經營論集, 第 46 卷 統合號 (2012年 12月)

가격변수를 고려한 뉴스벤더(Newsvendor) 모형

남 익 현*

기존 뉴스벤더 모형에서는 가격이 일정할 경우 최적 주문량을 구하는 것을 다루었다. 이를 확률적 수요함수가 가격변수에 의해 영향을 받는 것으로 확장하는 것은 큰 의미가 있다. 본 연구에서는 수요가 가격에 의해 영향을 받는다는 내용을 반영하기 위해 소비자의 수요를 나타내는 변수의 확률분포함수에 가격변수를 직접 포함하여 분석을 시도하고 있다. 특정형태를 띠는 경우보다 일반적인 경우를 다루지만 이로 인해 구체적인 결과를 도출하기 어려운 문제가 존재한다. 본 연구에서는 구체적인 수치분석을 위해 수요변수가 지수분포를 따를 경우를 상정하여 최적해를 구해본다.

주제어: 가격결정, 뉴스벤더 모형, 수치분석, 지수분포

I. 들어가며

신문 발행업체로부터 신문을 사와서 일반인들에게 판매하는 상황에서 신문팔이 소년은 수요의 불확실성 하에서 구매량을 결정하고자 하는데, 이를 뉴스벤더(Newsvendor) 모형이라고 부른다. 뉴스벤더 모델의 대전제는 신문 수요가 불확실하다는 것이며, 이러한 불확실성은 신문 수요량이 확률 변수 D로 표시되며 확률밀도 함수 f(누적분포 함수는 F)를 따르는 것으로 표현된다. 신문팔이 소년이 신문 발행업체로부터 신문을 구입하는 원가는 한 부당 c원이 들며 이 신문을 일반인에게 한 부당 p원을 받고 판매한다고 하자. 하루가 지나면 신문의 가치는 급격히 떨어지므로 저녁까지 판매하지 못한 신문은 한 부당 s원을 받고 고물상에게 넘긴다고 하자. 의미 있는 모형이 되기 위해서는 $s < c < p$가 성립해야 한다.

신문팔이 소년이 신문을 너무 많이 구입해 놓으면 판매이익은 커지지만 신문이 남아

*서울대학교 경영대학 교수

고물상에게 싸게 넘겨 손해를 볼 가능성도 커질 것이다. 반대로 신문을 너무 적게 구입한다면 신문이 남아서 손해 볼 가능성은 줄지만 신문이 모자라서 판매를 못하는 경우가 발생할 가능성이 높아진다. 신문을 사고자 하는 고객은 있으나 신문이 모자라서 판매하지 못하는 경우 추가 이익을 놓치게 된다. 즉, 만약 신문 하나를 더 준비하여 판매하였다면 $p-c$의 이익을 얻을 수 있었으나 이를 놓치게 되는 것이다. 이러한 비용을 장부상 발생하는 비용은 아니지만 이익에 영향을 주는 것으로 '기회비용(opportunity cost)'이라고 부른다. 따라서 신문팔이 소년은 신문 구입량을 최적화하고자 할 때 신문 구입량의 과소에 따라 발생하는 상반관계(trade-off)를 고려하여 이익을 최대화하는 주문량을 결정하고자 할 것이다. 최적화를 위해 고려하는 목적 함수는 이익의 기댓값을 나타내는 것이다.

기존 뉴스벤더 모형에서는 가격이 일정할 경우 최적 주문량을 구하는 것을 다루었다. 이를 확률적 수요함수가 가격변수에 의해 영향을 받는 것으로 확장하는 것이 큰 의미가 있다. 이러한 확장과 관련해 페트루찌와 다다(Petruzzi & Dada, 1999)는 뉴스벤더 모형의 수요가 가격에 의해 영향을 받는 경우를 다루고 있다. 해당 논문에서는 수요가 가산형인 경우와 곱의 형태인 경우를 다루고 있다. 가산형 수요는 $D(p,\epsilon)=a-bp+\epsilon$를 다루어 확정적 선형 함수와 확률변수 ϵ의 합의 형태를 띠는 경우를 다루었다. 곱의 형태에서는 $D(p,\epsilon)=ap^{-b}\epsilon$를 다루었다. 다나와 페트루찌(Dana & Petruzzi, 2001)에서는 두 가지 확률분포에 따라 수요가 결정되는 모형을 다루고 있다. 총괄적 수요(aggregate demand)를 확률변수 A로 나타내고 소비자의 외부 대안의 가치를 나타내는 확률변수를 u로 표현하여 두 변수를 이용한 곱의 형태로 유효수요를 나타내는 모형을 다루고 있다.

우리의 논문에서는 수요가 가격에 의해 영향을 받는다는 내용을 반영하기 위해 소비자의 수요를 나타내는 변수의 확률분포함수에 가격변수를 직접 포함하여 분석을 시도하고 있다. 특정 형태를 띠는 경우보다 일반적인 경우를 다루지만 이로 인해 구체적인 결과를 도출하기 어려운 문제가 존재한다. 또한 이 논문에서는 보다 구체적인 예로 수요변수가 지수분포를 따를 경우에 최적해를 구해 본다. 다음에는 기존 뉴스벤터 모형에 대해 정리해보고 이를 가격변수를 고려한 수요함수의 경우로 확장하기로 하자.

II. 뉴스벤더 모델의 구성

신문팔이 소년이 q를 주문하고 신문수요가 D일 경우 신문팔이 소년의 이익을 나타내는 식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$p\min\{D,q\}-cq+s\max\{q-D,0\}$$

첫 항은 신문팔이 소년이 신문을 일반인에게 판매함으로써 얻는 수익을 말한다. 실제 신문 판매량은 $\min\{D,q\}$인데 이는 신문 구입량과 수요량에 의해 실제 판매량이 결정됨을 나타낸다. 두 번째 항은 신문 구입원가를 나타내는 것이다. 마지막 항은 신문이 판매되지 않아 재고로 남은 경우 고물상에게 판매하여 얻는 추가 수익을 나타내는 것이다. $\max\{q-D,0\}$이 미판매된 신문 수량을 나타냄을 알 수 있다. 신문팔이 소년은 이러한 이익함수의 기댓값을 최대화하려고 할 것이다. 따라서 위 이익식의 기댓값은 다음과 같이 표현할 수 있다. 여기서 우리는 분석의 편의상 신문의 수요를 나타내는 D가 연속형 확률변수라고 가정하고 이에 해당하는 확률밀도함수를 $f(t)$로 표시한다.

$$\begin{aligned} R(q) &= E[p\min\{D,q\}-cq+s\max\{q-D,0\}] \\ &= \int_0^\infty [p\min\{t,q\}-cq+s\max\{q-t,0\}]f(t)dt \end{aligned}$$

위 마지막 식인 기댓값을 구하는 적분에서 min과 max 항을 적분구간을 나눔으로써 제거할 수 있으며 이를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty [p\min\{t,q\}-cq+s\max\{q-t,0\}]f(t)dt \\ &\quad = \int_0^q ptf(t)dt + \int_q^\infty pqf(t)dt - cq + \int_0^q s(q-t)f(t)dt \end{aligned}$$

적분구간에 따라 항을 정리하고 f의 누적분포함수가 F임을 상기하면, 즉 $\int_0^q f(t)dt = F(q)$를 이용하여 다음의 식을 얻을 수 있다.

$$R(q) = \int_0^q (p-s)tf(t)dt + \int_q^\infty pqf(t)dt - cq + sqF(q)$$

신문팔이 소년의 문제는 $R(q)$를 최대화하는 문제임을 알 수 있다. 즉,

$$Max_{\{q \geq 0\}} R(q)$$

III. 뉴스벤더 모델의 최적해

$Max_{\{q \geq 0\}} R(q)$로 표현되는 뉴스벤더 모델을 풀기 위해서 우선 $R(q)$의 극대값을 구하고, 다음에 $R(q)$가 오목함수(concave function)임을 보임으로써, 우리가 앞서 구한 극대값이 최대값임을 보일 것이다. $R(q)$를 구성하는 항들 중에서 적분으로 표현된 두 개의 항에 라이프니츠 규칙(Leibniz rule)을 적용하면 다음을 얻을 수 있다.

$$\frac{d}{dq}\int_0^q (p-s)tf(t)dt = (p-s)qf(q)$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dq}\int_q^\infty pqf(t)dt &= -pqf(q) + \int_q^\infty \frac{\partial}{\partial q} pqf(t)dt = -pqf(q) + \int_q^\infty pf(t)dt \\ &= -pqf(q) + p[1-F(q)]\end{aligned}$$

여기에 연쇄법칙(chain rule)을 적용하면 $\frac{d}{dq}qF(q) = F(q) + qf(q)$을 구할 수 있고 이를 이용하면 $R(q)$의 미분을 최종적으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$R'(q) = (p-s)qf(q) - pqf(q) + p[1-F(q)] - c + sF(q) + sqf(q) = p - c + (s-p)F(q)$$

극값을 구하기 위해 $R'(q) = p - c + (s-p)F(q) = 0$을 풀면 $F(q) = \frac{p-c}{p-s}$이 되고 극값은 다음과 같이 표현될 수 있다. 여기서 F^{-1}는 F의 역함수를 나타내는 것이다.

$$q^* = F^{-1}(\frac{p-c}{p-s})$$

$R(q)$ 함수가 q^*에서 극값을 갖게 됨을 알게 되었는데, 이제 2단계로 이익함수 $R(q)$가 오목함수임을 보이기로 하자. 오목함수 여부를 알기 위해서 2차 미분을 하면 우리는 $R''(q) = (s-p)f(q) < 0$을 알 수 있고 이로부터 $R(q)$는 오목함수임을 알 수 있다. $R''(q) < 0$라는 부등식은 s<p이라는 가정으로부터 도출된다. 따라서 $R(q)$가 오목함수이기 때문에 $R'(q) = 0$으로부터 구한 q^*는 극값일 뿐더러 최대값이 됨을 알 수 있다. 우리는 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$로 표현되는 누적분포함수를 나타내므로 증가함수이면서 x가 증가함에 따라 $F(x) \rightarrow 1$임을 알 수 있다.

IV. 재고 비용

여기서 뉴스벤더 모델의 최적해 q^*와 관련하여 두 가지 개념의 비용을 살펴보기로 하자. 단위당 재고초과 비용(overage cost)은 신문팔이 소년이 신문을 실제 수요보다 한 부 초과하여 보유할 경우 발생하는 비용을 말한다. 신문을 실제 수요보다 초과하여 보유할 경우 발생하는 손해는 신문을 c원에 구입하여 고물상에게 s원에 판매하게 되므로 초과 보유하는 신문 한 단위당 $c-s$의 손해가 발생하게 되며 이러한 초과비용을 c_o로 표시하기로 하자.

$$c_o = c - s$$

반면에 단위당 재고부족 비용(underage cost)은 신문팔이 소년이 신문을 실제 수요보다 한 부 부족하게 보유할 경우 발생하는 비용을 말한다. 신문을 실제 수요보다 부족하게 보유할 경우 발생하는 손해는 신문을 c원에 구입하여 손님에게 p원에 판매하여 얻을 수 있는 이익인 $p-c$를 얻지 못하게 되는 것이며 이러한 부족비용을 c_u로 표시하기로 하자.

$c_u = p - c$

우리가 극값을 구하기 위해 다룬 $F(q) = \frac{p-c}{p-s}$ 에서 최적해의 기준값이 되는 수치는 $\frac{p-c}{p-s} = \frac{c_u}{c_u + c_o} = r$임을 알 수 있고, 이러한 비율 수치 r을 긴급률(critical ratio)이라고 부른다. 우리는 $r = \frac{c_u}{c_u + c_o}$의 표현으로부터 몇 가지 의미를 도출할 수 있다. 우선 $p > c > s$라는 가정으로부터 $c_u > 0, c_o > 0$이므로 $0 < r < 1$를 알 수 있고 따라서 누적분포함수로부터 $F^{-1}(r) = q^*$을 구할 수 있다. 그리고 c_u가 증가함에 따라 r은 1에 다가가고 이 경우 F가 증가함수이므로 최적해인 q^*가 커지게 된다. c_u가 증가한다는 것은 재고 부족의 경우 기회비용이 커진다는 것을 의미하고 따라서 최적의 주문량은 커져야 할 것으로 우리의 직관과 일치된다. 반면에 c_o가 증가함에 따라 r은 0에 다가가고 이 경우 q^*가 작아지게 된다. c_o가 증가한다는 것은 재고가 발생할 경우 비용이 커진다는 것을 말하며 이에 따라 최적 주문량은 감소하여야 할 것이다.

V. 최적목적함수 값

여기서 최적목적함수 값인 $R(q^*)$을 보다 구체적으로 살펴보기로 하자.

$$R(q^*) = \int_0^{q^*} (p-s)tf(t)dt + \int_{q^*}^{\infty} pq^* f(t)dt - cq^* + sq^* F(q^*)$$

이 식에서 부분적분(integration by parts)을 적용하면 $\int tf(t)dt = tF(t) - \int F(t)dt$을 알 수 있고 $F(q^*) = r$을 이용한다면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} R(q^*) &= (p-s)[q^* r - \int_0^{q^*} F(t)dt] + pq^*(1-r) + (rs-c)q^* \\ &= (p-c)q^* - (p-s)\int_0^{q^*} F(t)dt \\ &= (p-c)F^{-1}(r) - (p-s)\int_0^{F^{-1}(r)} F(t)dt \end{aligned}$$

VI. 가격변수를 고려한 뉴스벤더 모델의 확장

우리가 앞서 다룬 기존의 뉴스벤더 모델에서는 가격은 주어지고 수요의 불확실성 하에서 최적화를 하였다. 그런데 보다 일반적인 경우로 확장하기 위해서는 수요가 가격에 의해 영향을 받는 경우를 다루어야 할 것이다. 따라서 이 논문에서 우리는 수요의 불확실성에 더해 가격에 의해 받는 영향을 다루는 모형을 살펴보기로 하자. 이를 모형화하기 위해 수요에 대한 확률밀도함수와 누적분포함수에 가격변수 p를 포함하여 $f_p(x), F_p(x)$로 표현하기로 하자. 기존 확률밀도함수와 누적분포함수와는 달리 첨자 p가 부여되었음에 유의하여야 한다. 이 경우 최적 주문량도 가격의 함수로 표현될 것이므로

$$q^*(p) = F_p^{-1}(r) = F_p^{-1}(\frac{p-c}{p-s})$$

을 만족할 것이다. 이때 최적목적함수값은

$$R(q^*) = (p-c)q^*(p) - (p-s)\int_0^{q^*(p)} F_p(t)dt$$

이다.

여기서 최적 주문량 $q^*(p)$가 가격이 증가함에 따라 어떻게 변하는가를 살펴보기로 하자.

$F_p(q^*) = \dfrac{p-c}{p-s}$을 p에 대해 미분하면

$$\frac{\partial F_p}{\partial p} + f_p(q^*)\frac{dq^*}{dp} = \frac{c-s}{(p-s)^2}.$$

이다. 여기서 우리는 다음을 구할 수 있다.

$$\frac{dq^*}{dp} = \frac{\frac{c-s}{(p-s)^2} - \frac{\partial F_p}{\partial p}}{f_p(q^*)}$$

우리는 $\frac{\partial F_p}{\partial p}$의 부호가 확실하지 않기 때문에 $\frac{dq^*}{dp}$의 부호가 결정되지 않고 따라서 가격이 상승함에 따라 최적 주문량이 증감하는지 확실하지 않다. 즉, 가격이 상승할 경우 최적 주문량은 경우에 따라 증가할 수도 있고 감소할 수도 있다.

위에서 구한 $\frac{dq^*}{dp}$ 식을 중심으로 보다 구체적으로 설명해 보기로 하자. 분모 항인 $f_p(q^*)$은 양수임을 알 수 있다. 분자 항 중에서 $\frac{c-s}{(p-s)^2}$은 양수이므로 가격이 증가함에 따라 최적 주문량을 증가하도록 영향을 주는 항목이다. 반면 $\frac{\partial F_p}{\partial p}$은 가격이 증가함에 따라 수요의 누적분포가 변하는 정도를 나타내는 것으로 이 항목이 양의 값을 가질 경우 최적 주문량을 감소시키는 효과가 있다. 따라서 $\frac{c-s}{(p-s)^2}$와 $\frac{\partial F_p}{\partial p}$의 수치 차이에 의해 최적 주문량이 증가할 수도 있고 감소할 수도 있는 것이다. 다음 절에서 지수분포의 경우보다 구체적으로 분석하기로 한다.

그리고 최적목적함수 값이 가격에 의해 받는 영향은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\frac{dR(q^*)}{dp} = q^*(p) - \int_0^{q^*(p)} F_p(t)dt - (p-s)\int_0^{q^*(p)} \frac{\partial F_p(t)}{\partial p}dt$$

VII. 지수분포의 경우에 대한 분석

우리는 여기서 가격에 영향을 받는 수요변수가 지수분포를 따르는 경우를 분석하도록 한다. 가격 p가 매개변수의 역할을 할 때 수요에 대한 확률밀도함수와 이로부터 유도되는 누적분포함수는

$$f_p(x) = pe^{-px}, F_p(x) = 1 - e^{-px}$$

라고 상정하자. 우리는 지수분포의 형태에 의해 가격이 상승할 경우 높은 수요를 나타내는 오른쪽이 두터운 확률밀도함수를 나타냄을 알 수 있다. 누적분포함수를 이용하여 설명하면 $\Pr[D \geq x] = e^{-px}$는 p가 증가함에 따라 감소함을 나타낸다. 이는 가격이 증가함에 따라 일정량 이상의 수요가 발생할 확률이 감소함을 나타낸다고 해석할 수 있다.

최적의 가격과 주문량을 파악하는 방법에 대해 먼저 개략적으로 설명하기로 하자. 최적 주문량은 전통적 모형에서와 달리 가격 p의 함수로 표현될 것이다. 이렇게 구한 $q^*(p)$를 최적목적함수 값에 대입하면 가격변수인 p만의 식으로 표현될 것이다. 이 식을 p에 대해 최적화하면 최적의 가격을 구하고 역으로 이를 $q^*(p)$에 대입하면 최적 주문량을 구할 수 있다.

다음으로 최적 주문량 $q^*(p)$이 가격의 증가에 따라 어떤 영향을 받는지를 살펴보고 목적함수 값을 최대화하는 최적 가격 p^*를 구하는 절차에 대해 살펴보자. 지수분포의 경우와 같이 구체적인 확률밀도함수가 주어진 상황에서 최적주문량을 다음과 같이 쉽게 구할 수 있다. $q^*(p) = F_p^{-1}(r) = F_p^{-1}(\frac{p-c}{p-s})$로부터 $1 - e^{-pq^*(p)} = \frac{p-c}{p-s}$을 알 수 있고 이 식으로부터 다음을 구할 수 있다.

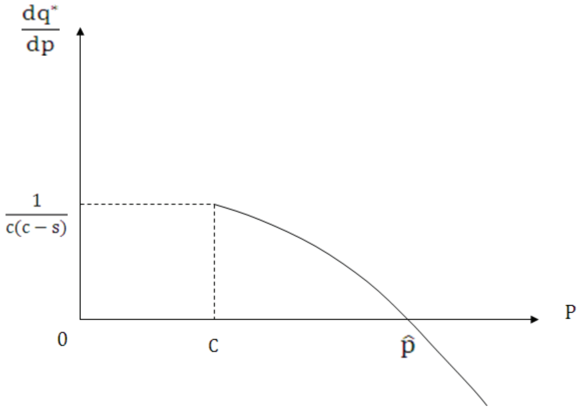
$$q^*(p) = -\frac{1}{p} ln(1-r) = -\frac{1}{p} ln(\frac{c-s}{p-s}).$$

가격에 대한 1차 미분을 구하면

$$\frac{dq^*}{dp} = \frac{1}{p}[\frac{\ln(1-r)}{p} + \frac{1}{p-s}]$$

이고 기호는 불분명하다.

우리는 $r \approx 1$일 경우 $\frac{dq^*}{dp} < 0$이고 $r \approx 0$일 경우 $\frac{dq^*}{dp} > 0$임을 알 수 있다. $r \approx 1$ 혹은 $s \approx c$일 경우 가격이 상승할 경우 주문량을 감소시켜야 함을 나타내는데, 이는 가격이 높을 경우 지수분포의 형태에 따라 수요가 적게 발생할 확률이 높은 것에 대한 최적화 결과라고 해석할 수 있다. 반면에 $r \approx 0$ 혹은 $p \approx c$일 경우에는 가격 상승에 대해



〈그림 1〉 최적 주문량의 1차 미분함수

최적 주문량을 감소시켜야 함을 나타낸다. 여기서 $\frac{dq^*}{dp}$가 가격 p의 값에 따라 어떻게 영향을 받는지 구체적으로 살펴보기로 하자.

$p > 0, p > s$이므로

$$sgn(\frac{dq^*}{dp}) = sgn(\frac{\ln(1-r)}{p} + \frac{1}{p-s}) = sgn((p-s)\ln(1-r) + p)$$

이고,

$$k(p) = p + (p-s)\ln(1 - \frac{c-s}{p-s})$$

로 표시할 때

$$k'(p) = \ln(\frac{c-s}{p-s}) < 0, k''(p) = -\frac{1}{p-s} < 0$$

이므로 〈그림 1〉의 그래프로 표현할 수 있다.

따라서 최적 주문량은 가격이 c로부터 증가할 경우 일정 구간 증가하다가 임계치 $\hat{p}$를 넘어서는 감소하는 것을 알 수 있다.

다음으로 목적함수 값을 최대화하는 가격 p를 구하는 과정을 살펴보기로 하고 먼저

극값을 구하기 위해 1차 미분을 하기로 하자.

$q^*(p) = -\frac{1}{p} ln(1-r)$을 $R^*(p)$에 대입하면 다음을 구할 수 있다.

$$R^*(p) = \frac{(c-s)\ln(1-r)+(p-c)}{p}$$

$$\frac{dR(q^*)}{dp} = \frac{1}{p^2}[\frac{p(s-c)}{p-s} + (s-c)\ln(1-r)+c]$$

$$= \frac{1}{(s-c)p^2}[\ln(\frac{c-s}{p-s}) - s(\frac{1}{c-s} - \frac{1}{p-s})]$$

$s-c<0, \ln(1-r)<0, \frac{1}{c-s} - \frac{1}{p-s} > 0 \text{ for } p > c$로부터

$R^*(p) > 0$를 알 수 있다.

따라서 최적 주문량과는 달리 우리가 다룬 지수분포의 경우 최적 가격은 클수록 목적함수 값에 기여하는 것으로 나왔다. 따라서 지수분포의 경우 현실적으로는 다른 제약조건에 의해 최적 가격이 제한될 것이다.

참고문헌

Dana, J. D. & Petruzzi, N.C., Note: The Newsvendor Model with Endogenous Demand, *Management Science* 47(11), 2001, pp. 1488-1497.

Nahmias, S., *Production and Operations Analysis*, IRWIN, 1993.

Petruzzi, N. C. & Dada, M., Pricing and the Newsvendor Problem: a review with extensions, *Operations Research* 47(2), 1999. pp. 183-194.

Protter, M. H. & Morrey, C. B., *A First Course in Real Analysis*, Springer-Verlag, 1977.

Newsvendor Model with Pricing

Nam, Ick-Hyun*

The traditional newsvendor model examines the optimal order quantity under the assumption of the fixed price. Considering the effect of the price on stochastic demand have a significant contribution, because it allows us to analyze a more realistic behaviors. This study investigates the random demand function, which is directly influenced by the price. While our analysis addresses a general case, it is difficult to derive optimal solutions in this setting. Assuming that the demand follows exponential distribution, we derive the optimal solutions.

Keywords: Pricing, Newsvendor Model, Numerical Analysis, Exponential Distribution

*Professor of Operations Management, College of Business Administration, Seoul National Univserity