經營論集, 第 46 卷 統合號 (2012年 12月)

순차판매를 반영한 뉴스벤더(Newsvendor) 모형

남 익 현*

많은 경우, 소매업자는 고객에게 판매를 한 이후 남는 물건에 대해 할인하여 추가로 판매하는 경우가 있다. 세일 기간 동안 할인판매를 하는 것이 이에 해당한다. 기존 모형에서는 잔존가치(salvage value)에 해당하는 s의 가격으로 남은 재고를 모두 처분할 수 있는 것으로 가정한다. 하지만 보다 정확한 것은 일차 판매 후 남은 물건에 대해 또 다른 시장이 존재하여 추가적인 판매 기회가 발생하지만 이 경우에도 새로운 수요의 불확실성으로 인해 매출액이 확정되지 않는다. 이 논문에서는 기존의 뉴스벤더 모형을 확장하여, 이러한 2차 판매 기회가 있을 경우를 살펴본다. 지수분포를 상정하여, 최적해의 존재를 증명하고 감도분석을 실시한다.

주제어: 순차판매, 뉴스벤더 모형, 최적해 유도, 감도분석

I. 기존 뉴스벤더 모형

신문 발행업체로부터 신문을 사와서 일반인들에게 판매하는 상황에서 신문팔이 소년은 수요의 불확실성 하에서 구매량을 결정하고자 하는데 이를 뉴스벤더 모형이라 한다. 뉴스벤더 모델의 대전제는 신문 수요가 불확실하다는 것이며, 이러한 불확실성은 신문 수요량이 확률변수 D로 표시된다는 것으로 표현된다. 신문팔이 소년이 신문 발행업체로부터 신문을 구입하는 원가는 한 부당 c원이며, 이 신문을 일반인에게 한 부당 p원을 받고 판매한다고 하자. 하루가 지나면 신문의 가치는 급격히 떨어지므로 저녁까지 판매하지 못한 신문은 한 부당 s원을 받고 고물상에게 넘긴다고 하자. 의미 있는 모형이 되기 위해서는 $s < c < p$가 성립해야 한다.

신문팔이 소년이 q를 주문하고 신문 수요가 D일 경우 신문팔이 소년의 이익을 나타

*서울대학교 경영대학 교수

내는 식은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$p\min\{D,q\}-cq+s\max\{q-D,0\}$$

이의 기댓값이 우리가 최대화해야 할 목적함수식이 되는데 이는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} R(q) &= E[p\min\{D,q\}-cq+s\max\{q-D,0\}] \\ &= \int_0^\infty [p\min\{t,q\}-cq+s\max\{q-t,0\}]f(t)dt \\ &= \int_0^q ptf(t)dt+\int_q^\infty pqf(t)dt-cq+\int_0^q s(q-t)f(t)dt \end{aligned}$$

신문팔이 소년의 문제는 $R(q)$를 최대화하는 문제임을 알 수 있다. 즉,

$$Max_{\{q\geq 0\}}R(q)$$

이다.

II. 순차적 판매를 반영한 뉴스벤더 모형

우리는 기존의 뉴스벤더 모형에 대해 1차 판매 이후에 추가적인 판매 기회가 있는 경우를 반영하고자 한다. 즉, 많은 경우 소매업자는 고객에게 판매를 한 이후 남는 물건에 대해 할인하여 추가로 판매하는 경우가 있다. 세일 기간 동안 할인판매를 하는 것이 이에 해당한다고 할 수 있다. 기존 모형에서는 잔존가치(salvage value)에 해당하는 s의 가격으로 남은 재고를 모두 처분할 수 있는 것으로 가정한다. 하지만 보다 정확한 것은 일차 판매 후 남은 물건에 대해 또 다른 시장이 존재하여 추가적인 판매 기회가 발생하지만 이 경우에도 새로운 수요의 불확실성으로 인해 매출액이 확정되지 않는다. 이 논문에서는 이러한 2차 판매 기회가 있을 경우에 대해 살펴보고 구체적인 확률분포의 경

우에 대해 분석해 보기로 하자.

소매업자는 제조업체 혹은 도매업자로부터 q를 주문하여 이를 일차적으로 p_1에 판매를 한다. 1차 판매에 해당하는 수요는 확률변수 D_1으로 표현하기로 한다. 1차 판매 후 재고가 발생할 경우 할인된 가격인 p_2로 2차 판매를 시행한다. 2차 판매의 원천이 되는 수요를 확률변수 D_2로 표현하기로 한다. 1, 2차 수요에 대한 확률밀도함수를 $f(x,y)$로 표시하기로 한다. 기존의 뉴스벤더 모형과 비교할 때, 판매 후 남은 물건에 대한 추가 수익을 제공한다는 면에서 2차 판매에서의 판매가격인 p_2가 잔존가치와 유사한 것으로 볼 수 있다. 기존 모형에서는 소매업자가 재고 하나당 s의 가격으로 모두 판매할 수 있다고 가정하는 것이지만 본 모형에서는 2차 판매에 있어서도 새로운 확률적 수요가 존재하여 판매량을 확정적으로 산정할 수 없다는 점에서 차이가 발생한다. 유사한 논리로 I절에서 언급한 것처럼 $p_1 > c$이 의미 있는 모형을 위해서는 필요하지만 $p_2 < c$가 반드시 성립할 필요는 없다. 즉, $p_2 \geq c$일 경우에도 모형의 의미는 있으며 다만 2차 판매 후에도 남는 재고에 대해서는 본 모형에서와 같이 잔존가치가 0으로 보거나 아니면 s의 잔존가치로 처리할 수 있는 경우를 상정할 수 있다.

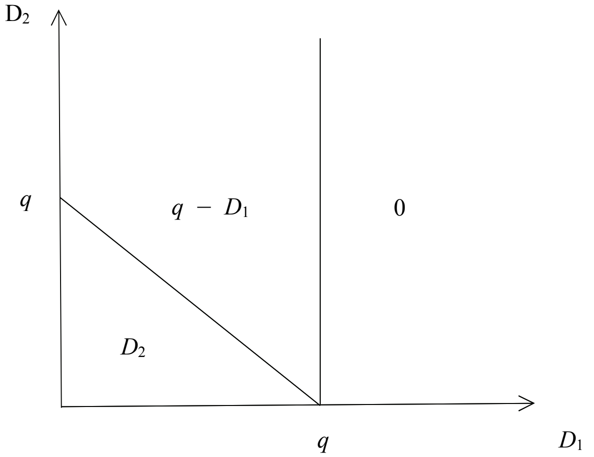
여기서 1차 판매량과 2차 판매량을 살펴보기로 하자. 소매업자가 q을 주문하였을 때 1차 판매량은 기존 모형과 같이 $\min\{D_1,q\}$이 된다. 1차 판매 후 남는 재고는 $\max\{q-D_1,0\}$이 되기 때문에 2차 판매량은 $\min\{\max\{q-D_1,0\},D_2\}$이 됨을 알 수 있다. 따라서 순차판매를 통한 이익함수는

$$p_1\max\{q-D_1,0\}+p_2\min\{\max\{q-D_1,0\},D_2\}-cq$$

이 된다.

1차 판매량의 기댓값은 기존 모형과 동일하며, 2차 판매량은 〈그림 1〉에서처럼 3개의 영역에 따라 다른 값을 나타내는데, 2차 판매량의 기댓값은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\int_0^q\int_0^{q-x} yf(x,y)dydx+\int_0^q\int_{q-x}^{\infty}(q-x)f(x,y)dydx$$



〈그림 1〉 2차 판매 시 판매량

따라서 순차판매를 통한 이익함수의 기댓값은

$$\int_0^q p_1 tf(t)dt + \int_q^\infty p_1 qf(t)dt - cq + p_2[\int_0^q \int_0^{q-x} yf(x,y)dydx + \int_0^q \int_{q-x}^\infty (q-x)f(x,y)dydx]$$

로 표현할 수 있다.

III. 지수분포 수요함수의 경우

이 절에서는 보다 구체적인 분석을 위해 수요의 확률분포에 대한 가정을 하기로 하자. 우리는 1차 수요와 2차 수요가 확률적으로 서로 독립적이고 각각 지수분포를 따른다고 가정한다. 구체적으로 $D_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$과 $D_2 \sim \mathrm{Exp}(\mu)$을 가정하여 다음과 같은 확률밀도함수를 상정하자.

$$f(x,y) = \lambda e^{-\lambda x} \mu e^{-\mu y}$$

이와 같이 지수분포 하에서 앞 절에서 표현한 2차 판매량 기댓값의 첫 번째 항을 구체적으로 표현하기로 하자.

$$\begin{aligned}\int_0^q\int_0^{q-x} yf(x,y)dydx &= \int_0^q\int_0^{q-x} y\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}dydx\\ &= \int_0^q \lambda e^{-\lambda x}[\int_0^{q-x} y\mu e^{-\mu y}dy]dx\\ &= \int_0^q \lambda e^{-\lambda x}[-(q-x)e^{-\mu(q-x)}-\frac{1}{\mu}e^{-\mu(q-x)}+\frac{1}{\mu}]dx\end{aligned}$$

라이프니츠 규칙(Leibnitz rule)을 적용하여 이 식을 q에 대해 미분하면

$$\int_0^q \lambda\mu e^{-\lambda x}(q-x)e^{-\mu(q-x)}dx$$

가 된다.

마찬가지로 2차 판매량 기댓값의 두 번째 항을 구체적으로 표현하면

$$\begin{aligned}\int_0^q\int_{q-x}^{\infty}(q-x)f(x,y)dydx &= \int_0^q\int_{q-x}^{\infty}(q-x)\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}dydx\\ &= \int_0^q (q-x)\lambda e^{-\lambda x-\mu(q-x)}dx\end{aligned}$$

이고, 이를 라이프니츠 규칙을 적용하여 이 식을 q에 대해 미분하면

$$\int_0^q \lambda e^{-\lambda x-\mu(q-x)}[1-\mu(q-x)]dx$$

가 된다.

따라서 2차 판매량 기댓값을 라이프니츠 규칙을 적용하여 q에 대해 미분하면

$$\int_0^q \lambda\mu e^{-\lambda x}(q-x)e^{-\mu(q-x)}dx+\int_0^q \lambda e^{-\lambda x-\mu(q-x)}[1-\mu(q-x)]dx$$

$$= \lambda e^{-\mu q} \int_0^q e^{(\mu-\lambda)x} dx$$
$$= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}(e^{-\lambda q} - e^{-\mu q})$$

가 된다.

기존 모형에서 다룬 1차 판매수익과 구매원가를 q에 대해 미분한 것은

$$p_1(1 - F_X(q)) - c = p_1 e^{-\lambda q} - c$$

이다. 따라서 순차판매이익의 기댓값에 대해 q로 미분한 것은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$p_1 e^{-\lambda q} - c + \frac{\lambda p_2}{\mu-\lambda}(e^{-\lambda q} - e^{-\mu q})$$
$$= (p_1 + \frac{\lambda p_2}{\mu-\lambda})e^{-\lambda q} - c - \frac{\lambda p_2}{\mu-\lambda} e^{-\mu q} \qquad \text{식 (1)}$$

우리는 최적해를 구하기 위한 필요조건으로 위 식을 0으로 놓은 방정식을 풀어야 하는데, 해당 해를 명시적으로 구하기가 어려움을 알 수 있다.

다음 절에서는 식 (1)=0의 방정식이 유일한 해를 갖고 이 해가 기대 이익을 최대화하는 최적해임을 보이기로 한다.

IV. 최적해 존재의 증명

먼저 식 (1)=0, 즉

$$(p_1 + \frac{\lambda p_2}{\mu-\lambda})e^{-\lambda q} = \frac{\lambda p_2}{\mu-\lambda} e^{-\mu q} + c \qquad \text{식 (2)}$$

의 해가 존재함을 보이고 충분조건을 위해서 2차 미분을 통해 기대이익함수가 오목임

을 보이기로 한다. 우선 1차 미분 함수가 0인 해가 존재함을 보이기로 하자. 편의상 $k=\frac{\lambda}{\lambda-\mu}p_2$로 표시하기로 하자.

(1) case 1: $\lambda>\mu$인 경우

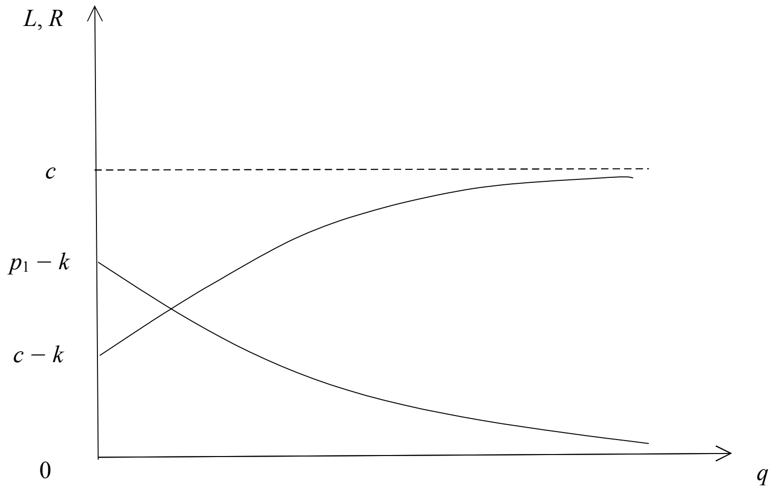
이 경우 $k=\frac{\lambda}{\lambda-\mu}p_2>p_2>0$임을 알 수 있다. 식 (2)의 좌측 항은 $(p_1-k)e^{-\lambda q}$이고 우측 항은 $-ke^{-\lambda q}+c$로 표시할 수 있다.

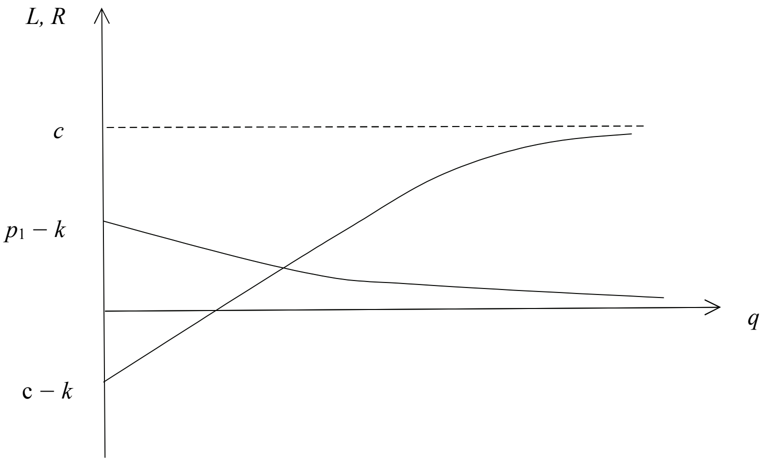
① case 1-1: $k<c$인 경우

좌측 항은 감소함수이고 0으로 수렴하고 우측 항은 증가함수이며 c로 수렴한다. $q=0$에서의 절편 값이 두 함수가 교차하는 해의 존재를 보장한다. 이는 〈그림 2〉와 같이 표현될 수 있으며 유일한 해가 존재함을 알 수 있다.

② case 1-2: $p_1>k>c$인 경우

좌측 항은 감소함수이며 0으로 수렴하고, 우측 항은 증가함수이며 c로 수렴한다. 〈그림 3〉에서처럼 유일 해가 존재한다.

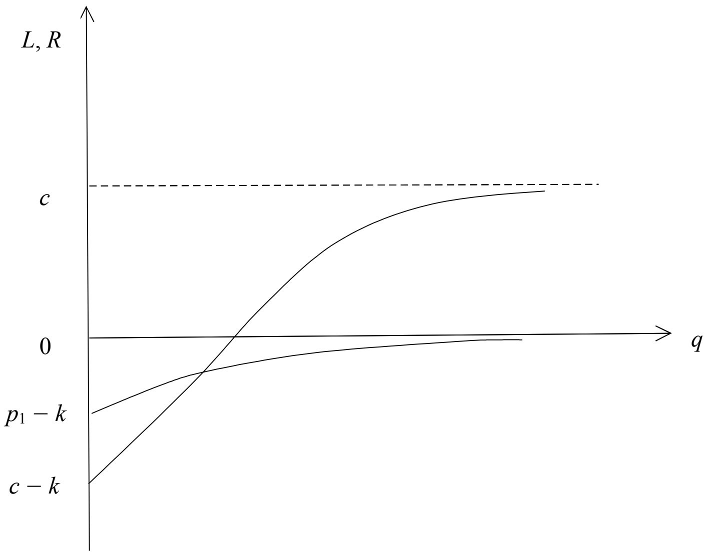




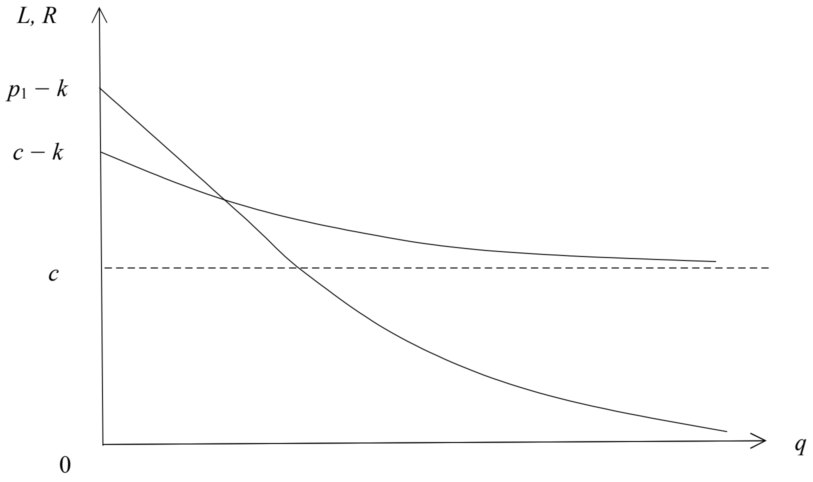
〈그림 3〉

③ case 1-3: $k > c, k > p_1$인 경우

좌측 항은 증가함수이며 0으로 수렴하고, 우측 항은 증가함수이며 c로 수렴한다. 〈그림 4〉에서처럼 유일 해가 존재함을 알 수 있다.



〈그림 4〉



〈그림 5〉

(2) case 2: $\lambda < \mu$인 경우

이 경우 $k<0$이고 $p_1 - k > c - k$임을 알 수 있다. 좌측 항은 $q=0$에서 $p_1 - k$의 값을 갖고 시작하여 0으로 수렴하는 감소함수이다. 우측 항은 $q=0$에서 $c-k$의 값을 갖고 시작하여 c으로 수렴하는 감소함수이다. 따라서 〈그림 5〉에서처럼 유일 해가 존재하게 된다.

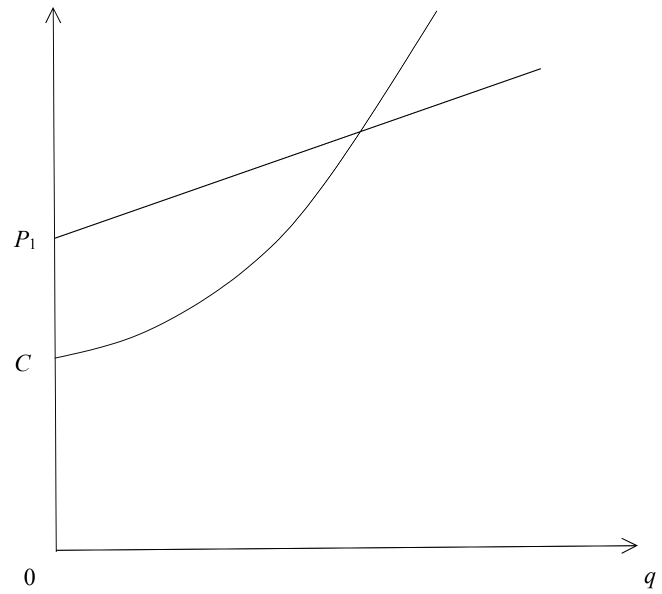
(3) case 3: $\lambda = \mu$인 경우

이 경우에는 앞서 구한 일차조건에서의

$$\int_0^q \lambda\mu e^{-\lambda x}(q-x)e^{-\mu(q-x)}dx + \int_0^q \lambda e^{-\lambda x - \mu(q-x)}[1-\mu(q-x)]dx$$
$$= \frac{\lambda}{\mu-\lambda}(e^{-\lambda q} - e^{-\mu q})$$

이 $\lambda e^{-\lambda q}q$로 대체되어야 한다. 따라서 1차 필요조건은 $p_1 e^{-\lambda q} - c + p_2 \lambda e^{-\lambda q} q = 0$이 되며 이는

$$e^{-\lambda q}(p_1 + p_2\lambda q) = c, \text{ 즉 } p_1 + p_2 \lambda q = ce^{\lambda q}.$$



〈그림 6〉

이 된다. 이 방정식의 좌항인 직선식과 우항인 곡선식을 나타내는 〈그림 6〉에서 보듯 해를 갖는다.

2차 충분조건

그러면 이제 2차 충분조건에 대해 살펴보기로 하자. 2차 판매에 따른 기대수익에 대한 2차 미분함수를 살펴보기로 하자. $(p_1+\frac{\lambda p_2}{\mu-\lambda})e^{-\lambda q}-c-\frac{\lambda p_2}{\mu-\lambda}e^{-\mu q}$을 q에 대해 미분을 하면 $\lambda e^{-\lambda q}[-p_1-\frac{\lambda p_2}{\mu-\lambda}+\frac{\mu p_2}{\mu-\lambda}e^{(\lambda-\mu)q}]$이 된다. 좌측 항인 $\lambda e^{-\lambda q}$은 양수임을 알 수 있다. 따라서 2차 미분 값의 부호를 살펴보기 위해서 우측 항인 $-p_1-\frac{\lambda p_2}{\mu-\lambda}+\frac{\mu p_2}{\mu-\lambda}e^{(\lambda-\mu)q}$을 분석해 보자.

(1) case 1: $\lambda > \mu$인 경우

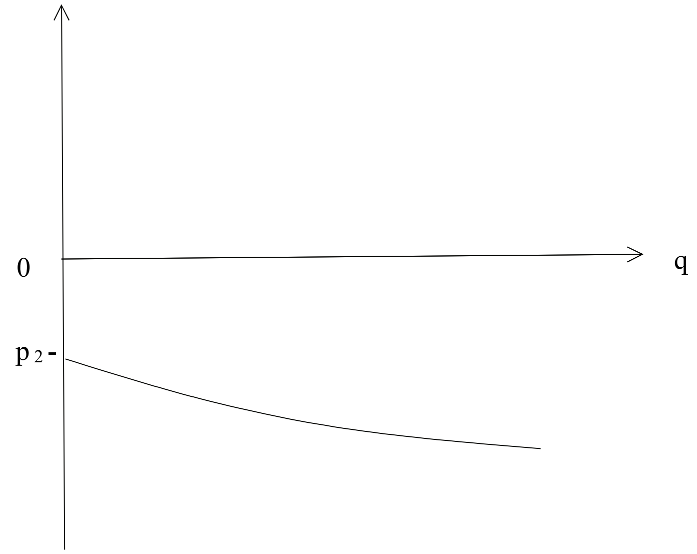
$q=0$에서 우측 항인 $-p_1 - \frac{\lambda p_2}{\mu-\lambda} + \frac{\mu p_2}{\mu-\lambda} e^{(\lambda-\mu)q}$을 먼저 살펴보기로 하자.

$$\frac{\mu p_2 - \lambda p_2 - \mu p_1 + \lambda p_1}{\mu-\lambda} = \frac{(\mu-\lambda)(p_2-p_1)}{\mu-\lambda} = p_2 - p_1 < 0$$

이고 q에 대해 감소함수이다. 이는 〈그림 7〉에서처럼 항상 음수 값을 취하게 된다. 따라서 $\lambda e^{-\lambda q}[-p_1 - \frac{\lambda p_2}{\mu-\lambda} + \frac{\mu p_2}{\mu-\lambda} e^{(\lambda-\mu)q}]$은 음수가 된다.

(2) case 2: $\lambda \le \mu$인 경우

마찬가지로 $q=0$에서 우측 항인 $-p_1 - \frac{\lambda p_2}{\mu-\lambda} + \frac{\mu p_2}{\mu-\lambda} e^{(\lambda-\mu)q}$은 $p_2 - p_1 < 0$이고 $\frac{\mu p_2}{\mu-\lambda} e^{(\lambda-\mu)q}$이 q에 대해 감소함수이므로 [case 1]의 경우와 같이 2차 미분함수는 음수가 된다.

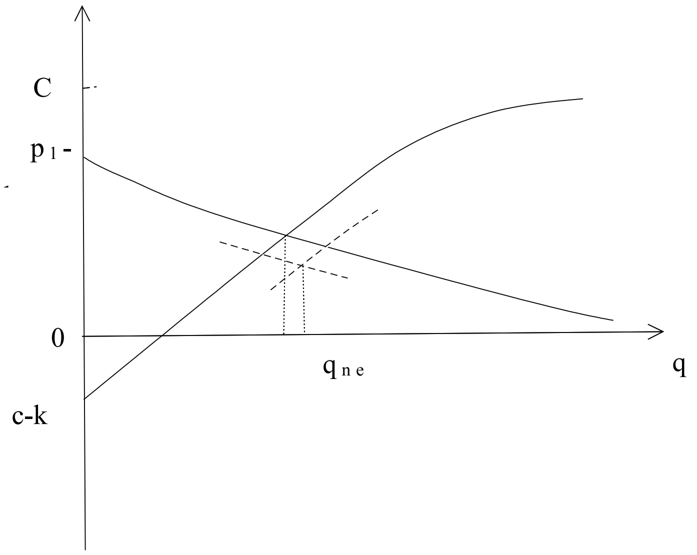


〈그림 7〉

따라서 모든 q에 대해 2차 미분함수 값이 음수이므로 이익함수의 기댓값은 q에 대해 오목함수임을 알 수 있다. 그러므로 앞서 구한 식 (2)의 유일 해가 최적해임을 알 수 있다.

V. 감도분석

여러 가지 파라미터가 변함에 따라 최적 주문량의 변화에 대해 감도분석(sensitivity analysis)을 해보자. 여기서는 〈그림 3〉의 경우를 주로 다루기로 한다. 다른 경우에도 동일한 논리가 적용되어 같은 결과를 유도할 수 있다. 1차 판매 시의 가격인 p_1이 증가하면 〈그림 3〉에서 감소함수의 절편이 상승하게 되므로 두 곡선이 만나는 q 값이 상승하게 된다. 즉, 보다 많은 주문량이 최적해가 됨을 알 수 있다. 한편 구입원가인 c가 증가할 경우 증가 곡선의 절편이 증가하므로 두 곡선의 교차점은 감소하게 되어 최적 주문량은 감소하게 됨을 알 수 있다. 반면 2차 판매에서의 가격인 p_2가 상승할 경우 보다 복잡한 분석을 필요로 하게 된다. 이는 $k = \frac{\lambda}{\lambda - \mu} p_2 > 0$가 증가함을 의미하는데, 이때 두 곡선의 절편이 함께 동일한 수치만큼 낮아지게 된다. p_2의 상승효과를 분석하기



위해 현재의 교차점 q에서의 영향을 살펴보기로 하자. p_2가 상승하여 k가 $k+\epsilon > k$로 증가할 경우를 살펴보자. 감소함수의 경우 교차점 q에서 $(p_1-k)e^{-\lambda q}-\epsilon e^{-\lambda q}$로 변경된다. 또한 증가함수의 경우 교차점 q에서 $-ke^{-\mu q}+c-\epsilon e^{-\mu q}$로 변경된다. 그런데 교차점 q에서 $(p_1-k)e^{-\lambda q}=-ke^{-\mu q}+c$이고 p_2의 상승에 따른 변화폭에 대해 $\epsilon e^{-\lambda q}<\epsilon e^{-\mu q}$이 성립한다. 따라서 교차점 q에서 감소함수의 감소폭이 증가함수의 감소폭보다 작게 되어 새로운 교차점 q는 증가하게 됨을 알 수 있다. 이를 나타낸 것이 〈그림 8〉이다. 따라서 p_2 상승의 경우 다른 파라미터의 경우와는 달리 복합적인 효과에 의해 결국 최적주문량의 증가로 이어짐을 알 수 있다.

VI. 추가 확장

우리는 기존의 뉴스벤더 모형을 확장하여 판매기회가 2번 발생하는 경우를 다루어 보았다. 1차 판매를 한 후 재고가 발생할 경우 2차 판매를 할인된 가격으로 시행하는 경우를 분석한 것이다. 우리는 2차 판매 후에도 남는 재고는 가치가 없는 것으로 상정하고 풀었다. 만약 2차 판매 후 남는 재고에 대해 잔존가치가 s라고 할 경우 이를 반영할 수 있다. $q>D_1+D_2$의 영역에서 2차 판매 후 재고가 발생하며 그 재고량은 $q-D_1-D_2$이 된다. 따라서 이를 반영할 경우 기존 이익함수의 기댓값에 $\int_0^q\int_0^{q-x}s(q-x-y)f(x,y)dydx$을 더하면 된다. 이를 잔존가치인 s를 제외하고 우리가 다룬 지수분포의 경우에 대해 풀어 보면, 즉 1차 판매와 2차 판매를 마친 후 잔존재고의 기댓값은 다음과 같다.

$$\int_0^q\int_0^{q-x}(q-x-y)f(x,y)dydx=\int_0^q\int_0^{q-x}(q-x-y)\lambda e^{-\lambda x}\mu e^{-\mu y}dydx$$
$$=q-\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\mu}-\frac{\mu}{\lambda(\lambda-\mu)}e^{-\lambda q}-\frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}e^{-\mu q}.$$

우리는 여기서 구한 식이 λ와 μ를 교환하였을 때 동일해짐을 확인할 수 있다.

또한 우리는 지수분포의 경우 1차 판매에 대한 수요와 2차 판매에 대한 수요가 독립적이라고 가정하였다. 하지만 두 확률변수가 상관관계가 있는 경우로 확장되는 것을 고

려해 볼 수 있다. 1차 판매에 대한 수요가 클 경우 2차 판매에 대한 수요도 큰 경우와 같이 + 상관관계가 있을 수도 있고 반대의 경우도 생각해 볼 수 있다.

참고문헌

Nahmias, S., *Production and Operations Analysis*, IRWIN, 1993.

Protter, M. H. & Morrey, C. B., *A First Course in Real Analysis*, Springer-Verlag, 1977.

The Analysis on Newsvendor Problem with Sequential Sales

Nam, Ick-Hyun*

When products are not sold out, a retailer gives a discount to unsold products. A traditional model assumes that unsold products can be disposed of by a fixed salvage value. In reality, there exist another market for unsold products and the consequent demand uncertainty. This study examines the Newsvendor Model with sequential sales. Assuming the exponential demand, we prove the existence of optimal solutions and conduct an sensitivity analysis.

Keywords: Sequential Sales, Newsvendor Model, Optimality, Sensitivity Analysis

*Professor of Operations Management, College of Business Administration, Seoul National Univserity