creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

교육학석사학위논문

통합적 모델링 접근(IMA)에 기반한 고등학생의 통계적 추론 사례 연구

2020년 2월

서울대학교 대학원
수학교육과
김 서 영

통합적 모델링 접근(IMA)에 기반한 고등학생의 통계적 추론 사례 연구

지도교수 권 오 남

이 논문을 교육학 석사학위논문으로 제출함

2019년 12월

서울대학교 대학원
수학교육과
김 서 영

김서영의 석사학위논문을 인준함
2020년 1월

위 원 장 _____ (인)
부 위 원 장 _____ (인)
위 원 _____ (인)

국문초록

통계적 추론은 통계조사 결과를 올바르게 해석하고 표본으로부터 모집단을 추론하기 위해 필수적이다. 통계 교육에서 강조하는 통계적 추론은 크게 두 가지 유형이 있다. 하나는 추상적인 사고 과정으로, 학생들이 통계조사에 참여한 뒤 생성된 자료를 분석, 요약 및 표현하는 데 필요하다. 다른 하나는 표본에 대한 경험적 관찰을 통해 모집단의 특성을 이끌어내는 규칙과 관련된 추론이다. 통계적 추론에 필요한 지식에 대한 연구나 통계적 추론의 수준을 유형화하는 연구, 추론의 발달에서 나타나는 전형적인 반응을 분석한 연구는 많았다. 그러나 통계적 추론을 지원할 수 있는 교수학습 상황에서 학생들의 반응을 분석하고 그 결과를 추론에 필요한 내용지식과 연결한 연구는 부족한 실정이다. 본 연구의 목적은 IMA 모델링을 통해 학생들이 표본과 모집단 사이의 관계를 추론하고 이해하는 과정을 자세히 서술하는 것이다. 나아가 통계적 추론을 지원하는 교수·학습 방안을 제시함으로써 실생활 맥락에서 통계 교육의 패러다임 전환에 대한 가능성을 보여주고자 한다.

한편 Braham과 Ben-Zvi(2017)는 학생들이 표본과 모집단 사이의 관계를 이해하고 모델과 모델링을 통해 추론하는 것을 지원하기 위해 통합적 모델링 접근(integrated modeling approach, IMA)을 제안하였다. IMA는 탐색적 자료 분석(exploratory data analysis, EDA) 모델링과 확률 기반 접근(Probability-based approach, PBA) 모델링을 통합한 접근이다.

본 연구에서는 IMA를 기반으로 학생들의 통계적 추론 학습을 지원할 수 있는 모델링 학습과정을 제시하였다. 학생들의 IMA 모델링 과정을 살펴보기 위해 고등학생 3명을 대상으로 사례 연구를 진행하였다. 이때 통계 활용 주제탐구의 산출물인 통계 포스터와 인터뷰 전사록, 공학적 도구를 활용한 모델링에서 나타나는 오디오 전사록 및 비디오 등을 분석의 자료로 수집하였다. 이후 연구 참여자별로 IMA 모델링 과정과 통계적 추론에 차이가 있음에 주목하여 학생들의 반응을 통계적 추론에 필요한 지식의 하위 범주로 분류하여 분석틀을 작성하였다. 이를 바탕으로 학생들

의 반응을 분석틀에 맞추어 해석하였고 연구 결과로 제시하였다.

연구 결과에서는 먼저, 세 고등학생의 IMA 모델링 과정을 시간의 순서에 따라 자세히 서술하였다. 학생들이 자신의 관심사로부터 표본 자료를 수집, 분석하여 결론을 도출하는 과정과 공학적 도구를 활용하여 표본분포 및 표집분포를 구성한 뒤 추론을 수정하고 발전시키는 과정을 제시하였다. 또한 학생들이 IMA 모델링을 통한 통계적 추론 과정에서 보이는 세 가지 변화를 제시하였다. 학생들은 첫째, 모델 세계를 탐구함으로써 자료세계에 대한 오개념을 인식하고 수정하였다. 둘째, 자신이 기존에 가지고 있던 형식적 지식을 활용하여 모델 세계의 표집 결과를 해석하고 수치적 지식과 개념적 지식을 통합하였다. 마지막으로 IMA 모델링을 통해 표집분포와 관련된 새로운 지식을 형성하였다.

연구의 결과로 다음과 같은 시사점이 도출되었다. 첫째, IMA 모델링은 표본의 크기, 표본 추출 방법에 대한 결론 도출하게 한다. 또 표본 추출 결과를 모으면 모수를 중심으로 하는 정규분포를 형성하며, 이 정규분포는 다시 신뢰구간이라는 개념을 형성하게 한다. 따라서 IMA 모델링은 표본에서 모집단을 추론하기 위해 필요한 지식 간의 유기적인 연결을 지원한다. 둘째, IMA는 EDA를 통해 의사결정 추정이나 예측 면에서 통계적 추론을 발휘하게 한다. 또 표집분포와 신뢰구간에 대한 이해가 부족한 학생들이 IMA 모델링을 통해 오개념을 수정하고, 모델링 결과를 자신의 통계적 지식과 통합시키며 추론을 발전시킨다. 따라서 IMA는 통계적 추론능력을 신장하는 교수·학습방법이 될 수 있다. 셋째, 맥락을 활용한 IMA 모델링은 통계를 통해 개인의 세계를 해석할 수 있으며 새로운 맥락과 의미를 파생할 수 있는 기회가 된다. IMA는 자신의 관심분야에 대한 자료 조사부터 모델링을 시작한다. 이는 계산에 초점을 두는 통계적 추정의 한계를 극복하고 자료와 의미에 초점을 맞추어 고차원적인 통계적 추론을 할 수 있도록 한다. 마지막으로, IMA는 다양한 수준과 학년에 적용 할 수 있다. 본 연구 참여자 모두 IMA 모델링을 통해 표본 대표성과 표집 변이성과 관련된 개념을 습득하고 추론 결과를 형식적 지식과 연결하였다. 이 과정을 통하여 비형식적 추론에서 형식적 추론으로 나아

가 추론에 대한 이해를 심화할 수 있다는 내용을 확인하였다. 따라서 다양한 수준과 학년에 적용 가능한 접근의 근거가 될 수 있다.

주요어 : 통합적 모델링 접근, 모델링, 통계적 추론, 통계적 추정
학 번 : 2018-24212

목 차

국문 초록 ····· i
목차 ····· iv
표 목차 ····· vi
그림 목차 ····· vii

Ⅰ. 서론 ····· 1
1. 연구의 필요성 ····· 1
2. 연구의 목적 및 연구 문제 ····· 4
Ⅱ. 이론적 배경 ····· 6
1. 통합적 모델링 접근(IMA) ····· 6
1.1. 통계 교육에서 통계와 확률의 통합 ····· 6
1.2. 모델링 관점에서 본 통계 교육의 두 가지 방향 ····· 8
1.3. Braham과 Ben-Zvi의 통합적 모델링 접근 ····· 10
2. 통계적 추론에 필요한 내용 지식 ····· 14
2.1. 표본의 크기 ····· 16
2.2. 무작위 과정 ····· 18
2.3. 표집분포 ····· 20
2.4. 신뢰구간 ····· 23
2.5. 표본과 모집단의 관계 ····· 25
Ⅲ. 연구방법 ····· 26
1. 연구 절차 및 환경 ····· 26
1.1. 연구 절차 ····· 26

1.2. 연구 참여자 ····· 27
1.3. 학습 경로 ····· 28
1.4. 시뮬레이션 도구 ····· 30
1.5. 인터뷰 문항 ····· 31
2. 자료 수집 및 분석 ····· 34
2.1. 자료 수집 ····· 34
2.2. 자료 분석 ····· 34
IV. 연구결과 ····· 36
1. 학생들은 IMA 모델링을 어떻게 수행하는가? ····· 36
1.1. 학생 A의 IMA 모델링 ····· 36
1.2. 학생 B의 IMA 모델링 ····· 44
1.3. 학생 C의 IMA 모델링 ····· 53
2. IMA 모델링에서 학생들의 추론은 어떻게 변화하는가? ····· 63
2.1. 시간에 따른 IMA 모델링 ····· 63
2.2. 통계적 추론에 필요한 지식의 변화 ····· 65
V. 요약 및 결론 ····· 70
1. 요약 ····· 70
2. 결론 및 제언 ····· 72
참고문헌 ····· 75
Abstract ····· 80

표 목 차

〈표 Ⅱ-1〉 통계 교육에서 두 모델링 ····· 8
〈표 Ⅱ-2〉 IMA 학습경로의 일부(Braham & Ben-Zvi, 2017, pp. 223-224 에서 일부 발췌) ····· 13
〈표 Ⅱ-3〉 표본의 크기와 관련된 교과서 서술(황선욱 외, 2014, p. 131, 132, 140) ····· 16
〈표 Ⅱ-4〉 표집분포와 관련된 핵심 명제 ····· 21
〈표 Ⅱ-5〉 교과서에 제시 된 신뢰구간 유도 과정(황선욱 외, 2014, p. 129) ····· 25
〈표 Ⅲ-1〉 통합적 모델링 탐구 주제 ····· 28
〈표 Ⅲ-2〉 IMA 모델링 ····· 29
〈표 Ⅲ-3〉 IMA 모델링에 대한 인터뷰 문항 ····· 33
〈표 Ⅳ-1〉 학생 A의 IMA 모델링 ····· 43
〈표 Ⅳ-2〉 학생 B의 IMA 모델링 ····· 52
〈표 Ⅳ-3〉 학생 C의 IMA 모델링 ····· 62

그 림 목 차

[그림 Ⅱ-1] IMA의 이론적 설명(rationale)(Braham & Ben-Zvi, 2017, p. 120) ····· 11
[그림 Ⅱ-2] IMA 학습과정(Braham & Ben-Zvi, 2017, p. 120) ····· 12
[그림 Ⅱ-3] 모델과 모델링에서 나타난 추론 분석틀(Braham & Ben-Zvi, 2017) ····· 14
[그림 Ⅱ-4] 표집 과정에서 맥락과 통계의 상호작용(Dierdorp et al.,2016) ····· 15
[그림 Ⅱ-5] 표본의 크기 구하는 문제(황선욱 외, 2014, p. 147) ····· 18
[그림 Ⅱ-6] 임의추출과 관련된 교과서 서술(황선욱 외, 2014, p. 129) ·19
[그림 Ⅲ-1] Tinkerplots을 이용한 표집분포 구성 과정 ····· 31
[그림 Ⅲ-2] IMA 모델링 분석틀 ····· 35
[그림 Ⅳ-1] 학생 A의 자료 세계 탐구 결과 ····· 37
[그림 Ⅳ-2] 자료 세계 결과(좌)를 바탕으로 가상의 모집단 분포를 구성한 모델(우) ····· 39
[그림 Ⅳ-3] 표본의 크기에 따른 표본분포 ····· 40
[그림 Ⅳ-4] 표본의 크기에 따른 표집분포 ····· 41
[그림 Ⅳ-5] 학생 B의 자료 세계 탐구 결과 ····· 45
[그림 Ⅳ-6] 학생 B의 모델 세계 모집단 ····· 48
[그림 Ⅳ-7] 표본의 크기에 따른 표본분포 ····· 49
[그림 Ⅳ-8] 모델 세계에서의 표집분포 형성 과정 ····· 50
[그림 Ⅳ-9] 학생 C의 자료 세계 탐구 결과 ····· 54
[그림 Ⅳ-10] 등교시간에 대한 초기 모델(curve모델)과 수정 모델(stack모델) ····· 56
[그림 Ⅳ-11] 학생 C의 모델 세계 모집단 분포 ····· 58
[그림 Ⅳ-12] 표본의 크기가 50일 때 등교시간에 따른 지각 횟수의 분포 ····· 60
[그림 Ⅳ-13] 분포의 누적 결과 ····· 61

[그림 Ⅳ-14] 시간에 따른 IMA 모델링(Braham & Ben-Zvi, 2017, p. 121, Figure 2를 재구성) ····· 63
[그림 Ⅳ-15] 학생 A의 표집분포에 관한 추론(Braham & Ben-Zvi, 2017, p. 121, Figure 2를 재구성) ····· 69

I. 서론

1. 연구의 필요성

통계학은 현상에 대한 불확실성을 연구 대상으로 하며 자료를 수집하고 정리하여 불확실성과 다양성, 가능성 및 우연에 대한 모델을 설정하고 추론과 예측을 하여 의사결정 하는 학문이다(김응환, 이석훈, 2015). 학생들이 통계를 통해 불확실한 현상을 통제하거나 관찰하기 위해서는 확률과 확률분포를 활용할 수 있어야 하며, 불확실성과 다양성을 포함한 자연현상을 수학적으로 모델링하기 위해서는 확률과 통계가 융합되어야 한다. 사회 현상으로부터 실제적인 문제를 해결하기 위해 발전된 확률지식을 적절하게 사용하기 위해 논리적·연역적인 사고를 바탕으로 한 수학적 확률의 관점뿐만 아니라 현실 맥락에 기초한 통계적 확률의 관점이 필요하기 때문이다. 한국의 2015 개정 교육과정에서는 실생활 중심으로 통계 내용을 재구성하여 실생활 맥락으로 내용의 성격을 재조정하였으며, 대중매체에서 접하는 통계조사 결과를 올바르게 해석할 수 있도록 모집단과 표본의 관련성 및 표본조사의 중요성을 강조하였다. 또 표본으로부터 모집단의 성질을 예측하는 통계적 추정에 대한 의미 있는 학습 기회를 제공하기 위해 공학적 도구를 이용하여 추출된 표본에 따라 통계치가 달라짐을 시각적으로 확인하게 하고, 이후에 신뢰구간을 구하는 공식보다 통계적 의미에 주목하도록 하였다(박경미 외, 2015, pp. 123-125).

표본으로부터 모집단에 대해 추론하는 것은 통계적 추론[1]의 기본적인

1) statistical inference은 연구자에 따라 “통계적 추론”으로 번역되기도 하며, “통계적 추리”로 번역되기도 한다. 본 연구에서는 statistical inference를 자료의 패턴과 경향을 파악하여 결과에 대해 추론하는 과정 및 표본들로부터 모집단에 대해 추론하는 사고 과정으로 보아 “통계적 추론”으로 번역하였다. 또, 모수 추정, 가설 검정과 같은 통계적 추론을 형식적 추론(Formal inference), 형식적인 통계적 개념이나 기술에 의존하지 않고 일상어를 사용하여 자료에 대하여 추론하는 것을 비형식적 통계적 추론(Informal statistical inference, 이하 ISI)으로 번역하여 사용하였다.

측면이다(Braham & Ben-Zvi, 2017). Lovett(2001)는 통계적 추론이란 자료를 바탕으로 모집단에 대한 일반적인 진술, 예측, 가설을 이끌어 내기 위해 통계적인 기술과 도구를 이용하는 사고 과정이라고 하였으며, delMas(2004/2010)는 통계적 추론을 자료를 해석하는 과정에서 유도된 결론이 왜 타당한지를 설명할 수 있는 것이라고 하였다. 통계 교육에서 강조하는 통계적 추론은 크게 두 가지 유형으로 나누어 볼 수 있다. 먼저, 학생들이 실제 통계조사에 참여한 뒤 생성된 자료를 분석, 요약, 표현하는 데 필요한 추상적인 사고 과정이다. 학생들은 실제적이며 구체적인 탐색적 자료 분석(exploratory data analysis, EDA)을 통해 자료의 경향과 패턴을 표현하고 탐구할 수 있으며 이 과정에서 통계적 추론이 필요하다. 또 다른 추론은 형식적 추정(estimate)을 통해 경험할 수 있는데, 형식적 추정은 표본에 대한 경험적 관찰로부터 모집단의 특성에 대한 결론을 이끌어내는 규칙과 관련된다. 형식적 추정은 신뢰구간이나 가설 검정을 통해 지도되며 우리나라 수학과 교육과정의 통계적 추정에서는 신뢰구간을 활용한 추정만을 다룬다. Lipson(2002)은 통계적 추론을 이해하는데 표본 및 모집단과 관련된 개념을 이해하는 것이 매우 중요하다고 주장하였으며, 후속 연구를 통해 표집분포에 대한 교육적 강조가 통계적 추론에 대한 학생들의 이해를 향상시킬 수 있는 잠재력을 지니고 있는지에 대한 경험적 근거를 제시하였다(Lipson, 2003).

국내외에서 자료 분석, 분포, 변이, 표본 및 표집분포와 관련된 다양한 통계적 추론에 대한 연구들이 수행되어 왔다(Ben-Zvi, 2004/2010; Chance, delMas, & Garfield, 2004/2010; delMas, 2004/2010; Gal, 2004/2010; Watson, 2004/2010; 한채린, 이경원, 김도연, 배미선, 권오남, 2018; 주미경, 김소연, 배기태, 정희수, 정수용, 2018; 탁병주, 2017; 고은성, 이경화, 2011; 민진원, 2009). 이들 연구는 통계적 추론을 발달시키기 위해 적절한 교수학습 방법을 제시하거나 구조화된 면담이나 설문조사를 통해 통계적 추론의 수준을 유형화하였다. 수학 교사나 예비 교사들을 대상으로 한 연구는 표본 및 표집분포에 대한 각 사고의 수준을 나누고 각 수준에서의 특징을 설명하는 연구가 진행되었거나, 수업을 설계, 실

행, 반성하는 과정에서 통계 교수 지식을 어떻게 변형하여 활용하는지 관찰한 연구 등이 있다. 교사나 예비교사의 통계적 추론을 조사하는 연구가 수행되는 이유는 어렵고 추상적인 개념들을 학생들에게 적절하게 지도하기 위해서는 교사의 역할이 중요하기 때문이며(고은성, 이경화, 2011), 교사의 통계 지식을 확인함으로써 전문성을 갖춘 교수법을 제안할 수 있기 때문이다. 학생들을 대상으로 한 연구는 통계적 추론의 발달 모델을 제시하고 각각의 발달과정에서 나타나는 전형적인 반응을 분석하거나, 특정 교수·학습상황 또는 통계적 탐구활동의 과정과 결과를 분석한 연구가 주를 이루었다. 학생의 이해를 조사하는 것은 현재 통계교육이 취약점을 파악하여 앞으로의 방향성을 제시할 수 있으며 구체적인 통계 교수법을 제안할 수 있기 때문이다.

한편 Braham과 Ben-Zvi(2017)는 학생들이 표본과 모집단 사이의 관계를 이해하고 모델과 모델링으로 추론하는 것을 지원하기 위해 통합적 모델링 접근(integrated modeling approach, IMA)을 제안하였다. IMA는 통계적 모델의 구성과 분석을 안내하며 학생들의 비형식적 통계적 추론(ISI) 구성을 돕고 추론에 대한 분석틀을 제공한다. IMA는 EDA 모델링과 컴퓨터 시뮬레이션을 통한 확률 기반 접근(Probability-based approach, PBA)을 통합하여 모델링 지도에 대한 학습 경로[2]를 제시한다. EDA에서 모델링이란 실세계 현상을 설명하기 위해 자료를 구성하고 사용하는 것을 의미하며, PBA에서의 모델링이란 현상을 합리적으로 근사하기 위해 컴퓨터 시뮬레이션에서 분포 모델을 구성하는 것을 말한다. IMA에서의 모델링은 EDA와 PBA의 모델링을 통합한 것으로, 학생들이 하나의 표본에 대한 탐색을 통해 자신의 개인적, 직관적 지식을 좀 더 수학적이고 과학적인 실세계와 연결할 뿐만 아니라 통계적 추론을 발전시킨다. 또한 가상의 모델로부터 표집을 경험하며 표본 대표성 및 표집 변이성을 인식하고 표집분포에 대한 이해를 토대로 신뢰도와 통계적 추정에 대한 이해를 심화시킬 수 있게 한다.

---

2) Braham과 Ben-Zvi(2017)는 IMA에 기반한 모델링을 학습 경로로 제시하였으며 이를 바탕으로 본 연구에서 학생들이 수행한 모델링 과정을 ‘IMA 모델링’이라 하겠다.

본 연구에서는 IMA를 기반으로 학생들의 통계적 추론 학습을 지원할 수 있는 학습과정을 제시하고, 공학적 도구를 활용한 통계적 추론의 지도 방안을 고안하고자 한다. Braham과 Ben-Zvi(2017)이 초등학생들[3]의 모델링을 분석하여 비형식적 통계적 추론을 조사하였다면, 본 연구는 고등학교 3학년 학생들의 통계적 추론을 조사한다. 고등학생들의 IMA 모델링 과정을 제시하고 분석하는 것을 통해 IMA 모델링이 어린 학생들의 ISI 개발을 지원할 뿐만 아니라 고등학생의 통계적 추론 개발에도 효과적임을 밝힐 수 있을 것이다. 또한 학생들의 IMA 모델링을 자세히 서술하고 IMA가 추론에 미치는 영향에 대한 분석은 통계적 추론을 위해 표본과 표집분포 및 신뢰도와 신뢰구간의 의미를 유기적으로 연결할 수 있는 효과적인 지도 방안을 제공할 것이다.

2. 연구의 목적 및 연구 문제

이 연구에서는 우선 IMA를 활용한 모델링 과제를 설계하였다. 연구자는 학생들이 실제 상황으로부터 자료의 수집 및 분석과 표집분포 및 신뢰구간과 같은 개념을 설명할 때 어떤 통계적 추론을 하는지 설명할 것이다. 특히 표집 대표성과 표집 변이성과 같은 표본의 중요한 특징을 중심으로 IMA 모델링을 어떻게 수행하는지 서술할 것이다. 또한 IMA 모델링에서 일어나는 학생들의 통계적 추론의 변화를 관찰할 것이다.

본 연구의 목적은 학생들이 표본과 모집단 사이의 관계를 이해하고 모델과 모델링을 통해 추론함으로써 실생활 맥락의 통계 교육으로 패러다임 전환의 가능성을 보여주는 것이다. 자신의 관심 주제를 통계적으로 모델링하고 통계 소프트웨어를 활용하여 확률적 표집을 직접 경험함으로써 통계를 현실과 유리된 생명력을 잃은 지식이 아닌 현실 세계를 모델링 할 수 있는 강력한 도구로서 인식하기를 기대한다. 이러한 목적을 이루기 위한 구체적인 연구 문제는 다음과 같다.

---

3) Braham과 Ben-Zvi(2017)의 연구 참여자는 초등학교 6학년(12세) 학생인 Ido와 Ohad이며 추론 과정을 잘 살펴볼 수 있을 정도로 의사소통 능력과 분석능력이 뛰어난 학생들이다.

1. 고등학생들은 어떻게 IMA 모델링을 수행하는가?
2. IMA 모델링에서 학생들의 통계적 추론은 어떻게 변화하는가?

본문은 총 5개의 장으로 되어있으며 Ⅰ장은 연구의 필요성과 연구 문제를 기술하였다. Ⅱ장에서는 본 연구에서 중심이 되는 IMA를 소개하고 관련 연구를 살펴볼 것이며, 통계적 추론에 필요한 지식을 분석하여 모델링 절차와 인터뷰에 활용될 이론적 기반을 다질 것이다. Ⅲ장은 Ⅱ장에서의 연구 기반을 근거로 구성된 연구의 절차와 자료의 수집 및 분석 방법을 기술하였다. Ⅳ장은 Ⅲ장의 연구방법으로 분석된 결과에 대한 기술로, 연구 참여자의 IMA 모델링 과정을 분석하고 IMA 모델링을 통해 학생들의 추론에 어떤 변화가 생겼는지 서술할 것이다. 마지막 Ⅴ장은 요약 및 결론으로 연구를 요약하고 연구의 의의와 한계점을 제시하는 것으로 마무리할 것이다.

Ⅱ. 이론적 배경

이 장에서는 먼저 Braham과 Ben-Zvi(2017)의 연구에 기반하여 IMA에 대한 이론적 배경을 설명한다. 다음으로 Dierdorp, Bakker, van Maanen과 Eijkelhof(2016)의 연구에서 제시된 통계적 구(sphere)에 기반하여 통계적 추론에 필요한 지식에 대해 검토한다. 이때 이러한 지식이 현재 교육과정에서 어떻게 다루어지고 있는지 서술한다. 이는 본 연구를 진행하는 데 활용될 IMA 모델링의 활동 및 인터뷰 문항 선정에 대한 이론적 배경을 제공할 것이다.

1. 통합적 모델링 접근

1.1. 통계 교육에서 통계와 확률의 통합

학문으로서 통계학은 확률론을 이용하지만, 확률론은 수학의 한 분야인 데 반해 통계학은 그렇지 않다(Moore, 1992). 통계학은 수학 내에서 발생한 학문이 아니라 경험과학을 통합하면서 새로운 학문으로 발전한 논리적 과학이기 때문이다. 확률론과 통계학은 나란히 그리고 거의 동시에 Pascal과 Bernoulli에 의해 확립되었음에도 불구하고, 확률 아이디어는 경험적 자료나 통계적 분석에 통합되지 않았다(Pfannkuch & Wild, 2004/2010). 그러나 19세기 후반부터 통계는 확률에서 나온 개념으로부터 분리될 수 없다는 주장이 대두되면서 통계와 확률은 점차 통합되었는데(Pfannkuch, Ben-Zvi, & Budgett, 2018), 이는 관찰된 자료로부터 성질을 추론하기 위해서는 확률 모델을 고려해야 하며 확률로부터 발생하는 많은 개념이 통계학과 분리될 수 없기 때문이다(Lightner, 1991). 또한 통계에 확률을 통합하기 위해서는 통계적 사고가 필요하다는 의견이 제기되었으며 통계적 사고의 출현은 네 가지 주요 아이디어에 기반을 두고 있다. 첫째, 자료의 분석이 그 상황에 관한 지식을 제공해 줄 수 있다는

점이다. 즉, 지식 습득이 조사에 근거하여 이루어질 수 있다는 인식을 바탕으로 한다. 둘째, 수학적 확률 모델은 인간 집단과 같은 집단의 행동을 모델링하고 예측할 수 있다는 것이다. 그래서 수학적 확률 모델과 실제 상황 사이의 상호 작용은 실제에 대한 비결정론적 견해를 수반하는 사고로의 전환을 가능하게 하였다. 셋째, 수학적 확률 모델을 다양한 분야에 적용해보는 것으로, 이를 통해 통계 분야에서 새로운 방식의 사고 및 예측과 해석이 가능하게 되었다. 예를 들면, Quetelet과 Galton이 각각 사회과학과 생물학에서 수학적 오차 모델을 사용했는데, 이를 변이나 확률에 대한 통계 모델로 재해석하면서 새로운 사고 방법이 나타나게 된 것이다. 넷째, 통계가 적용되는 새로운 상황으로부터 새로운 도구가 발달한 것이다. 이러한 새로운 도구는 통계적 사고의 발달에 일조하였다. 통계적 사고는 통계적 지식과 상호작용하는 맥락적 지식으로부터 나타난다고 볼 수 있는데 여기에서 통계적 지식은 쌍을 모델링하고 인식하는 새로운 방법을 창안하는 결과적 통합체를 의미한다(Pfannkuch & Wild, 2004/2010).

1970년대 후반 통계와 확률이 학교 교육과정에 도입될 때, 학생들은 두 학문을 대부분 독립적으로 배웠다(Fischbein, 1975; Tversky & Kahneman, 1982). 그러나 통계 교육 연구자들은 학생들이 확률에 관한 기본적인 아이디어가 부족하기 때문에 탐색적 자료 분석(EDA) 학습 환경에서 자료로부터 적절한 추론을 하는데 어려움을 겪는다는 것을 깨닫게 되었다. 이는 학생들이 개별적인 사례에 기초한 추론에서 자료 집합에 기초한 추론으로 나아가는 것을 매우 어려워함을 의미한다(Konold, Pollatsek, Well, & Gagnon, 1997). 예를 들면, 수학에서는 하나의 반례로 가설이나 주장을 반박하지만, 통계에서는 하나의 반례, 즉 하나의 개별적인 사례로 집단의 경향에 관한 이론을 반박할 수 없다. 게다가, 통계적 그래프를 통해 추론하기 위해 학생들은 자료 집합을 하나의 전체로 간주하여 패턴을 볼 수 있어야 하는데, 이때 패턴을 임의적인 것으로 생각할 수 있어야 하며 상황에 따라서는 개별적인 추론도 필요함을 인식할 수 있어야 한다. 이는 확률 교육의 기반 위에 통계학을 지도해야 할 필

요성을 알게 하며 확률 교육과 통계 교육을 통합시키는 방법을 모색하게 한다.

1.2. 모델링 관점에서 본 통계 교육의 두 가지 방향

‘통계 모델’ 또는 ‘모델’은 자료 생성 과정의 기본 구조를 반영하거나 설명하기 위한 통계적 근사를 의미하는 것으로 이해될 수 있다(Garfield & Ben-Zvi, 2008). 대부분의 통계 모델은 자료 분석을 위해 개발된 것이다. 통계 그래프와 같은 간단한 도구도 실제를 통계적으로 사고하고 표현하므로 통계 모델로 간주될 수 있다. 통계 모델은 개별 자료를 대상으로 한 추론과 자료 집합을 대상으로 한 추론 모두를 이용하지만, 후자에 좀 더 초점을 둔다. 개별 자료를 대상으로 한 추론은 개별 자료를 자료 집합과 거의 연결하지 않고 개별 자료에만 관심을 두는 반면, 자료 집합을 대상으로 한 추론은 전체로서의 자료 집합의 패턴과 관계에 초점을 둔다. 즉 통계 모델을 통해 자료에서 패턴을 발견하고 자료 집합의 성질을 찾고 분포에 대한 아이디어를 이용해 패턴에 대한 변이를 알 수 있다. 또한 각 자료의 특성을 고려해 다양한 방법으로 자료를 요약할 수 있다.

Biehler(1994)는 새로운 사고 모델을 찾는 탐구와 확률 모델에 기초한 탐구로 통계적 탐구 환경을 구분하였다. 각각의 탐구를 위한 학습 환경에서는 모델링이 서로 다른 의미로 이해되고 있는데 그것을 정리하면 <표 Ⅱ-1>과 같다.

<표 Ⅱ-1> 통계 교육에서 두 모델링

	과학적 탐구 기반 학습 환경	확률적 탐구 기반 학습 환경
모델링	실세계 현상을 설명하기 위해 자료를 구성하고 사용하는 것	현상을 합리적으로 근사하기 위해 컴퓨터 시뮬레이션에서 분포 모델을 구성하는 것
방법	실세계 자료 조사에 참여	가능성 장치를 이용하여 모델을 조작하는 데 참여

예	탐색적 자료 분석(EDA) 자료 기술하기, 자료 정리하기, 자료 표현하기, 자료 분석하기 및 해석하기	현상에 대한 합리적인 근사치를 창조하기 위해 신호와 소음[4]을 고려하여 컴퓨터 시뮬레이션을 이용하여 모델을 구성 (Konold, Harradine, Kazak, 2007)
의의	자료의 드러나지 않는 특성을 분석하여 그 구조를 있는 그대로 명확히 드러낼 수 있으며 자료의 구조와 특징을 있는 그대로 제한 없이 탐색 가능 (우정호, 2000)	개별적인 사례에서는 발견할 수 없는 새로운 형태의 지식, 새로운 원인, 설명, 유형 요소를 드러낼 수 있음 (Biehler, 1999, p. 261)
한계	표본과 모집단에 대한 관계를 이해하는 데 중요한 확률적 고려 부족	연구 질문 제기와 같은 자료 탐색의 측면이 부족

과학적 탐구 기반 학습의 예로는 탐색적 자료 분석(EDA)이 있다. 이 과정에서 학생들은 자료를 정리하고, 표현하고, 패턴을 만들고 관계를 만들면서 의사결정, 추정, 예측과 같은 통계적 추론을 발휘할 수 있다(Lesh & Doerr, 2003). 또한 자료-모델링 과정을 통해 변이 다루기, 자료 변환하기, 통계적 모델 평가하기, 문제의 맥락적이고 통계적인 특징 통합하기와 같은 통계적 추론을 개발할 수 있다(Wild & Pfannkuch, 1999). 또한 탐색적 자료 분석은 학생들이 공학 도구를 이용하여 개방적 자료를 탐구할 수 있는 교육적 기회를 마련한다(Ben-Zvi, 2004, p. 145).

이러한 탐색적 자료 분석은 자료를 설명할 때, 통계적 추정보다는 "자료를 대표하는 어떤 수들이 자료에 대해 말하게 하는"(Moore,

4) 소음과정(noisy process)이란 충분한 양의 자료를 조사함으로써 탐지할 수 있는 신호(signal)를 지닌 과정이다. 통계를 소음과정에 대한 탐구로 인식해야한다고 주장하는 연구들은 평균값이나 중앙값과 같은 통계량을 계산하는 주요 목적이 개별적인 자료 값들에 의해 발생하는 '소음' 속에 존재하는 '신호'를 찾는 것임을 강조한다.

2000, p. 1) 좀 더 직접적인 접근을 통해 자료 자체가 자료 내에 숨겨진 구조와 모델을 드러내도록 한다.

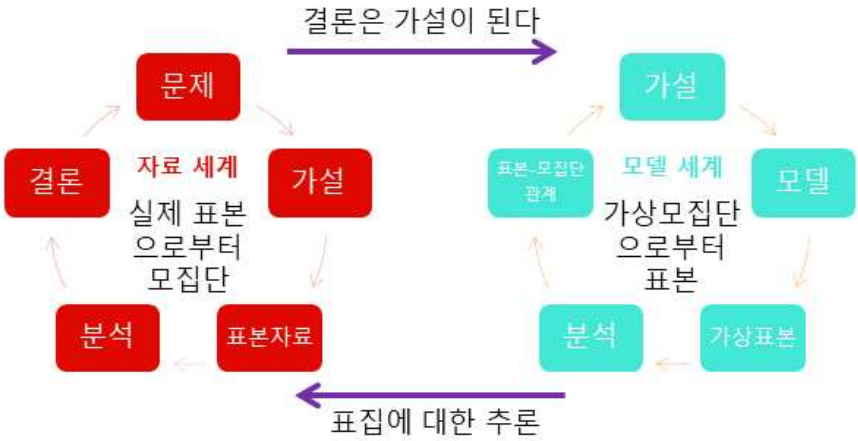
한편, 확률적 사고는 이론적 확률 모델을 이용해 추론할 때 발생한다. 확률적 탐구 기반 학습의 예로는 어떤 특정 모델의 임의 표본이 되는 자료에 기초하여 논쟁이 일어나는 상황을 예로 들 수 있다. Biehler(1999, p. 261)는 확률 분포를 통해 "개별적인 사례에서는 발견할 수 없는 새로운 형태의 지식, 새로운 원인, 설명, 유형 요소를 드러낼 수 있음"을 주장하였다. 이러한 상황에서는 체계 변이와 임의 변이 그리고 이들의 상보적인 역할 또한 이해해야 한다(Konold 외, 1991). 따라서 Biehler는 통계적 사고를 위해 확률 모델이 기초한 탐구활동과 새로운 모델을 찾는 탐구 활동이 모두 필요하며 뿐만 아니라 자료 집합을 대상으로 한 추론과 개별적인 자료를 대상으로 한 추론 모두가 필요하다고 주장하였다.

1.3. Braham과 Ben-Zvi의 통합적 모델링 접근

학교 교육과정에서도 자료와 확률을 다시 연결해야 할 필요성은 교육용 테크놀로지의 발달에 의해 자극되었다. 특히 통계 소프트웨어인 TinkerPlots(Konold & Miller, 2011)은 학생들이 다변량 데이터를 탐색하고 EDA를 뒷받침하는 통계 개념을 개발할 수 있게 할 뿐만 아니라, 샘플러(sampler) 기능의 도입으로 학생들이 확률 모델을 만들 수 있게 하였다. 변이성, 무작위성 및 분포의 개념을 실제로 구현하였으며, 학생들이 이전에는 볼 수 없었던 자료에서 아이디어를 접할 수 있도록 했다(Konald 외, 2007).

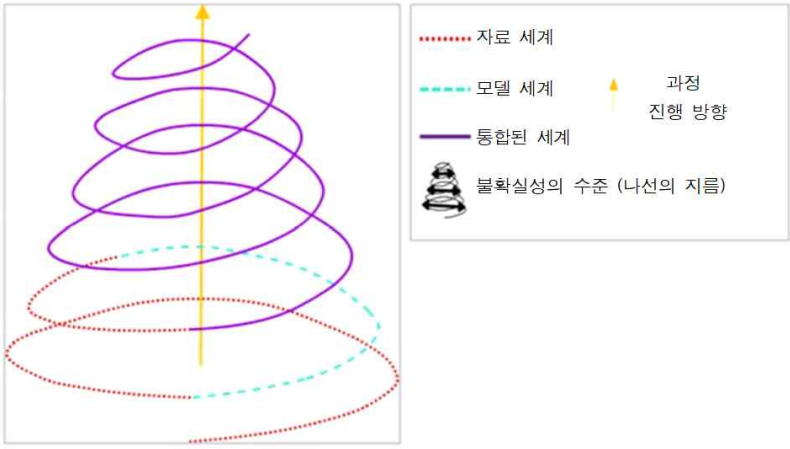
한편 Braham과 Ben-Zvi(2017)는 탐색적 자료 분석의 방법과 확률 기반 접근법 통합한 접근을 제안하였다. IMA는 학생들의 통계적 추론을 도울 수 있는 모델링 과정을 제시한다. 학생들은 IMA에 기반한 모델링을 통해 실제 표본에 대해 탐구하는 EDA 모델링을 경험할 뿐만 아니라 EDA의 결과를 다시 가설로 만들어 가상의 모집단을 구성하고, 반복되는 표집 과정을 통해 표본추출의 실제를 경험하여 표본과 모집단의 관계의 이해

를 확장시킨다. IMA의 목표는 탐구 기반 모델링과 확률 기반 모델링을 연결할 수 있도록 지원하는 것이며 IMA의 원리는 [그림 Ⅱ-1]로 나타난다.



[그림 Ⅱ-1] IMA의 이론적 설명(rationale)(Braham & Ben-Zvi, 2017, p. 120)

학생들은 먼저 스스로 수집한 데이터를 구조화하고 나타내는 EDA 모델링을 경험한 뒤 임의 추출된 표본에 대한 성질을 학습하기 위해 왼쪽 과정에서부터 오른쪽 과정으로 이동한다. 이러한 이동은 탐구 결론이 모집단을 구성하는 가설이 되는 것으로 실현된다. 확률 기반 모델링에서 시뮬레이션을 통해 얻은 표본-모집단 관계에 대한 통찰은 다시 왼쪽 과정의 통계적 추론에 사용되며 IMA는 두 과정을 연결하는 토대가 된다.



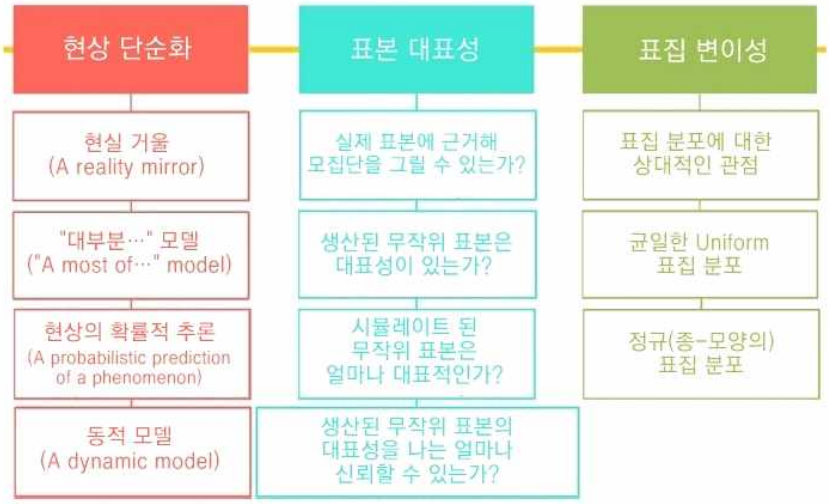
[그림 Ⅱ-2] IMA 학습과정(Braham & Ben-Zvi, 2017, p. 120)

IMA 학습과정은 다음과 같다. IMA는 모델링 학습을 지원하기 위해 자료 세계와 모델 세계로 구성되어 있다. 자료 세계에서 학생들은 모집단 내에서 특정 현상을 연구하기 위해 실제 표본을 수집하고 탐구한다. 학생들은 연구 주제 선택, 질문 제기, 속성 선택, 수집 자료 분석을 경험하며 모집단에 대해 비형식적으로 추론하고 분석결과에 대한 신뢰 수준을 표현한다. 이를 통해 학생들은 실세계현상에서 통계적 모델을 창조하는 것이다. 모델 세계에서 학생들은 가상의 모집단에 대한 모델을 구축하고 이러한 모델로부터 자료의 무작위 표본을 추출한다. 이때 학생들은 모델과 표본을 추출하는 무작위 과정에 주목한다. 무작위성으로 인해 추출할 때마다 표본은 다른 결과를 만들어냄과 동시에 변이성이 통제됨을 확인할 수 있다. 학생들은 두 세계 모두를 탐구하면서 자신들의 모델을 지속적으로 수정하고 그 과정을 설명하며 자신의 탐구과정을 타당화한다. Braham과 Ben-Zvi(2017)는 이를 통합된 세계로 보았으며 통합된 세계에서는 자료 세계와 모델 세계의 사이를 반복적으로 연결하며 모집단에 대한 결론을 이끌어낸다. 연구자들은 초등학교 6학년 학생들을 대상으로 비형식적 추론을 조사하고자 8차시의 활동을 구상하고 학생들에게 안내했다.

<표 Ⅱ-2> IMA 학습경로의 일부
(Braham & Ben-Zvi, 2017, pp. 223-224에서 일부 발췌)

차시	차시 주제
1	차시 1. 1 : 연구 주제 및 모집단 선택, 연구 및 설문 문항 제시, 표본 추출 방법 표본 크기 선택
	차시 1.2 : 가설 설정 및 결과에 대한 신뢰 수준 표현하기
2	눈을 감은 채 긴 줄과 짧은 줄이 들어 있는 가방에서 줄을 뽑아 짧은 줄의 비율을 추정하기. 같은 수의 파란색 구슬과 빨간색 구슬이 들어 있는 가방에서 추출한 구슬 표본에서 파란색 구슬의 비율을 탐색하기.
3	표본 추출 방법을 개선하고, 추측을 다시 작성하고, 학교를 대상으로 표본 조사를 시행하기.
4	실제 샘플 데이터를 탐색하고, 모집단에 대한 결론을 도출하고, 결론에 대한 신뢰 수준을 추정하기.
5	차시 5.1 : 모집단의 몇몇 속성들 간의 관계에 대한 모델을 TP2로 만들기
	차시 5.2 : 모델에 대해 다른 크기의 표본을 그리고 탐색하기.
	차시 5.3 : 모델의 표본들을 비교하고 표본분포에 대해 탐색하기.
6	십대들 표본과 숨겨진 모델을 탐색하여 ISI를 끌어내기.
7	모델의 다른 크기의 표본들을 탐색하고 결론을 도출하는 데 필요한 최소 표본 크기를 결정하기.
8	표본분포와 연관 지어 실제 표본 데이터를 탐색하고 ISI를 끌어내기.

연구자들은 학생들의 IMA 모델링 과정을 매 차시 영상으로 기록하여 코딩한 뒤 코딩된 자료에서 확인한 학생들의 추론을 [그림 Ⅱ-3]의 세 가지 관점으로 분류하여 분석에 활용하였다.

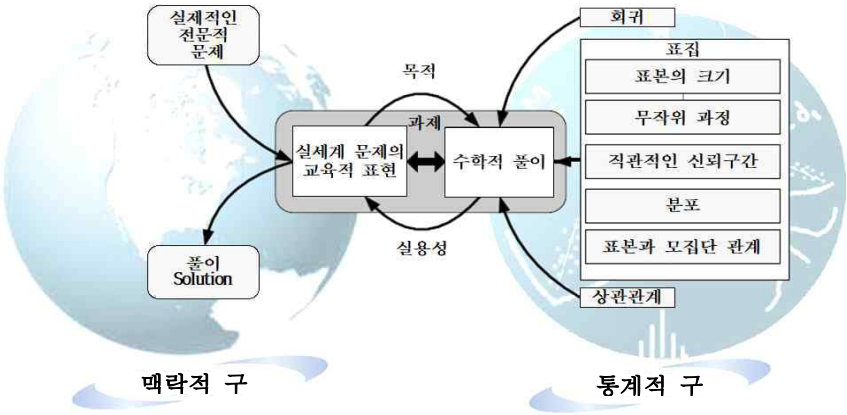


[그림 Ⅱ-3] 모델과 모델링에서 나타난 추론 분석틀
(Braham & Ben-Zvi, 2017)

2. 통계적 추론에 필요한 내용 지식

Pfannkuch, Wild와 Parsonage(2012)는 통계적 추론을 위해 맥락, 질문 유형, 자료 조회 방법, 자료 생성 방법에 의한 추론 유형뿐만 아니라 모집단 또는 과정과 표본, 표본과 모집단의 관계, 표본분포와 모집단 분포, 표집분포, 분포의 특성 확인, 표집 변이성, 표본의 크기 효과 등의 개념을 모두 접해야한다고 주장하였다. Cobb와 Moore(1997)은 통계적 추론을 위해서는 표집 변이성에 대해 고려해야함을 언급했으며 Saldanha와 Thompson(2002)은 표본 추출 결과들의 '변이성' 에도 불구하고 표본 조사 결과가 대표성을 갖는다는 것을 이해하기 위해서는 표집분포에 대한 이해가 선행되어야 한다고 주장하였다.

Pfannkuch(2008)은 표집 변이성과 관련된 다섯 가지 요소를 제시했는데, 이는 Dierdorp 외(2016)의 맥락과 통계의 상호작용의 통계적 구([그림 Ⅱ-4] 참조)의 바탕이 되었다. 맥락과 통계를 연결시키기 위해 통계적 추론이 필요하며 통계적 추론을 위해서 표본의 크기, 무작위 과정, 직관적인 신뢰구간, 분포, 표본과 모집단 관계의 통합적인 이해가 필요하다.



[그림 Ⅱ-4] 표집 과정에서 맥락과 통계의 상호작용(Dierdorp et al., 2016)

한편 2015 개정 교육과정에서는 통계를 자료를 수집하고 정리하여 결과를 분석하고 추정하는 통계를 현대 정보화 사회의 불확실성을 이해하고 미래를 예측하는 중요한 도구(교육부, 2015)로 보았다. 학생들이 통계 교육을 통해 이와 같은 기능을 잘 수행하기 위해서는 실생활에서 출발하여 통계적 사고를 경험하며 통계적 추론과 관련된 학습 내용을 적용할 수 있어야 한다. 이러한 관점에서 학생들의 통계적 추론에 필요한 지식이 무엇인지 살펴보는 것이 필요하며, 이를 위해 통계적 추론과 관련된 내용들이 확률과 통계 교과서에 어떻게 서술되어있는지 살펴본다. 분석에 사용된 교과서는 연구 대상자가 사용하고 있으며 현장에서 가장 많이 채택된 것으로 알려진 검정교과서인 황선욱 외(2014)로 선택하였다.

2.1. 표본의 크기

표본 크기와 관련된 '핵심 아이디어'는 큰수의 법칙으로, 표본의 크기가 커질수록 모집단에 대한 예측은 더 신뢰할 수 있다는 것이다 (Dierdorp et al, 2016, p. 39). 이는 표본의 크기가 크면 표본이 모집단과 유사한 특징을 지닐 가능성이 크다는 표본 대표성과 관련이 된다. 한편 표본의 크기는 표집 변이성에도 영향을 미치는데 표본의 크기 n이 커질수록 표집 시 서로 다른 결과를 얻게 될 가능성이 작아진다는 것이다 (Chance et al., 2010, p. 359). 통계적 추정 단원에 서술된 표본의 크기와 관련된 내용은 <표 Ⅱ-3>과 같다.

<표 Ⅱ-3> 표본의 크기와 관련된 교과서 서술(황선욱 외, 2014, p. 131, 132, 140)

표본 평균	· 모평균이 m, 모표준편차가 σ인 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균 $\overline{X}$에 대하여 $\mathrm{E}(\overline{X})=m,\ \mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\sigma^2}{n},\ \sigma(\overline{X})=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ · 정규분포 $\mathrm{N}(m,\sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다. · 모집단의 분포가 정규분포가 아닐 때에도 n이 충분히 크면 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.
표본 비율	· 모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\frac{\sigma^2}{n}\right)$를 따른다. 따라서 확률변수 $Z=\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}$는 근사적으로 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,1)$을 따른다. (단, $q=1-p$)

학생들은 이를 통해 n이 커지면 표본평균의 분산이 작아짐을 알 수 있다. 또한 이를 표집분포에 대한 이해로 확장시켜 표본의 크기 n이 표집분포에 대한 그래프에 미치는 영향과 이로 인해 표본의 크기가 다르면 표집분포 상에서 동일한 통계치가 나타날 확률이 달라짐을 이해할 수 있다. 그러나 학생들은 표본평균의 분산과 표준편차, 표본비율의 분산과 표준편차를 구할 때 표본의 크기 n의 영향에 주목하기보다는 문제에서 요구하는 값에 대해 공식을 이용하여 구하는데 초점을 두는 경향이 있다(탁병주, 2017).

한편 표본의 크기가 클수록 표집오차[5] 를 줄일 수 있어서 좋지만 표본의 크기가 증가함에 따라 자료수집에 따른 비용과 시간도 증가하게 된다. 표본의 크기를 정하는 방법 중 하나는 의사결정자가 표집오차 또는 허용 오차의 범위를 먼저 정한 뒤 정해진 표집 오차보다 오차가 작아지는 최소한의 표본의 크기를 정하는 방법이 있다(김응환, 이석훈, 2015). 이런 방식으로 표본의 크기를 정하면 통계적 추정을 위한 표집에서 적절한 표본의 크기는 모집단의 크기와 무관하게 정해지는데 교과서의 한 문제를 예를 들어 설명하면 다음과 같다.

---

5) 표집오차란 모수의 참값과 모수에 대한 표본추정량과의 차이를 뜻하며 최대허용오차라고도 한다. 예를 들어, 회사원의 하루 평균 근무시간을 추정하고자 하는데, $100(1-\alpha)\%$의 신뢰도를 가지고 허용오차가 e 이하이기를 원한다고 하자. 근무시간을 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$로 가정하고 크기가 n인 표본의 확률표본인 $X_1, X_2, \cdots, X_n$의 표본 평균을 $\overline{X}$라고 할 때 이것을 수식으로 표현하면 다음과 같다.

$$P(|\overline{X}-\mu| \le e) = P(-e \le \overline{X}-\mu \le e) = 1-\alpha$$

각 항을 $\sigma/\sqrt{n}$으로 나누어 주면

$$P\left(\frac{-e}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{\overline{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \le \frac{-e}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = P\left(\frac{-e}{\sigma/\sqrt{n}} \le Z \le \frac{-e}{\sigma/\sqrt{n}}\right) = 1-\alpha$$

으로 표기가 가능하다. 이것은 모평균 μ의 $100(1-\alpha)\%$의 신뢰구간을 구하는 식과 같으며 모평균 μ와 표본평균 ¯의 차이인 오차는 $e = |\overline{X}-\mu| = \pm Z_{\alpha/2}\,\sigma/\sqrt{n}$임을 알 수 있다. 그러므로 이 관계식에서 표집오차를 e보다 작게 하고 싶을 때 표본의 크기 n은 다음가 같이 결정된다.

$$n \ge \left(\frac{Z_{\alpha/2}\,\sigma}{e}\right)^2$$

08 어느 지역 남자 고등학생의 키는 표준편차가 $9\,\mathrm{cm}$인 정규분포를 따른다. 모평균을 신뢰도 95%로 추정할 때, 모평균과 표본평균의 차가 $3\,\mathrm{cm}$ 이하가 되려면 표본은 최소한 몇 명이어야 하는지 구하여라.

[그림 Ⅱ-5] 표본의 크기 구하는 문제(황선욱 외, 2014, p. 147)

표본평균을 $\overline{X}$, 표본의 크기를 n이라고 하면, 모평균 m의 신뢰도 95%의 신뢰구간은 $\overline{X}-1.96\frac{9}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\frac{9}{\sqrt{n}}$, $|m-\overline{X}| \le 1.96\frac{9}{\sqrt{n}}$이고, 모평균과 표본평균의 차가 $3\,\mathrm{cm}$이하가 되려면 $1.96\frac{9}{\sqrt{n}} \le 3$, $\sqrt{n} \ge 5.88$, $n \ge 34.5744$이므로 표본은 최소한 35명이어야 한다. 즉 모집단의 크기에 대한 정보가 주어지지 않았지만 원하는 결과를 얻기 위한 최소 표본의 크기를 구할 수 있다. 이처럼 통계적 추정에서 표집 변이성의 제어에 필요한 표본의 크기는 모집단의 크기와 무관하지만(탁병주, 2017) 학생들은 표본의 크기를 정할 때 모집단에서 차지하는 비율을 고려하여 표본의 크기가 클수록 표본의 정확도가 커진다고 생각하는 경향이 있다(Bar-Hillel, 1979).

2.2. 무작위 과정

표본조사는 모집단을 가장 잘 대표할 수 있는 표본을 추출하는 것이 중요하다. 그리고 표본조사가 과학적이고 합리적으로 행해지기 위해서는 표본을 어떤 방법으로 추출할 것인지 구체적인 표본추출방법에 기초한 표집 설계 과정이 반드시 명시되어 있어야 한다. 일반적으로 표집에서는 편향(bais)을 줄이기 위해 모집단으로부터 추출되는 각 단위에 0이 아닌 확률을 부여하는 확률표집방법(probability sampling method)을 사용한다. 확률표집방법에는 단순무작위추출, 층화랜덤추출, 계통적 추출, 집락추출 등이 있다. 이 중에 가장 간단하고 잘 알려진 형태가 단순무작위추출(simple random sampling)[6]인데, 통계적 추정 단원에서도 [그림 Ⅱ-4]와 같

6) 단순랜덤표집법에서 요구되는 크기의 각 단위는 표본으로 추출되는 확률이

이 임의추출을 설명하며 특별한 언급이 없는 경우 임의추출을 통해 표본을 추출하며 그때의 임의추출은 복원추출이라고 생각할 것을 제시한다.

> 모집단에서 표본을 추출하는 방법은 여러 가지가 있다. 그중에서 특히 모집단에 속하는 각 대상이 같은 확률로 추출되도록 하는 방법을 **임의추출**이라고 한다.
>
> 표본을 임의추출할 때는 난수 주사위, 난수표, 컴퓨터의 난수 프로그램을 사용한다.

[그림 Ⅱ-6] 임의추출과 관련된 교과서 서술(황선욱 외, 2014, p. 129)

확률표집방법 중 층화추출은 모집단을 보다 동질적인 몇 개의 층으로 나누고 이러한 각 층으로부터 단순무작위추출 또는 계통적 추출을 하는 방법이다. 층화추출은 주로 각 층에 대하여 상이한 목록표 또는 표집방법을 이용하여야 할 경우, 표집에 필요한 수를 되도록 적게 하고자 할 경우에 사용된다. 예를 들어, 한 지역사회의 인구가 1,000명이며 남녀 구성비가 6:4일 때, 100명을 표본 추출할 경우 남자 60명, 여자 40명을 추출하는 방법을 사용한다. 이를 통해 최소한의 사례를 가지고 주어진 정확성을 확보할 수 있다(채구묵, 2010).

통계학에서의 문제 해결을 위해서는 대체적으로 임의표집을 전제하는데 임의추출을 통해 자료 수집 단계에서 표본에 발생하는 편향을 제어할 수 있기 때문이다(탁병주, 2017). 또한 학생들은 통계적 추론이 추출 된 표본의 영향을 받는다는 것을 이해하기 위해 동일한 현상의 반복 측정과 같은 임의의 과정이 다른 결과로 이어질 것임을 알아야 한다(Dierdorp et al, 2016). 따라서 학생들은 자료 세계에서 표본을 추출할 때는 맥락적 의미를 고려하면서도 임의추출을 통해 편향을 제어해야하며 모델 세계에서는 임의추출을 통해 통계적으로 편향 제어가 가능함을 입증해야 한다.

같게 된다. 즉 모집단의 크기가 N이고 그 중에서 크기가 n인 표본을 추출할 경우 각 원소에 $1, 2, 3, \cdots, N$까지의 번호를 주고 그 중에서 임의로 번호를 선택하여 그 번호에 해당하는 원소를 표본으로 추출하는 방법이다(김응환, 이석훈, 2015).

2.3. 표집분포

표집분포(sampling distribution)[7]는 모집단에서 추출한 표본의 통계량을 나타낸 분포이다. Lipson(2002)은 표집분포에 대한 이해가 통계적 추정에 대한 이해의 발달에 미치는 역할에 주목하며 표집분포에 대한 이해를 분석하기 위한 10개의 핵심 명제를 추출했다. Lipson 연구에서 제시한 핵심 명제를 매개로 하여 확률과 통계 교과서(황선욱 외, 2014)에 서술된 내용을 정리하면 <표 Ⅱ-4>과 같다.

표집분포에 대한 이해는 통계적 추론의 핵심이나, 많은 학생이 이해에 어려움을 겪는다(민진원, 2009). 학생들이 표집분포의 이해에 어려움을 느끼는 이유는 다양한데 우선, 표본 조사를 통해 구한 통계값들이 어떻게 분포되어 있는지보다 개개의 표본에 초점을 맞추기 때문이다(Saldanha & Thompson, 2003). 많은 표본의 가설적인 특성에 대해 추론하여 표집 결과가 분포를 이룬다는 것을 알아야 하지만 관찰하는 표본은 하나라는 점이 표집분포의 개념을 형성하기 어렵다. 또 다른 이유로 중심극한정리는 표집분포 특성에 대한 이론적 모델이 되지만, 표본의 크기가 클 때 표집분포가 정규분포를 따름을 설명하기 어렵다는 점이 있다(Chance et al., 2010, p. 370). 또한 용어와 기호 사용에서 야기된 어려움도 학생들의 이해를 방해하는 데 표본의 분포, 표본 평균의 분포, 표본 평균의 평균 등의 말 자체가 혼란을 유발한다(김응환, 2006). 결과적으로 학생들은 표집분포에 대한 이해 없이 기계적인 암기나 계산에 의존하게 되며 이는 이후 통계적 추정 학습에도 영향을 미친다.

---

7) 2009 개정 교육과정에서는 표집분포로 표본 평균의 분포와 표본 비율의 분포를 다루었으나 2015 개정 교육과정에서는 모비율의 추정이 삭제되어 표본 평균의 분포만을 다룬다. 본 연구의 참여자는 2009 개정 교육과정을 통해 확률과 통계를 학습하였으며, 본 연구에서는 '표본 평균의 분포'와 '표본 비율의 분포'를 모두 표집분포로 통칭하여 서술한다.

<표 Ⅱ-4> 표집분포와 관련된 핵심 명제

<table>
<tr><th>명제</th><th colspan="2">확률과 통계 교과 내용</th></tr>
<tr><td>표본은
모집단으로부터 선택된다.</td><td colspan="2">통계 조사에서 조사하고자 하는 대상 전체를 모집단이라고 하며, 조사하기 위하여 뽑은 모집단의 일부분을 표본이라고 한다.</td></tr>
<tr><td>모집단(분포)은 모수로
설명된다.</td><td>어느 모집단에서 조사하고자 하는 특성을 나타내는 확률변수를 X라고 할 때, X의 평균, 분산, 표준편차를 각각 모평균, 모분산, 모표준편차라고 하며, 이것을 기호로 각각 m, σ^2, σ 와 같이 나타낸다.</td><td>모집단에서 어떤 사건에 대한 비율을 고려할 때, 그 비율을 그 사건에 대한 모비율이라고 하며, 이것을 기호로 p와 같이 나타낸다.</td></tr>
<tr><td>표본은 통계량으로
설명된다.</td><td>모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본에서 각 대상을 X_1, X_2, $\cdots$, X_n 이라고 할 때, 이들의 평균, 분산, 표준편차를 각각 표본평균, 표본분산, 표본표준편차라고 하며, 이것을 기호로 각각 $\overline{X}$, S^2, S 와 같이 나타낸다.</td><td>모집단에서 임의추출한 표본에서의 비율을 그 사건에 대한 표본비율이라고 하며, 이것을 기호로 $\hat{p}$ 과 같이 나타낸다. 크기가 n인 표본에서 어떤 사건이 일어나는 횟수를 확률변수 X라고 할 때, 이 사건에 대한 표본비율 $\hat{p}$은 $\hat{p}=\frac{X}{n}$ 과 같다.</td></tr>
<tr><td>모수의 값은
일정하다(상수이다).</td><td rowspan="2">모평균 m은 고정된 상수이지만 표본평균 $\overline{X}$는 추출된 표본에 따라 여러 가지 값을 가질 수 있는 확률변수이다. 따라서 $\overline{X}$의 확률분포, 평균, 표준편차 등을 구할 수 있다.</td><td rowspan="2">$\hat{p}=\frac{X}{n}$에서 X가 확률변수이므로 $\hat{p}$도 확률변수이다.</td></tr>
<tr><td>표본통계량은 변수이다.</td></tr>
</table>

표본통계량의 분포는 표집분포로 알려져 있다. 표본통계량의 표집분포는 정규분포에 근사한다. 표본통계량의 표집분포는 모양, 중심, 퍼짐으로 특징지어진다. 표집분포의 퍼짐은 표본 크기와 관련 있다. 표집분포는 모평균을 중심으로 한다.	**표본평균의 분포** 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본의 표본평균을 $\overline{X}$라고 할 때, $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다. **참고** 모집단의 분포가 정규분포가 아닐 때도 n이 충분히 크면 $\overline{X}$는 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다.	**표본비율의 분포** 모비율이 p이고 표본의 크기 n이 충분히 클 때, 표본비율 $\hat{p}$은 근사적으로 정규분포 $\mathrm{N}\left(p,\ \dfrac{pq}{n}\right)$를 따른다.

2.4. 신뢰구간

Pfannkuch 외(2012)에 따르면 학생들은 한 번의 교육으로 신뢰 구간을 잘 이해할 수 없으며, 몇 년에 걸쳐 직관적인 신뢰구간 아이디어로 변형될 수 있는 표본 변이성의 아이디어에 노출되어야 한다고 주장한다. 학생들은 모집단에서의 반복적인 표집과 그에 따른 변이성의 이미지를 구축하여, 통계치의 값이 다양한 가능성과 함께 어떻게 분포를 형성하고 있는지에 대한 아이디어가 선행되어야 한다. 학생들은 반복적인 표집 과정을 통해 직관적인 신뢰구간의 이미지를 형성할 수 있는데 Shaughnessy(2006)에 따르면 "직관적인 신뢰구간"이란 기댓값 주변에 합리적으로 예상되는 변이성의 감각이다. 즉 표집 결과를 직접 기록하고 관찰된 값 주위에 그럴듯한 값이 존재함을 상상하는 것이 학생들에게 직관적인 신뢰를 부여한다.

한편 모집단에서 반복된 무작위 추출을 통해 얻어진 표본 통계치는 모수를 중심으로 하는 확률분포를 이루는데 이러한 분포에 근거하여 우리는 미지인 모수가 신뢰구간 곧, 표본에서 얻은 통계치의 주어진 오차의 범위 내에 놓여있다는 신념을 확률 곧, 신뢰도로 언급할 수 있다. 신뢰구간은 보통 '추정값±오차의 한계'와 같이 나타나고 신뢰도는 실제 모수를 추정하는데 몇 퍼센트의 확률로 그 신뢰구간이 실제모수를 포함하게 될 것인지에 대한 것이다. 즉, 신뢰도는 "이 방법을 여러 번 사용하면 얼마나 자주 바른 답을 얻게 될 것 인가"라는 질문에 답하는 확률이며 그러한 확률이 자료로부터 이끌어 낸 특정한 결론보다는 추론 방식에 관계된다는 것은 고전적 추정이론의 핵심이다(우정호, 2000). 따라서 95% 신뢰구간이라는 의미는 임의로 선택한 표본이 모수를 포함하는 신뢰구간을 제공하는 표본 가운데 하나일 가능성이 95%라는 것이다. 이것을 이해하기 위해서는 여러 개념을 통합해야 하는데 이것이 신뢰구간에 관한 추론을 어렵게 만들 수 있다.

학교수학에서는 표본으로부터 얻은 자료를 이용하여 모집단에 대한 값을 추측하는 것을 추정이라고 소개하고 바로 신뢰구간 유도과정으로 넘

어간다. 또한 모평균 m의 신뢰도 95 %의 신뢰구간의 뜻을 '모집단으로부터 크기가 n인 표본을 여러 번 추출하여 신뢰구간을 만드는 일을 반복할 때, 구한 신뢰구간 중에서 약 95 %는 모평균 m을 포함한다는 뜻'이라고 소개한다. 교과서에서도 신뢰구간을 유도하기 위해 표본 평균의 분포로부터 출발하고 있으며 확률분포와 확률을 활용하였다. 그러나 표집분포를 이해하는 데 필요한 다양한 개념에 대한 통합적인 이해가 없이는 형식적으로 제시된 유도과정과 그 의미에 대한 이해가 쉽지 않을 것이다.

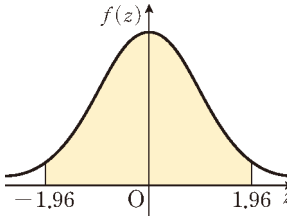
<표 Ⅱ-5> 교과서에 제시 된 신뢰구간 유도 과정(황선욱 외, 2014, p. 134)

정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르는 모집단에서 크기가 n인 표본을 임의추출하였을 때, 표본평균 $\overline{X}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$을 따른다. 따라서 $\overline{X}$를 표준화한 확률변수 $Z=\dfrac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

한편, 표준정규분포표에서

$\mathrm{P}(-1.96 \le Z \le 1.96)=0.95$ 이므로

$$\mathrm{P}\left(-1.96 \le \frac{\overline{X}-m}{\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}} \le 1.96\right)=0.95 \text{ 이다.}$$



이 식을 변형하면 다음과 같다.

$$\mathrm{P}\left(\overline{X}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{X}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)=0.95$$

이것은 모평균 m이 $\overline{X}-1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이상 $\overline{X}+1.96\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 이하인 범위에 포함될 확률이 0.95임을 나타낸다.

여기서 표본평균 $\overline{X}$의 값을 $\overline{x}$라 할 때,

$$\overline{x}-1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le m \le \overline{x}+1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

를 모평균 m의 **신뢰도** 95 %의 **신뢰구간**이라고 한다.

2.5. 표본과 모집단의 관계

Saldanha와 Thompson(2002)은 고등학교 통계 수업에서 학생들이 보여준 표본에 대한 두 개념을 구분했는데, 표본을 모집단의 준비례적인 축소판(quasi-proportional, small-scale version)으로 보는 것과 모집단의 부분집합으로 보는 것이다. 표본을 모집단의 준비례적인 축소판으로 본다는 것은 표본추출 과정의 반복성과 변이성의 이미지를 갖는다는 것이며, 표본 추출 결과들의 '변이성' 에도 불구하고 표본의 결과가 대표성을 갖는다는 것을 이해한다고 주장한다.

표본으로부터 통계적 추정에 신뢰를 주기 위해 모집단에서 표집 가능한 일정 크기의 표본들의 표집분포를 분석함으로써 표집분포의 모양, 중심, 퍼짐에 대해 이해하고, 표집된 표본의 평균이 전체 분포상의 어느 위치에 있는지를 알아볼 필요가 있다. 이를 통해 표본오차의 존재에도 불구하고 한 번의 표집만으로 모집단을 추정하는 통계적 추정의 원리와 개념을 이해할 수 있을 것이다.

Ⅲ. 연구방법

1. 연구 절차 및 환경

1.1. 연구 절차

본 연구는 Braham과 Ben-Zvi(2017)가 제시한 통합적 모델링 접근을 기반으로 고등학생들의 모델링 활동을 관찰하고 인터뷰하여 그 과정에서 나타난 통계적 추론의 변화를 분석한 연구이다. 연구자는 (1) 학생들은 어떻게 IMA 모델링을 수행하는가? (2) IMA 모델링에서 학생들의 통계적 추론은 어떻게 변화하는가? 라는 연구 문제에 초점을 두고 연구절차를 설계했다.

이 연구 문제를 해결하기 위해 본 연구는 질적 연구의 한 전략인 사례연구(Creswell, 2011, p. 15)를 수행했다. 연구자는 시간 경과에 따라 하나의 경계를 가친 체계(사례) 또는 경계를 가진 여러 체계들(사례들)을 탐색하고, 다양한 정보 원천들을 포함하여 상세하고 심층적인 자료를 수집하며, 사례 기술과 사례에 기반한 주제들을 보고하고자 하였다(Creswell, 2007). 연구자는 질적 연구의 절차에 따라 연구의 중요성 및 목적을 명확히 하고, 문헌 검토를 통해 이론적 기반을 다졌다. 또한 연구 참여자의 정보를 수집함으로써 연구 참여자의 상황이나 환경의 이해를 통해 연구 결과를 해석하고자 하였다. 이후 연구에 활용될 학습 경로 및 인터뷰 문항을 구체화한 뒤 연구자가 지도하는 학생들에게 구체적인 연구내용을 소개하고, 자발적으로 연구에 희망하는 학생들의 지원을 받았다. 이 중 사례분석에 풍부한 정보를 줄 수 있는 대상자를 선정하였고 연구를 진행하였다. 수집된 원자료는 전체 자료 읽기, 자료 코딩의 과정을 거쳐 범주화되었으며 각각에 사례에 의미를 부여하여 결론 도출에 활용하였다.

1.2. 연구 참여자

연구 참여자인 학생들은 경기도에 있는 A고등학교 3학년에 재학 중인 학생 중 확률과 통계를 이수한 학생 3명이다. A고등학교의 교육과정은 확률과 통계를 3학년에 배치하며, 연구 참여자들은 수행 평가 과제로 통계 활용 주제탐구를 수행했다. 통계 활용 주제탐구 과정과 제작한 통계 포스터 및 산출물에 대한 인터뷰와 Tinkerplots을 활용한 모델링 활동은 확률과 통계를 모두 이수한 뒤 학기말에 이루어졌다. 이는 연구 문제와 관련하여 학생들이 IMA 모델링 과정에서 교과지식을 어떻게 사용하는지 관찰하고 고등학생들의 통계적 추론이 어떻게 변화하였는지 분석하기 위함이다.

연구 참여자는 표집분포를 수식으로 나타내거나(예를 들면, 모집단이 $\mathrm{N}(m, \sigma^2)$인 정규분포를 따를 때, 표본의 크기가 n인 표본에 대해 표본분포 $\overline{\mathrm{X}}$는 정규분포 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$을 따름을 식으로 서술할 수 있음) 신뢰구간을 구할 수 있는 학생 중 EDA에 적극적으로 참여한 학생으로 선정하였다. 구체적인 대상 선정 방법은 다음과 같다. 학생들의 탐색적 자료 분석 활동인 통계 활용 주제 탐구 결과를 자세히 검토한 뒤 이 중 주제 및 모집단과 표본 추출 과정, 자료 분석 결과 및 결론도출에서 연구에 유의미한 정보를 제공할 수 있을 것 같은 학생을 1차 대상자로 선정하였다. 이 학생들을 대상으로 통계적 추론을 위한 모델과 모델링 활동에 대해 설명했으며 인터뷰에 자발적 참여의사를 밝힌 3명의 학생을 최종 연구 대상자로 선정하였다. 통합적 모델링에 참여한 모둠의 탐구 주제 및 인터뷰 대상자는 다음과 같다.

<표 Ⅲ-1> 통합적 모델링 탐구 주제

학생	탐구 주제
A	아침밥과 학업의 상관관계
B	내 짝꿍은 항상 시험을 망쳤대
C	학교 가까이에 사는 학생이 지각을 많이 할까?

1.3. 학습 경로

Lobato와 Walters(2017)에 따르면 연구에 입각한 교육과정 개발에 대한 중요성이 대두되며 학습 경로에 대한 다양한 연구가 진행되었고, 학습 경로가 교육과정, 규준, 평가, 교육적 의사결정, 전문성 개발을 조율하는데 도움이 된다는 근거를 제시하였다. 또한 학습 경로에 관한 연구를 통해 학습 경로의 몇 가지 특징을 포착했는데 우선, 학습 경로는 다차원적이며 학습에 대한 다른 대상을 가질 수 있다. 예를 들어, 학습 경로의 요소는 인지적 개념, 담화의 형태, 관찰 가능한 전략들, 또는 교과서 과제들일 수 있다. 학습 경로는 개인의 학습, 교실 수업에서 드러나는 수학적 실천 또는 교수 학습의 결합에 초점을 둘 수 있으며, 피아제의 스키마 조작, 계층적 상호작용론과 같은 다양한 이론적인 관점들에 근거할 수 있다. 마지막으로 학습 경로는 하나의 개념을 다루는 것에서 다양한 주제와 학년으로 넓히는 것까지 규모가 다양할 수 있다.

통계 학습과 관련하여 Jones 외(2000)의 모델은 자료 기술하기, 자료 정리하기, 자료 표현하기, 자료 분석하기 및 해석하기라는 핵심과정을 제시하였으며 각 수준에 대한 특징을 설명하여 개개인이나 하나의 전체 학급에 적절한 목표를 제시하였다. Pfannkuch 외(2012)는 신뢰구간에 대한 개념적 경로에 대한 연구를 통해 통계 교육이 확률과 통합되어야 하고 신뢰구간을 이해하는 데서 표집 변이성의 이해가 선행되어야 함을 제시하였다.

Braham과 Ben-Zvi(2017)가 제시한 IMA 학습 경로(<표 Ⅱ-2> 참조)는

표본과 모집단의 관계에 대한 학생들의 이해를 지원하도록 디자인되었으며 자료 수집과 조사 경험이 있는 초등학교 6학년 학생을 대상으로 실험을 수행하였다. 이를 통해 IMA에서 어린 학생들의 비형식적 통계적 추론과 그 특징을 살펴볼 수 있었다. 본 연구의 대상은 확률과 통계 교과를 이수한 고등학교 3학년 학생이므로 통합적 모델링의 과정 중 EDA에서 나타나는 학생들의 오개념을 관찰하고 PBA 과정을 이미 학습한 형식적 지식과 어떻게 통합하는지에 초점을 맞추어 학습경로를 제시하였다. 관찰 가능한 전략은 고은성, 이경화(2011)가 예비교사들의 통계적 표집에 대한 이해를 조사하기 위해 선정한 표집과 관련된 주요 주제 및 관련 개념을 참고하여 작성하였다.

<표 Ⅲ-2> IMA 모델링

활동 과정	통계적 아이디어	관찰 가능한 전략
① 연구 주제 및 모집단 선택	연구 질문 작성, 연구 가설 제시	개별 자료에 대한 관찰을 통해 모집단에 대해 예측할 수 있다.
② 표본에 대한 자료 수집	표본 추출 방법, 표본의 크기	적절한 표본의 크기는 모집단의 크기와 독립적으로 결정된다. 표본의 크기가 클수록 모집단의 분포와 유사하다. 표본의 크기가 클수록 표집 변이성은 작아진다. 편의를 제거하기 위해 무작위 추출을 시행한다.
③ 응답 결과 분석	분포, 시각적 표현, 맥락과 데이터	큰 표본의 분포 형태는 모집단 분포의 형태와 유사한 경향을 갖는다.
④ 결론 도출	추론, 맥락과 데이터, 모집단에 내린 결론에 대한 신뢰 수준	모집단에 표본은 모집단의 부분집합이 아니라 준비례적인 축소버전이다. 모집단 분포의 특성을 알기 위해 표본에서 구한 통계치를 활용할 수 있다.
❺ 표본에서 얻은 결과를 바탕으로	모집단, 표본	모집단에 표본은 모집단의 부분집합이 아니라 준비례적인 축소버전이다.

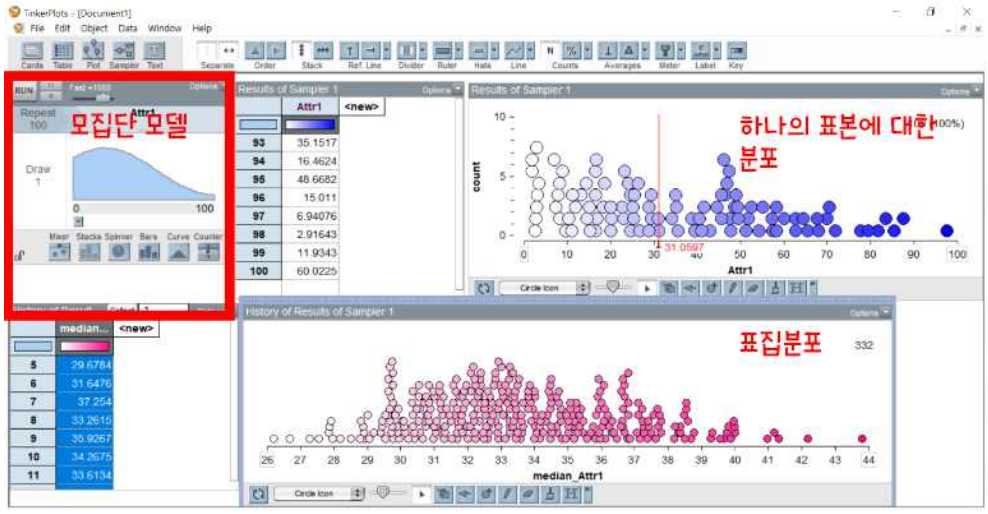
모집단 모델링		편의를 제거하기 위해 무작위 추출을 시행한다.
❻ 서로 다른 크기의 표본을 추출하고 표본 추출 결과 탐색하기	표본 간 비교, 모집단과 표본 비교, 표본대표성, 표집 변이성	표본의 크기가 클수록 모집단의 분포와 유사하다. 서로 다른 표본은 서로 다른 통계치를 갖는다.
❼ 특정 크기의 표본의 반복된 표집을 통해 표집분포 탐색하기	표집 변이성, 표집분포	표본의 크기가 클수록 표집 변이성은 작아진다. 서로 다른 표본은 서로 다른 통계치를 갖는다. 표집분포는 모집단의 평균을 중심으로 대칭이다.
❽ 서로 다른 크기의 표본의 반복된 표집을 통해 표집분포를 탐색하고 비교하기	표본 간 비교, 표본의 크기와 표집 변이성 간의 관계, 표집분포	표본의 크기가 클수록 표집 변이성은 작아진다. 표집분포는 모집단의 평균을 중심으로 대칭이다.
❾ 실제 표본으로부터 구한 신뢰구간과 모델의 표본으로부터 구한 신뢰구간 비교	통계적 추정, 신뢰구간	표집분포와 연결 지어 신뢰구간의 의미를 해석할 수 있다.

학생들이 안내받은 활동 내용은 표의 활동과정에서 ①부터 ❾로 나타내었다. 여기서 활동 ①~④는 자료 세계에서의 탐구과정으로서 EDA이며, 활동 ❺~❾는 시뮬레이션 도구를 활용한 확률세계에서의 PBA이다.

1.4. 시뮬레이션 도구

모집단으로부터 무작위 표본을 추출하고 표집 결과를 시뮬레이션하기 위한 도구로 공학용 도구인 Tinkerplots을 사용하였다. Tinkerplots은 모집단으로부터 표본을 추출하기 위해 다양한 샘플러를 제공하고 있으며 사

용자가 설정한 표본의 크기와 표본 추출 횟수, 표집 방법에 따라 표본이 추출된다. 표본추출 결과는 표 또는 분포로 나타낼 수 있으며 분포에서 표본평균이나 표본비율과 같은 표본 통계치를 구할 수 있다. 같은 모집단으로부터 표본 추출을 반복할 수 있으며, 각각의 표본에서 구해진 표본 통계치를 확률변수로 하여 분포로 나타내면 한 모집단에 대한 표집분포를 구성할 수 있다. 연구자는 [그림 Ⅲ-1]과 같은 과정을 학생들이 수행할 수 있도록 사전에 Tinkerplots 사용법을 연구대상자에게 안내하였다.



[그림 Ⅲ-1] Tinkerplots을 이용한 표집분포 구성 과정

1.5. 인터뷰 문항

인터뷰는 자료 세계에 대한 문항과 모델 세계에 대한 문항으로 나누어 진행했다. 자료 세계에 대한 인터뷰는 이미 진행한 탐구와 포스터를 바탕으로 연구자의 질문에 응답하는 형태로 진행하였으며 모델 세계에 대한 인터뷰는 모델 세계 탐구 진행 중에 연구자가 판단하기에 적절한 반구조화 문항으로 진행하였다. 인터뷰 문항은 Dierdorp 외(2016)의 맥락과 확률의 상호작용에서 통계적 구의 다섯 가지 요인과 Gal(2004/2010)이 정

리한 ‘비판적 사고를 위한 질문’을 바탕으로 구성하여 각 요인에 대한 학생들의 추론을 살피고자 하였다. 한편 학생들이 표집분포에 대해 학습하였지만 표본 평균이나 표본 비율의 분포에 대한 이해를 바탕으로 과정을 설명하기보다는 개개의 표본에 초점을 맞추어 설명할 것이 예상되어 표집분포에 관한 지식을 묻는 이 질문을 추가하였다. 추가문항은 Watson(2004/2010)이 학생들의 표본과 표집분포에 대한 이해 및 표본의 크기가 표집 변이성에 미치는 영향에 대한 이해를 확인하기 위해 제안한 문항으로 학생들에게 인터뷰할 때는 학생들의 탐구 주제에 맞게 재구성하였으며 자료 세계에 대한 인터뷰에서 질문하였다. 모델 세계 인터뷰 문항은 활동을 촉진시키거나 자료 세계에서 학생들에게 나타날 수 있는 오개념을 수정할 수 있도록 이끄는 발문을 제공하려 하였다. 인터뷰를 통해 학생들은 자신이 수행한 탐구 과정을 비판적으로 평가하며 탐구한 내용을 수학적으로 연결할 수 있고, 개별적으로 조사된 자료를 전체와 연결 지어 생각해 볼 수 있는 계기가 되기를 기대하였다. 또한 본 연구자는 좀 더 풍부한 정보에 근거하여 학생들의 통계적 추론을 해석할 수 있을 것이라 판단하였다.

<표 Ⅲ-3> IMA 모델링에 대한 인터뷰 문항

인터뷰 문항	
자료 세계	1. 표본은 충분히 큰가? 2. 표본은 모집단을 대표할 수 있는 사람이나 단체를 포함하는가? 3. 표본을 어떻게 선택하였는가? 4. 표본이 편중되어 있지 않은가? 5. 표본 조사 결과를 얼마나 신뢰할 수 있는가? 6. 표본 조사 결과는 가능성에 대한 추정을 정당화할 만큼 신뢰할만한가? 7. 이 표본을 통해 모집단에 대한 타당한 추론이 가능한가?
모델 세계	1. 모집단은 어떤 모델을 사용하여 표현할 수 있는가? 2. 자료 세계 표본추출 방식과 샘플러의 표본추출 방식에 어떤 차이가 있는가? 3. 서로 다른 크기의 표본을 추출할 때 관찰 가능한 특징은 무엇인가? 4. 특정 크기의 표본을 반복 추출할 때 관찰 가능한 특징은 무엇인가? 5. 다양한 크기의 표본을 반복 추출할 때 관찰 가능한 특징은 무엇인가? 6. 결론을 도출하는 데 필요한 최소 크기의 표본은 어떠한가? 7. 실제 표본으로부터 구한 신뢰구간과 모델의 표본들로부터 구한 신뢰구간은 어떤 차이가 있는가?
추가 문항	연구자들은 도심에 있는 한 학교와 시골에 있는 한 학교를 방문하였다. 각 학교는 여학생과 남학생이 거의 반씩 차지하고 있었다. 도심에 있는 학교에서 50명의 학생을, 시골에 있는 학교에서 20명의 학생을 무작위로 선택하여 두 학교의 표본으로 정하였다. 이들 중 하나의 표본에서 80% 이상이 남학생임을 확인하였다. 이 표본은 도심에 있는 학교의 표본일 가능성이 더 큰가, 시골에 있는 학교의 표본일 가능성이 더 큰가? 아니면 두 학교의 표본일 가능성이 서로 같은가? 답에 대한 이유를 자세히 설명하여라(Watson, 2004/2010).

2. 자료 수집 및 분석

2.1. 자료 수집

학생들의 통합적 모델링 활동에 대한 분석을 위해 자료 세계에서의 탐구 과정 및 결과, 모델 세계에서의 탐구 과정 및 결과가 필요하다. 자료 세계에서 얻을 수 있는 산출물 및 관찰 자료는 통계 활용 주제탐구의 산출물인 통계 포스터와 구조화된 인터뷰를 분석하였으며 한 명당 대략 30분 분량의 오디오 녹음이 MP3 파일의 형태로 수집되었다. 모델 세계에서의 탐구 과정 및 결론은 녹화 및 녹음을 통해 자료가 수집되었다. Tinkerplots을 통해 시뮬레이션하는 전 과정은 스크린화면 녹화를 통해 동영상 파일로 수집하였으며 진행 과정 중에 발생한 대화도 동시에 모두 녹음되었다. 이에 각 연구 참여자별로 대략 2시간 분량의 오디오 녹음과 비디오 파일이 수집되었으며 모델링 과정과 분석 과정에서 노트에 필기한 내용 또한 주된 분석의 자료로 수집되었다.

2.2. 자료 분석

자료 분석은 질적 연구에서의 자료 분석을 따랐다(Creswell, 2011, p. 222). 우선 연구자는 자료 세계 탐색과 관련하여 수집된 오디오 녹음 파일을 직접 전사하여 검토하였다. 이 과정에서 연구자는 연구 참여자마다 IMA 모델링 과정과 추론에 약간씩 차이가 있음에 주목하여 반응을 통계적 추론에 필요한 지식과 관련한 하위 범주로 분류하여 [그림 Ⅲ-2]와 같이 분석틀을 작성하였다. 자료 분석에는 연구자 외 수학교육 전문가 2인이 참여하여 학생들의 반응을 분석틀에 맞추어 해석한 내용을 검토하였고, 논의를 통해 분석 결과의 타당성을 확보하였다.

[그림 Ⅲ-2] IMA 모델링 분석틀

Ⅳ. 연구결과

연구 결과에서는 학생들의 IMA 모델링을 순서에 따라 제시하고 분석틀에 맞추어 분석하였다. 이때 통계적 추론에 필요한 표본의 크기, 무작위 과정, 신뢰구간, 표집분포, 표본과 모집단 관계에 초점을 맞추어 서술하였으며 학생들의 추론의 변화를 제시하였다.

1. 학생들은 IMA 모델링을 어떻게 수행하는가?

1.1. 학생 A의 IMA 모델링

학생 A는 '아침밥과 학업의 상관관계'라는 주제로 통계적 탐구활동을 진행했으며 학교 전체 학생들을 모집단으로 선택하고 표본의 크기를 100으로 선정하여 조사하였다. 100명의 표본을 선정한 것은 모집단의 10%가 표본의 크기로 적당할 것이라는 생각과 100명을 조사했을 때 비율을 더 쉽게 구할 수 있을 것이라는 생각에 기인한 것이다. 또한 '아침밥을 먹는 것이 학업에 도움이 될 것이다'라는 가설이 참임을 입증하기 위해서는 100명 중 50명 이상의 학생이 가설에 동의하면 된다고 응답하였다.

I : 표본은 왜 100명으로 선정했나요?

A : 우리 학교가 1,000명 정도 되기 때문에 100명은 딱 10분의 1이잖아요. 또 딱 100명을 조사해서 비율을 구하기도 쉬웠어요.

I : 그럼 모집단의 수와 상관없이 표본의 크기는 모집단의 10분의 1이면 될까요?

A : 당연하죠. 1,000명이면 100명을 조사하고 10,000명이면 1,000명 정도 조사하면 적당할 것 같아요. 그런데 100명이면 100명을 다 조사하는 게 나을 것 같은데 10명만 하면 이상할 것 같아요.

학생 A는 표본조사를 위해 모집단 전체에게 설문에 대한 내용을 안내하였으며 그중 조사에 참여를 원하는 학생을 대상으로 선착순 100명을 조사하였다. 학생 A는 응답자가 자신들이 선택한 학생이 아니라는 점을 근거로 표본 추출 과정을 무작위 추출과정이라고 인식하였다. 이를 통해 선착순 조사가 편향을 발생시킬 수 있음에 대해 인식하지 못한다는 것을 알 수 있다.

A : 100명을 임의로 조사했는데요, '00고 다말해' 사이트에 올려서 학교 학생들한테 다 공지한 다음에 선착순 100명 응답만 분석했어요. (중략) 우선 참여를 희망하는 학생들을 대상으로 조사했으니까 아무래도 답변에 성의가 있고 그래서 더 신뢰할 수 있는 것 같아요.

학생 A는 설문 조사에 적극적으로 참여하는 대상을 통한 표집 결과가 모집단에 대한 반응을 더 잘 대표한다고 인식하였다. 이는 자원자의 응답이 전체의 의견이라기보다 적극적으로 자원한 사람들의 의견을 반영한 경우일 수 있으므로 편향[8]을 갖게 되며, 자원자의 반응은 전체 집단의 반응을 대표하는 것이 아닐 수도 있다는 것을 고려하지 못한 것이다.

학생은 조사 결과를 통해 알 수 있는 정보와 그 정보에 대한 신뢰도를 묻는 질문에 모호한 대답을 하거나 스스로 제시한 답에 만족하지 못하였다. 또 신뢰구간을 모비율을 포함하는 고정된 구간으로 인식하고 있었으며 신뢰도를 모집단의 95%라고 해석하는 오류를 보였다.

[그림 Ⅳ-1] 학생 A의 자료 세계 탐구 결과

8) 이를 자원자 반응표본 편향(voluntary response sample bias, 자발적 응답 편향)이라고 한다(김응환, 이석훈, 2015).

I : 조사 결과를 통해 알 수 있는 내용이 무엇인가요?

A : 원래 학생들의 아침밥과 학업의 상관관계를 조사하려고 했는데.. 그걸 못해서 아침밥을 먹는 비율이랑 학업에 대한 인식 비율을 조사했어요. 표본 비율을 알 수 있는 것 같아요.

I : 조사 결과에 대해서는 어느 정도 신뢰할 수 있나요?

A : 한 번 조사한 거니까 믿을 수 있다고 할 수 없는데, 또 저희 조사에 호의적인 학생들한테 조사한 거니까 믿을 수 있을 것 같기도 해요. 반반이니까 50% 믿을 수 있는 것 같아요.

I : 우리학교 전체 학생을 대상으로 아침밥을 매일 먹는 사람의 비율도 알 수 있을까요?

A : 이거 수업시간에 배운 95%, 99% 추정하는 거요? 95%로 구하면 $0.391 \leq p \leq 0.489$가 되는데요. (의미는?) 아침밥을 매일 먹는 사람들이 비율의 평균이 0.391과 0.489사이에 있다. 신뢰도 95%는 전체의 95%가 저 사이에 있다는 것.

학생은 조사 결과에 대한 신뢰도를 표집 변이성에 의해 야기되는 표집분포와 연결 짓지 못하였고, 조사 결과에 대한 신뢰도를 표현하면서 표본의 결과가 모집단을 대표할 수 있는 것과 대표하지 못한다는 두 가지 모순적인 생각을 하고 있음을 알 수 있다.

표본의 크기가 표집분포에 미치는 영향과 표집분포에 대해 어떻게 이해하고 있는지에 대해 알아보기 위해 추가 인터뷰를 진행한 결과 학생은 전체 학생에 대한 비율에 근거해서 표본에서의 가능성을 판단하고 있다. 또한 학생은 반복된 표본 추출 결과 알 수 있는 정보를 묻는 질문에 대해 표본 조사 결과 모집단에 대해 추정할 수 있다는 배경지식을 통해 원래 분포를 알 수 있다고 답하였다. 이를 통해 학생이 표집 변이성과 표집분포에 대한 이해가 부족하며, 한 번 표본을 조사하는 것과 여러 번 조사할 수 있다는 것을 구분하는 데에 어려움이 있다는 점을 알 수 있다.

I : 우리나라 전체 학생 중에서 아침밥을 먹는 사람과 먹지 않는 사람의 수가 거의 반반이라고 합시다. A학교 학생 중에 무작위로 50명을, B학교에서 무작위로 10명을 선택하여 두 학교의 표본으로 정하였다. 이들 중 하

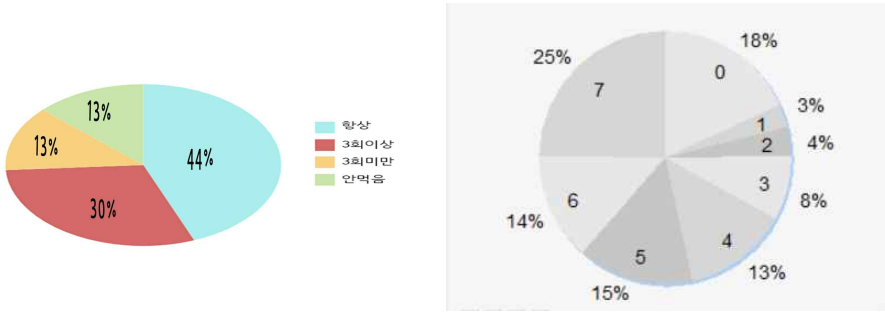
나의 표본에서 80%이상이 아침밥을 먹는 학생일 확률은 어느 학교가 더 높은지 생각해보고 이유와 함께 말해주세요.

A : 똑같은 거 아니에요? 평균적으로 A학교는 40명이 밥을 먹는 거고 B학교는 8명이 밥을 먹는 건데 전체의 평균이 같아서 80%이상 밥을 먹고 올 확률도 같겠죠.

I : 표본을 100번 더 추출하여서 '아침밥을 먹는 학생 비율의 분포'를 나타내면 어떻게 될까요?

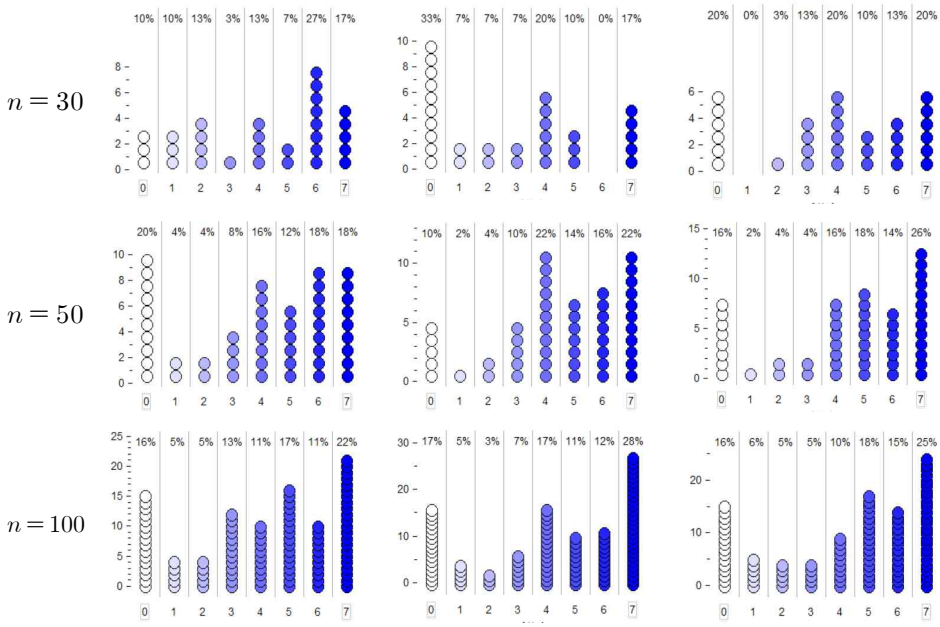
A : 원래 분포인가. 잘 모르겠어요.

자료 세계에 대한 인터뷰를 마친 후 모델 세계에서의 확률적 탐구를 위해 학생에게 가상의 모집단에 대해 모델링 할 것을 요구했으며 학생의 탐구결과와 모집단 모델은 다음과 같다.



[그림 Ⅳ-2] 자료 세계 결과(좌)를 바탕으로 가상의 모집단 분포를 구성한 모델(우)

자료 세계의 조사에서는 아침밥을 먹는 횟수를 네 가지 범주로 분류했으나 모집단 모델은 가능한 답변을 모두 고려해서 모델링했다. 모집단 모델로부터 크기가 서로 다른 표본을 추출하며 현상에 대한 확률적 예측을 시도하였다([그림 Ⅳ-3] 참조). 다양한 크기의 표본에 대해 탐색한 결과, 모집단에 대해 결론을 도출할 수 있는 최소 표본의 크기를 50으로 결정하였다.



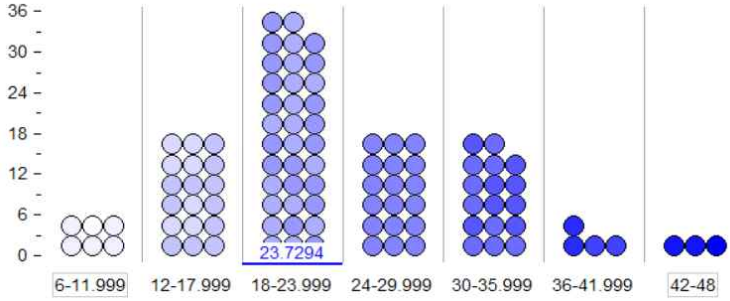
[그림 Ⅳ-3] 표본의 크기에 따른 표본추출 결과

A : 우선 5명만 추출하면 안 될 것 같아요. 30명도요. 50명은 비슷한 것 같은데요. 50명만 해도 제대로 된 값이 나오네요. 이게 전체가 몇 명인지 모르는 거잖아요. 이게 1,000명이든 만 명이든 모집단의 비율이랑 비슷하게 나오네요. 50명만 추출해도 (모집단의 수와) 상관없이 괜찮은 비율이 나오는데요? 다른 경우도 있긴 한데 비슷한 것 같아요. (크기가 100인 표본 추출 뒤) 그래도 100이 더 잘 나타나는 것 같아요.

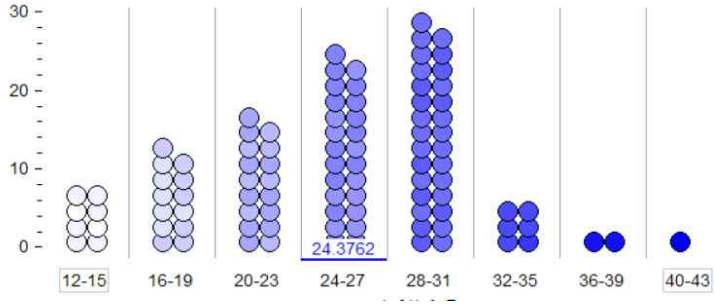
이 활동을 통해 학생들은 충분히 큰 하나의 표본의 분포는 모집단의 분포와 유사한 형태가 됨을 인식하였으며 모집단의 크기와 상관없이 모집단의 특징을 나타낼 수 있는 최소 표본의 크기가 있음을 인식하였다. Tinkerplots의 표집 방법에 대하여 자신의 표집 방법과 sampler의 표집 방식에서 차이가 있다고 응답했으나 어떤 차이점이 있는지는 구체적으로 표현하지 못하였다.

표집분포에 영향을 미치는 표본 크기의 효과에 대해 알아보기 위해 표본비율의 분포를 구성할 수 있도록 시뮬레이션 과정을 안내했다.

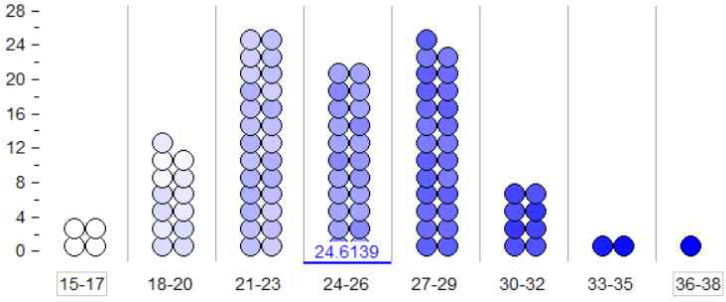
$n = 30$



$n = 50$



$n = 100$



[그림 Ⅳ-4] 표본의 크기에 따른 표집분포

A : 표본이 크면 한 표본에서도 괜찮은 비율이 나왔는데 비율을 모아도 더 모비율에 비슷해지네요. (중략) 우선 표본 100개씩 구했는데 그것들의 평균이 모비율이랑 비슷해지는 거고 표본이 더 많아지거나 무한대로 가면 표본비율의 평균이 모비율이랑 똑같아지고, 모비율이 될 확률이 가장 크고 그러니까 정규분포가 되는데 지금은 모양이 크기가 50일 때 정규분포랑 가장 비슷하네요. (중략) 표본의 크기가 커질수록 좀 더 모여있어요.

학생은 표집 활동을 통해 표본의 크기가 작아도 표집분포는 모집단의 분포보다는 정규분포의 형태를 띠는 경향이 있음과 표본의 크기가 커질수록 표본 비율의 변이성이 작아짐을 관찰했다. 이를 통해 표집분포가 모집단의 분포를 따른다는 오개념을 수정하였음을 알 수 있다. 또한 표본 변이성과 관련된 추가 질문에 대한 답변을 수정하였는데(pp. 37-38 참조), 수정된 응답을 통해 표본 크기가 미치는 영향과 표집 변이성에 대한 인식이 변화하였음을 확인할 수 있었다.

A : 표본의 수가 많아지면 모집단과 유사해지므로 500명인 A학교가 50대 50의 비율에 더 가까울 것이고 100명인 B학교가 50대 50의 비율을 벗어날 확률이 크기 때문에 정답은 B이겠네요.

한편 각각의 표본에서 신뢰구간을 구하고 그 의미를 묻는 질문에서는 표본 통계치를 이용하여 각각의 신뢰구간을 정확하게 계산했지만, 의미에 대해 바람직하게 해석하지 못하였다.

A : 각자 다른 표본에 대해 구한 신뢰구간인데 각각의 신뢰구간에 모비율이 있을 확률이 95%인거에요. 표본비율의 분포가 정규분포인데 그 분포를 토대로 신뢰구간을 구해보면 항상 95%가 되지 않을까요?

I : 지금까지 탐구한 내용을 바탕으로 조사 결과를 다시 해석할 수 있을까요?

A : 처음에 저희가 아침밥과 학업의 상관관계를 보고 싶었는데 그렇게 하지 못한 점이 아쉽고, 우리학교에서 랜덤으로 조사했으면 조사 결과가 실제 저희 학교 학생들의 비율과 비슷하다고 결론을 내려도 될 것 같아요.

I : 조사가 한 표본에 대해서만 이루어졌기 때문에 신뢰성이 떨어진다는 응답을 했는데 어떻게 생각하나요?

A : 조사 결과를 모으면 정규분포가 된다는 것을 확인했으니까 (저의 조사 결과를) 믿을 수 있을 것 같아요.

학생 A의 IMA 모델링 과정을 정리하면 <표 Ⅳ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 학생 A의 IMA 모델링

활동 내용	세부 내용
① 연구 주제 및 모집단 선택	- 아침밥을 먹는 것은 학업에 도움을 준다라는 가설을 설정 - 학교 전체 학생을 모집단으로 설정
② 표본에 대한 자료 수집	- 모집단 전체에게 설문을 안내한 뒤 온라인 설문 접속자 100명에 대한 응답을 수집
③ 응답 결과 분석	- 원그래프를 이용하여 아침밥 여부, 학습에 미치는 영향에 대한 결과를 각각 분석
④ 결론 도출	- 아침밥을 먹는 것이 학업에 도움이 된다고 응답한 학생이 50%이므로 아침밥을 먹는 것은 학업에 도움이 된다는 결론 도출
❺ 표본에서 얻은 결과를 바탕으로 모집단 모델링	- 가설 확인을 위한 확률변수를 설정 후 모집단 구성
❻ 서로 다른 크기의 표본을 추출하고 표본 추출 결과 탐색하기	- 모집단에 대해 결론을 도출할 수 있는 최소 표본의 크기 결정 - 표집 변이성 인식
❼ 특정 크기의 표본의 반복된 표집을 통해 표집분포 탐색하기	- 표집분포 인식 - 표집분포의 결과 예상해보고 표집분포와 비교
❽ 서로 다른 크기의 표본의 반복된 표집을 통해 표집분포를 탐색하고 비교하기	- 표본의 크기와 표본분포의 분산(표집 변이성)간의 관계에 대해 인식하여 표본의 크기가 클수록 표집분포의 분산이 작아짐을 표현
❾ 실제 표본으로부터 구한 신뢰구간과 모델의 표본으로부터 구한 신뢰구간 비교	- 각각의 신뢰구간을 계산하는 데 그침

1.2. 학생 B의 IMA 모델링

학생 B는 ‘내 짝꿍은 항상 시험을 망쳤대’라는 주제로 통계적 탐구 활동을 진행했다. 학생 B는 연구 주제 및 문제 현상에 대한 설명 시 핵심어에 대해 양적인 특징을 나타내기 보다는 ‘대부분...’, ‘제 주변 친구들은요’를 사용하여 표현하였다. 예를 들어 상위권 학생들은 ‘대부분’ 시험결과와 상관없이 자신을 과소평가 하는 경향이 있다는 생각이 가설 설정에 영향을 미쳤다. 또한 모든 학생은 비슷한 환경에서 자라기 때문에 주변 학생들을 표본으로 선정하여 조사하여도 모집단의 응답과 비슷한 결과가 나올 것이라고 주장했다. 표본의 크기와 관련해서 모집단의 10%가 적당할 것이라고 응답했으나 결과 분석에 쉬운 크기가 되도록 표본의 크기를 임의로 변경하였다.

B : 원래 모집단의 10% 정도만 조사하면 표본으로서 충분하지 않나요? 모집단이 100명이면 10명, 10,000명이면 1,000명을 조사하면 될 것 같아서 저도 10%를 조사했어요.

I : 모집단이 약 400명인데 40명이 아니라 50명을 조사한 이유가 있나요?

B : 우선 40명 정도 조사하면 되겠다라고 생각했는데 40명보다는 50명이 결과 분석할 때 표본비율을 구하기 쉬워서 50명으로 정하게 되었습니다.

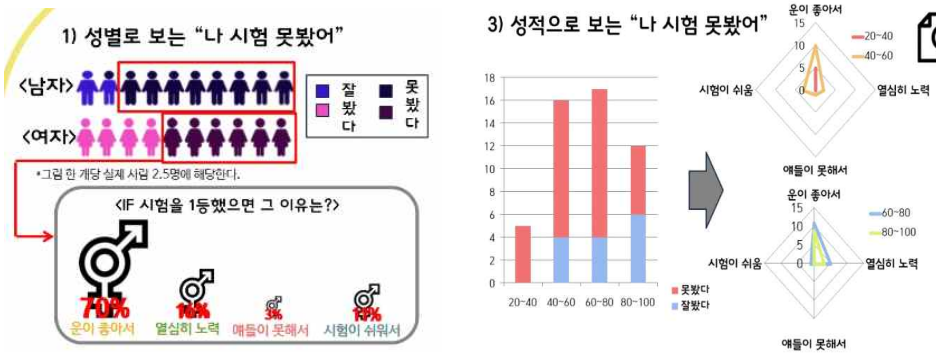
표본 추출방법에 대해 묻는 질문에 대해서는 이론적으로는 임의추출을 시행해야 한다는 응답을 했지만 실제 탐구에서는 성적과 성별이 골고루 분포되도록 표본을 선정하였다.

B : 표본은 말 그대로 정의는 모집단에서 임의 추출한 일부 집단이기 때문에 표본을 자의적으로 뽑는 순간 표본조사로서의 의미는 사라져요. 하지만 표본은 모집단의 특징을 가지고 있어야겠죠? 아무래도 그래야 모집단의 특징을 반영할 수 있는 표본을 선정할 수 있고 표본 조사에 의미를 부여할 수 있으니까요. (중략) 여학생과 남학생이 골고루 들어가도록 표본을 선정했습니다. 그래야 의미가 있을 것 같아서요. 또 성적분포도 최대한

고르게 포함되도록 표본을 선정했습니다.

학생은 모집단을 성별, 성적별로 층으로 나눈 다음 각 층에서 표본을 임의 추출하는 층화랜덤표집법[9]을 따랐다. 여학생과 남학생, 상위권과 하위권 학생을 나누고 각 그룹에서 일정한 크기의 표본을 뽑아 성적에 대한 인식을 조사했기 때문이다. 층별로 배정된 인원에 대해 모집단에서 무작위 추출을 통해 표본을 선정하였다.

학생은 조사결과를 그래프로 나타내고 해석하여 결과를 도출하였다. 학생은 자신의 조사 결과에 높은 신뢰도를 부여했으며 자신들의 조사 결과가 모집단의 결과와 일치할 것이라는 강한 자신감을 내비쳤다.



[그림 Ⅳ-5] 학생 B의 자료 세계 조사 결과

B : 저는 상위권을 60점 이상, 하위권을 60점 미만의 학생이라고 생각해요. 그런데 상위권 학생 29명 중에 19명이 자신이 시험을 못 봤다고 평가했으니까 제가 예상한 결과가 맞네요.

I : 이 결과를 얼마나 신뢰하나요?

B : 제가 직접 구한 결과이니까 거의 신뢰할 수 있다고 봐요. 만약 모집단에

9) 층화랜덤표집법(stratified random sampling)이란 모집단이 상호배반적인 층으로 구성되어 있을 때 표본이 각 계층을 고르게 대표할 수 있도록 각 층에서 정해진 크기의 단위를 단순랜덤표집하여 조사하는 방법이다(김응환, 이석훈, 2015).

대해 예상하라고 하면 저는 비례식을 세워서 구할 수 있다고 생각해요. 지금은 50명에 관한 결과지만 1,000명 중에서 스스로를 과소평가하는 사람의 수에 대해 예상하라고 하면 1000*0.38을 하면 되겠죠?

학생은 모집단에 대한 정보를 얻기 위해 자신이 표본에서 구한 통계치를 활용하는 모습을 보였으며, 모집단에 대해 자신이 조사한 표본이 모집단의 준비례적인 축소 버전임을 인식하고 있었다. 학생의 신뢰구간에 대한 인식을 살펴보기 위해 조사한 표본 비율을 통해 신뢰구간을 구하고 그 의미를 설명해 줄 것을 요구했다. 학생은 표본비율과 표본의 크기를 이용하여 신뢰도 95%의 신뢰구간을 정확하게 구하였으나 "표본비율을 통해 구한 신뢰구간은 실제 표본으로부터 구한 구간이므로 믿을 수 있는 정보이며, 신뢰도 95%로 구한 신뢰구간은 그 구간 안에 모비율이 포함될 확률 95%임을 나타낸다"고 신뢰구간을 설명하였다.

I : 표본 조사 결과를 바탕으로 모비율을 추정해볼 수 있나요?

B : 95% 신뢰구간으로 추정하면 될까요? $\hat{p}=0.38$, $n=50$인데 계산기를 사용해도 되죠? 계산하면 $0.3467 \le p \le 0.4133$가 나오네요. (중략) 95%의 신뢰도이면 모비율이 있을 확률? 표본 비율을 통하여 신뢰구간 사이에 모비율이 존재할 것이라고 추정한 것이에요. 이 95%라는 범위 안에 모비율이 존재한다는 거예요.

표본의 크기의 영향과 표집분포에 대한 이해를 조사하기 위해 추가 인터뷰를 진행하였다. 그 결과 표본의 크기가 클수록 표본이 모비율을 따를 확률이 크다는 인식을 확인할 수 있었으나 표본의 크기가 표본 비율 분포의 분산에 주는 영향에 대한 인식은 확인할 수 없었다. 또한 학생은 표집분포와 표본분포의 개념을 구분하지 못하고 표집분포의 형태를 표본분포와 혼동하여 자신의 조사 결과와 같을 것이라고 응답하였다.

I : 우리나라 전체 학생들 중에서 여학생과 남학생의 수는 거의 반반이라고 합시다. A학교 학생 중에 무작위로 50명을, B학교에서 무작위로 10명을

선택하여 두 학교의 표본으로 정하였다. 이들 중 하나의 표본에서 80% 이상이 남학생이 될 확률은 어느 학교가 더 높은지 생각해보고 이유와 함께 말해주세요.

B : A는 크기가 충분히 크기 때문에 표본 비율이 $\frac{1}{2}$에 가까울 확률이 커요. 하지만 B는 크기가 작기 때문에 (표본 비율이) 모비율인 $\frac{1}{2}$를 따르지 않을 확률이 커요. 모비율의 분포는 수가 적더라도 평균은 $\frac{1}{2}$를 따를 것이고, 정규분포를 따를 가능성이 큽니다. 즉, A학교와 B학교가 모두 정규분포를 따를 가능성이 있기 때문에 (두 학교 중) 80%가 남학생이 될 확률은 비슷하다고 생각합니다.

I : 표본을 100번 더 추출하여서 각 표본에서 '자신을 과소평가 하는 사람의 비율'을 조사했을 때, 그 표본 비율의 분포는 어떻게 예상하나요?

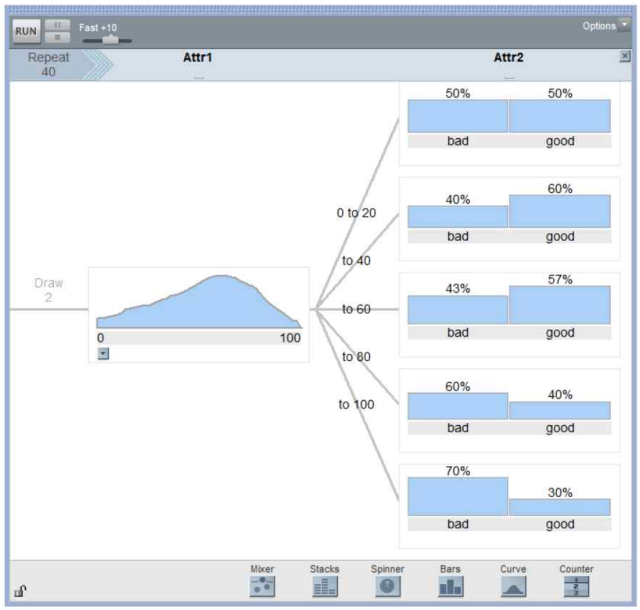
B : 제가 조사한 것과 비슷하게 나올 것 같아요.

학생의 탐색적 자료 분석 결과에 대한 인터뷰 이후 모집단 모델링을 통한 확률적 접근을 시도하였다. 공학적 도구를 활용하여 모집단으로부터 표본추출을 하기 위해 가상의 모집단을 구성하는 과정은 아래 대화와 같았으며, [그림 Ⅳ-6]은 표본 조사 결과를 바탕으로 구성한 가상의 모집단이다.

B : 우리가 0점~20점을 조사 안했으니까 0점부터 20점까지에 대해서는 예측할 필요가 없을 것 같아요.

I : 실제 학생들 중에서는 0점을 맞는 학생이 있는데도?

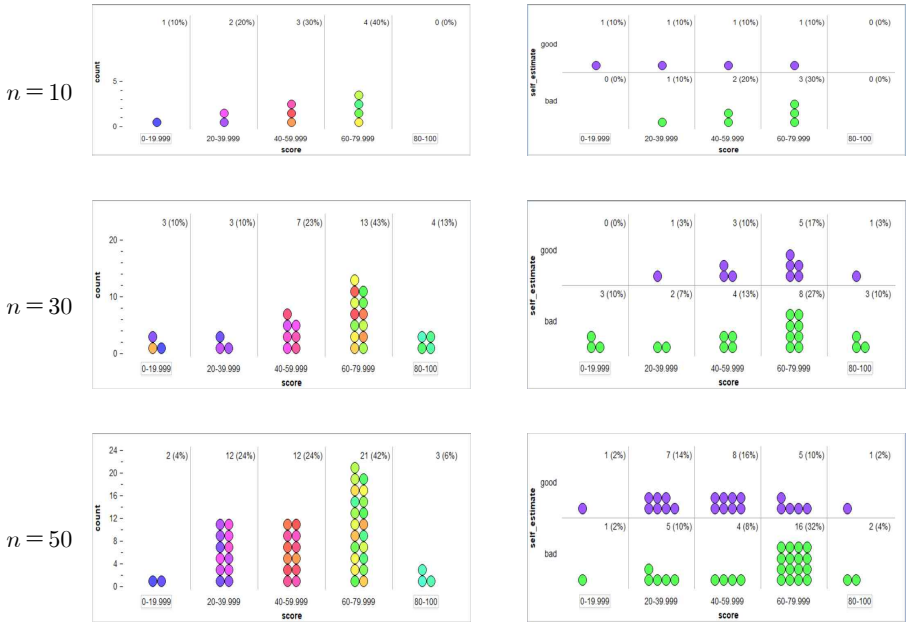
B : 아 그러네요. 0점~20점대 아이들은 수학을 못한다는 생각에 무조건 못한다고 응답하거나, 찍어서 맞은 문제가 있다면 의외로 잘 봤다고 생각할 수 있을 것 같아요. (중략) 다른 점수분포는 모집단도 제 조사 결과와 마찬가지의 결과가 나올 것 같아요.



[그림 Ⅳ-6] 학생 B의 모델 세계 모집단

학생은 표본에서 얻은 결과를 바탕으로 모집단 모델을 구성하였고, 모집단에 대한 분포를 표현할 때 연속확률분포 그래프를 사용하였다. 이때 모집단 모델에서 표본 추출을 했을 때 (39.9517, good), (65.3518, bad)의 결과를 얻을 수 있도록 성적과 인식을 차례로 설정하여 모집단을 구성하였다.

학생은 모집단에서 서로 다른 크기의 표본을 추출하며 모집단-표본 비교, 표본-표본 비교를 통해 모집단에 대한 결론을 도출할 수 있는 최소 표본의 크기를 결정하였다. 학생은 표본의 크기를 10, 30, 50으로 늘려갈 때 더 자주 자신이 원하는 결과가 나온다는 것을 관찰하였다. 또한 표본 추출시마다 다른 결과가 나오지만 표본 추출 결과가 모집단의 분포에서 크게 벗어나지 않음을 관찰했다.

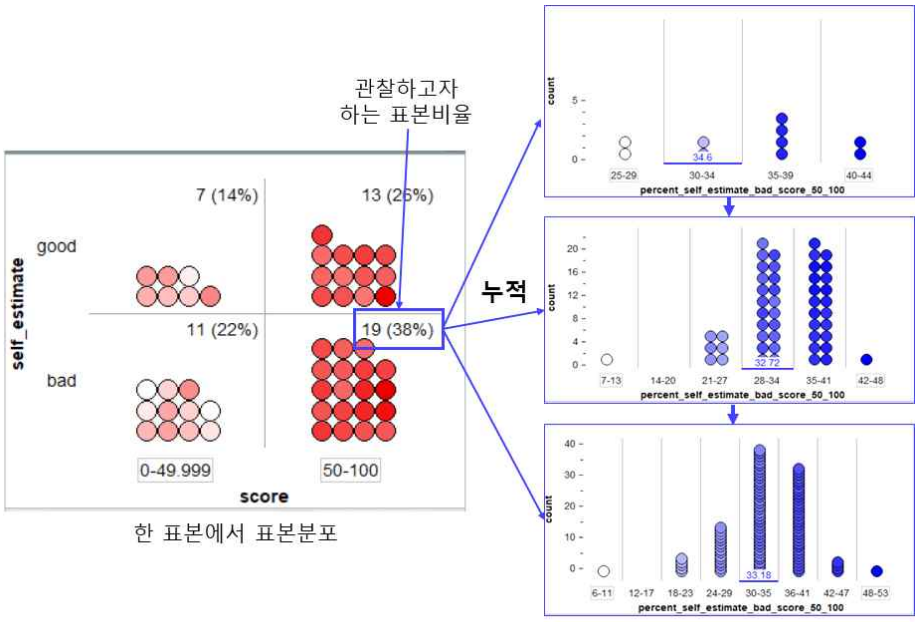


성적분포 성적에 따른 자기 평가

[그림 Ⅳ-7] 표본의 크기에 따른 표본분포

B : 우선 여기서는 모집단에 대해 잘 모르니까 10명부터 (표본추출을) 해볼게요. 시험을 잘 봤는데 못 봤다고 평가하는 사람의 비율이 제가 직접 조사한 결과인 0.38%랑 비슷하게 나오는 표본의 크기를 찾을 거에요. (중략) 30명 정도만 해도 제가 원하는 비율이 꾸준히 나오네요. 30명 정도 하면 정확하네요. 50명 정도 하면 더 정확하고요. 10명보다는 나은 것 같아요. 30명만 조사해도 관찰하려고 하는 비율이 0.4가 나오는데 이건 0.38이랑 비슷해요. 그리고 또 했더니 0.38이 나왔기 때문에 30명 정도만 조사해도 될 것 같아요.

학생은 표본 추출 결과에 대한 관찰을 통해 표본의 크기가 30 정도만 되어도 모집단과 비슷한 분포의 결과를 얻을 수 있다는 결론을 내렸다. 이를 통해 표본의 크기가 표본 대표성과 표집 변이성에 미치는 영향에 대해 인식하면서 시뮬레이션 없이도 서로 다른 크기의 표본에 대한 표집 분포를 설명하였다.



[그림 Ⅳ-8] 모델 세계에서의 표집분포 형성 과정

I : 표본비율의 결과를 누적해가면 어떻게 될까?

B : 제가 주제 탐구를 50명으로 했는데 50명으로 계속 추출해도 될까요? (중략) 이걸 100번 정도 추출해서 누적해볼게요 그래야 어느 정도 분포를 이루고 있으니까요. 오 예상한대로 정규분포가 나오네요. 역시 확률적으로 모비율과 가까운 값이 가장 많이 나올 것이라고 생각했어요. 이게 우리가 배운 $\hat{p}$이 정규분포를 따른다는 거네요. (중략) 표본추출을 50번했을 때 평균은 32.72(%)이고 100번 했을 때 평균은 33.18(%)이므로 모비율은 33.18%에 더 가깝다고 할 수 있겠네요. 정확히 나타내면 0.3318요. 처음 모집단의 분포에서 모비율을 정확하게 계산할 수 없어서 모비율을 가정이지만 0.33라고 하면 이 정규분포는 $\mathrm{N}(0.33, 0.0044)$를 따른다고 할 수 있어요.

I : 표본의 크기가 달라지면 분포에도 변화가 있을까요?

B : $\mathrm{N}\left(p, \frac{pq}{n}\right)$에서 n이 달라지는 거니까 $\hat{p}$의 분포가 달라지는 거겠죠. 크기가 크면 분산이 작아지는 분포요.

학생은 실제 표본에서 구한 신뢰구간과 모델의 표본으로부터 구한 신뢰구간을 비교하며 신뢰구간에 대한 탐색을 통해 실제 표본으로부터 구한 신뢰구간이 모평균이 포함될 확률을 나타낸다는 인식에서 수많은 신뢰구간 중 하나의 구간이라는 인식으로 변화했다.

B : 신뢰구간은 구간을 계속 구해갔을 때 모비율이 있을 확률을 나타내는데 95% 신뢰구간을 구하면 그 중에 모비율이 있을 확률이 95%...

I : 구간을 계속 구해간다는 건 무슨 말인가요?

B : 추출할 10번 해보고 그 결과를 모았는데 그 결과가 정규분포를 띄는걸 기대하는 것이 잖아요. 그 결과를 가지고 신뢰구간을 구하는건데 그 중 95%가 모비율이 있는거고, 우리가 구한 건 그중 하나의 구간이에요. (중략) 개념을 아는 것과 문제만 푸는 것이 너무 다르네요. 신뢰구간이 이런 의미인지 몰랐어요.

I : 지금까지 탐구한 내용을 바탕으로 조사 결과를 다시 해석할 수 있을까요?

B : 우선 제가 50명을 조사하면서 성적이랑 성별로 나눠서 조사했는데 또 다르게 조사하면 10점대도 포함될 것 같고, 그래도 시뮬레이션했을 때 비슷한 결과가 나와서 잘 조사한 것 같습니다. 정규분포로 나타내는 거랑 신뢰구간 구하는 것이 원래 쉬웠는데 의미를 알고 나니까 더 어렵게 느껴지는 것 같습니다.

학생 B의 IMA 모델링 과정을 요약하면 <표 Ⅳ-2>와 같다.

<표 Ⅳ-2> 학생 B의 IMA 모델링

활동 내용	세부 내용
① 연구 주제 및 모집단 선택	- 성적과 자기 평가(과대 또는 과소평가)와 관련된 가설을 설정 - 3학년 학생을 모집단으로 선정
② 표본에 대한 자료 수집	- 표본의 크기를 50으로 하고 표본에 대한 자료 수집 - 모집단의 특징을 잘 추측하기 위해 상위권과 하위권이 골고루 선택되도록 표본을 선정
③ 응답 결과 분석	- 그래프를 활용하여 조사 결과를 표현
④ 결론 도출	- 성적과 자기 평가에 대한 타당한 결과를 이끌어냈으나 모집단에 대해서는 바르게 추정하지 못함 - 가설과 다른 결과를 근거로 표본 조사의 한계점을 설명
❺ 표본에서 얻은 결과를 바탕으로 모집단 모델링	- 표본은 모집단을 대표하는 집단으로 표본에서 결과를 바탕으로 모집단 추측 가능
❻ 서로 다른 크기의 표본을 추출하고 표본 추출 결과 탐색하기	-모델의 표본과 실제 표본 비교하여 표집 변이성 인식 -모집단에 대해 결론을 도출할 수 있는 최소 표본의 크기 결정
❼ 특정 크기의 표본의 반복된 표집을 통해 표집분포 탐색하기	-표집분포의 결과 예상해보고 표집분포와 비교
❽ 서로 다른 크기의 표본의 반복된 표집을 통해 표집분포를 탐색하고 비교하기	-표본의 크기와 표본분포의 분산 간의 관계에 대해 인식하여 표본의 크기가 클수록 표집분포의 분산이 작아짐을 표현 -표집분포의 평균이 모평균과 같음을 확률을 활용하여 표현
❾ 실제 표본으로부터 구한 신뢰구간과 모델의 표본으로부터 구한 신뢰구간 비교	-표집분포에 대한 개념을 바탕으로 신뢰구간에 대해 재해석 -신뢰구간이 모평균이 포함될 확률을 나타낸다는 인식에서 수많은 신뢰구간 중 하나의 구간이라는 인식으로 변화

1.3. 학생 C의 IMA 모델링

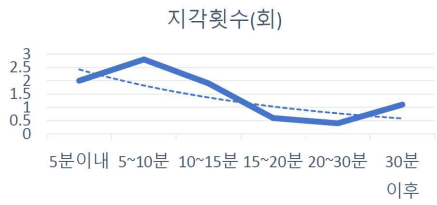
학생 C는 통학 거리가 먼 학생들보다 가까운 학생들이 지각을 많이 하는 것을 일반화시켜 등교시간이 짧을수록 지각 횟수가 많을 것이라는 가설을 세우고 '학생들의 등교시간에 따른 지각 횟수의 상관관계'를 주제로 탐구를 하였다.

C : 모집단은 우리학교 학생들이고 표본은 100명을 정해서 조사했어요. 배운 내용 중에 충분히 큰 표본이면 된다고 했고 우선 수가 많아야 조사결과가 잘 나올 것 같아서요. (중략) 연구 가설은 저희 반만 봐도 5명 정도가 아슬아슬하게 등교시간에 맞춰서 지각을 하는데 그 친구들이 대부분 학교에서 아주 가까이 사는 아이들이에요. 또 우리 학교전체를 봐도 지각하는 사람 대부분이 가까이 살아서 연구 가설을 설정하게 됐어요. (중략) 표본 조사는 우선 설문에 대해 홍보한 다음에 돌아다니면서 희망하는 학생들 위주로 100명에게 설문지를 받았습니다.

I : 그 표본 추출방법에 대해서 어떻게 생각하나요?

C : 완전히 임의 추출을 하는 게 제일 좋은데 우선 선착순으로 설문에 대한 답을 받는 것도 정해진 100명이 아니기 때문에 괜찮은 방법인 것 같아요.

학생은 모집단에서 표본이 어느 정도의 비율을 차지하는지가 아니라 표본 자체의 크기에 주목하였다. 또한 표본의 크기가 클수록 조사결과에 대한 신뢰도가 높아진다고 인식하고 있다. 조사에 사용된 표집 방법에 대해 묻는 질문에서 학생은 '참여를 희망하는 학생들을 선착순으로 100명 조사했으며 이 경우 편의가 발생할 수 있음'을 인식하지 못하였고, 표집방법보다는 표본의 크기에 더 주목하였다.



(중략) 우리가 최종적으로 알아보려던 지각횟수는 가까이 살수록 지각을 많이 한다는 결과가 나왔다. 등교시간이 오래 걸릴수록 지각횟수가 적어지기 때문이다. 하지만 등교 소요 시간이 30분 이상 걸리는 학생들은 오히려 지각을 많이 한다. 이것은 우리의 예상과는 조금 다른데 (중략) 버스, 지하철을 타게 되는 경우 예상치 못한 변수가 생겨 지각을 하는 경우가 생기는 것 같다.

[그림 Ⅳ-9] 학생 C의 자료 세계 탐구 결과

I : 표본을 대상으로 조사한 결과인데 이 결과를 모집단에 적용할 수 있다는 결론을 내렸네요. 이 발언 자체를 어느 정도 신뢰할 수 있나요?

C : 전체적인 조사 결과만 보면 제 가설과 딱 일치하는 그래프가 될 확률은 70~80%정도일 것 같고 처음 세운 가설처럼 (등교시간과 지각횟수가) 반비례가 될 확률은 100% 신뢰할 수 있을 것 같아요.

학생은 자신의 조사 결과가 처음 세운 가설과 70~80% 일치하기 때문에 표본 조사 결과를 70~80% 신뢰할 수 있다고 평가했다. 연구 가설과 표본결과에 대한 일치도를 바탕으로 표본-모집단에 대한 신뢰도를 결정하고 있었다. 한편 표본 조사 결과를 바탕으로 모집단의 분포에 대해 추정한 결과, ‘표본의 크기와 신뢰구간의 길이 사이의 관계’와 ‘신뢰구간 추정 시 표본의 표준편차를 사용해도 된다’는 사전지식이 학생의 추론에 어떻게 영향을 미치는지 확인하였다.

C : 저희가 100명의 응답을 정리한 표가 있는데 그 표를 참고하면 하나의 표본 평균에 대한 모평균은 추정할 수 있겠죠. 그런데 저희 연구가 등교시간에 따른 지각 횟수고, 등교시간 구간마다 인원이 달라서 각 구간마다 모평균을 추정하는 건 어려울 것 같아요. 예를 들면 전체 (표본의) 크기는 100이어도 5분 이내에 오는 사람들은 표본의 크기가 10인건데 그럼 5분 이내 오는 사람들의 지각 평균을 통해서 추정을 하려면 $n=10$을 사용해야하니까요. 이거 따로따로 구할 수도 있는데 그럼 여기서 사용되는 표준편차도 표본마다 다르고 표본의 크기도 충분히 신뢰할만한

크기가 안돼서 어려울 것 같아요. 처음부터 좀 더 제대로 구하려면 5분 단위로 100명씩 한다던가, 그게 불가능하면 30명정도씩 해야 될 것 같아요. (중략) 그런데 100명을 실제로 조사해도 지각 횟수에 대한 분포는 각각 다르게 나타날 건데 그 인원을 맞춰서 표본 조사를 한다는 것도 이상하네요. 분포 자체를 어떻게 모집단에 대해 추정하면 좋을지는 더 생각해봐야 될 것 같아요.

I : 그럼 표본 전체의 지각 횟수 평균을 이용하여 신뢰구간을 구했을 때 신뢰구간의 의미는 무엇일까요? 예를 들면 '평균 지각 횟수를 이용하여 전교생의 평균 지각 횟수 m에 대한 신뢰도 95%인 신뢰구간을 구하면 $1.5 \le m \le 2.5$이다.' 의 의미에 대해 설명할 수 있나요?

C : 이 표본을 이용해서 m이 표본 평균으로 추정한 구간 내에 존재할 확률을 95%로 추정했을 때 m의 범위가 $1.5 \le m \le 2.5$이라는 의미이고, 다른 표본을 이용하여 추정하였다면 신뢰구간이 바뀔 수도 있다는 의미에요.

I : 좀 더 자세히 설명해줄 수 있나요?

C : 그러니까 표본 평균은 바뀔 수 있으니까 신뢰구간도 바뀔 수 있는 건데 95%의 확률로 모평균을 포함한다는 거죠. $\mathrm{P}(|Z| \le 1.96) = 0.95$인 데 표준화를 거꾸로 해서 m의 범위를 추정하고 우리가 구한 표본 평균을 대입한 값이 $1.5 \le m \le 2.5$이 되는 거라고 이해하고 있어요.

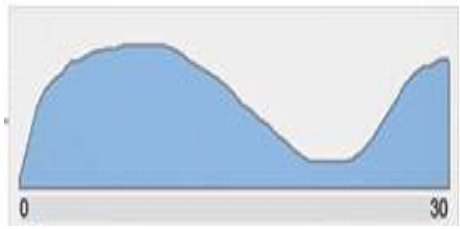
학생은 표본의 크기와 표준편차가 추정에 미치는 영향에 대해 이해하고 있었으며 확률적 아이디어를 바탕으로 신뢰도 95%의 신뢰구간의 의미에 대해 설명하였다. 또한 표집 과정의 반복과 표집 변이성에 대한 이해를 바탕으로 신뢰구간을 반복해서 구한 결과의 95%가 모평균을 포함하고 있다는 것을 확률과 연결하여 표현하였다. 또한 반복된 표집을 통한 표집분포에 대해 중심, 모양, 퍼짐에 대한 개념을 결합하여 종합적으로 이해하고 있었다.

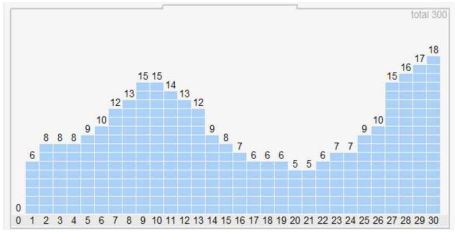
I : 표본을 100번 더 추출하여서 각 표본에서 '평균 지각 횟수'를 조사했을 때, 알 수 있는 정보가 무엇이 있나요?

C : 우선 표본에서 평균 지각 횟수를 구하는 것은 모집단에서 임의 추출한 크기가 n인 표본집단에서 구한 하나의 평균으로 개별적 데이터를 알 수

있는 것이고, 표본 추출을 100번 더 해서 조사하는 것은 모집단에서 임의추출한 크기가 n인 표본 집단 여러 개를 통해 얻는 정보이므로 집합적 데이터를 알 수 있는데 대표적으로 표본 평균 분포나 표본평균의 평균을 알 수 있습니다.

자료 세계에 대한 인터뷰를 마친 후 모델 세계에서의 확률적 탐구를 위해 학생에게 가상의 모집단에 대해 모델링 할 것을 요구했으며 학생의 탐구결과와 모집단 모형은 다음과 같다.





[그림 Ⅳ-10] 등교시간에 대한 초기 모델(curve모델)과 수정 모델(stack모델)

학생은 등교시간에 대한 분포를 처음에는 연속분포로 나타냈으나 실제 조사 자료와 비교하기 위해 모집단을 300명으로 제한하고 이산분포로 나타내었다. 모집단에 대한 평균과 분산을 구한 뒤 이를 모집단에 대한 정보로 인식하였다. 이때 학생이 구한 평균과 표준편차는 16.237, 9.099이다. 학생은 표본 추출을 반복하며 표본의 크기와 관련된 자신의 지식을 확인해갔다. ‘표본의 크기 n이 충분히 크다는 것은 일반적으로 $n \geq 30$일 때를 뜻한다(황선욱 외, 2014)’는 교과서의 서술과 표집 결과를 연결 지어 표본대표성에 대한 사고를 드러내었고, 표본의 크기와 표집분포에서의 분산을 연결 지어 자신이 관찰한 내용을 표현하였다. 또한 샘플러의 표본 추출을 과정과 결과를 관찰한 뒤 자신의 지식을 수정하였다.

C : 제가 생각했던 선착순 조사랑 임의추출이 조금 다른 게 표본 조사 대상을 먼저 임의로 정해놓고 조사를 진행하면 임의 추출이 되는거라, 제가 했던 방법과 다른 것 같아요. 이렇게 조사를 해야 더 잘 (모집단의 특성

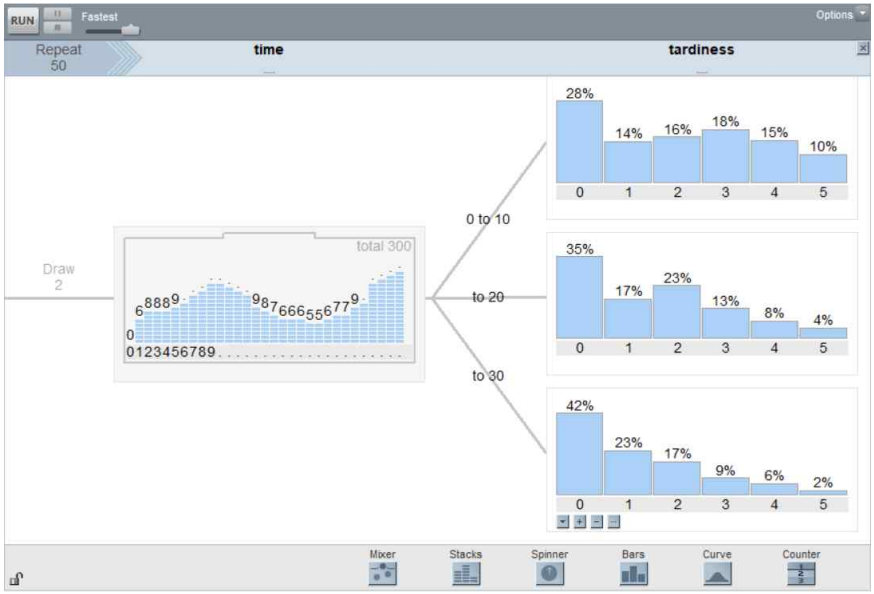
을) 반영하고 정확해질 것 같아요. 선착순도 뭔가 의도하는 대로 가게 되고요.

표본의 크기와 분포이미지에 대한 이해를 관찰하기 위해 표본 추출에 대해 안내한 뒤 학생의 탐구 과정을 관찰했다. 학생 C는 표본의 크기가 30이라면 300^{30}개의 표본이 생겨야 함을 언급했으며 표집분포가 정규분포를 이루고 있음을 언급했다. 이를 통해 표본의 크기가 표본 대표성에 미치는 영향뿐만 아니라 표본 변이성에 대한 개념을 형성하였음을 확인하였다.

C : curve를 사용하면 분포는 나타낼 수 있는데 모집단 수를 모르니까 stacks으로 쌓아도 될 것 같아요. stacks으로 나타내면 평균, 분산을 알 수 있으니까 이걸로 할게요. 구체적인 수치를 알아야 평균을 구해서 비교할 수 있을 것 같아요. (중략) 표본 평균의 분산이 작아지는데 그 작아지는 비율이 크기에 반비례 하잖아요. 크기가 커지면 분산이 작아지죠.

C : 표본의 크기가 30개이면 ${}_{300}\Pi_{30}$개만큼 표본추출이 가능한데 그걸 다 구해서 누적하려면 너무 힘들 것 같은데요. 그래도 배운대로라면 표본 평균으로 하면 무조건 정규분포가 돼서 $\mathrm{N}\left(m, \frac{\sigma^2}{n}\right)$인데, 우선 표본의 크기가 크면 더 빨리 정규분포가 되는 것 같아요.

[그림 Ⅳ-11]과 같이 등교시간에 따른 지각 횟수를 모델로 표현했고 표본 추출을 하며 지각 횟수의 분포를 관찰하였다. [그림 Ⅳ-12]와 같이 크기가 50인 표본을 추출할 때 표본분포의 변화를 확인하였다.



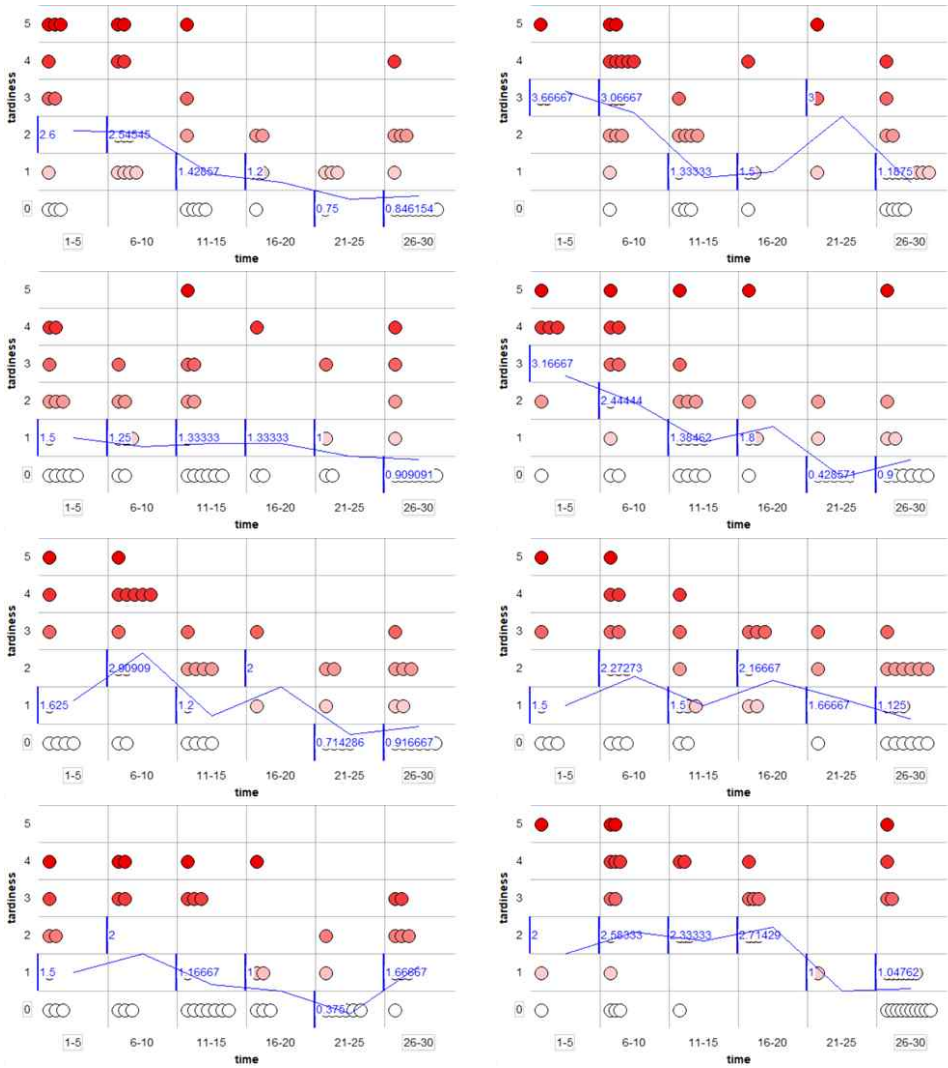
[그림 Ⅳ-11] 학생 C의 모델 세계 모집단 분포

전체 표본에 대한 평균 지각 횟수는 표본의 크기가 정해지면 구할 수 있지만 등교시간도 하나의 변량이므로 등교시간에 따른 표본의 크기가 달라져 등교시간에 따른 추정이 불가하다고 판단한 학생은 추정에 대한 아이디어를 내기 위해 다방면으로 배운 내용을 활용하려고 했다. 모집단의 크기와 분포에 대해 구체적으로 알기 때문에 비례식을 세워서 변량에 따른 표본의 크기에 대해 구한 뒤 추정할 것과 점추정에 대한 아이디어를 제시했다. 이를 통해 학생이 표본은 모집단에 대해 준비례적인 부분집합이라 인식하고 있다는 것과 신뢰구간에 대한 이해를 바탕으로 추정에 대한 새로운 아이디어를 제시하고 있음을 알 수 있다.

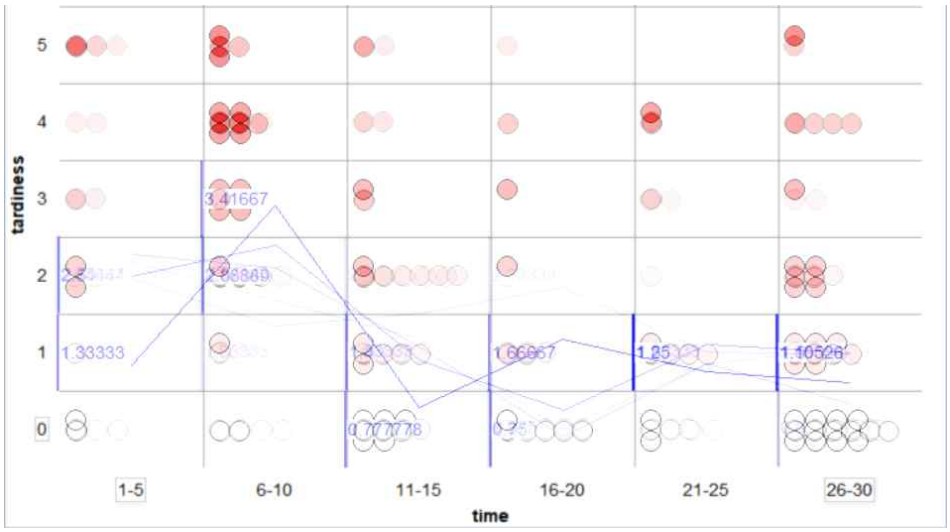
C : 처음에도 말한 건데 이게 전체의 평균을 보려고 하는 게 아니니까 각각의 평균을 비교하던지 전체적인 그래프 모양을 비교해야 될 것 같은데 우선 조사한 것처럼 5분 단위로 끊고 평균을 볼게요. 전체는 50이어도 5분 이내에 오는 사람이 5명밖에 안되니까 각각 신뢰구간을 구하기 어려울 것 같아요. 전체적인 분포를 누적한 다음에 비교하면 좋을 것 같은데 분포를 다 구한다음에 합성해볼까요? (중략) 분포가 거의 비슷한데 예상

과 다른 것도 있어서. 신뢰구간을 구하는 방법에 대해서는 더 생각해봐야 될 것 같아요. 아니면 표본의 크기가 50이니까 전체 크기에서 비례식을 세워서 각각의 표본의 크기를 구한다음에 그 크기로 추정할 수도 있을 것 같아요. 선생님 그런데 신뢰구간으로 추정하는 거 말고 바로 추정하는 방법은 없을까요? 구간 말고 값을 값으로요.

표본 추출 결과를 비교할 수 있는 새로운 모델을 [그림 Ⅳ-13]와 같이 제시하였으며 표집 변이성에도 불구하고 크기가 충분히 큰 표본을 임의 추출 했을 때 신뢰할 수 있는 결과가 나온다는 결론을 내렸다.



[그림 Ⅳ-12] 표본의 크기가 50일 때 등교시간에 따른 지각 횟수의 분포



[그림 Ⅳ-13] 분포의 누적 결과

I : 지금까지 탐구한 내용을 바탕으로 조사 결과를 다시 해석할 수 있을까요?

C : 실제 조사결과와 모집단에서 시뮬레이션 한 결과를 비교해볼 수 있고 제가 정규분포 표현이나 신뢰구간 유도 과정을 알고 있었는데 그걸 확인할 수 있어서 좋았습니다. 등교시간과 지각의 상관관계를 나타낸 그래프를 반복해서 구한 것이 제가 조사한 거랑 크게 차이가 없고, 또 신뢰구간을 구한다는 것도 그런 의미이기 때문에 이 활동을 통해 표본 조사 결과가 얼마나 타당한지에 대해 고민해볼 수 있었습니다. 상관관계 그래프를 자체를 모집단으로 추정하는 방법을 알지 못해서 아쉬웠습니다.

학생 C의 IMA 모델링 과정을 정리하면 <표 Ⅳ-3>과 같다.

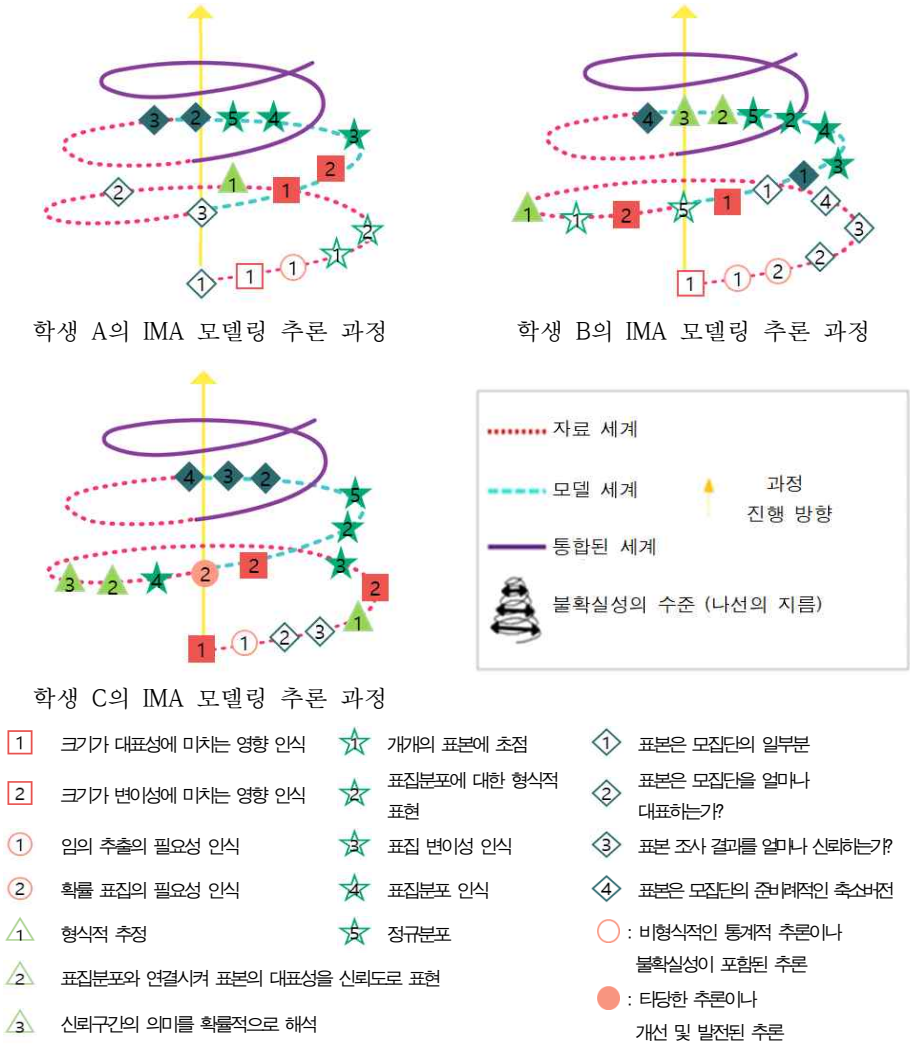
<표 Ⅳ-3> 학생 C의 IMA 모델링

활동 내용	통계적 아이디어와 개념
① 연구 주제 및 모집단 선택	- 학교에 가까이 사는 학생들이 지각을 많이 할까? 라는 주제로 학교 전체 학생을 모집단으로 설정
② 표본에 대한 자료 수집	- 100명을 표본으로 하여 기상시간, 출발시간, 도착시간, 지각횟수를 조사
③ 응답 결과 분석	- 등교시간에 따른 평균 지각횟수를 꺽은선그래프로 표현
④ 결론 도출	- 표본 조사 결과를 바탕으로 모집단에 대한 결론 도출
❺ 표본에서 얻은 결과를 바탕으로 모집단 모델링	- 자료 세계의 개별적 데이터 분석을 모델 세계의 모델링 탐색을 통해 집합적 데이터로 확장시켜 관찰할 수 있음을 인식
❻ 서로 다른 크기의 표본을 추출하고 표본 추출 결과 탐색하기	- 모집단에 대해 결론을 도출할 수 있는 최소 표본의 크기 결정 - 수식으로 표현 - 표집 변이성 인식
❼ 특정 크기의 표본의 반복된 표집을 통해 표집분포 탐색하기	- 표집분포의 결과 예상해보고 수식과 연결 지어 표현 - 수학적으로 표현
❽ 서로 다른 크기의 표본의 반복된 표집을 통해 표집분포를 탐색하고 비교하기	- 표본의 크기에 따른 확률을 수식을 활용하여 계산한 뒤 표본 변이성과 관련지어 인식 - 표본의 크기와 표본분포의 분산(표집 변이성)간의 관계에 대해 인식하여 표본의 크기가 클수록 표집분포의 분산이 작아짐을 표현
❾ 실제 표본으로부터 구한 신뢰구간과 모델의 표본으로부터 구한 신뢰구간 비교	- 신뢰구간을 표집 변이성 및 표집분포와 관련지어 설명 - 무작위 표본의 대표성을 얼마나 신뢰할 수 있는지에 대해 논의

2. IMA 모델링에서 학생들의 추론은 어떻게 변화하는가?

2.1. 시간에 따른 IMA 모델링

학생들의 IMA 모델링 추론 과정을 시간 순서에 따라 나타내면 [그림 Ⅳ-14]와 같다.



[그림 Ⅳ-14] 시간에 따른 IMA 모델링
(Braham & Ben-Zvi, 2017, p.121, Figure 2를 재구성)

IMA 모델링에서 학생들은 시간에 따라 유사한 양상을 보이거나 서로 다른 추론을 드러냈다. 먼저 공통점으로 학생들은 모두 모델 세계의 시뮬레이션 활동 이후 크기가 표본 대표성과 표집 변이성에 미치는 영향을 깨닫게 되었으며 표집분포를 인식하고 그것이 정규분포로 나타남을 알게 되었다. 또한 자료 세계 조사 결과에 대한 불확실성이 점차 감소하였으며 표본 조사 결과에 대한 신뢰도를 높일 수 있었다. 몇 가지 특징을 (1) 표집 방법 (2) 신뢰도와 신뢰구간 (3) 표집분포 (4) 표본-모집단의 관계의 네 가지로 분류하여 서술하면 다음과 같다.

첫째, 세 학생은 통계적 추정 단원에서 임의 추출의 필요성에 대해 학습하였지만, 각자 다른 방식으로 표본 자료를 수집하였다. 먼저 학생 B는 모집단과 유사한 특징을 지닌 표본을 조사하기 위해 층화추출을 시행하였으며, 학생 A와 학생 C는 임의 추출의 필요성을 언급했으나 선착순 조사를 통해 자료를 수집하였다. 이후, 학생들은 모델 세계에서 샘플러의 임의 추출이 자발적인 반응에 의해 발생하는 편향을 제거하며, 모집단을 대표하고 있음을 발견했다. 또한 표본 추출 결과를 자신의 조사 결과와 비교하여, 임의추출이나 층화추출과 같은 확률 표집의 필요성을 인식하였다.

둘째, 세 학생 모두 IMA 모델링 이전에 신뢰구간을 구하는 공식을 알고 있었으며 정확하게 계산할 수 있었다. 그러나 신뢰구간의 의미를 표집분포와 연결시켜 확률적으로 해석하는 추론은 각각 다르게 나타났다. 학생 C는 IMA 모델링 이전에도 신뢰도와 신뢰구간에 대한 정확한 추론이 가능했으며, 학생 B는 IMA 모델링 이후 형식적인 추정과 그 의미를 통합할 수 있었다. 한편 학생 A는 IMA 모델링 이후에도 신뢰도와 신뢰구간의 의미에 관해 추론 하지 못했다.

셋째, 학생 A와 학생 B는 표본평균의 분포와 표본비율의 분포에 대해 학습했으며 이 분포가 정규분포라는 점을 알고 수식으로 표현할 수 있었다. 그러나 반복된 표본 추출의 결과가 모집단의 결과와 비슷할 것이라고 응답한 것을 통해 표집분포의 의미를 표현과 관련지어 해석하지 못함을 알 수 있었다. 또한 모집단으로부터 표본 추출을 시행하기 전까지는

단일 표본에만 주목하였다. 이후 모집단으로부터 반복적인 표본을 생성하는 시뮬레이션 과정을 통해 표집분포를 인식하고 이것이 정규분포로 나타남을 확인하면서 표현과 의미를 통합하였다. 한편 학생 C는 IMA 모델링 이전에 표집분포와 관련된 추론이 가능했으며 모델 세계에서 표본추출 과정을 통해 자신의 형식적 추정 지식과 표집 결과를 비교하여 추론을 견고하게 발전시킬 수 있었다.

마지막으로 표본-모집단의 관계에 대하여 학생 A는 표본을 모집단의 부분집합으로 보았고, 학생 C는 표본을 모집단의 특성을 지닌 축소버전으로 보았으며, 학생 B는 두 가지 관점 모두를 가지고 있었다. 예를 들어, 학생 B는 표본이 정확하다면 표본의 크기를 모집단에 비례해서 크게 하면 모집단의 특성을 예측할 수 있을 것이라고 추론하였다. 또한 자신의 실제 조사 결과를 얼마나 신뢰하는지도 각자 달랐는데, 학생 A는 50% 신뢰, 학생 B와 C는 거의 신뢰한다고 응답하였다. 모델 세계에서 적절한 크기와 방법으로 표본이 추출하는 것이 변이를 통제하고 모집단의 특성을 더 잘 나타낼 수 있는 관찰한 뒤 학생들 모두 표본-모집단의 관계에 대한 추론이 변화하였다.

2.2. 통계적 추론에 필요한 지식의 변화

IMA 모델링의 분석을 통해 학생들이 실세계의 상황을 통계적으로 모델링하고 통계적 추론을 하는 데 있어서 어떤 지식을 가지고 있는지를 확인할 수 있었다. 또한 자료 세계에서 표본과 표본분포에 대한 인식을 모델 세계의 탐구를 통해 어떻게 수정하는지에 대해 확인할 수 있었다. IMA 모델링에서 연구 참여자들은 세 가지 통계적 사고의 변화를 보여줬는데 첫 번째는 자료 세계에서의 오개념을 모델 세계의 탐구를 통해 인식하고 수정한 것이다. 학생들이 주로 가지고 있는 오개념으로는 표본의 크기선정과 표본추출의 방법, 표집 변이성, 신뢰도 및 신뢰구간의 의미였으며, 모델 세계에서의 시뮬레이션 과정을 통해 오개념을 인식한 뒤 스스로 수정하거나, 교사의 설명을 들은 뒤 확인과정을 거쳐 교정한 경

우로 나뉘었다. 두 번째는 자신이 기존에 가지고 있던 형식적 지식을 활용하여 모델 세계의 표집 결과를 해석하며 수치적 지식과 개념적 지식을 통합하는 경향을 보였다. 마지막으로 IMA 모델링에서 새로운 지식을 형성하였다. 학생들이 통합적 모델링을 경험하며 어떤 통계적 지식이 어떻게 변화하였으며 학생들이 어떻게 표현하였는지 구체적으로 살펴보면 다음과 같다.

2.2.1. 오개념 수정

표본의 크기와 관련해서 학생들이 가지고 있는 오개념에는 모집단의 비율을 이용하여 표본의 크기를 설정하는 것과 표본의 크기가 표집 변이성에 미치는 영향에 대한 것이었다. 먼저 학생 A와 학생 B는 모집단의 10%정도가 표본의 크기로 적당할 것이라는 인식으로 자료 세계에서 조사를 시행했지만 모델 세계의 시뮬레이션을 통해 특정 크기 이상의 표본에 대해서는 표본 추출 시 지속적으로 모집단의 특성을 반영한다는 것을 관찰하였다. 이를 통해 모집단에서 차지하는 비율보다는 표본의 크기 자체가 모집단의 특징을 대표하는 데 영향을 미친다는 것을 깨달았다. 또한 표본의 크기와 표집분포의 관련성에 대한 인터뷰에서, 초기에 학생들은 모집단의 특징만을 고려하여 표집분포를 설명하려고 하였다. 하지만 모델 세계에서 표본의 크기가 커질수록 표집분포 이미지의 차이가 작아짐을 확인한 이후, 표본의 크기를 고려하여 표집분포를 설명할 수 있었다.

학생 A와 학생 C는 선착순 조사가 무작위 표집 방법이라고 인식하고 있었는데 이는 임의 추출과 관련된 오개념이다. 선착순 조사는 조사 대상이 사전에 정해지지 않는 대신 무작위 표집이 아니므로 조사 결과 편의를 유발할 수 있다. 반면에 임의 추출은 조사 전 조사 대상을 무작위 과정을 거쳐 미리 선발해야하며 무작위 조사 결과 편의를 제거할 수 있으므로 방법과 결과면에서 차이가 있음이 분명하다. 학생들은 샘플러의 임의 추출을 통해 모집단의 특성을 반영할 수 있는 표본 추출이 가능함을 인식하여 자신의 오개념을 수정하였다.

학생들은 공식을 활용하여 자신이 조사한 표본 평균 또는 표본 비율을 이용하여 신뢰구간을 구하였다. 이때 학생들은 신뢰도를 신뢰구간이라는 고정된 구간에 모수가 포함될 확률로 해석하는 오개념과 신뢰구간은 모집단의 신뢰도만큼의 비율이 존재하는 구간으로 해석하는 오개념을 보였다. 또한 학생들은 모평균을 추정하는 과정에 대해 학습하면서 표본평균의 분포와 표준정규분포를 이용하여 모평균 m의 신뢰구간을 구하는 것을 학습하였지만 구간의 생성 과정에 대해 설명할 수 있는 학생은 학생 C가 유일했다. 학생들은 모델 세계의 표집 결과를 이용하여 신뢰구간을 구해보며 자신의 자료 세계에서 신뢰구간을 구한 것과 반복된 표집 결과로부터 신뢰구간을 구한 것에 차이점에 대해 인식하였고 신뢰구간이 표본마다 다르다는 것을 확인할 수 있었다. 표본 평균의 분포가 반복된 표집에 의해 정규분포로 나타내어짐을 인식한 뒤 그 분포와 연관 지어 신뢰도와 신뢰구간의 의미를 설명하자 학생들은 분포상의 각각의 표본평균에서 신뢰구간을 구하면 그 중 95%가 모평균을 포함한 다는 것을 이해할 수 있었다.

2.2.2. 기존 지식과 통합

표본의 크기가 표집분포에 미치는 영향과 관련된 추가 질문에서 학생 C는 표집분포의 이미지보다 독립시행의 확률을 먼저 떠올렸다. 이는 두 집단의 표본의 크기 차이에서 나타나는 표집 변이성에 대한 사고보다 확률을 직접 계산해서 비교하는 수치적 이해가 더 크게 작용했음을 알 수 있다.

I : 우리나라 전체 학생에 대해 여학생과 남학생이 거의 반반이라고 합시다. A학교 학생 중에 무작위로 50명을, B학교에서 무작위로 10명을 선택하여 두 학교의 표본으로 정하였습니다. 이들 중 하나의 표본에서 80%이상이 남학생이 될 확률은 어느 학교가 더 높은지 생각해보고 이유와 함께 말해주세요.

C : 남학생이 선택될 확률은 $\frac{1}{2}$이고 50명중 80%는 40명, 10명중 80%는 8

명이다. 각 학교에서 80% 이상 남학생이 선택될 확률을 구해보면

A학교는 ${}_{50}\mathrm{C}_{40}\left(\frac{1}{2}\right)^{40}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}+{}_{50}\mathrm{C}_{41}\left(\frac{1}{2}\right)^{41}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}+\cdots+{}_{50}\mathrm{C}_{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$

$=\left({}_{50}\mathrm{C}_{40}+{}_{50}\mathrm{C}_{41}+{}_{50}\mathrm{C}_{42}+\cdots+{}_{50}\mathrm{C}_{50}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{50}$ 이고,

B학교는 ${}_{10}\mathrm{C}_{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{8}\left(\frac{1}{2}\right)^{2}+{}_{10}\mathrm{C}_{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{1}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

$=\left({}_{10}\mathrm{C}_{8}+{}_{10}\mathrm{C}_{9}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$ 이에요.

$\left({}_{50}\mathrm{C}_{40}+{}_{50}\mathrm{C}_{41}+{}_{50}\mathrm{C}_{42}+\cdots+{}_{50}\mathrm{C}_{50}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{50}<\left({}_{10}\mathrm{C}_{8}+{}_{10}\mathrm{C}_{9}+{}_{10}\mathrm{C}_{10}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$이 므로 B학교일 확률이 더 높다고 할 수 있어요.

한편 모델 세계의 탐구과정에서 학생은 표본의 크기에 따라 표집분포가 변화함을 관찰한 뒤 분포 이미지와 표집분포의 수학적 표현을 통합하여 해석하였고 표본 크기에 따른 표집 변이성을 표집분포에서의 분산과 관련지어 설명하였다.

C : 모집단에서 남학생 비율을 모비율 p라고 하면 $p=\frac{1}{2}$이고 각 학교에서 남학생의 수 X는 $\mathrm{B}\left(n,\frac{1}{2}\right)$를 따르는데 표본비율의 분포를 구해보면 A학교는 $\mathrm{N}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{200}\right)$ 이고 B학교는 $\mathrm{N}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{40}\right)$이니까 $P(\hat{p}>0.8)$을 직접 구해도 되고 정규분포 나타낸 다음에 표시해도 B가 더 확률이 크게 되요. 그러니까 A학교가 분산이 더 작기 때문에 80%이상이 남학생이 될 확률은 B학교가 더 크다고 할 수 있습니다.

동일한 질문에 대한 다른 방식의 접근을 통해 IMA 모델링을 거치는 동안 확률에 기반한 추론을 통계와 통합한 것으로 판단할 수 있다. 구체적으로 학생은 확률적 지식과 표집분포의 형식적 표현을 표본의 크기효과와 분포개념과 통합하여 표집 변이성에 대한 이해를 확장시켰다.

2.2.3. 새로운 지식 형성

표집분포의 개념은 통계적 추론의 핵심 아이디어이다. 그러나 학생 A와 학생 B는 표본분포와 표집분포의 차이점에 대해 이해하지 못하거나, 확률분포로서의 표집분포의 개념을 이해하지 못하였다. 예를 들어, 학생 A는 자료 탐색과 통계적 추정에서 표집분포의 개념을 형성하지 못하여, 아래와 같이 답하거나, 모델 세계에서 '같은 모집단에서 왜 표본 추출을 여러 번 해야 하는지'에 대해 물었다.

I : 표본을 100번 더 추출하여서 '아침밥을 먹는 학생 비율의 분포'를 나타내면 어떻게 될까요?
A : 원래 분포인가. 잘 모르겠어요.

이후 시뮬레이션을 통해 형성한 표집분포를 모집단의 분포, 표본분포와 비교하여 표본비율을 확률변수로 하는 또 다른 확률분포가 됨을 관찰하였다. 또한 모집단의 분포와는 상관없이 표집분포는 정규분포를 따른다는 점과 표본의 크기 효과를 관찰하였다. 이는 형식적 설명으로 이해할 수 없었던 표집분포의 개념을 이해한 것이다. 표본분포 그래프는 하나의 표본을 조사하여도 모집단을 추정하는 신뢰성을 확보할 수 있다는 통계적 추정의 원리에 대한 근거가 되었다.

[그림 Ⅳ-15] 학생 A의 표집분포에 관한 추론
(Braham & Ben-Zvi, 2017, p. 121, Figure 2를 재구성)

V. 요약 및 결론

1. 요약

본 연구는 IMA에 기반을 두고 고등학생 세 명의 IMA 모델링 과정과 통계적 추론의 변화를 살펴보았다. 표본의 크기, 무작위 과정, 신뢰구간, 표집분포, 표본-모집단의 관계에 주목하여 EDA와 PBA를 순차적으로 경험할 때 나타나는 추론 변화를 중심으로 분석하였다. 이를 바탕으로 통계적 추론에 필요한 지식과 교육을 유기적으로 연결할 수 있는 효과적인 지도 방안을 제공하고자 하였다. 이를 위해 연구 문제를 다음과 같이 설정하였다.

1. 고등학생들은 어떻게 IMA 모델링을 수행하는가?
2. IMA 모델링에서 학생들의 통계적 추론은 어떻게 변화하는가?

이 연구 문제에 답하고자 II장에서는 IMA 개념과 학습경로를 소개하고 통계적 추론을 위한 통계적 지식을 살펴보았다. IMA는 EDA를 경험하며 자료의 경향과 패턴을 탐구하고 표현할 뿐만 아니라 모델 세계에서의 시뮬레이션을 통해 PBA를 지원하도록 설계된 접근이다. 본 연구자는 IMA를 위한 학습경로를 검토하여 이를 고등학교 3학년 학생들에게 적용할 수 있는 IMA 모델링의 기반으로 삼았다. 또한 표본과 표집분포 및 신뢰구간과 관련된 이론적 배경을 검토하여 통계적 추론에 필요한 지식을 정리하였다. III장에서는 연구 환경을 검토하고 전반적인 연구 절차에 대해 서술하였다. II장에서의 문헌 분석을 근거로 학생들이 경험하게 될 IMA 모델링을 제시하였으며, 모델링 각 과정마다 통계적 지식을 확인하기 위한 인터뷰 문항을 설정하였다.

IMA 모델링을 경험한 참여자들의 담화를 분석한 결과를 요약하면 다음과 같다.

먼저 자료 세계 탐구에서 통계적 추론을 분석한 결과 표본과 표집분포에 대하여 오개념이 형성되어 있거나 통계적 기술을 표면적으로 이해하는 경우에 그쳤다. 그러나 표본의 크기에 대한 직관적 판단과 잘못된 개념 인식은 모델 세계 탐구에서 다른 크기의 표본분포 및 표집분포 관찰 등을 통해 변화했다. 또한 표집분포의 기호적 표현과 연결 지어 표본의 크기가 표본 대표성 및 표집 변이성에 미치는 영향을 인식하였다.

한편, 학생들은 임의추출 된 표본이 왜 모집단을 대표할 수 있는지에 대한 이해가 부족했다. 이해가 정립되지 않은 상태에서 피상적으로 임의추출을 해야 함을 언급하거나 선착순 조사를 임의추출이라 생각하였다. 이후 모델 세계를 탐구하여 샘플러의 원리를 인식하고 임의추출을 통해 모집단과 유사한 분포를 갖는 표본이 추출됨을 확인한 뒤 비로소 임의추출의 의미와 필요성을 인식하였다.

또한 학생들의 응답을 통해 통계적 추론에 필요한 지식을 통합적으로 지도하는 데 있어 한계를 확인하였다. 이는 표본평균 또는 표본비율의 분포를 표본 통계량과 표본의 크기를 활용하여 정규분포로 표현하거나 신뢰구간에 대한 개념을 지도하는 것만으로는 어렵다. 교과 학습만으로는 학생들이 표집분포의 개념을 형성하지 못하거나 개념이 형성된 상태일지라도 이를 신뢰구간의 의미와 연결 짓지 못하였기 때문이다. 다만 모델 세계 탐구 시 추상적인 개념을 통합하면 표집분포에 대하여 이해할 수 있다는 가능성을 확인하였다. 뿐만 아니라 학생들은 표본 조사 한 번으로 자신의 조사 결과가 표집분포상 위치하는 지점을 관찰하고 모집단에 대한 추정 가능한 범위를 추론할 수 있었다. 또한 신뢰도를 주관적으로 추측하여 표현하거나 그 의미를 직관적으로 해석하는 것에서 벗어나 분포 이미지와 통합하여 확률적으로 제시하였다. 이는 자신이 구성한 모집단의 평균과 표본 평균의 평균을 비교하거나 표본의 크기에 따른 표집분포의 변이를 확인하여 자신의 표본 조사 결과를 재해석하는데 영향을 미쳤다.

2. 결론 및 제언

IMA는 탐색적 자료 분석과 확률적 접근을 통합한 통계 교육 접근법이다. IMA를 적용하여 학생들의 통계적 추론 과정을 관찰한 결과 잘못된 개념을 거듭 수정하고 지식 간의 유기적인 연결을 거쳐 통계적 추론 능력이 발전했음을 확인했다. 학생들은 IMA 모델링을 토대로 실제 현상에서 추출한 자료의 경향과 패턴, 관계를 찾았다. 뿐만 아니라 무작위 과정, 표본의 크기의 영향, 표집 변이성을 탐색함으로써 표본과 표집분포 개념을 유기적으로 이해하고 이를 통계적 추론과 연결 지었다.

본 연구를 통해 얻은 결론은 다음과 같다.

첫째, IMA 모델링은 통계적 추정을 위한 하위 개념을 유기적으로 연결할 수 있다. 학생들은 표본과 표집분포 및 신뢰구간에 대하여 학습 후 IMA 모델링을 경험하였다. 다만 탐색적 자료 분석 시 임의 추출이나 표본의 크기 효과를 인지하지 못하고 직관이나 편리성에만 의존하여 자료를 수집하였다. 이는 통계적 추정 단원의 학습과는 별개로 임의 추출이나 확률을 고려한 표본의 크기 선정이 학생들에게 익숙하지 않다는 것을 시사한다. 이후 IMA 모델링에서 학생들의 표본 추출 방법에 대한 추론의 변화를 관찰할 수 있었다. 이를 통해 개인의 감정이나 판단을 섞지 않은 임의 추출이 자발적 반응에 의한 편향 개입을 제거하며 모집단의 대표성을 높이는 것을 확인했다. 또한 표본의 크기에 따른 표본이나 표집의 분포를 관찰하며 신뢰할 수 있는 표본의 크기에 대한 결론을 도출하였다. 같은 모집단에서의 반복된 표본 추출은 표본 통계치를 모으면 모수를 중심으로 하는 정규분포를 형성하며, 이 정규분포는 다시 신뢰구간이라는 개념을 형성한다. 즉 IMA 모델링 과정을 거쳐 유기적으로 연결된 지식들을 통해 표본으로부터 모집단에 관한 적절한 추론할 수 있다.

둘째, IMA 모델링은 통계적 추론 능력을 향상시키는 교수·학습방법이 될 수 있다. 학생들은 EDA를 통해 의사결정 추정이나 예측 면에서는 통계적 추론을 발휘할 수 있었다. 그러나 표본대표성과 표집 변이성과 관련된 추론에는 어려움을 느끼고 있었다. 이후 EDA 결과를 바탕으로 구

성된 모집단에서 확률적 표집을 하고 결과를 관찰함으로써 통계적 추론이 발달했다. 또한 모집단에서의 임의 추출 결과를 탐색하고 표본의 크기에 따른 표집 변이를 조사하는 과정에서 학생들의 추론이 더욱 정교해지며 오개념을 수정하는 결과를 확인했다. 이는 IMA를 제안한 Braham와 Ben-Zvi(2017)의 주장과도 일치한다. 따라서 이미 통계적 추정을 학습하였지만 표집분포와 신뢰구간에 대한 이해가 부족한 학생들에게 IMA 모델링이 통계적 추론을 길러 준다는 주장은 타당하다.

셋째, 맥락을 활용한 통계 지도는 기술에 초점을 두는 통계적 추정 학습의 한계를 극복하고 자료와 의미에 초점을 맞추어 고차원적인 통계적 추론을 가능하게 한다. 학생들은 탐색적 자료 분석을 통하여 자료의 경향과 패턴을 표현하고 탐구할 수 있다. 또한 그 결과를 다양한 소프트웨어를 사용하여 그래프로 표현하는 것을 배울 수 있다(delMas, 2010). 그러나 학생들을 대상으로 실시한 탐색적 자료 분석 과정과 결과에 대한 인터뷰에서 자료를 수집하고 외적으로 표현하는 기술에만 초점이 맞추어져 있음을 확인하였다. 모델 세계의 탐색은 맥락을 확률과 연결시켜 확률을 모집단에 대한 추론에 적용시킨다. 이를 통해 학생들은 확률분포 이론이나 통계적 추정을 위한 계산을 토대로 맥락을 이해하고 통계를 실세계를 예측하는 도구로 바라보게 된다. 따라서 맥락을 활용한 IMA 모델링은 통계를 통해 개인의 세계를 해석할 수 있으며 새로운 맥락과 의미를 파생할 수 있는 기회가 된다.

넷째, IMA는 다양한 수준과 학년에 적용할 수 있는 접근법이다. Braham과 Ben-Zvi(2017)는 초등학교 학생들이 모델링을 거쳐 불확실성과 추론에 대한 사고를 심화시켰다고 주장한 바 있다. 본 연구에 참여한 세 고등학생도 표집분포와 신뢰구간과 관련한 추론의 수준과 과정이 모두 달랐다. 그러나 세 학생 모두 IMA 모델링을 통해 표본 대표성과 표집 변이성과 관련된 개념을 습득함으로써 비형식적 추론에서 형식적 추론으로 발전시켰다. 이를 형식적 지식과 연결하여 개념 간 통합을 이루고 이해도를 심화시켰다. 이러한 점을 근거로 삼았을 때 다양한 수준과 학년에 적용 할 수 있는 접근이라는 주장은 타당하다.

이 연구는 학생들이 통계적 추론에 필요한 하위지식을 어떻게 유기적으로 연결하여 자료를 분석하고 모집단에 대하여 적절하게 추론 할 수 있을지에 대한 고민에서 비롯되었다. 문헌 분석은 통계적 추론 시 두 가지 과정이 동시에 필요함을 시사했다. 한 가지는 자료 탐색을 통해 패턴과 관계에 대하여 결론을 도출하는 과정이다. 다른 한 가지는 확률분포에 대한 이해를 바탕으로 표집분포 개념을 형성하여 통계적 추정의 원리로 나아가는 과정이다.

학생들은 IMA를 경험함으로써 표본과 표집분포 및 신뢰구간에 대한 핵심 개념 등 형식적 통계 지식을 효율적으로 학습할 수 있다. 또한 각각의 내용지식을 통합적으로 연결시켜 통계에 대한 접근 방식과 추론 능력을 확장시킨다. 따라서 IMA는 학생들의 고차원적인 통계적 추론을 개발하는 교수・학습 도구로서 활용 가치가 있다.

본 연구는 통계를 이용한 탐구 및 의사소통에 적극적인 학생들을 대상으로 일대일 인터뷰를 통해 진행되었기 때문에 일반 통계수업에 적용하는 것에 한계가 있다. 따라서 통계수업에 적용할 수 있는 IMA 모델링과 지도 방안에 대한 확장된 범위의 후속연구가 필요하다. 그밖에 다양한 학년과 수준의 학생에게 IMA를 적용할 수 있는 교육적 논의가 필요하다. 이는 통계교육에서 비형식적 통계적 추론과 형식적 추론의 연결의 중요성을 꾸준히 강조하는 경향을 미루어볼 때 그 필요성이 더욱 제기된다. 마지막으로 연구에 사용한 공학 도구가 한글을 지원하지 않고 유료프로그램이라는 두 가지 측면에서 제약이 있다. 따라서 샘플러 기능을 갖추고 표집분포 교육에 보다 쉽게 활용할 수 있는 소프트웨어 개발의 필요성이 제기된다.

참고문헌

강현영(2012). 통계적 소양의 교육적 의미 고찰. **한국수학사학회지, 25**(4), 121-137.

고은성, 이경화(2011). 예비교사들의 통계적 표집에 대한 이해. **수학교육학연구, 21**(1), 17-32.

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8]

김응환, 이석훈(2015). **통계와 확률 교육**. 서울: 경문사.

김응환(2006). 표집오차 (sampling error) 와 표집분포 (sampling distribution) 의 용어 사용에 관한 연구. **한국학교수학회논문집, 9**(3), 309-316.

민진원(2010). **통계적 추정의 지도에 관한 연구** (Doctoral dissertation, 서울대학교 대학원).

박경미, 이환철, 박선화, 강은주, 김선희, 임해미, … , 김민정(2015). **개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구 Ⅱ**. 한국과학창의재단 연구보고서 BD15120005.

우정호(2000). 통계 교육의 개선 방향 탐색. **학교 수학2**(1), 1-27.

주미경, 김소연, 배기태, 정희수, 정수용(2018). 통계적 탐구활동 결과물에 나타난 고등학생의 통계적 소양. **학교수학, 20**(4), 661-683.

채구묵(2010). **사회과학 통계분석**. 서울: 양서원.

탁병주(2017). **통계적 소양 교육을 위한 예비교사의 통계 교수 지식 연구: 표본 개념 지도에서의 활용을 중심으로** (Doctoral dissertation, 서울대학교 대학원).

한채린, 이경원, 김도연, 배미선, 권오남(2018). 과제의 구조화 정도에 따른 초등학생들의 통계적 변이성 이해 양상에 대한 사례 연구 1. **C-초등수학교육, 21**(2), 131-150.

황선욱 외(2014). **확률과 통계**. 좋은책 신사고.

Bar-Hillel, M. (1979). The role of sample size in sample evaluation. *Organizational Behavior and Human Performance, 24*(2), 245-257.

Batanero, C., Godino, J. D., Vallecillos, A., Green, D. E., &Holmes, P.

(1994). Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 25*(4), 527-547.

Ben-Zvi, D. (2004). 자료 분석에 대한 추론. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). **통계적 사고의 의미와 교육** (이경화 외 9인 역) (pp. 143-176). 서울: 경문사. (원저 2004년 출판).

Biehler, R. (1994). Probabilistic thinking, statistical reasoning, and the search for causes—Do we need a probabilistic revolution after we have taught data analysis. *Research papers from ICOTS, 4,* 20-37.

Biehler, R. (1999). Discussion: Learning to think statistically and to cope with variation. *International Statistical Review/Revue Internationale de Statistique,* 259-262.

Braham, H., & Ben-Zvi, D. (2017). Students' emergent articulations of statistical models and modelling in making informal statistical inferences. *Statistics Education Research Journal, 16*(2).

Chance, B., delMas, R., & Garfield, J. (2010). 표집분포에 대한 추론. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). **통계적 사고의 의미와 교육** (이경화 외 9인 역) (pp. 353-384). 서울: 경문사. (원저 2004년 출판).

Creswell, J. W. (2015). **질적 연구 방법론: 다섯 가지 접근** (조흥식, 정선욱, 김진숙, 권지성 역.). 서울: 학지사. (원저 2013년 출판).

Creswell, J. W. (2011). **연구방법: 질적, 양적 및 혼합적 연구의 설계** (김영숙 외 9인 역). 서울: 스그마프레스. (원저 2008년 출판).

delMas, R. C. (2010). 수학적 추론과 통계적 추론. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). **통계적 사고의 의미와 교육** (이경화 외 9인 역) (pp. 95-114). 서울: 경문사. (원저 2004년 출판).

Dierdorp, A., Bakker, A., van Maanen, J., & Eijkelhof, H. (2016). Supporting students to develop concepts underlying sampling and to shuttle between contextual and statistical spheres. In *The Teaching and Learning of Statistics* (pp. 37-48). Springer, Cham.

Gal, I. (2010). 통계적 소양: 의미, 요소, 전망. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). **통계적 사고의 의미와 교육** (이경화 외 9인 역) (pp. 55-94). 서울: 경문사. (원저 2004년 출판).

Garfield, J., & Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice.* Springer Science & Business Media.

Jones, G. A., Thornton, C. A., Langrall, C. W., Mooney, E. S., Perry, B., & Putt, I. J. (2000). A framework for characterizing children's statistical thinking. *Mathematical thinking and learning, 2*(4), 269-307.

Konold, C., Pollatsek, A., Well, A., & Gagnon, A. (1997). Students analyzing data: Research of critical barriers. *Research on the role of technology in teaching and learning statistics*, 151.

Konold, C., Harradine, A., & Kazak, S. (2007). Understanding distributions by modeling them. *International Journal of Computers for Mathematical Learning, 12*(3), 217-230.

Konold, C., & Kazak, S. (2008). Reconnecting data and chance. *Technology innovations in statistics education, 2*(1).

Konold, C., & Miller, C. D. (2011). *TinkerPlots* (Version 2.0) [Computer software]. Emeryville, CA: Key Curriculum Press. Available from www.tinkerplots.com

Lesh, R. A., & Doerr, H. M. (2003). *Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching.* Routledge.

Lightner, J. E. (1991). A brief look at the history of probability and statistics. *The Mathematics Teacher, 84*(8), 623-630.

Lipson, K. (2002). The role of computer based technology in developing understanding of the concept of sampling distribution. In *Proceedings of the Sixth International Conference on Teaching Statistics. Cape Town South Africa.*

Lipson, K. (2003). The role of the sampling distribution in understanding statistical inference. *Mathematics Education Research Journal, 15*(3), 270-287.

Lobato, J., & Walters, C. D. (2017). A taxonomy of approaches to learning trajectories and progressions. *Compendium for research in mathematics education,* 74-101.

Lovett, M. C. (2001). A collaborative convergence on studying reasoning processes: A case study in statistics. *Cognition and instruction: Twenty-five years of progress*, 347-384.

Moore, D. S. (1992). Teaching statistics as a respectable subject. *Statistics for the twenty-first century*, 14-25.

Pfannkuch, M. (2008). Building sampling concepts for statistical inference: A case study. *In International Congress on Mathematical Education, Monterrey, Mexico.*

Pfannkuch, M., & Wild, C. (2010). 통계적 사고의 이해. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.). **통계적 사고의 의미와 교육** (이경화 외 9인 역) (pp. 19-54). 서울: 경문사. (원저 2004년 출판).

Pfannkuch, M., Wild, C. J., & Parsonage, R. (2012). A conceptual pathway to confidence intervals. *ZDM, 44*(7), 899-911.

Pfannkuch, M., Ben-Zvi, D., &Budgett, S. (2018). Innovations in statistical modeling to connect data, chance and context. *ZDM, 50*(7), 1113-1123.

Saldanha, L., & Thompson, P. (2002). Conceptions of sample and their relationship to statistical inference. *Educational studies in mathematics, 51*(3), 257-270.

Shaughnessy, J. M. (2006). Research on students' understanding of some big concepts in statistics. *Thinking and reasoning with data and chance, 68*, 77-98.

Watson, J. M. (2010). 표본에 대한 추론. In D. Ben-Zvi & J. Garfield (Eds.).

통계적 사고의 의미와 교육 (pp. 329-351) 서울: 경문사. (원저 2004년 출판).

Wild, C. J., & Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry. *International statistical review, 67*(3), 223-248.

Abstract

A Case Study on Statistical Inference of High School Students based on Integrated Modeling Approach

Kim Seo Yeong
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

Statistical inference is essential for a correct interpretation of survey results and for making inferences about a population from a sample. There are two main types of statistical inference emphasized in statistical education: one is the abstract thought process required to analyze, summarize, and express the data generated from participation in an actual statistical survey, and the other is related to rules that draw conclusions about the characteristics of the population from the empirical observations of a sample. There are many studies of the knowledge needed for statistical inference, the types of statistical inference, and the typical reactions in the development of inference. However, there is a lack of research that analyzes students' reactions in teaching-learning situations supporting statistical inference and links those reactions to the content or knowledge required for inference. The purpose of this study is to describe in detail the process by which students

come to an understanding of the relationship between sample and population through IMA modeling, and of inference through models and modeling. Through this, we will not only suggest a teaching and learning process that supports statistical inference, but also show the possibility of a paradigm shift in statistical education in a real-life context.

Braham and Ben-Zvi (2017) suggested an integrated modeling approach (IMA) to help students understand the relationships between samples and populations, and to draw inferences from models and modeling. IMA is an approach that integrates exploratory data analysis (EDA) activities and probability-based approach (PBA) modeling.

In this study, we suggest a learning process for modeling that is based on IMA and can support students' understanding of statistical inference, and we describe the IMA modeling process for three high school students in detail. A case study was conducted with three high school students to see how students performed IMA modeling.

As a result, the IMA modeling process of three high school students was described chronologically and in detail, and the students' knowledge of statistical reasoning through modeling was presented. In IMA modeling, the study participants showed three changes in their statistical thinking. First, their misconceptions in the data world were recognized and corrected through their exploration of the model world. Second, the students interpreted the sampling results of the model world by using their existing formal knowledge and their integrated numerical and conceptual knowledge. Finally, new knowledge was formed through IMA modeling.

As a result of our analysis of the modeling process of the high school students, some implications can be drawn. First, IMA modeling supports an organic link between the knowledge needed to infer a population from a sample. Statistics of repeated samples from the same population lead to conclusions about sample size and sampling methods. In addition, the

sampling results form a normal distribution centered on the parameters, which in turn form the concept of confidence intervals. In other words, through the IMA modeling process, the organically connected knowledge can be used to infer the population from the sample. Second, IMA enables statistical inferences related to sample representativeness and sampling variability to be made, corrects misconceptions related to inferences, and integrates the modeling results with statistical knowledge. Thus, IMA can be a teaching and learning method that improves statistical inference. Third, IMA, which starts modeling from data surveys of their interests, is an approach to statistical modeling that uses context. This overcomes the limitations of statistical estimates that focus on computation, and enables high-level statistical inference that focuses on data and meaning. Finally, IMA can be applicable at various levels and grades. All the participants in this study acquired concepts related to sample representativeness and sampling variability through IMA modeling, and linked their reasoning with formal knowledge. IMA not only allows students to move from informal statistical inference to formal inference, but it can also deepen our understanding of formal inference, and this can serve as a basis for an approach that is applicable at various levels and grades.

Keywords : Integrated Modeling Approach, Modeling, Statistical Inference, Statistical Estimation

Student Number : **2018-24212**