 표현된다. 이때 도식은 운동량 초 트위스터 공간에서의 개념도이다.



이때 통로  $I$ 의 퍼뜨리개는 다음과 같다.

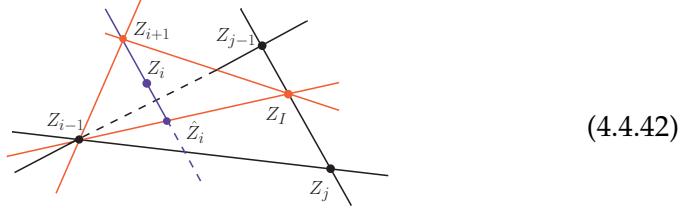
$$\begin{aligned}\frac{1}{\hat{P}_I^2} &= \frac{1}{(\hat{p}_i + p_{i+1} + \dots + p_{j-1})^2} = \frac{1}{(\hat{y}_i - y_j)^2} \\ &= \frac{1}{\hat{y}_{ij}^2} = -\frac{\langle i-1, i \rangle \langle j-1, j \rangle}{\langle i-1, \hat{i}, j-1, j \rangle}\end{aligned}\quad (4.4.40)$$

기하학적으로  $(i-1, \hat{i}, j-1, j)$ 가 한 평면상에 있는 것이 위의 통로에서 극을 갖는 것과 같다. 그런데  $Z_i$ 는 BCFW-변형으로 인해 직선  $(i, i+1)$  상에 있음을 알고 있다. 따라서  $Z_i$ 는 직선  $(i, j)$ 와 평면  $(i-1, j-1, j)$ 의 교점이고 이는 다음과 같이 표현 할 수 있다.

$$(\hat{i}) = (i, i+1) \cap (i-1, j-1, j) \quad (4.4.41)$$

이제 퍼뜨리개에 관한 내부 운동량  $\hat{P}_I$ 에 관계된 운동량 트위스터  $Z_I$ 의 기하학적 의미를 도식 (4.4.39) 와 함께 살펴보자.  $\hat{y}_i$ 는  $(i-1, \hat{i})$  와  $(I, \hat{i})$ 에 의해 결정된다. 따라서  $Z_I, Z_{i-1}, Z_{\hat{i}}$  이 한 직선상에 있다는 것을 알 수 있다. 그런데  $Z_i$ 는  $(i, i+1)$ 상에 있기 때문에  $Z_I$ 는 평면  $(i-1, i, i+1)$ 에 있음을 알 수 있다. 이와 동시에  $Z_I$ 는  $y_j$ 와도 관련되었고  $y_j$ 는  $(j-1, j)$ 에 의해 결정된다. 따라서  $Z_I$ 는  $(j, j-1)$ 와  $(i-1, i, i+1)$ 의 교점임을 알 수

있다. 이에 따른  $Z_i$ 와  $Z_I$ 의 기하학적 위치는 다음과 같이 표현할 수 있다.



- 운동량 트위스터 공간 상에서  $\hat{Z}_i$  와  $Z_I$  의 기하학적 배치

#### 4.4.4 가지 단계 NMHV 산란 진폭

이전 절에서는 운동량 초 트위스터 공간에서 BCFW-재귀관계에 대한 일반론을 살펴보았다. 이제는 이를 이용하여 가지 단계 산란 진폭의 일반적인 표현을 운동량 초 트위스터 공간상에서 구해 보자. 먼저  $\mathcal{B}_\infty$  항을 계산해 보자. 식 (4.4.32)에서  $w$ 와  $z$ 의 관계를 통해 다음을 얻는다.

$$\mathcal{B}_\infty = \oint_{C_\infty} \frac{dw}{w} \hat{\mathcal{A}}_n(w) = - \oint_{C_{z_*}} dz \frac{z_*}{z(z - z_*)} \hat{\mathcal{A}}(z) \quad (4.4.43)$$

앞으로 산란 진폭을 계산하는데 있어 다음과 같은 성질을 가정한다.

$$\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_n^{\text{MHV}} Y_n(\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_n) \quad (4.4.44)$$

여기서  $Y_n(\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_n)$  는 Yangian 불변량이다. NMHV에서는 이 성질이 바로 보인다.

$$\mathcal{A}_n^{\text{NMHV}} = \mathcal{A}_n^{\text{MHV}} \sum_{j=2}^{n-3} \sum_{k=j+2}^n [n, j-1, j, k-1, k] \quad (4.4.45)$$

이 가정과 NMHV 산란 진폭을 이용하여 일반적인 가지 단계 산란 진폭에 대한 표현을 BCFW-재귀관계를 통해 얻게 되면 위의 가정이 타당함을 알 수 있다. 다시  $\mathcal{B}_\infty$ 에 대한 논의로 돌아가서 이를 살펴 보자. 이 경우에 산란

진폭은 다음과 같이 바뀐다.

$$\hat{\mathcal{A}}_n^{\text{NMHV}}(z) \xrightarrow{z \rightarrow z_*} \hat{\mathcal{A}}_{n-1}^{\text{MHV}}(z_*) \hat{Y}_{n-1}^{\text{NMHV}}(z_*) \frac{1}{\hat{P}_I^2} \hat{\mathcal{A}}_3^{\overline{\text{MHV}}}(z_*) \quad (4.4.46)$$

전 절에서 살펴 보았듯이  $Z_I$ 의 기하학적인 의미는 다음과 같고

$$(I) = (j, j-1) \cap (i-1, i, i+1) \quad (4.4.47)$$

이 경우에  $j = i + 2$ 이므로  $Z_I = Z_{i+1}$ 임을 알게 되고  $Y$ 는 외부입자들에 대해서만 표현됨을 알 수 있다. 이를 이용하면 식 (4.4.46)는 다음과 같이 표현된다.

$$\frac{P_I^2}{\hat{P}_I^2} \left[ \hat{\mathcal{A}}_{n-1}^{\text{MHV}}(z_*) \frac{1}{P_I^2} \hat{\mathcal{A}}_{3, \overline{\text{MHV}}}^{\text{가지}} \right] Y_{n-1}^{\text{NMHV}}(\dots, \mathcal{Z}_{i-1}, \mathcal{Z}_{i+1}, \mathcal{Z}_{i+2}, \dots) \quad (4.4.48)$$

이와 함께  $\frac{P_I^2}{\hat{P}_I^2} = -\frac{z_*}{z - z_*}$  를 이용하여  $w \rightarrow \infty$ 에서의 값은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \mathcal{B}_\infty^{\text{NMHV}} \\ &= \mathcal{A}_n^{\text{MHV}} \left( \oint_{C_{z_*}} dz \frac{z_*^2}{z(z - z_*)^2} \right) Y_{n-1}^{\text{NMHV}}(\dots, \mathcal{Z}_{i-1}, \mathcal{Z}_{i+1}, \mathcal{Z}_{i+2}, \dots) \\ &= \mathcal{A}_n^{\text{MHV}} Y_{n-1}^{\text{NMHV}}(\dots, \mathcal{Z}_{i-1}, \mathcal{Z}_{i+1}, \mathcal{Z}_{i+2}, \dots) \end{aligned} \quad (4.4.49)$$

이제 유한한 극에서 분해되는 통로에 대해 살펴 보자. 이 때 분해되는 통로를 기준으로 분해된 산란 진폭을 각각  $\mathcal{A}_{n_L}, \mathcal{A}_{n_R}$  이라 하자. 우리의 가정에 의해 분해 된 산란 진폭들은 다음과 같이 표현 될 것이다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n_L} &= \mathcal{A}_{n_L}^{\text{MHV}} Y_{n_L}^{\text{K}_L \text{MHV}}(\mathcal{Z}_I, \mathcal{Z}_{j-1}, \dots, \mathcal{Z}_{i+1}, \hat{\mathcal{Z}_i}), \\ \mathcal{A}_{n_R} &= \mathcal{A}_{n_R}^{\text{MHV}} Y_{n_R}^{\text{K}_R \text{MHV}}(\mathcal{Z}_I, \mathcal{Z}_{i-1}, \dots, \mathcal{Z}_{j+1}, \mathcal{Z}_j) \end{aligned} \quad (4.4.50)$$

여기서 Grassmann 변수의 차수를 비교하면  $K = K_L + K_R + 1$ 이다. 또한 분해 된 통로로 인해  $n_L + n_R = n + 2$ 이다. 간단한 벡터 해석학을 통해

다음을 이용하면

$$\begin{aligned} (I) &= (j, j-1) \bigcap (i-1, i, i+1) \\ &= Z_j \langle j-1, i-1, i, i+1 \rangle - Z_{j-1} \langle j, i-1, i, i+1 \rangle \end{aligned} \quad (4.4.51)$$

을 얻고  $\mathcal{Z}_I$ 는 외부 입자들에만 의존하는 것을 통하여 분해된 통로의 산란 진폭은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} &\left( \sum \frac{\hat{\mathcal{A}}_{n_L}^{\text{MHV}} \hat{\mathcal{A}}_{n_R}^{\text{MHV}}}{P_I^2} \right) \\ &\times Y_{n_L}^{\text{N}^{K_L} \text{MHV}}(\mathcal{Z}_I, \mathcal{Z}_{j-1}, \dots, \mathcal{Z}_{i+1}, \mathcal{Z}_{\hat{i}}) Y_{n_R}^{\text{N}^{K_R} \text{MHV}}(\mathcal{Z}_I, \mathcal{Z}_{i-1}, \dots, \mathcal{Z}_{j+1}, \mathcal{Z}_j) \end{aligned} \quad (4.4.52)$$

그런데 이 식에서 괄호 속의 항은  $n$  입자 NMHV 산란 진폭의 BCFW 분해 통로이다. 따라서 괄호 속의 식은 다음과 같이 표현된다.

$$\left( \sum \frac{\hat{\mathcal{A}}_{n_L}^{\text{MHV}} \hat{\mathcal{A}}_{n_R}^{\text{MHV}}}{P_I^2} \right) = \mathcal{A}_n^{\text{MHV}} \sum_{j=i-3}^{i+2} [i-1, i, i+1, j-1, j] \quad (4.4.53)$$

이를 종합하면 일반적인 가지 단계 산란 진폭에 대한 일반적인 표현을 알 수 있다. 임의의  $n$  입자 NMHV는 MHV 산란 진폭과 Yangian 불변량의 곱으로 표현됨과, BCFW-재귀관계에서 재귀적인 방법을 통해 임의의  $K$ 에 대해 임의의  $n$  입자 산란 진폭 또한 MHV 산란 진폭과 Yangian 불변량의 곱으로 표현 됨을 알 수 있다. 이에 대한 표현은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^{\text{N}^K \text{MHV}} &= \mathcal{A}_n^{\text{MHV}} \left\{ Y_{n-1}^{\text{N}^K \text{MHV}}(\dots, \mathcal{Z}_{i-1}, \mathcal{Z}_{i+1}, \mathcal{Z}_{i+2}, \dots) \right. \\ &+ \sum_{j=i-3}^{i+2} \left( [i-1, i, i+1, j-1, j] \right. \\ &\times Y_{n_L}^{\text{N}^{K_L} \text{MHV}}(\mathcal{Z}_I, \mathcal{Z}_{j-1}, \dots, \mathcal{Z}_{i+1}, \mathcal{Z}_{\hat{i}}) Y_{n_R}^{\text{N}^{K_R} \text{MHV}}(\mathcal{Z}_I, \mathcal{Z}_{i-1}, \dots, \mathcal{Z}_{j+1}, \mathcal{Z}_j) \left. \right) \left. \right\} \end{aligned} \quad (4.4.54)$$

## 4.5 고리 단계 BCFW-재귀관계식

BCFW-재귀관계는 게이지 이론의 가지 단계 산란 진폭을 계산하는 아주 강력한 도구임을 알았다. 이 관계를 고리 단계에도 응용하고자 하는 노력이 진행되고 있다. 이 절에서는 고리 피적분 함수(loop integrand)단계에서 BCFW-재귀관계를 어떻게 얻을 수 있는지에 대해 논의할 것이다.

### 4.5.1 고리 단계 BCFW-재귀관계식

이 소절에서는 고리 단계에서의 BCFW-재귀관계에 대해 알아보고자 한다. 기본적으로 BCFW-재귀관계는 복소 산란 진폭의 극 구조를 살펴봄으로써 산란 진폭의 구조를 얻을 수 있다. 고리 단계 산란 진폭에서도 BCFW-재귀관계는 다음과 같은 변형을 통해 얻을 수 있다.<sup>7</sup>

$$\hat{\mathcal{Z}}_n = \mathcal{Z}_n + w\mathcal{Z}_{n-1} \quad (4.5.1)$$

고리 단계에서도 가지 단계처럼 복소 적분을 수행하여 (4.4.35)를 얻는다. 가지 단계에서와 마찬가지로 고리 단계에서도 산란 진폭이 MHV와 Yangian 불변량으로 분해됨을 가정했다. BCFW-재귀관계를 통해 재귀적으로 이를 확인할 수 있다. 이를 다음과 같이 표현하자.

$$\mathcal{A}_n^L = \mathcal{A}_{n,\text{가지}}^{\text{MHV}} Y_n^L(\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_n) \quad (4.5.2)$$

여기서 윗 첨자  $L$ 은  $L$ -고리를 의미한다. 이에 따라  $\mathcal{B}_\infty$ 는 다음과 같이 표현된다.

$$\mathcal{B}_\infty = \mathcal{A}_{n,\text{가지}}^{\text{MHV}} Y_{n-1}^L(\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_{n-1}) \quad (4.5.3)$$

이제 유한한 극(pole)의 구조에 대해 살펴보자. 고리 단계에서 두 외부 입자들의 운동량을 BCFW-변형시키는 경우 가지 단계에서의 BCFW에서

---

<sup>7</sup> 여기서는  $n$  번째 가지를  $(n, n-1)$ 상에 올리는 변형을 했다.

나타나는 극 외에 추가적인 극이 고리 적분에 등장한다.

1) 고리 운동량에 대해 독립인 퍼뜨리개의 극

2) 고리 운동량을 포함하는 퍼뜨리개의 극

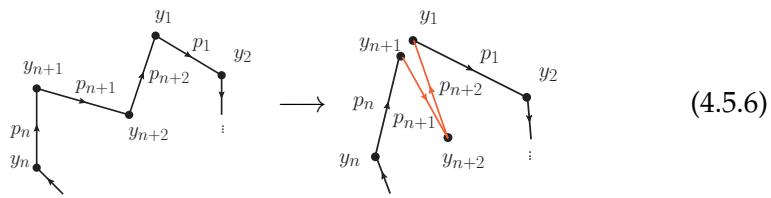
1)의 경우 가지 단계에서와 같은 구조이며 이 때문에 극을 갖는 퍼뜨리개를 기준으로 더 낮은 고리 단계의 두 산란 진폭으로 분해(factorization)가 된다. 이에 따른 산란 진폭은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,\text{가지}}^{\text{MHV}} & \sum_{j=3}^{n-2} [j-1, j, n-1, n, 1] \\ & \times Y_L^{L_1}(\mathcal{Z}_{I_j}, \mathcal{Z}_j, \mathcal{Z}_{j+1}, \hat{\mathcal{Z}}_{n_j}) Y_R^{L_2}(\mathcal{Z}_{I_j}, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{Z}_{j-1}) \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

여기서  $\hat{\mathcal{Z}}_{n_j} = (n-1, n) \cap (1, j-1, j)$ 이고,  $\mathcal{Z}_{I_j} = (j, j-1) \cap (n-1, n, 1)$ 이다. 또한  $L_1 + L_2 = L$ 을 만족한다. 2)의 경우는 가지 단계 BCFW에서는 나타나지 않는 극구조이다. 이 경우 다음과 같은 상황에서 극을 갖는다.

$$\langle AB\hat{n}1 \rangle = 0 \quad (4.5.5)$$

이 경우  $n$  입자 L-고리 산란 진폭은  $n+2$  입자 L-1 고리 산란 진폭에서 2개의 가지가 연결된 산란 진폭과 같아진다. 이를 전방극한(forward limit)이라 부른다. 도식적으로는 다음과 같다.



위의 도식에서 전방극한은  $y_{n+2}$ 는 고정시킨 채  $y_1 \rightarrow y_{n+1}$ 이 됨을 의미한다. 그런데  $y_1$ 은  $(n+2, 1)$ 로 결정되고  $y_{n+1}$ 은  $(n, n+1)$ 에 의해 결정되기 때문에 이들은  $(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_{n+2}, \mathcal{Z}_{n+1}, \mathcal{Z}_n)$ 이 같은 선상에 있는 경우로 볼 수 있다. 전방극한은 여기서  $\mathcal{Z}_{n+1}$ 과  $\mathcal{Z}_{n+2}$ 를  $(n+1, n+2) \cap (1, n)$ 으로 보내는 상황이다. 일반적으로  $\mathbb{CP}^{3|4}$ 에서 두 직선은 만나지 않는다. 하지만

$\hat{\mathcal{Z}}_n$ 는  $(n, n-1)$ 상에 있는 것을 이용하여  $(n+1, n+2) \cap (1, \hat{n})$ 를 구하여 이와 같은 문제를 극복 할 수 있다. 이때 이 교점을  $\mathcal{Z}_{\hat{B}}$ 라고 하자. 이 점은 다음과 같이 표현된다.

$$(\hat{B}) = (n+1, n+2) \cap (n-1, n, 1) \quad (4.5.7)$$

또한  $(1, \hat{n})$ 과  $(n+1, n+2)$ 가 교차한다는 사실은  $\hat{\mathcal{Z}}_n$ 이  $(n+1, n+2, 1)$  상에 놓여있음을 의미한다.  $\hat{\mathcal{Z}}_n$ 이  $(n-1, n)$ 상에 있는 점과 함께 종합하여 이를 표현하면 다음과 같다.

$$\hat{\mathcal{Z}}_n = (n-1, n) \cap (n+1, n+2, 1) \quad (4.5.8)$$

전방 극한의 경우는 다음과 같은 과정으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} & (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{Z}_n, \mathcal{Z}_{n+1}, \mathcal{Z}_{n+2}) \\ & \longrightarrow (\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \hat{\mathcal{Z}}_n, \mathcal{Z}_{n+1}, \mathcal{Z}_{n+2}) \Big|_{\mathcal{Z}_{n+1}, \mathcal{Z}_{n+2} \rightarrow \mathcal{Z}_{\hat{B}}} \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

이 경우 다음을 만족하게 된다.

$$\langle n+1, n+2, \hat{n}, 1 \rangle = 0 \quad (4.5.10)$$

이는 고리 운동량 초 트위스터  $\mathcal{Z}_A, \mathcal{Z}_B$ 가 전방 극한의 경우  $\mathcal{Z}_{n+1}, \mathcal{Z}_{n+2}$  가 됨을 알 수 있고 이들이 단일 유니타리티 자름 조건을 만족함을 알 수 있다. 이에 따라 이러한 극 구조를 갖는 경우 산란 진폭은 다음과 같음을 알 수 있다.

$$\mathcal{A}_{n,\text{가지}}^{\text{MHV}} \times f(A, B, n-1, n, 1) \left( Y_{n+2}^{L-1}(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \hat{\mathcal{Z}}_{nAB}, \mathcal{Z}_A, \mathcal{Z}_B) \Big|_{A, B \rightarrow \hat{B}} \right) \quad (4.5.11)$$

여기서

$$\hat{\mathcal{Z}}_{nAB} = (n-1, n) \cap (A, B, 1), \quad \hat{B} = (A, B) \cap (n-1, n, 1) \quad (4.5.12)$$

이다. 또한  $f(A, B, n - 1, n, 1)$ 은  $\langle AB\hat{n}1 \rangle = 0$ 인 조건을 나타내는 운동학적 정보가 담긴 함수이다. 이를 구하기에 앞서 전방 극한에 대해 좀 더 자세히 살펴보자. 전방 극한에서는 구하고자 하는 산란 진폭보다 2개 더 많은 가지의 산란 진폭이 등장한다. 이러한 추가적인 2개의 외부 가지에 대한 정보를 잘 처리해야만이 올바른 산란 진폭을 얻을 수 있을 것이다. 이러한 사실과 고리-적분과의 관계를 통해 논의를 진행하자. 먼저 다음의 적분을 살펴보자.

$$\int d^{4|4}\mathcal{Z}_A d^{4|4}\mathcal{Z}_B \quad (4.5.13)$$

보존적(bosonic) 적분부분에서 이 적분은  $A, B$ 가 만들어내는 가능한 모든 직선  $(A, B)$ 에 대한 적분과 직선  $(A, B)$  상에서  $Z_A, Z_B$ 의 움직임에 대한 적분으로 나눌 수 있다.  $\mathbb{CP}^{3|4}$ 의 성질로 인해 이 직선 상의 움직임들은 모두 같은 직선을 나타내기 때문에 이 적분은  $GL(2)$  불변성을 포함하고 있다. 전방 극한은  $(A, B)$ 와  $(n - 1, n, 1)$ 의 교점으로  $A, B$ 를 보내는 것으로  $GL(2)$  행렬의 특정 해가 이 극한과 관련이 있음을 알 수 있다. 이에 따라 위의 적분에서 보존적 적분은 다음과 같이  $GL(2)$  적분을 분리시켜 생각하는 것이 편리하다.

$$\int d^4Z_A d^4Z_B = \int \frac{d^4Z_A d^4Z_B}{\text{Vol}[GL(2)]} \int_{GL(2)} \quad (4.5.14)$$

$GL(2)$ 의 Haar 측도(measure)는 다음과 같다.

$$\int_{GL(2)} = \int \langle c_{A'} dc_{A'} \rangle \langle c_{B'} dc_{B'} \rangle \langle c_{A'} c_{B'} \rangle^2 \quad (4.5.15)$$

이때  $\langle c_{A'} c_{B'} \rangle$ 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \langle c_{A'} c_{B'} \rangle &= c_{A'}{}^A c_{B'}{}^B - c_{A'}{}^B c_{B'}{}^A \\ \begin{pmatrix} Z_{A'} \\ Z_{B'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} c_{A'}{}^A & c_{A'}{}^B \\ c_{B'}{}^A & c_{B'}{}^B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_A \\ Z_B \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (4.5.16)$$

전방 극한은  $Z_A$ 와  $Z_B$ 를  $(A, B)$ 와  $(n - 1, n, 1)$ 의 교점으로 보내는 것과 같기 때문에 이 극한에서는 위의 행렬이 특정한 값이 됨을 알 수 있다.  $\text{GL}(2)$  적분부분을 제외하면 모두 운동량 트위스터 공간 상에서의 중복되지 않은 직선들의 적분이 남는다. 운동량 트위스터 공간의 직선이 쌍대 운동량 공간의 점을 나타내므로 이 적분은 쌍대 운동량 공간에서의 고리 적분과 관계있음을 알 수 있다. 이를 표현하면 다음과 같다.

$$\int d^4y_0 = \int \frac{d^4Z_A d^4Z_B}{\text{Vol}[\text{GL}(2)] \langle AB \rangle^4} \quad (4.5.17)$$

여기서  $\langle AB \rangle^4$ 는 측도가 사영적인 성질을 표현한다. 비록 이 항이  $\text{SL}(4)$  대칭을 깨지만 산란 진폭에서는 피적분함수와 상쇄된다. 이는 다음 절에서 4 입자 1-고리 산란 진폭에 대해 알아보는 과정에서 등장한다. 이를 종합하면 전방 극한에서의 산란 진폭은 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{n,\text{가지}}^{\text{MHV}} & \int \frac{d^{4|4}\mathcal{Z}_A d^{4|4}\mathcal{Z}_B}{\text{Vol}[\text{GL}(2)]} \int_{\text{GL}(2)} [A, B, n - 1, n, 1] \\ & \times Y_{n+2}^{L-1}(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \hat{\mathcal{Z}}_{n_{AB}}, \mathcal{Z}_A \mathcal{Z}_{\hat{B}}) \end{aligned} \quad (4.5.18)$$

$[A, B, n - 1, n, 1]$  은  $\langle A, n - 1, n, 1 \rangle$ 과  $\langle B, n - 1, n, 1 \rangle$ 을 분모에 포함하고 있고 이 값이 극을 갖고 있는 사실이 전방 극한에 대한 정보를 포함하고 있다. 또한 이 값은 분모에  $\langle A, B, n, 1 \rangle$  또한 갖고 있으며 이는 단일-자름과 관계있는 퍼뜨리개이다. 우리는 고리 단계 산란 진폭에 대한 모든 구조에 대해 살펴 보았다. 이를 다시 써 보면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n^{L\text{-고리}} &= \mathcal{A}_{n,\text{가지}}^{\text{MHV}} \left\{ Y_{n-1}^L(\mathcal{Z}_1, \dots, \mathcal{Z}_{n-1}) \right. \\ &+ \sum_{j=3}^{n-2} [j - 1, j, n - 1, n, 1] Y_L^{L_1}(\mathcal{Z}_{I_j}, \mathcal{Z}_j, \mathcal{Z}_{j+1}, \dots, \hat{\mathcal{Z}}_{n_j}) Y_R^{L_2}(\mathcal{Z}_I, \mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \mathcal{Z}_{j-1}) \\ &\left. + \int \frac{d^{4|4}\mathcal{Z}_A d^{4|4}\mathcal{Z}_B}{\text{Vol}[\text{GL}(2)]} \int_{\text{GL}(2)} [A, B, n - 1, n, 1] Y_{n+2}^{L-1}(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \dots, \hat{\mathcal{Z}}_{n_{AB}}, \mathcal{Z}_A \mathcal{Z}_{\hat{B}}) \right\} \end{aligned} \quad (4.5.19)$$

이 때,  $L_1 + L_2 = L$  이고

$$\begin{aligned}\hat{\mathcal{Z}}_{n_j} &= (n-1, n) \bigcap (1, j-1, j), & \mathcal{Z}_{l_j} &= (j, j-1) \bigcap (n-1, n, 1) \\ \hat{\mathcal{Z}}_{n_{AB}} &= (n-1, n) \bigcap (A, B, 1)\end{aligned}\quad (4.5.20)$$

이다. 여기서  $n$  가지  $L'$  고리( $< L$ ) 산란 진폭과  $(n+2)$  가지  $(L-1)$  고리 산란 진폭이 가지 단계 MHV 산란 진폭과 고리 단계 Yangian 불변량의 곱으로 표현됨을 가정하고 위의 재귀관계를 이용하면 모든 고리 단계 산란 진폭이 가지 단계 MHV 산란 진폭과 고리 단계 Yangian 불변량의 곱으로 표현됨을 알 수 있다.

### 4.5.2 4 입자 1-고리 산란 진폭

이 소절에서는 전 소절에서 얻은 고리 단계 BCFW-재귀관계를 이용하여 4 입자 1-고리 산란 진폭에 대해 살펴볼 것이다. 식 (4.5.19)은 세 개의 항을 갖고 있다. 4 입자 1-고리 산란 진폭은 상자(box) 도형만이 존재한다. 그러므로 첫 째 항의  $Y_3^{L=1}$ 는 등장하지 않는다. 마찬가지 이유로 두 번째 항 또한 등장하지 않는다.<sup>8</sup> 따라서 4 입자 1-고리 산란 진폭은 BCFW-재귀관계의 마지막 항을 통하여 얻는다.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_4^{\text{1-고리}} &= \mathcal{A}_{4,\text{가지}}^{\text{MHV}} \int \frac{d^{4|4} \mathcal{Z}_A d^{4|4} \mathcal{Z}_B}{\text{Vol}[\text{GL}(2)]} \int_{\text{GL}(2)} [A, B, 3, 4, 1] \\ &\quad \times Y_6^{\nearrow \nearrow}(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3, \hat{\mathcal{Z}}_{4_{AB}}, \mathcal{Z}_A, \mathcal{Z}_{\hat{B}})\end{aligned}\quad (4.5.21)$$

식 (4.4.29)를 이용하여  $n = 6$ 에서의 가지 단계 Yangian 불변량  $\gamma_{6,\text{가지}}^{\text{NMHV}}$ 를 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{aligned}Y_6^{\nearrow \nearrow}(\mathcal{Z}_1, \mathcal{Z}_2, \mathcal{Z}_3, \hat{\mathcal{Z}}_{4_{AB}}, \mathcal{Z}_A, \mathcal{Z}_{\hat{B}}) \\ = [\hat{B}, 1, 2, 3, \hat{4}] + [\hat{B}, 1, 2, \hat{4}, A] + [\hat{B}, 2, 3, \hat{4}, A]\end{aligned}\quad (4.5.22)$$

---

<sup>8</sup>더 낮은 고리로 나눠지지 않는다.

식 (4.5.22)의 ♦ 운동량 초 트위스터 변수를 다음과 같이 외부(external) 가지를 통해 표현하자.

$$\begin{aligned} (\hat{A}) = (3, 4) \bigcap (A, B, 1) &\implies \mathcal{Z}_{\hat{A}} = \frac{1}{\langle 3AB1 \rangle} (\mathcal{Z}_4 \langle 3AB1 \rangle - \mathcal{Z}_3 \langle 4AB1 \rangle) \\ (\hat{B}) = (A, B) \bigcap (3, 4, 1) &\implies \mathcal{Z}_{\hat{B}} = \frac{1}{\langle A341 \rangle} (\mathcal{Z}_B \langle A341 \rangle - \mathcal{Z}_A \langle B341 \rangle) \end{aligned} \quad (4.5.23)$$

식 (4.5.21)에서 Grassmann 적분  $\int d^4 \chi_A d^4 \chi_B$ 을 먼저 수행하자. 식 (4.5.21)의 5-괄호  $[A, B, 3, 4, 1]$ 은 다음과 같은 Grassmann  $\delta$ -함수를 포함한다.

$$[A, B, 3, 4, 1] \propto \delta^{(4)}(\chi_A \langle B341 \rangle - \chi_B \langle A341 \rangle + \dots) \quad (4.5.24)$$

그런데 Grassmann 적분은  $\chi_A$ 와  $\chi_B$ 에 대한 적분이므로 Grassmann  $\delta$ -함수의  $(\dots)$  이후의 항들은 적분에 기여하지 않는다. 식 (4.5.22)의 첫 째항과 결합된 적분에서는  $\mathcal{Z}_{\hat{B}}$ 가 적분에 기여할 것이다. 그런데  $\chi_{\hat{B}} \propto \chi_A \langle B341 \rangle - \chi_B \langle A341 \rangle$ 인 사실을 이용하면 식(4.5.22)와 함께 식 (4.5.21)의 피적분함수의 첫 항에 대한 Grassmann 적분은 다음을 준다.

$$\int d^4 \chi_A d^4 \chi_B [A, B, 3, 4, 1] [\hat{B}, 1, 2, 3, \hat{4}] = 0 \quad (4.5.25)$$

이제  $[\hat{B}, 1, 2, \hat{4}, A]$ 가 포함 된 항의 적분을 살펴 보자. 이 항은  $\delta^{(4)}(\chi_{\hat{B}} \langle 12\hat{4}A \rangle - \chi_A \langle \hat{B}12\hat{4} \rangle + \dots)$  항을 갖고 있다. 그런데 위의 결과와 마찬가지로 처음  $\chi_{\hat{B}}$ 에 관한 항은 적분에 기여하지 않는다. 또한 다음의 Schouten 항등식을 이용하면 두 번째 항의  $\langle \hat{B}12\hat{4} \rangle$ 이 0임을 알 수 있다:

$$\langle i, j, k, l \rangle \mathcal{Z}_m + \langle j, k, l, m \rangle \mathcal{Z}_i + \langle k, l, m, i \rangle \mathcal{Z}_j + \langle l, m, i, j \rangle \mathcal{Z}_k + \langle m, i, j, k \rangle \mathcal{Z}_l \quad (4.5.26)$$

따라서 이 적분은 다음과 같다.

$$\int d^4 \chi_A d^4 \chi_B [A, B, 3, 4, 1] [\hat{B}, 1, 2, \hat{4}, A] = 0 \quad (4.5.27)$$

마지막으로 세 번째 항을 계산하면 다음과 같다.

$$\int d^4\chi_A d^4\chi_B [A, B, 3, 4, 1][\hat{B}, 2, 3, \hat{4}, A] = \frac{\langle 1234 \rangle \langle AB34 \rangle}{\langle A234 \rangle \langle B341 \rangle} I_4(A, B) \quad (4.5.28)$$

여기서  $I_4(A, B)$ 는 다음과 같다.

$$I_4(A, B) = \frac{\langle 1234 \rangle^2}{\langle AB12 \rangle \langle AB23 \rangle \langle AB34 \rangle \langle AB41 \rangle} \quad (4.5.29)$$

이 계산에서 다음을 사용하였다.

$$\langle 234\hat{B} \rangle = -\frac{\langle 1234 \rangle \langle 34AB \rangle}{\langle A341 \rangle} \quad (4.5.30)$$

위의 내용을 정리하여 1-고리 4 입자 Yangian을 표현하면 다음과 같다.

$$Y_4^{1\text{-고리}} = \int \frac{d^4Z_A d^4Z_B}{\text{Vol}[\text{GL}(2)]} \int_{\text{GL}(2)} I_4(A, B) \frac{\langle 1234 \rangle \langle AB34 \rangle}{\langle A234 \rangle \langle B341 \rangle} \quad (4.5.31)$$

이제 위의 표현에서  $\text{GL}(2)$  적분에 대해 살펴 보자. 이 적분에서 적분변수는  $\mathbb{CP}^3$ 의 성질을 이용하여  $Z_A$ 와  $Z_B$  앞의 계수를 1로 유지하는  $\text{GL}(2)$  행렬로 게이지-고정을 통해 정할 수 있다.

$$\begin{pmatrix} Z_A \\ Z_B \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & c_{A'} \\ c_{B'} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_A \\ Z_B \end{pmatrix} \quad (4.5.32)$$

이 경우 (4.5.15)의 Haar 측도는 다음과 같이 표현된다.

$$\langle c_{A'}dc_{A'} \rangle \langle c_{B'}dc_{B'} \rangle \langle c_{A'}c_{B'} \rangle^2 = dc_{A'}dc_B (1 - c_{A'}c_{B'})^2 \quad (4.5.33)$$

또한 식 (4.5.31)에서 피적분함수의 4-괄호(4-bracket)들은 다음과 같이 변환된다.

$$\begin{aligned} \langle ABij \rangle &\rightarrow \langle ABij \rangle \langle c_{A'}c_{B'} \rangle = \langle ABij \rangle (1 - c_{A'}c_{B'}) \\ \langle Aijk \rangle &\rightarrow \langle Aijk \rangle + c_{A'} \langle Bjik \rangle \\ \langle Bjik \rangle &\rightarrow \langle Bjik \rangle + c_{B'} \langle Aijk \rangle \end{aligned} \quad (4.5.34)$$

이와 식 (4.5.31)를 종합하여 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^{1\text{-고리}} &= \mathcal{A}_{4,\text{가지}}^{\text{MHV}} \int \frac{d^4 Z_A d^4 Z_B}{\text{Vol}[\text{GL}(2)]} I_4(A, B) \langle 1234 \rangle \langle AB34 \rangle \\ &\times \int \frac{dc_{A'} dc_{B'}}{\left(1 - c_{A'} c_{B'}\right) \left(\langle A234 \rangle + c_{A'} \langle B234 \rangle\right) \left(\langle B341 \rangle + c_{B'} \langle A341 \rangle\right)} \end{aligned} \quad (4.5.35)$$

우리는  $\text{GL}(2)$ 적분에서 전방 극한에 대한 정보를 얻고자 한다. 전방 극한은 점  $A$ 와  $B$ 를 점  $Z_\beta = (A, B) \cap (3, 4, 1)$ 으로 보내는 극한이다. 위의 적분에서  $\langle B341 \rangle + c_{B'} \langle A341 \rangle$ 이 극을 갖는 곳이 점  $B \rightarrow \hat{B}$ 의 정보를 갖고 있다. 이 극을 포함하는 경로로 적분을 수행하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\int \frac{dc_{A'} dc_{B'}}{\left(1 - c_{A'} c_{B'}\right) \left(\langle A234 \rangle + c_{A'} \langle B234 \rangle\right) \left(\langle B341 \rangle + c_{B'} \langle A341 \rangle\right)} \\ &= \int \frac{dc_{A'}}{\left(\langle A341 \rangle + c_{A'} \langle B341 \rangle\right) \left(\langle A234 \rangle + c_{A'} \langle B234 \rangle\right)} \end{aligned} \quad (4.5.36)$$

이 결과를 살펴 보면  $\langle A341 \rangle + c_{A'} \langle B341 \rangle$ 가 극을 갖는 곳에서 점  $A \rightarrow \hat{B}$ 의 정보가 포함돼 있음을 알 수 있다. 이 극을 갖는 경로로 적분을 수행하면 다음을 얻는다.

$$\begin{aligned} &\int \frac{dc_{A'}}{\left(\langle A341 \rangle + c_{A'} \langle B341 \rangle\right) \left(\langle A234 \rangle + c_{A'} \langle B234 \rangle\right)} \\ &= \frac{1}{\langle A234 \rangle \langle B341 \rangle + \langle A341 \rangle \langle B234 \rangle} \\ &= -\frac{1}{\langle AB34 \rangle \langle 1234 \rangle} \end{aligned} \quad (4.5.37)$$

위 과정에서 마지막 항은 Schouten 항등식(4.5.26)을 이용했다. 이 모든 것을 고려하면 최종적으로 4 입자 1-고리 산란 진폭은 다음과 같이 표현

된다.

$$\mathcal{A}_4^{1\text{-고리}} = -\mathcal{A}_{4,\text{가지}}^{\text{MHV}} \int \frac{d^4 Z_A d^4 Z_B}{\text{Vol}[\text{GL}(2)]} I_4(A, B) \quad (4.5.38)$$

4 입자 1-고리 산란 진폭은 이미 3.2절에서 구했었고 이는 다음과 같았다.

$$\mathcal{A}_4^{1\text{-고리}}(1, 2, 3, 4) = su \mathcal{A}_{4,\text{가지}}^{\text{MHV}}(1, 2, 3, 4) I_4(p_1, p_2, p_3, p_4) \quad (4.5.39)$$

이를 운동량 초 트위스터 공간에서 어떻게 표현되는지 알아보도록 하자.

먼저 이를 쌍대 운동량 공간에서 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_4^{1\text{-고리}}(1, 2, 3, 4) &= \mathcal{A}_{4,\text{가지}}^{\text{MHV}}(1, 2, 3, 4) \int d^4 y_0 \frac{y_{13}^2 y_{24}^2}{y_{01}^2 y_{02}^2 y_{03}^2 y_{04}^2} \\ &= -\mathcal{A}_{4,\text{가지}}^{\text{MHV}} \int \frac{d^4 Z_A d^4 Z_B}{\text{Vol}[\text{GL}(2)]} \frac{\langle 1234 \rangle^2}{\langle AB12 \rangle \langle AB23 \rangle \langle AB34 \rangle \langle AB41 \rangle} \\ &= -\mathcal{A}_{4,\text{가지}}^{\text{MHV}} \int \frac{d^4 Z_A d^4 Z_B}{\text{Vol}[\text{GL}(2)]} I_4(A, B) \end{aligned} \quad (4.5.40)$$

여기서  $y_{0i}^2 = (y_0 - y_i)^2 \circ |$ 고,  $-s = y_{13}^2$ ,  $-u = y_{24}^2 \circ |$ 고

$$y_{ij}^2 = -\frac{\langle j-1, j, k-1, k \rangle}{\langle j-1, j \rangle \langle k-1, k \rangle} \quad (4.5.41)$$

을 이용했다. 또한  $\int d^4 y_0$ 는 이 공간에서 모든 구별되는 직선  $(A, B)$ 에 대한 적분으로 표현되며 이는 다음과 같다.

$$\int d^4 y_0 = \int \frac{d^4 Z_A d^4 Z_B}{\text{Vol}[\text{GL}(2)] \langle AB \rangle^4} \quad (4.5.42)$$

여기서  $\langle AB \rangle^4$ 는 측도의 사영적인 성질로 인해 나타나는 양이다. 유니타리티 방법을 통해 구한 산란 진폭을 운동량 초 트위스터 공간에서 표현해 보면 다음과 같고,

$$\mathcal{A}_4^{1\text{-고리}} = -\mathcal{A}_{4,\text{가지}}^{\text{MHV}} \int \frac{d^4 Z_A d^4 Z_B}{\text{Vol}[\text{GL}(2)]} I_4(A, B) \quad (4.5.43)$$

이는 고리 단계 BCFW-재귀방법을 통해 구한 결과와 정확히 일치한다.

## 제 5 장

### 토의

우리는 4차원의  $\mathcal{N} = 4$  초대칭을 가지는 비 가환 게이지 이론에 대해 살펴보았다. 우리가 차용한 스피너-나선도 표기법은 기존의 4차원 벡터 표기법보다 더 간결한 표기법임을 알게 됐고 BCFW-재귀관계는 산란 진폭의 계산을 더 쉽게 만들어 준다는 것을 배웠다. 하지만 이 방법은  $z \rightarrow \infty$ 에서의 산란 진폭의 거동에 따라 영향을 받기 때문에 게이지 이론을 넘어서는 이론들에 대한 적용에 대한 연구가 더 필요하다. 최근의 산란 진폭에 관한 연구는 크게는 게이지이론의 가지 단계 산란 진폭에 관한 연구와 고리 단계 산란 진폭에 관한 연구로 나눌 수 있고 연구자들의 최종목표는 이 모두를 아우르는 이론에 대한 이해일 것이다.

제4장에서 얻은  $L$ -고리 단계 BCFW-재귀관계식을 보면 색-정렬된 산란 진폭의 순환적(cyclic) 성질을 명시적으로 나타나지 않는다. 이는 BCFW-변형을 통해 두 운동량이 변형됐기 때문이다. 또한 BCFW-재귀관계를 통해 얻는 산란 진폭은 가짜 극(spurious pole)들 또한 나타나지만 모든 BCFW-도형을 더하는 경우 사라지는 양들이다. 이는 산란 진폭의 국소성(locality)과 관련돼 있다.

Yangian 대칭성을 갖는 계에서 위와 같은 문제를 갖지 않는 방법을 통해 산란 진폭을 표현하고자 하는 노력이 있었고 최근에는 Positive Grassmannian이라는 다양체를 통해 산란 진폭을 표현하는 방법을 얻었다. 다음과 같은 Grassmannian 적분을 도입하면서 이에 대한 해결책의 실마

리를 주었다.[8, 39]

$$\mathcal{L}_{n,k}(\mathcal{W}_i) = \int \frac{d^{n \times k} C_{\alpha i}}{\text{GL}(k) \prod_{j=1}^n M_j} \prod_{\alpha=1}^k \delta^{4|4} \left( \sum_{l=1}^n C_{\alpha l} \mathcal{W}_l^A \right) \quad (5.0.1)$$

여기서  $k \equiv K + 2$ 이고 이는 일반적으로  $N^K$ MHV 초 산란 진폭을 표현하기 위해 도입됐다. 또한 위의 식은 Yangian 불변량이면서 순환적(cyclic) 불변을 나타낸다.<sup>1</sup> 주어진  $n, k$ 에 대해서  $\mathcal{L}_{n,k}$ 가 Yangian 불변량을 만들어내는 유일한 순환적 대칭을 가지는 적분표현이라는 사실은 [40, 41]에 잘 소개돼 있다. 이 적분 표현은  $\mathcal{N} = 4$  평면(planer) SYM에서 모든 앞선-특이성(leading singularity) 들을 만들어내는 양으로 Arkani-Hamed, Cachazo, Cheung, Kaplan에 의해 처음 소개됐다.[39] 이 적분에서 물리적으로 의미 있는 극들을 포함하는 경로로 적분을 수행하면 산란 진폭을 얻을 수 있다는 것이 잘 알려져 있으며 이에 관한 연구가 활발히 진행되고 있다.[8, 42] 또한 이 양은 온-쉘 도형(on-shell diagram)이라는 새로운 방법을 통해 산란 진폭얻는 것과 밀접한 관련이 있다. 이 도형은 모든 산란 진폭을 3 입자 MHV,  $\overline{\text{MHV}}$ 산란 진폭들을 붙여가며 산란 진폭을 만드는 방법이다.[8] 최근에는 이러한 양들과 관련지어 산란 진폭을 기하학적인 방법을 통해 얻고자 하는 시도가 이뤄지고 있다. 위에서 소개된 Grassmannian에서  $k \times k$  소행렬식이 양수인 양을 Positive Grassmannian  $G_+(k, n)$ 으로 나타내면 이 다양체 내의 Cell이라 불리는 구조와 온-쉘 도형이 관련 있게 된다. 또한 이 양을 계수로 하는 운동량 트위스터를 다음과 같이 표현하면,

$$Y_\alpha^I = C_{\alpha a} Z_a^I, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k \quad (5.0.2)$$

---

<sup>1</sup>이렇게 도입된  $C_{\alpha l}$ 은  $n \times k$  행렬이다. 이들은  $\mathbb{C}^n$ 공간에  $k$ -평면에 정의된  $k$ 개의  $n$ 성분 벡터들로 볼 수 있다. 이 때문에 이 양은  $GL(k)$  대칭을 갖고 있고 이러한 성질이 위의 적분에 포함돼 있다. 일반적으로  $n$ 차원 공간의 모든  $k$ -평면들의 공간을 Grassmannian  $Gr(k, n)$ 이라 부른다. 식 (5.0.1)은 Grassmannian의  $k$ -평면들에 대해 순환적 불변성을 가지는 적분으로 볼 수 있다.

이 점들이 만들어내는 도형의 부피가 산란 진폭과 관련 있다는 사실이 알려져 있으며 이 도형을 Amplituhedron 이라 부른다.[43, 44] 하지만 아직 고리 단계 산란 진폭에 대응되는 기하학적 양은 발견되지 않았고 이에 관한 연구도 필요할 것이다. 이상의 작업은 4차원에서의 스피너들을 통해 이뤄졌다. 3차원을 연구할 때는 스피너를 통해 트위스터를 다루는 방법에 대한 어려움과 같은 문제가 등장하고 이러한 점 외에도 다른 차원에서의 다양한 문제로 이러한 상황에서의 산란 진폭에 대한 연구가 주목을 받고 있다.[45, 46] 이 논문에서는 고리 단계를 다룰 때 고리-피적분 함수를 간단하게 하는 방법에 대해 제한을 두었다. 하지만 제3장의 끝에서 적분과 관련하여 IR 발산항들에 대한 연구를 짧게 언급하였다. 최근에는 이러한 IR 발산 항을 차원 조절(dimensional regularization)을 통하여 이해하려는 시도가 있다. [47, 48] 이와 관련하여 잉여함수(remainder function)와 심볼(symbol)이라는 양을 도입하여 고리 단계 산란 진폭의 구조에 대한 이해를 높이고자 하는 시도 또한 연구가 활발히 진행되고 있다.[49, 50, 51] 게이지 이론에서 산란 진폭의 제곱과 중력이론에서 산란 진폭간의 관계에 관한 연구가 오래전부터 있었지만[52] 이에 머무르지 않고 더 나아가, 스칼라, 게이지, 중력이론간의 관계에 대한 해석을 통해 게이지이론의 이해도를 높이고자 하는 연구 또한 많은 물리학자에 의해 연구되고 있다.[46, 53, 54]

위에서 언급한 것들 외에도 소개하지 못한 연구들이 무수히 많다. 산란 진폭에 대한 연구는 많은 물리학자들에 의해 체계적으로 연구가 수행되고 있으며 앞으로도 활발한 연구는 계속될 것이다. 이 논문이 산란 진폭 연구분야에 대한 의미있는 소개가 되었기를 희망한다.

## 참고 문헌

- [1] E. Witten, “Perturbative Gauge Theory as a String Theory in Twistor Space,” *Communications in Mathematical Physics*, vol. 252, pp. 189–258, Dec. 2004.
- [2] R. Britto, F. Cachazo, and B. Feng, “New recursion relations for tree amplitudes of gluons,” *Nuclear Physics B*, vol. 715, pp. 499–522, May 2005.
- [3] R. Britto, F. Cachazo, B. Feng, and E. Witten, “Direct Proof of the Tree-Level Scattering Amplitude Recursion Relation in Yang-Mills Theory,” *Physical Review Letters*, vol. 94, p. 181602, May 2005.
- [4] A. Hodges, “Eliminating spurious poles from gauge-theoretic amplitudes,” *ArXiv e-prints*, May 2009.
- [5] Z. Bern, L. Dixon, D. C. Dunbar, and D. A. Kosower, “Fusing gauge theory tree amplitudes into loop amplitudes,” *Nuclear Physics B*, vol. 435, pp. 59–101, Feb. 1995.
- [6] Z. Bern and Y.-t. Huang, “Basics of generalized unitarity,” *Journal of Physics A Mathematical General*, vol. 44, p. 4003, Nov. 2011.
- [7] R. H. Boels and R. S. Isermann, “Yang-Mills amplitude relations at loop level from non-adjacent BCFW shifts,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 3, p. 51, Mar. 2012.
- [8] N. Arkani-Hamed, J. L. Bourjaily, F. Cachazo, A. B. Goncharov, A. Postnikov, and J. Trnka, “Scattering Amplitudes and the Positive Grassmannian,” *ArXiv e-prints*, Dec. 2012.
- [9] M. Srednicki, *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1st ed., 2007.

- [10] S. J. Parke and T. Taylor, “An Amplitude for  $n$  Gluon Scattering,” *Phys.Rev.Lett.*, vol. 56, p. 2459, 1986.
- [11] F. A. Berends and W. Giele, “Recursive Calculations for Processes with  $n$  Gluons,” *Nucl.Phys.*, vol. B306, p. 759, 1988.
- [12] R. Kleiss and H. Kuijf, “Multigluon cross sections and 5-jet production at hadron colliders,” *Nuclear Physics B*, vol. 312, no. 3, pp. 616 – 644, 1989.
- [13] V. Del Duca, L. Dixon, and F. Maltoni, “New color decompositions for gauge amplitudes at tree and loop level,” *Nuclear Physics B*, vol. 571, pp. 51–70, Apr. 2000.
- [14] B. Kol and R. Shir, “Color structures and permutations,” *ArXiv e-prints*, Mar. 2014.
- [15] Z. Bern, J. J. M. Carrasco, and H. Johansson, “New relations for gauge-theory amplitudes,” *Phys. Rev. D*, vol. 78, p. 085011, Oct 2008.
- [16] Y.-X. Chen, Y.-J. Du, and B. Feng, “A proof of the explicit minimal-basis expansion of tree amplitudes in gauge field theory,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2, p. 112, Feb. 2011.
- [17] N. E. J. Bjerrum-Bohr, P. H. Damgaard, and P. Vanhove, “Minimal Basis for Gauge Theory Amplitudes,” *Physical Review Letters*, vol. 103, p. 161602, Oct. 2009.
- [18] S. Stieberger, “Open & Closed vs. Pure Open String Disk Amplitudes,” *ArXiv e-prints*, July 2009.
- [19] L. Brink, J. H. Schwarz, and J. Scherk, “Supersymmetric Yang-Mills theories,” *Nuclear Physics B*, vol. 121, pp. 77–92, Mar. 1977.
- [20] Z. Bern, L. Dixon, and D. Kosower, “Two-Loop  $g \rightarrow gg$  Splitting Amplitudes in QCD,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 8, p. 12, Aug. 2004.

- [21] L. Dixon, “Calculating Scattering Amplitudes Efficiently,” *ArXiv High Energy Physics - Phenomenology e-prints*, Jan. 1996.
- [22] Z. Bern, L. Dixon, D. C. Dunbar, and D. A. Kosower, “One-loop n-point gauge theory amplitudes, unitarity and collinear limits,” *Nuclear Physics B*, vol. 425, pp. 217–260, Aug. 1994.
- [23] D. Forde, “Direct extraction of one-loop integral coefficients,” *Phys. Rev. D*, vol. 75, p. 125019, June 2007.
- [24] N. Arkani-Hamed, F. Cachazo, and J. Kaplan, “What is the simplest quantum field theory?,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 9, p. 16, Sept. 2010.
- [25] R. Roiban, “Review of AdS/CFT Integrability, Chapter V.1: Scattering Amplitudes: A Brief Introduction,” *Letters in Mathematical Physics*, vol. 99, pp. 455–479, Jan. 2012.
- [26] L. V. Bork, D. I. Kazakov, G. S. Vartanov, and A. V. Zhiboev, “Infrared safe observables in N=4 super Yang-Mills theory,” *Physics Letters B*, vol. 681, pp. 296–303, Nov. 2009.
- [27] M. Bianchi, S. Kovacs, G. Rossi, and Y. S. Stanev, “Anomalous dimensions in /N=4 SYM theory at order  $g^4$ ,” *Nuclear Physics B*, vol. 584, pp. 216–232, Sept. 2000.
- [28] Z. Bern, M. Czakon, L. J. Dixon, D. A. Kosower, and V. A. Smirnov, “Four-loop planar amplitude and cusp anomalous dimension in maximally supersymmetric Yang-Mills theory,” *Phys. Rev. D*, vol. 75, p. 085010, Apr. 2007.
- [29] C. Anastasiou, L. Dixon, Z. Bern, and D. A. Kosower, “Planar Amplitudes in Maximally Supersymmetric Yang-Mills Theory,” *Physical Review Letters*, vol. 91, p. 251602, Dec. 2003.
- [30] Z. Bern, L. J. Dixon, and V. A. Smirnov, “Iteration of planar amplitudes in maximally supersymmetric Yang-Mills theory at

three loops and beyond," *Phys. Rev. D*, vol. 72, p. 085001, Oct. 2005.

- [31] M. L. Mangano and S. J. Parke, "Multiparton amplitudes in gauge theories," *Phys.Rept.*, vol. 200, pp. 301–367, 1991.
- [32] Z. Bern, L. Dixon, and D. A. Kosower, "Progress in One-Loop QCD Computations," *Annual Review of Nuclear and Particle Science*, vol. 46, pp. 109–148, 1996.
- [33] H. Elvang, Y.-t. Huang, and C. Peng, "On-shell superamplitudes in  $\mathcal{N} < 4$  SYM," *Journal of High Energy Physics*, vol. 9, p. 31, Sept. 2011.
- [34] Y. Jia, R. Huang, and C.-Y. Liu, "U(1) decoupling, Kleiss-Kuijf and Bern-Carrasco-Johansson relations in N=4 super Yang-Mills," *Phys. Rev. D*, vol. 82, p. 065001, Sept. 2010.
- [35] N. Arkani-Hamed and J. Kaplan, "On Tree Amplitudes in Gauge Theory and Gravity," *ArXiv e-prints*, Jan. 2008.
- [36] J. M. Drummond, J. Henn, V. A. Smirnov, and E. Sokatchev, "Magic identities for conformal four-point integrals," *Journal of High Energy Physics*, vol. 1, p. 64, Jan. 2007.
- [37] J. M. Drummond, J. Henn, G. P. Korchemsky, and E. Sokatchev, "Dual superconformal symmetry of scattering amplitudes in N=4 super-Yang-Mills theory," *Nuclear Physics B*, vol. 828, pp. 317–374, Mar. 2010.
- [38] J. Drummond, J. Henn, and J. Plefka, "Yangian symmetry of scattering amplitudes in Script N = 4 super Yang-Mills theory," *Journal of High Energy Physics*, vol. 5, p. 46, May 2009.
- [39] N. Arkani-Hamed, F. Cachazo, C. Cheung, and J. Kaplan, "A duality for the S matrix," *Journal of High Energy Physics*, vol. 3, p. 20, Mar. 2010.

- [40] J. M. Drummond and L. Ferro, “Yangians, Grassmannians and T-duality,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 7, p. 27, July 2010.
- [41] J. M. Drummond and L. Ferro, “The Yangian origin of the Grassmannian integral,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 12, p. 10, Dec. 2010.
- [42] H. Elvang and Y.-t. Huang, “Scattering Amplitudes,” *ArXiv e-prints*, Aug. 2013.
- [43] N. Arkani-Hamed and J. Trnka, “The Amplituhedron,” *ArXiv e-prints*, Dec. 2013.
- [44] N. Arkani-Hamed and J. Trnka, “Into the Amplituhedron,” *ArXiv e-prints*, Dec. 2013.
- [45] Y.-t. Huang and S. Lee, “Integral Formula for Supersymmetric Scattering Amplitudes in Three Dimensions,” *Physical Review Letters*, vol. 109, p. 191601, Nov. 2012.
- [46] F. Cachazo, S. He, and E. Y. Yuan, “Scattering of Massless Particles in Arbitrary Dimension,” *ArXiv e-prints*, July 2013.
- [47] T. Becher and M. Neubert, “On the structure of infrared singularities of gauge-theory amplitudes,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 6, p. 81, June 2009.
- [48] T. Becher and M. Neubert, “Infrared Singularities of Scattering Amplitudes in Perturbative QCD,” *Physical Review Letters*, vol. 102, p. 162001, Apr. 2009.
- [49] A. B. Goncharov, M. Spradlin, C. Vergu, and A. Volovich, “Classical Polylogarithms for Amplitudes and Wilson Loops,” *Physical Review Letters*, vol. 105, p. 151605, Oct. 2010.
- [50] R. Britto, “Loop amplitudes in gauge theories: modern analytic approaches,” *Journal of Physics A Mathematical General*, vol. 44, p. 4006, Nov. 2011.

- [51] J. J. M. Carrasco and H. Johansson, “Generic multiloop methods and application to  $\mathcal{N}=4$  super-Yang-Mills,” *Journal of Physics A Mathematical General*, vol. 44, p. 4004, Nov. 2011.
- [52] H. Kawai, D. Lewellen, and S. Tye, “A Relation Between Tree Amplitudes of Closed and Open Strings,” *Nucl.Phys.*, vol. B269, p. 1, 1986.
- [53] F. Cachazo, S. He, and E. Y. Yuan, “Scattering Equations and KLT Orthogonality,” *ArXiv e-prints*, June 2013.
- [54] F. Cachazo, S. He, and E. Y. Yuan, “Scattering of Massless Particles: Scalars, Gluons and Gravitons,” *ArXiv e-prints*, Sept. 2013.

## Abstract

# Introduction to Scattering Amplitudes in Supersymmetric Yang-Mills theory via BCFW-Recursion Relations

BooGyeong Zoo

School of Physics & Astronomy

The Graduate School

Seoul National University

Traditionally, we use Feynman diagram approach to compute scattering amplitudes in perturbative quantum field theory. However, in non-abelian gauge theory, the computational complexity become insurmountable as the number of external particles or internal loops increases. In a groundbreaking paper from 2004, E. Witten opened up a modern perspective on scattering amplitudes by combining ideas from string theory and twistor theory.[1] One of the early follow-up was the Britto-Cachazo-Feng-Witten (BCFW) recursion relation, which eventually led to a complete understanding of all tree-level amplitudes in gauge theory. Recently, physicists discovered the dual conformal symmetry, defined the so-called momentum twistor variables which makes the dual conformal symmetry manifest, and utilize it to further simplify the calculation of amplitudes. The applica-

tion of BCFW recursion relation to loop-level amplitudes is also in progress.

In this thesis, we will review the scattering amplitudes of maximally supersymmetric Yang-Mills theory with BCFW recursion relation used as a main tool. We begin with a brief introduction non-abelian gauge theories. From color algebra, we see that the group theoretic information and kinematic information can be separated in amplitudes. We then introduce the spinor-helicity formalism which is much more efficient than the usual 4-vector notations. At the loop level, we review the generalized unitarity method and show that the result agrees precisely with the loop level BCFW relations expressed in momentum twistor variables. We conclude with a brief discussion on recent developments not included in the thesis.

**Keywords :** Non Abelian Gauge Theory, KK& BCJ Relation, Spinor-Helicity Formalism, BCFW-Recursion Relation,  $\mathcal{N} = 4$ SYM, Generalized-Unitarity Methods, Yangian Symmetry, Momentum Supertwistor Space

**Student Number :** 2011-23280