creative commons
COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

교육학석사 학위논문

적분 이론의 관점에서 본 2015 개정 교육과정의 적분 단원 분석

2021년 1월

서울대학교 대학원

수학교육과

이 주 영

적분 이론의 관점에서 본 2015 개정 교육과정의 적분 단원 분석

지도교수 최 영 기

이 논문을 교육학석사 학위논문으로 제출함

2021년 1월

서울대학교 대학원

수학교육과

이 주 영

이주영의 석사 학위논문을 인준함

2021년 1월

위 원 장 이 경 화 (인)

부위원장 윤 상 균 (인)

위 원 최 영 기 (인)

국문초록

적분 이론의 관점에서 본 2015 개정 교육과정의 적분 단원 분석

2015 개정 교육과정에서 정적분의 정의를 부정적분의 함숫값의 차로 정의함에 따라 정적분이 리만 합의 극한으로 정의되었던 2009 개정 교육과정까지의 적분 수업과 비교하여 '어떤 적분 수업을 해야 하는가?'라는 질문으로부터 연구가 시작되었다. 적분은 도형의 넓이와 부피를 구하는 데 사용될 뿐 아니라 변화 현상을 묘사하는 중요한 수학적 개념이다. 또한, 적분 단원에서 함수, 미분, 급수 등의 지식이 연결되고, 대학수학에서도 많은 분야에 응용되는 수학적 개념이다. 따라서 현 정적분 정의에 따른 교과서 개발 방향을 제시하는 연구가 필요하다.

본 연구에서는 역사 발생적 원리에 기반을 두어 '적분 개념이 어떤 관점하에 발달하였는지', '2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서는 어떤 적분 관점을 택하였는지' 그리고 '정적분과 미분 관계, 정적분과 넓이 관계, 속도와 거리 관계에서 나타나는 미적분의 기본정리'를 연구하였다. 적분 개념은 두 가지 관점에 따라 발달하였다. 첫 번째 관점은 적분 이론의 엄밀한 전개를 위해선 미분과 독립된 합의 극한으로써 해석적 정의가 필수적임을 보여주는 관점이다. 따라서 코시, 리만, 르베그 적분으로 발달할 동안 정적분을 합의 극한으로 정의하여 적분 이론을 전개하였다. 두 번째 관점은 적분을 부정적분의 함숫값의 차로 여기는 것이 적분의 자연스럽고 중요한 성질임을 보여주는 관점이다. 따라서 코시, 리만, 르베그 적분으로

발달할 동안 정적분을 미적분의 제2 기본정리로 재정의하려는 시도가 지속해서 이루어졌다.

교과서 분석 결과 현 교육과정 수학Ⅱ 교과서는 정적분을 미적분의 제2 기본정리로 정의하여 코시 이전 적분 정의를 택한 전개방식을 따른다. 하지만 코시 이전 적분 정의에는 변화율 함수의 넓이가 변화량 함수의 함숫값의 차라는 수학적 의미가 포함되어 있으나 수학Ⅱ 교과서의 정적분에는 이러한 수학적 의미가 적절히 포함되지 못하였다. 정적분과 미분 관계, 정적분과 넓이 관계, 속도와 거리 관계에서 정적분의 정의와 관련해서는 미적분의 기본정리를 잘 드러났으나 세 명제 사이에서는 미적분의 기본정리가 잘 드러나지 않았다. 특히 정적분과 미분 관계가 미적분의 제1 기본정리임에도 불구하고 정적분과 미분 관계에선 미적분의 제1 기본정리를 기호 맥락에서 탐구하고, 미적분의 제1 기본정리의 수학적 의미는 정적분과 넓이 관계의 증명 과정에서 탐구하는 것으로 나타났다. 또한, 속도와 거리 맥락에서 정적분과 미분 관계, 정적분과 넓이 관계는 적절히 다루어지지 않았음을 확인하였다.

따라서 본 연구에서는 다음의 네 가지 시사점을 제언하였다. 첫째, 정적분 정의가 도입될 때 부정적분의 함숫값의 차가 변화율에 따른 변화량이란 개념을 충분히 탐구할 수 있도록 내용을 구성해야 한다. 둘째, 정적분과 넓이 관계를 정적분과 미분 관계보다 선행해서 다루어야 한다. 셋째, 정적분과 미분 관계를 학습할 때 정적분과 넓이 관계의 증명 과정 일부인 '$S'(x)=f(x)$'를 적분과 미분 기호를 이용한 기호 맥락에서 재음미해야 한다. 넷째, 속도와 거리 맥락에서 정적분의 정의뿐 아니라 정적분과 넓이 관계, 정적분과 미분 관계의 수학적 의미를 탐구할 수 있도록 내용을 구성해야 한다.

적분은 학교수학에서 중요한 위치를 가진 만큼 정적분 정의의 변

화는 적분 수업에 큰 혼선을 초래할 것으로 예상한다. 그러므로 본 연구는 정적분의 정의 변화에 따른 교과서 개발 방향을 모색하여 제시함으로써 혼선에 대한 하나의 대책이 되고자 하였다.

주요어 : 적분 이론, 미적분의 기본정리, 교과서 분석
학 번 : 2019-21925

목 차

국문초록 ····· i
표 목차 ····· vi
그림 목차 ····· vi

Ⅰ. 서론 ····· 1
1. 연구의 목적 및 필요성 ····· 1
2. 연구 문제 ····· 3

Ⅱ. 문헌검토 ····· 5
1. 역사 발생적 수학 학습 지도 원리 ····· 5
2. 선행연구 분석 ····· 8
2.1. 적분의 역사 연구. ····· 8
2.2. 2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서 연구 ····· 10

Ⅲ. 코시 적분으로 이행 ····· 13
1. 미적분의 기본정리로 정의된 코시 이전 적분 ····· 13
2. 푸리에 급수와 적분의 존재성 문제 ····· 15
3. 코시 적분 이론의 탄생 ····· 17
4. 코시의 적분에 대한 관점 ····· 20
4.1. 미분과 독립적으로 합의 극한으로써 정의 ····· 20
4.2. 미적분의 기본정리를 통한 미분과의 연결 ····· 21

Ⅳ. 리만 적분으로 확장 ····· 24
1. 디리클레 함수와 정적분의 존재성 문제 ····· 24
2. 리만 적분 이론의 탄생····· 26
3. 다르부의 리만 적분 확립 ····· 30
4. 리만과 당대 수학자들의 적분에 대한 관점 ····· 32
4.1. 미분과 독립적으로 합의 극한으로써 정의 ····· 32
4.2. 미적분의 기본정리를 통한 미분과의 연결 ····· 33

Ⅴ. 르베그 적분으로 이행····· 35
1. 볼테라 함수와 미적분의 기본정리 성립 문제····· 35
2. 르베그 적분 이론의 탄생 ····· 40
3. 르베그의 적분에 대한 관점 ····· 44
3.1. 미분과 독립적으로 합의 극한으로써 정의 ····· 44
3.2. 미적분의 기본정리를 통한 미분과의 연결 ····· 45

Ⅵ. 2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서 분석····· 49
1. 교과서의 적분에 대한 관점 ····· 50
2. 적분 단원에서 나타나는 미적분의 기본정리 ····· 56

Ⅶ. 결론····· 64

참고문헌····· 69
Abstract····· 73

표 목 차

<표 Ⅳ-1> 분석한 교과서 목록 ····· 49
<표 Ⅵ-2> 로그와 지수의 관계와 비교한 정적분과 미분 관계의 증명 ····· 57

그 림 목 차

[그림 Ⅳ-1] 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2}$의 그래프 (Ruch, 2017) ····· 29
[그림 Ⅴ-1] 함수 $F(x)$의 그래프(Ponce Campuzano, Maldonado Aguilar, 2015) ····· 36
[그림 Ⅴ-2] 함수 $F'(x)$의 그래프(Ponce Campuzano, Maldonado Aguilar, 2015) ····· 37
[그림 Ⅴ-3] 적분 이론에 따른 미적분의 제2 기본정리가 성립하는 도함수 $f'(x)$ ····· 47
[그림 Ⅵ-1] 정적분 정의의 학습경로와 정적분에 포함된 개념·· 54
[그림 Ⅵ-2] 정적분과 미분 관계, 정적분과 넓이 관계에서 나타나는 미적분의 제1 기본정리 ····· 60
[그림 Ⅵ-3] 정적분 정의와 정적분과 미분 관계, 정적분과 넓이 관계, 속도와 거리 관계에서 나타난 미적분의 기본정리 ····· 63
[그림 Ⅶ-1] 미적분의 기본정리가 강조된 학습경로 ····· 67

Ⅰ. 서론

1. 연구의 목적 및 필요성

적분은 여러 가지 도형의 넓이와 부피를 구하는 데 사용될 뿐 아니라 움직이는 물체의 속도와 이동 거리 계산을 포함한 변화 현상과 관련된 다양한 문제 해결에 활용된다. 학생들은 적분의 학습을 통해 수학적 문제 해결 능력과 창의·융합적 사고를 기를 수 있다(교육부, 2015). 학교수학에서 학습하는 정적분은 마지막 단원에 배치되어있는 만큼 먼저 배운 미분, 부정적분, 급수, 속도와 거리 관계, 도형의 넓이와 부피 등 수학적 개념과 관련이 있고 정적분과 수학적 개념을 연결할 때 최대, 최소 정리, 평균값 정리, 급수의 수렴 등 선수지식이 많이 이용된다. 정적분은 교육과정 내에서만 아니라 향후 대학에서 미분방정식론, 측도 이론, 미분기하학, 통계학 등 다양한 수학 분야에서 확장될 뿐 아니라 경제학, 물리학, 전자기학, 공학 등 여러 학문에 응용되어 사회 현상 및 자연 현상을 이해하고 분석하는 데 쓰인다(Jones, 2013; 박진희, 박미선, 권오남, 2018). 즉 학교수학에서 적분은 앞서 배운 수학적 개념들이 연결되는 지점일 뿐 아니라 여러 학문에 응용되어 현상을 이해하고 분석하는 초석이다. 따라서 수학에서 적분이 중요한 의미가 있는 만큼 적분이 가진 수학적 의미를 잘 지도하는 것은 중요하다.

학교수학에서 정적분은 주로 리만 합의 극한, 곡선 아래 영역의 넓이, 부정적분의 함숫값의 차로써 해석된다. 정적분에 관한 연구 중 학교수학에서 리만 합의 극한으로 정적분을 이해하는 것이 수학, 물리 등에 더 유용하므로 리만 합의 극한으로써 정적분이 가치 있다고 강조한 연구들이 있다(Sealey, 2014; Jones, 2013; Wagner, 2018). 한편 정적분을 리만 합의 극한으로써 이해하는 데 수반되는 학생들의 어려움도 역시 많다는 연구들도 있다(허학도, 2006; 신보미, 2008; 김하연, 2019; Rösken, Rolka, 2007; Wagner, 2018; Jones, 2013). 즉 리만 합의 극한으로써 정적분은

수학과 여러 분야에서 현상을 이해하는 데 유용하지만 그만큼 학생들에게 어려움을 유발하는 정적분의 개념이다. 따라서 우리나라도 2009 개정 교육과정까지 정적분을 리만 합의 극한으로 정의하였으나 2015 개정 교육과정에선 학생들의 어려움 해결을 위한 일환으로 정적분을 부정적분의 함숫값의 차로 정의하게 된다. 이로써 정적분의 정의를 위해 구분구적법, 급수의 합 등을 반드시 이해할 필요가 없어지고 미적분 학습경로가 단축되었다(한국과학창의재단, 2015; 이기돈, 2019).

이러한 상황에서 새로운 정적분 정의는 적분 수업에 있어 많은 변화를 불러일으킬 것으로 예상한다. 이와 관련하여 2015 개정 교육과정의 적분 단원에 대한 교과서의 서술 방식, 내용 도입방식, 과제 분석을 분석한 선행 연구가 이루어졌다(박진희, 박미선, 권오남, 2018; 이기돈, 2019; 김은숙, 조완영, 2019). 또한, 신수진, 조완영(2018)은 리만 합의 극한이 정적분의 본질이라 여기고 리만 합의 극한으로써 정적분을 재정의하려는 방안을 모색하였다. 하지만 단순히 학습량 감축을 넘어 새로운 정적분 정의를 통해 교과서 개발, 지도법에 관한 연구는 다소 미비하였다(강정기, 2019). 즉 부정적분의 함숫값의 차로 정의한 정적분으로 적분 수업에 대한 방향성을 제시한 연구는 부족하였다. 따라서 현 정적분 정의에 따른 교과서를 개발하고 수업을 설계하는 데 하나의 이정표를 세우는 연구가 필요하다.

2. 연구 문제

수학적 개념은 수학자들의 아이디어와 노력을 통해 만들어진 산물이다. 수학적 개념에 대한 초기 아이디어의 등장과 정교화 작업을 거쳐 이론이 정착되는 동안 어떤 개념은 여러 가지 의미를 포함하기도 한다. 예를 들어 미분계수의 개념은 해석적으론 함수의 변화율을 의미하지만 기하적으론 접선의 기울기를 의미한다. 또한, 일차함수는 대수적으론 변수 간의 비례 관계를 나타내고, 기하적으론 직선의 곡선 방정식이다. 따라서 수학 학습에 있어 수학적 개념이 가진 의미를 취사선택하는 것은 수업의 방향을 정하는 시작과 같다.

수학적 개념이 가진 의미를 파악하기 위해서 수학적 개념이 발달한 역사 과정을 살펴보는 것은 도움이 된다. 우정호, 민세영(2002)에 따르면 '수학을 어떻게 지도할 것인가'하는 논의는 수학의 본질을 보는 관점에 따라 달라진다. 수학 자체뿐 아니라 수학을 구성하는 이론들의 본질을 보는 관점에 따라 각 단원의 지도가 달라질 것이다. 김은숙, 조완영(2019)는 역사 발생적 원리에 따라 수학의 역사적 발달 과정은 학교수학의 교재 구성의 근거가 된다고 하였다. 따라서 적분 개념의 역사를 분석함으로써 적분 이론 역사를 지배하였던 적분에 대한 수학자들의 관점을 학교수학에 도입한다면 적분 수업에 대한 하나의 이정표를 세울 수 있을 것이다.

본 연구는 Ⅲ장, Ⅳ장, Ⅴ장에 걸쳐 적분 개념의 역사를 분석함으로써 적분 개념이 어떤 관점하에 발달 되었는지 분석한다. 그리고 Ⅵ장에서는 우리나라 2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서의 적분 단원이 적분 개념의 역사적 관점과 비교하였을 때 어떤 특징을 가지는지 분석한다. 이를 위해 적분 단원을 부정적분부터 정적분의 도입까지 학습경로를 분석하고, 정적분과 미분 관계, 정적분과 넓이 관계, 속도와 거리 관계에서 나타나는 미적분의 기본정리를 분석하여 향후 교과서 개발 방향에 관한 시사점을 제언한다. 이에 따른 연구 문제는 다음과 같다.

1. 적분 개념은 발달 과정 동안 어떤 관점하에 형성되었는가?

2. 2015 개정 교육과정 수학 Ⅱ 교과서의 정적분 정의의 학습경로는 어떠한가?

3. 정적분과 미분 관계, 정적분과 넓이 관계, 속도와 거리 관계에서 미적분의 기본정리는 어떻게 나타나는가?

Ⅱ. 문헌검토

1. 역사 발생적 수학 학습 지도 원리

19세기 Haeckel은 '재현의 법칙(recapitulation law)'을 주장하였다. 재현의 법칙이란 개체가 진화하는 동안 진화의 단계가 반복한다는 주장이다. 다시 말해 인간의 태아도 다른 동물의 알 혹은 태아 상태의 성장 과정과 유사하다는 것이다. 19세에는 Haeckel의 재현의 법칙이 정신 발달에서도 역시 잘 성립한다고 보았다. 따라서 재현의 법칙은 수학 교육학에도 도입되어 학생의 수학 학습 역시 인류의 수학적 지식 발생을 재현하고, 역사 발생적으로 수학을 배우는 것이 학생들이 수학을 학습하는 가장 자연스러운 방법이라고 생각했다. Klein도 재현의 법칙이 역사 발생적 원리의 핵심을 잘 묘사한다고 생각하였다. Klein은 생물학적 원리를 인용하며 수학교육에서 학생들에게 너무 일찍 추상적이고 형식적인 내용을 제시하지 말 것을 주장했다. 수학적 개념들이 오랜 기간 형성되었던 것처럼 학생들의 수학 학습 역시 추상적인 형식화에 천천히 도달해야 한다고 말했다.

Lakatos(1976)은 준 경험주의 수리철학의 입장으로 수학적 지식은 절대적 참이 아닌 반증 가능하며 반증 되기 전까지만 참인 지식이라 생각하였다. 따라서 수학적 지식은 추측으로 출발하여 증명과 반례를 통한 반박, 증명 분석과 감추어진 보조정리를 찾아 추측을 개선 및 새로운 개념의 출현 과정이 반복되며 성장한다고 보았다. 그 예로 Euler의 다면체 정리의 역사적 발생 과정과 '연속함수열의 극한도 연속함수다.'라는 정리의 역사적 발생 과정을 비판적으로 분석하였다. 두 정리 모두 초기의 추측이 증명되어 정리로 자리를 잡았으나 반례가 출현함으로써 정리와 반례가 상충하게 된다. 곧 증명을 재분석하는 과정에서 감추어진 보조정리가 발견되었고 초기 추측을 개선할 수 있었다. 따라서 Lakatos는 Hackel의 재현의 법칙처럼 학습 과정에 역사 발생 순서 그대로 재현해

야 한다는 관점이 아니라 수학적 발견의 논리에 따라 수학사를 재조직하기를 주장하였다(우정호, 민세영, 2002).

Freudenthal은 역사적 발달 과정을 그대로 재현하는 것이 아닌 학습자가 교사의 적절한 안내에 따라 자신의 현실로부터 재발명 과정을 거치도록 해야 한다고 주장하였다. Freudenthal의 안내된 재발명은 근본적으로 학생이 활동을 통해 학습해야 한다는 교육관에 기반을 두고 있으므로 학습은 당연히 학생의 현실로부터 이루어져야 한다고 보았다(우정호, 민세영, 2002). Freudenthal은 수학을 완성된 결과 즉 기성 산물로 보는 기성 수학과 수학을 이 결과를 완성하기까지의 사고 활동 그 자체로 보는 실행 수학으로 구분하였다. 그러므로 학교수학에서 수학을 기성 수학으로 보고 완성된 결과를 전달하는 것이 아니라, 이 완성된 결과를 존재하게 한 사고 활동인'과정으로서의 수학'이 회복될 수 있도록 하는 것이 중요하다고 하였다.

우정호, 민세영(2002)은 수학 학습에서 수학적 사고의 본질에 자연스럽게 접근할 수 있게 하고, 학습자의 수학 학습 과정을 더 잘 이해하여 실제 지도에 반영하기 위해 수학사를 이용하려는 시도가 역사 발생적 학습-지도 원리라 하였다. 이 연구에서 재규정한 역사 발생적 원리에 따르면 역사 발생적 원리는 다음과 같다.

첫째, 역사 발생적 원리는 수학사관을 고려해야 한다. 즉 역사 발생에 대한 분석은 수학사를 기초로 이루어지지만, 수학사를 어떻게 보느냐 즉 관점에 따라 역사 발생의 단계를 여러 측면에서 볼 수 있다.

둘째, 역사 발생적 원리는 수학적 관점의 이해를 중시한다. 그러므로 교육적으로 중요한 것이 단순한 수학의 역사가 아닌 문제, 개념, 증명의 발생이 중요하고 그 발생의 결정적인 계기가 중요한 것이라 하였다.

셋째, 역사 발생적 원리는 수학의 역사 발생과 개체발생의 평행성을 가정한다. 즉 수학의 발달 과정과 학습 과정을 유사한 것으로 보기 때문에 수학적 개념의 역사 발생 과정과 학습자의 학습 과정 사이 평행성을 가정하고 역사 발생 과정을 학습 과정에 반영하는 것이다.

넷째, 역사 발생적 원리는 발생시킨 문제 문맥을 중시한다. 따라서 수학

적 개념의 발생과 발달 과정을 기초로 학습자가 수학적 관점을 더욱 잘 이해할 수 있도록 학습 과정을 구성하는 것이라 하였다.

다섯째, 역사 발생적 원리는 인식론적 장애의 극복과정을 중시한다. 인식론적 장애는 학습자가 수학적 개념을 학습할 때 하게 되는 반복적인 오류의 원인이 되므로 역사 발생 과정의 분석에서 인식론적 장애를 중시하고 학습 과정에 이를 반영하여 교재를 구성해야 한다.

여섯째, 역사 발생적 원리는 수학적 지식의 자연스러운 역사적 발생단계를 중시한다. 한 개념이 다른 개념보다 논리적으로 복잡한 성질이 있다는 가정하에 특정한 순서에 따른 지도방식은 실제로 가정이 맞지 않은 경우가 있고 제시 순서로 인하여 장애가 발생할 수 있다. 따라서 각 내용의 역사적 발달 과정과 발생 동기, 발달 단계를 파악하여 발생 순서에 따라 교재를 구성하는 것이 필요하다.

일곱째, 역사 발생적 원리는 학교수학에 대한 수학적 분석을 전제로 한다. 즉 역사 발생적 분석을 위해서는 먼저 지도할 내용이 풍부한 이해를 위해 수학적 분석이 필요하다.

여덟째, 역사 발생적 원리는 지도 단원의 구성으로 구체화 되어야 한다. 수학적 개념의 역사적 발생에 대해 탐구하고 이 탐구를 기초로 역사 발생 과정의 중요한 단계와 아이디어, 문제를 확인하고 수업에서 재구성하여 제시해야 한다.

본 연구는 역사 발생적 원리에 따라 적분 이론의 역사를 분석하여 적분에 대한 수학자들의 관점을 도출하고 이 관점을 학교수학에 도입할 것이다. 적분에 대해 여러 관점이 존재하고 학교수학에서 적분을 바라보는 관점이 어떤 관점 A와 같거나 유사하다면 그 관점 A에서 중요하게 여겼던 정리, 성질들을 부각하는 방향으로 교과서 개발을 제언할 것이다.

2. 선행연구 분석

2.1 적분의 역사 연구

정연준, 이경화(2009a)는 속도 그래프 아래의 넓이와 거리 계산 사이의 관계를 통해 미적분의 기본정리를 조명하고 이를 통해서 학생들의 이해에서 나타나는 문제점을 분석하였다. 이 연구에 따르면 미적분 발달 초기에는 미적분의 기본정리가 부정적분을 이용한 정적분 계산법과 정의 모두에 관련되었다. 19세기 코시에 의해 정적분이 엄밀하게 확립된 이후 정적분과 부정적분이 구분되고 정적분으로 부정적분을 정의할 수 있게 되었다. 따라서 거리 계산은 부정적분이 아닌 정적분의 대상이 되었다. 또한, 고등학생을 대상으로 부정적분만으로 거리계산을 했을 때 그 결과가 속도 그래프 아래의 넓이와 같다는 것을 어떻게 인식하는지 조사하였다. 그 결과 대다수 학생은 등속도 운동에 제한된 도식에 의존하여 넓이와 거리의 관계를 다루고 있었음을 알 수 있다.

Bressoud(2011), 강정기(2019)는 미적분의 기본정리에 대한 역사적 분석을 하였다. Barrow는 함수와 주어진 함수에 대한 넓이 함수를 같은 정의역에 배치하고 기하학적으로 넓이 함수의 접선의 기울기가 주어진 함수의 함숫값임을 보여 미적분의 기본정리를 증명하였다. Leibniz도 비슷하게 기하학적 관점에서 주어진 함수와 넓이 함수를 같은 정의역에 배치하였다. 따라서 곡선 아래의 넓이 $\int ydx$를 구하는 것은 $dz = ydx$를 만족하는 다른 형태의 증분 dz를 찾는 것이고 이 함수 z가 있다고 가정하고 그로부터 미적분학의 기본정리를 증명하였다. Newton은 미적분의 기본정리를 역학적 관점에서 이해하여 넓이 변화율이 곧 주어진 함수의 y좌표임을 직관적으로 이해하고 증명하였다. 19세기 이후에는 코시 적분 이론을 통해 정적분을 엄밀히 정의할 수 있었고 정적분으로 부정적분을 정의함에 따라 미적분의 기본정리가 증명되었다.

정연준, 이경화(2009b)는 부정적분과 정적분의 개념 발생 과정과 상호

간의 관계에 대한 분석을 시도하였다. 이 연구는 부정적분과 정적분 개념의 발생 과정을 크게 4단계로 구분하여 분석하였다. 뉴턴과 라이프니츠 이전 시기에는 넓이와 거리의 관계를 발견하고 부정적분과 정적분간의 관계를 이해하는 시기였다. 뉴턴과 라이프니츠 시기는 계산법으로 미적분을 확립하는 시기로 미분의 역을 이용해 거리를 계산하여 넓이를 계산할 수 있게 되었다. 18세기에는 정적분과 부정적분이 융합된 상태로 존재하면서 적분의 정의에 활용되거나 부정적분이 적분의 정의가 되기도 하였다. 19세기 이후에는 코시의 적분 이론을 통해 정적분 개념이 확립되었고 정적분과 부정적분의 분화가 일어났다.

김경화(2008)은 19세기 이후 적분 이론의 발달 과정을 분석하였다. 이 연구는 역도함수의 차로써 적분에서 코시 적분 이론, 리만 적분 이론, 르베그 적분 이론으로 발달하게 된 원동력이 함수에 대한 새로운 개념이라고 보았다. 푸리에가 제시한 푸리에 급수가 잘 정의되기 위해서는 적분의 존재성에 관한 문제가 해결되어야만 했다. 이 문제는 곧 코시 적분 이론의 발달을 이끌었다. 코시 적분 이론은 유한개의 점에서 불연속인 함수까지 정적분을 논할 수 있었다. 하지만 디리클레가 제시한 함수는 닫힌 구간의 모든 점에서 불연속인 함수이기에 코시 적분이 의미가 없는 함수가 되었고 더 일반적인 적분의 필요성이 제기됨에 따라 리만 적분이 발달하였다. 한동안 리만 적분이 가장 일반적이라 여겨졌으나 리만 적분 이론이 가진 약점들이 발견됨에 따라 이 약점들을 해결하기 위해 르베그 이론이 개발되었다. 여기서 리만 적분의 약점이란 미적분의 제2 기본정리에 대한 반례의 존재와 극한과 적분 사이 교환법칙이 성립하지 않는 것을 의미한다.

2.2 2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서 연구

박진희, 박미선, 권오남(2018)은 2015 개정 교육과정이 반영된 <수학 Ⅱ> 교과서 9종의 정적분의 도입 및 활용 단원을 분석하였다. 이를 통해 부정적분의 함숫값의 차로 정적분을 도입하는 방법과 활용에서 정적분과 넓이와의 관계를 설명하는 방법을 확인하고, 2015 개정 교육과정의 문서가 교과서에 어떻게 반영되었는지 확인하였다. 정적분의 도입 및 설명 방법은 다양했고 정적분과 넓이와의 관계는 정적분의 도입 방법의 영향을 크게 받음을 알 수 있다. 또한, 학생들이 정적분을 학습할 때 겪는 어려움을 최소화하도록 정적분 단원의 학습순서나 내용 설명 방식이 고려되었다. 이것은 2015 개정 교육과정의 방향인 학습 부담 경감에 적합한 방향이다.

이기돈(2019)는 '리만 합의 극한'을 '곡선과 x축 사이의 넓이'로서의 정적분 개념 등과 비교하여 도입하는 <미적분> 교과서의 '정적분과 급수의 합 사이의 관계'서술 내용을 <수학 Ⅱ> 교과서와의 연계성을 분석하였다. <수학 Ⅱ>와의 연계성 측면에서는 '곡선과 x축 사이의 넓이'로서의 정적분 개념을 먼저 상기한 후에 '리만 합의 극한'을 설명하고 그 둘을 비교하는 형태의 서술을 확인할 수 있었다. 또한 '정적분과 급수의 합 사이의 관계'를 정리하는 등식의 좌변이 정적분 기호인 교과서들과 리만 합의 극한인 교과서들은 제시하는 문항의 주요 유형에 있어서 차이가 있었음을 제시하였다.

신수진, 조완영(2018)은 '리만 합의 극한'이라는 아이디어가 정적분의 본질로 판단하였고 따라서 2015 개정 수학과 교육과정의 <수학 Ⅱ> 교과서가 미적분의 기본정리를 이용하여 정적분을 정의하였음에 문제의식을 제기하였다. 이 문제의식을 바탕으로'수열의 극한과 급수', 구분구적법을 학습하지 않고도 '리만 합의 극한'으로 정적분을 정의하는 가능성을 제시하였다. 다음의 세 가지 주장이 이 가능성을 뒷받침한다. 첫째 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$는 수열의 극한으로 볼 수 있으므로 급수를 모른다 해서

이해할 수 없는 것이 아니고 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x$는 함수의 극한 응용으로 볼 수도 있기에 계산할 수 있다. 둘째 함수의 극한 $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}$을 구하는 방법을 이용하여 수열의 극한 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$을 구할 수 있다. 따라서 수열의 극한을 배우지 않더라도 수열의 극한을 구할 수 있다. 셋째 구분구적법의 내용과 용어를 삭제하더라도 구분구적법의 아이디어를 이용하여 직관적인 수준에서 넓이를 정의하고 리만 합의 극한으로 정적분을 정의할 수 있다. 이로써 구분구적법을 학습하지 않고도 '리만 합의 극한'으로 정적분을 정의할 수 있음을 제시하였다.

김은숙, 조완영(2019)은 2015 개정 교육과정의 <수학 Ⅱ> 교과서의 수학사 활용 실태를 알아보기 위해 9종의 <수학 Ⅱ> 교과서에 나타난 수학사 활용 유형의 분포와 특징을 분석하였다. 그 결과 첫째 교과서에 제시된 수학사 과제가 대부분 정의적 도구로써 활용되었고 인지적 도구나 목표로 활용될 수 있는 수학사 과제는 부족한 것으로 나타났다. 둘째 수학교육에서 수학사 활용하는 이유에서 정의적 도구로 분류된 수학사 과제 대부분이 수학사나 수학의 일화를 소개하는 것이고 수학자가 겪었던 어려움 등을 통해 수학의 인간적 측면을 보여주는 수학자 과제는 1개로 나타났다. 셋째 정의적 도구와 목표로 분류된 수학사 과제는 모두 설명자료이고, 인지적 도구로 분류된 수학사 과제 10개 중 2개도 설명자료이고 8개만 모듈 자료로 나타났다.

이상의 선행연구 분석을 정리하면 적분 역사에 관한 연구 중 적분 개념의 태동부터 현대의 르베그 적분 이론으로 이행까지 적분 개념의 발달 역사를 분석한 연구들이 이루어졌다. 주로 코시 적분 이전의 역사를 분석한 논문들이 많았다. 이 연구들을 통해 미분과 적분은 미적분의 기본정리를 통해 연결되었고 정적분을 합의 극한으로 정의함에 따라 정적분과 부정적분이 구분되었다. 또한, 코시 적분, 리만 적분, 르베그 적분으로 이행될수록 적분 대상이 확장되고 적분에 관한 정리 역시 일반화되었음

을 알 수 있었다. 한편 ‘부정적분으로 정적분을 정의하다가 왜 코시 적분부터 정적분을 합의 극한으로 정의하였는지’, ‘정적분 정의가 대체되었음에도 왜 미적분의 기본정리를 유지하고자 하였는지’와 같은 적분에 대한 수학자들의 관점에 대한 논의를 한 연구는 미비하였다.

2015 개정 교육과정 교과서를 분석한 선행연구들은 교과서의 내용 전개 방식, 서술 방식, 수학사 활용 실태를 분석하였다. 그리고 리만 합의 극한이 정적분의 본질로 보고 정적분의 정의를 대체하려는 연구도 있었다. 하지만 선행연구 분석 결과 정적분이 부정적분의 함숫값의 차로 정의됨에 따라 적분 단원의 방향성을 제시한 연구도 미비했다. 김은숙, 조완영(2019)는 수학교육에서 수학사 활용이 중요함에도 대부분 설명자료뿐임을 통해 다른 형식의 수학사 과제개발의 필요성을 제시하였다. 그러므로 2015 개정 교육과정 교과서 분석을 통해 현 정적분 정의에 따른 적분 단원의 방향성을 제시하는 연구가 필요하다.

따라서 코시 적분 이론부터 현대 르베그 적분 이론까지 수학자들의 어떤 관점에 의해 발달하였는지 분석하고, 교과서의 적분 관점과 특징을 비교하여 향후 교과서 개발 방향을 제시하는 것은 정적분을 미적분의 기본정리로 정의한 적분 수업에 하나의 이정표를 설정하는 데 도움을 줄 것이다.

Ⅲ. 코시 적분으로 이행

1. 미적분의 기본정리로 정의된 코시 이전 적분

도형의 넓이, 부피를 찾기 위해 탄생했던 적분학은 배로(Isaac Barrow, 1630~1677), 뉴턴(Isaac Newton, 1643~1727), 라이프니츠(Gottfried Wilhelm Leibniz, 1646~1716)를 거쳐 18세기에는 본질적으로 미분학의 역과정으로 생각되었다. 특히 뉴턴은 면적과 부피 문제를 해결할 때 이 문제를 변화율의 역 문제처럼 다루었다.

뉴턴이 미적분에 접근한 방법은 갈릴레이, 케플러의 전통에 따른 동적인 방법이다. 그는 기하학의 대상인 곡선은 점, 곡면은 곡선, 입체도형은 곡면의 운동으로 해석하는 동적인 관점으로 해석했다. 이러한 운동은 시간이 흐르면서 실현되므로 운동을 하는 것은 독립변수인 시간에 따라서 변한다고 생각할 수 있다. 그러므로 뉴턴은 먼저 시간을 수학적으로 추상화하여 균등하게 흐르는 독립된 양으로 삼았다(조윤동, 2003; Bressoud, 2011). 시간이 균등하게 흐르는 양으로 해석함으로써 작은 x의 증분으로 인해 곡선 영역의 변화는 선분이 축을 따라 움직이면서 길이가 변화되어 생성된다고 볼 수 있었다. 따라서 무한히 작은 시간 간격 동안 추가된 무한히 작은 부분을 더하는 방식이 아니라 운동에 의해 생성된 양인 유량과 이 양들이 생성되는 속도인 유율이 도입되었다. 즉 뉴턴은 무한소의 합 아이디어를 변화율 아이디어로 바꿀 수 있었고 유량과 유율의 관계를 운동의 속도와 거리 관계를 통해서 도식화 할 수 있었다. 첫째는 운동체가 움직인 거리를 알 때(공간의 길이가 연속적으로 주어졌을 때), 임의의 시간에서 운동체의 속도를 구하는 것이다. 이것은 미분에 해당한다. 두 번째는 운동체의 속도와 시간을 알 때(운동의 속도가 연속적으로 주어졌을 때), 임의의 시간에 운동체가 움직인 거리(지나간 공간의 길이)를 구하는 것이다. 이것은 적분에 해당한다(박문환, 민세영, 2002; 조윤동, 2003; 정연준, 이경화, 2009b; 김부미, 박지현, 2011). 뉴턴

은 이 도식을 통해 미분과 적분의 역관계임을 직관적으로 이해할 수 있었고 미적분의 기본정리에 대한 직관적인 상을 얻을 수 있었다.
따라서 뉴턴과 계승자들에 의해 탄생한 무한소 해석학(the infinitesimal analysis)에서 다음 성질은 분명해 보였기 때문이다.

> 미분은 해석학의 기본적이며 중요한 연산이고 적분은 단지 미분의 역이다. 정적분이란 함수 $f(x)$의 원시함수 $F(x)$를 찾은 뒤 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$을 계산하는 것이었다(Medvedev, 1991: 179).

즉 코시 이전 적분은 미적분의 기본정리로 정의되었고 '넓이를 구하는 적분과 변화율(미분)에 따른 변화량을 나타내는 원시함수의 함숫값의 차가 같다.'라는 성질은 적분의 자연스러운 성질로 여겨졌다.
하지만 원시함수의 함숫값의 차로 정의된 정적분은 $f(x)$가 식으로 주어지지 않거나 임의로 주어졌을 때 원시함수 $F(x)$의 존재가 모호한 문제가 발생하게 되었다(Medvedev, 1991; Hawkins, 2001; 정연준, 이경화, 2009b)[1].

1) 라이프니츠는 적분을 무한소의 무한 합으로 정의하였으나 당시에 무한, 무한소는 문제가 많은 개념이었고 대부분의 수학자들이 라이프니츠의 정의를 거부하고 원시함수의 함숫값의 차로 적분 정의를 택하였다(김경화, 2008; Hawkins 2001).

2. 푸리에 급수와 적분의 존재성 문제

푸리에(Joseph Fourier, 1768~1830)는 1822년에 출간한 「열에 관한 해석적 이론(Théorie analytique de la chaleur)」에서 임의의 (유계)함수를 삼각급수로 표현할 수 있다는 아이디어를 제시하였다.

임의의 (유계)함수 f는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$f(x)=a+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\cdots$

$a=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)dt,\ \ a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos(kt)dt,\ \ b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin(kt)dt$ (Fourier, 1822: 203).

푸리에는 삼각급수의 계수들을 정적분으로 정의하였다. 그리고 정적분을 원시함수의 함숫값의 차로 정의하는 데 있어 문제점[2]을 잘 알고 있었기 때문에 곡선 아래 넓이로서의 정적분을 택했음을 Fourier(1822)에서 찾아볼 수 있다.

우리는 다음과 같은 $\frac{1}{2}\pi\phi(x)=a\sin x+b\sin 2x+c\sin 3x+d\sin 4x+\&c$ 식으로 표현된 함수에 대하여 연속적인 소거 방법을 통해 계수들이 정적분 값으로 표현됨을 알 수 있다. 이 부분은 어떻게 임의의 함수가 사인함수의 급수로 표현될 수 있는지 보여준다. 사실, 만약 함수 $\phi(x)$가 $x=0$에서 $x=\pi$까지 가로로 확장된 임의의 곡선의 세로좌표로 표현되고, 축의 동일한 부분에 세로좌표가 $y=\sin x$인 알려진 삼각 곡선이 구성되면 어떤 적분 항의 값을 나타내기 쉽다. 즉 각각의 가로좌표 x에 대하여 $\phi(x)$와 $\sin x$를 곱하면 $\phi(x)\sin x$의 세로좌표와 같을 것이고 이 연산을 연속적으로 시행하여 세로좌표가 $\phi(x)\sin x$인 세 번째 곡선을 만들 수 있다. 이 곡선의 $x=0$에서 $x=\pi$까지의 넓이는 $\sin x$의 계수와

---

2) 함수 $f(x)=\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ 와 같이 원시함수는 존재하지 않으나 그래프와 x축 사이의 넓이를 가지는 불연속함수들이 존재했다. 따라서 푸리에는 미적분의 기본정리로 정의된 적분 개념을 버리고 넓이로써 적분 개념을 취하게 된다.

같다. 그리고 어떤 곡선이 $\phi(x)$에 대응되든 우리가 $\phi(x)$에 해석적인 식을 주든 $\phi(x)$에 어떤 규칙을 주든 $\phi(x)$는 어떤 방식으로든 삼각함수 곡선으로 표현된다. 따라서 이 표현된 곡선의 넓이는 항상 존재하고 $\sin x$의 계수이다. 이와 같은 방식으로 $\sin 2x, \sin 3x$ 등을 곱하여 나머지 계수 역시 구할 수 있다(Fourier, 1822: 186).

푸리에는 임의의 함수 $\phi(x)$가 삼각급수로 표현되었을 때 각 계수를 정적분을 통해 정의하였다. 푸리에는 각 x에 대해 세로좌표 $\phi(x)$가 존재하기 때문에 이 세로좌표들이 평면의 한 영역을 결정하게 되고 결정된 영역이 명확한 면적을 갖는다는 것을 의심하지 않았다(김경화, 2008). 그리고 삼각함수 $\sin nx$도 크기가 -1과 1사이에 있으므로 $\phi(x)\sin nx$이 결정하는 영역 역시 명확한 면적을 갖는다고 생각하였다.

이처럼 푸리에는 임의의 함수의 정적분의 존재성을 함수의 세로 좌표점들 집합의 넓이 존재성에 기반을 두었다. 하지만 당시 양으로써 넓이가 제대로 정의되지 않았었고[3] 임의의 함수를 삼각급수로 나타낼 수 있다는 푸리에의 주장으로 인하여 $\int_a^b f(x)dx, \int_a^b f(x)\cos kx\,dx, \int_a^b f(x)\sin kx dx$를 어떻게 정확히 면적으로 정의하는지, 면적이 존재하는지 문제가 제기되었다(김경화, 2008; Cates, 2019; Hawkins, 2001). 따라서 적분의 정의, 적분의 존재성에 대한 논의가 이루어지게 되었고 코시(Augustin-Louis Cauchy, 1789~1857)는 이 문제를 새로운 적분 정의를 제시함으로 해결하였다.

3) 르베그(Lebesgue)가 넓이를 정의하기 전까지 넓이 개념은 다소 모호한 개념이었다.

3. 코시 적분 이론의 탄생

코시는 1823년 「Royal Polytechnic School에서 무한소 미적분에 대한 수업 요약(Résumé des lecons données à L'école royale polytechnique sur le Calcul Infinitésimal)」에 20회의 적분에 대한 강의를 실었다. 첫 적분 강의는 정적분에 대한 정의이다. 코시는 정적분을 다음과 같이 정의하였다.

$y=f(x)$를 두 유한 경계 $x=x_0, x=X$ 사이의 변수 x에 대한 연속함수라고 하자. 경계 $x=x_0$에서 경계 $x=X$로 증가하도록 두 경계 사이에 있는 점들을 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$라 표기한다. 그러면 $X-x_0$는 x_1-x_0, x_2-x_1, x_3-x_2, …, $X-x_{n-1}$로 나누어지고 모두 같은 부호를 갖는다. 다음 각 구간의 시작 점에 대응되는 함숫값 $f(x)$를 각 구간의 길이마다 곱한다. 즉 $f(x_0)$를 x_1-x_0와 곱하고 $f(x_1)$을 x_2-x_1과 곱하고, ..., $f(x_{n-1})$을 $X-x_{n-1}$과 곱하여 다음 합 S를 얻는다.
즉 $S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$ 이다.
이때 S는 첫째로 $X-x_0$를 나눈 횟수인 n에 의존하고 둘째로 분할(mode of division)에 의존한다. 만약 n이 충분히 커져 x_k-x_{k-1}이 충분히 작아지면 분할은 더 이상 S에 영향을 미치지 않을 것이다. 따라서 유일한 극한을 갖게 될 것이고 이 극한을 $\int_{x_0}^{X} f(x)dx$라 한다(Cates, 2019: 111).

이어서 코시는 합 S가 $X-x_0$를 나눈 횟수 n과 분할에 의존하지 않고 유일한 극한을 가짐을 증명하였다.

먼저 구간이 $x=x_0, x=X$ 일 경우 사잇값 정리(Intermediate Value Theorem)에 의해 0과 1사이 θ에 대하여 $S=(X-x_0)f[x_0+\theta(X-x_0)]$이다. 이제 두 경계 $x=x_0, x=X$ 사이에 $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ 가 추가된 경우 각 부분 구간에 대해 사잇값 정리를 이용하여 $S=(x_1-x_0)f[x_0+\theta_0(x_1-x_0)]+(x_2-x_1)f[x_1+\theta_1(x_2-x_1)]+\cdots$
$+(X-x_{n-1})f[x_{n-1}+\theta_{n-1}(X-x_{n-1})]$ 임을 얻는다. 이제 모든 $k=0,1,\dots,n-1$에 대하여 $f[x_k+\theta_k(x_{k+1}-x_k)]=f(x_k)\pm\epsilon_k$ 라 하면

$S=(x_1-x_0)[f(x_0)\pm\epsilon_0]+(x_2-x_1)[f(x_1)\pm\epsilon_1]+\cdots+(X-x_{n-1})[f(x_{n-1})\pm\epsilon_{n-1}]$ 이고 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$$
$$\pm\epsilon_0(x_1-x_0)\pm\epsilon_1(x_2-x_1)\cdots\pm\epsilon_{n-1}(X-x_{n-1}).$$

따라서 각 부분 구간 $x=x_k, x=x_{k+1}$의 길이가 매우 작으면 $\pm\epsilon_k$도 0과 차이가 거의 없으므로 S는 $(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(X-x_{n-1})f(x_{n-1})$와 같아진다.[4] 즉 원래 분할에서 더 세분하여도 S의 값에 영향을 미치지 않는다. 즉 합 S는 나누는 횟수 n에 의존하지 않음을 증명하였다.

이제 아주 작은 길이의 구간들로 구성된 두 분할 P_1, P_2가 있을 때 P_1, P_2에 대한 세분할(refinement)을 세 번째 분할 P_3로 생각하자. 그러면 분할 P_1에서 분할 P_3로 혹은 분할 P_2에서 분할 P_3로 세분할 될 때 얻은 S는 두 분할 P_1, P_2로부터 얻은 각각의 S와 거의 차이가 나지 않음을 증명 할 수 있다. 따라서 주어진 두 분할 P_1, P_2로부터 얻은 S들 역시 차이가 나지 않음을 보일 수 있다. 즉 합 S는 분할에 의존하지 않음을 증명하였다. 그러므로 n이 충분히 커져 부분 구간의 개수가 많아지고 부분 구간 $x=x_k, x=x_{k+1}$의 길이가 매우 작으면 분할은 더 이상 S에 영향을 미치지 않을 것이고 결국 S는 상수가 된다. 이 극한을 정적분이라 한다(Cates, 2019: 112-114).

이렇게 코시는 정적분을 합의 극한으로 새롭게 정의하였고 자신의 정의로부터 모든 연속함수에 대한 정적분이 존재함 역시 증명하였다. 그리고 불연속함수에 대해서도 자신의 정적분 정의를 다음과 같이 확장하였다.

주어진 구간에서 유계인 함수 $f(x)$이 $x=\xi$에서 불연속이고 $\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{x_0}^{\xi-\epsilon} f(x)dx$, $\lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\xi+\epsilon}^{X} f(x)dx$ 의 극한이 존재한다면,

$\int_{x_0}^{X} f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{x_0}^{\xi-\epsilon} f(x)dx + \lim_{\epsilon\to 0+}\int_{\xi+\epsilon}^{X} f(x)dx$ 이다(Cates, 2019: 134).

따라서 귀납법을 이용하여 유한개의 점에서 불연속인 함수(즉 조각적

4) 코시는 $f(x)$가 연속임을 사용하여 이를 증명하였지만 사실 코시가 사용한 것은 $f(x)$가 균등 연속임을 사용하였다.

연속함수)까지 정적분을 논할 수 있게 되었다.

코시는 새로운 적분 정의를 통해 정적분의 존재성, 성질, 원시함수의 존재성 그리고 미적분의 기본정리 등을 증명할 수 있었다. 그리고 코시의 정의를 통해서 조각적 연속함수에 대한 적분 역시 쉽게 정의되었다. 코시 적분은 당시 "$\int_a^b g'(x)dx$는 항상 $g(b)-g(a)$이다."라는 명제에 대한 반례들과 불연속 혹은 함숫값이 무한한 점을 포함하는 함수에 관한 적분 등의 문제점들을 해결하였다. 코시 이전 정적분 정의로 인해 수학에 존재하던 많은 문제점을 해결한 코시의 적분 정의는 향후 리만이 무한개의 불연속 점을 갖는 함수에 대해서도 적분이 가능한 리만 적분으로 확장시키는데 영향을 주었다.

4. 코시의 적분에 대한 관점

4.1 미분과 독립적으로 합의 극한으로써 정의

코시의 정의에는 함수 $f(x)$에 연속이란 조건 외에 다른 조건을 주지 않았다. 특히 어떤 함수의 도함수라는 조건을 주지 않으므로 코시가 정의한 정적분이 미분에 독립적이라는 걸 보여준다(Cates, 2019; Medvedev, 1991). 코시가 정적분을 미분에 독립적으로 정의한 이유는 코시는 "구적법 이론에 의해" 적분을 합으로 생각하게끔 "자연스럽게 이끌린다"라고 하였기 때문이다. 그리고 합으로써의 정의가 엄밀한 미적분학을 위해서 반드시 필요했기 때문이다. 코시는 푸리에를 비롯한 여러 수학자가 곡선 아래의 면적으로서의 정적분이 타당한 여러 예와 $\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a)$에 대한 반례들을 보였었다는 것을 인지하고 있었을 것이다(김경화, 2008). 그리고 미분에 대한 코시의 정의에서 불연속하지만 적분 가능한 도함수가 존재함을 알고 심지어 불연속적인 곡선이어도 넓이를 잘 정의할 수 있다고 생각했기 때문이다(Boyer, Merzbach, 2011). 따라서 코시는 기존 적분 정의로 인해 발생하는 문제점들을 해결하기 위하여 미분과 관련이 없는 넓이를 통해서 적분을 정의하려 하였고 임의의 도형의 넓이를 구하는 방법인 구적법에 기초하여 적분을 정의함을 알 수 있다. 넓이로써 정적분을 생각했다는 코시의 아이디어는 코시가 정적분을 정의한 뒤 곧이어 정적분과 넓이 사이의 관계를 서술한 내용으로부터 확인할 수 있다.

구간 $x = x_0$, $x = X$ $(X > x_0)$에서 $f(x)$의 함숫값이 항상 양수라고 하자. 그리고 x, y는 직교 좌표계를 나타내고 x축과 곡선 $y = f(x)$ 그리고 직선 $x = x_0$와 $x = X$를 경계로 이루어진 곡면 T 의 넓이를 A라고 하자. 그리고 구간 $[x_0, X]$에서 $f(x)$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 한다면 곡면 T는 밑변이 구간 $[x_0, X]$이고 높이가 M인 직사각형과 밑변이 구간 $[x_0, X]$이고 높이가 m인 직사각

형에 포함되어 있다. 따라서 0과 1 사이 θ에 대하여 $A=(X-x_0)f[x_0+\theta(X-x_0)]$ 이다. 이제 구간 $[x_0,X]$를 아주 작은 길이의 부분 구간들 $[x_0,x_1], [x_1,x_2], \ldots, [X,x_{n-1}]$로 나누면 곡면 T도 구간에 대응되어 부분 곡면들로 나누어지고 곡면 T의 넓이 A는 다음과 같이 나타낼 수 있다. "0과 1사이인 $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{n-1}$에 대하여

$A=(x_1-x_0)f[x_0+\theta_0(x_1-x_0)]+(x_2-x_1)f[x_1+\theta_1(x_2-x_1)]+\cdots$

$+(X-x_{n-1})f[x_{n-1}+\theta_{n-1}(X-x_{n-1})]$" 이다. 이제 극한을 통해 부분 구간들의 길이를 한없이 작게 만들면 $A=\int_{x_0}^{X} f(x)dx$를 얻는다(Cates, 2019: 125-126).

이처럼 코시의 정적분 정의에서는 넓이가 포함되어 있지는 않지만, 코시는 기하학적으로 자신의 정적분 정의를 곡선 아래 넓이와 연결시켰다. 코시가 새롭게 정의한 정적분은 기존의 정적분 정의가 수행하지 못했던 역할을 수행하였고 미분과 독립적인 개념으로서의 위상을 얻을 수 있었다. 즉 코시는 적분 이론의 엄밀한 전개를 위해서는 합의 극한으로써 정적분 정의가 필요하다고 보았음을 알 수 있다.

4.2 미적분의 기본정리를 통한 미분과의 연결

코시 전에는 정적분을 원시함수의 함숫값의 차로 정의했기 때문에 넓이에 기반을 둔 합의 극한을 택한 코시의 정의는 미분에 독립적이게 되었다. 한편 코시는 정적분 정의를 단지 넓이를 수학적으로 엄밀하게 정의하려고만 한 것이 아니라 부정적분을 염두에 둔 것이기도 하였다. 즉 정적분을 엄밀하게 정의하면서 원시함수의 존재성을 보장할 필요성에 대하여 지적하였다(Grabiner, 2005; 정연준, 이경화, 2009b).

적분과 원시함수의 다양한 성질을 다루기 전에 적분 혹은 원시함수의 존재성을 일반적으로 증명하는 것이 적분법에서 필요한 것처럼 보인다. 이를 위해서 제일 먼저 두 경계 사이에서 취한 적분 혹은 정적분 개념을 확립하는 것이 필요하다(Cates, 2019: xvi).

코시가 원시함수의 존재성을 보장하려고 한 이유는 미적분의 기본정리를 위해서이다. 정적분이 엄밀하게 정의된다면 윗 경계를 변수로 하는 도함수의 정적분을 부정적분으로 정의할 수 있고 그럼 미적분의 기본정리를 쉽게 정리할 수 있기 때문이다. 따라서 코시는 부정적분 $F(x)$을 한 경계를 변수 x로 둔 정적분 $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$을 통해서 정의하였다. 즉 $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx$로 정의하였고 이어 $F(x)$가 $f(x)$의 부정적분임을 증명하고 이로써 미적분의 제1 기본정리를 증명하였다.

정적분의 평균값 정리에 의해 $0<\theta<1$에 대해 $F(x)=(x-x_0)f[x_0+\theta(x-x_0)]$이고 $F(x_0)=0$이다. 이제 정적분의 구간에 대한 덧셈 성질을 통해 $\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x)dx-\int_{x_0}^{x} f(x)dx=\int_{x}^{x+\alpha} f(x)dx=\alpha f(x+\theta\alpha)$이고 앞서 정의한 함수 $F(x)$로 나타내면 $F(x+\alpha)-F(x)=\alpha f(x+\theta\alpha)$이다. 따라서 $f(x)$가 $x=x_0$부터 $x=X$까지 유계이고 연속이라면 $F(x)$ 역시 유계이고 연속이다. 다음 양변을 α로 나누고 α를 0으로 극한을 취하면 $F'(x)=f(x)$ 즉 $\frac{d}{dx}\int_{x_0}^{x} f(x)dx=f(x)$를 얻게 된다. 따라서 $F(x)$가 $f(x)$의 부정적분이고 미적분의 제1 기본정리가 증명된다(Cates, 2019: 137-138).

그리고 코시는 방정식 $dy=f(x)dx$의 일반 해를 찾는 문제를 통해 미적분의 제 2 기본정리를 다음과 같이 증명하였다.

만약 $G(x)$를 y의 특수해라 하고 $G(x)+\overline{w}(x)$[5]를 y의 일반 해라고 하자. 그러면 $G'(x)=f(x), G'(x)+\overline{w}'(x)=f(x)$ 그리고 $\overline{w}'(x)=0$이다. 미적분의 제1 기본정리에 의하여 $y=\int_{x_0}^{x} f(x)dx$이라 한다면 방정식 $dy=f(x)dx$를 만족시키므로

5) 함수 $\overline{w}(x)$는 조각적 상수함수이다.

특수 해이다. 따라서 y의 일반 해는 $y=\int_{x_0}^{x} f(x)dx+\overline{w}(x)$이다.

코시는 y의 일반적인 값을 $\int f(x)dx$라 표현하였고 부정적분이라고 하였다. 이제 $G(x)$가 $\int_{x_0}^{x} f(x)dx$와 다르다면 $F(x)=\int_{x_0}^{x} f(x)dx=G(x)+\overline{w}(x)$이다. 두 경계 $x=x_0, x=X$ 사이에서 함수 $f(x)$와 $G(x)$ 모두 연속함수라고 하자. 그러면 $F(x)$ 역시 연속이고 $\overline{w}(x)=F(x)-G(x)$이므로 연속이다. 따라서 $\overline{w}(x)=\overline{w}(x_0)$, $F(x)-G(x)=F(x_0)-G(x_0)=-G(x_0)$ 이므로 $F(x)=G(x)-G(x_0)$이다. 따라서 $\int_{x_0}^{x} f(x)dx=G(x)-G(x_0)$이고 $x=X$를 대입하면 $\int_{x_0}^{X} f(x)dx=G(X)-G(x_0)$로 미적분의 제2 기본정리가 증명된다(Cates, 2019: 139-141).

Laugwitz(1999)에 따르면 코시에 의해 미적분의 제1 기본정리는 적분의 정의적인 성질보다는 유도되는 성질이 되었다. 그리고 Cates(2019)에 따르면 코시는 만약 한 부정적분을 안다면 미적분의 제2 기본정리를 통해 정적분을 계산하기 위해 합의 극한을 구하는 과정을 완전히 피할 수 있음을 보여주었다. 코시는 원시함수로 정의된 $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$의 적분 정의를 버리는 것이 아니라 자신의 정의를 통해 정리로써 포함시키려고 하였다. 이것은 연속함수에 한해서 자신의 적분 정의가 코시 이전 적분 정의로 대체될 수 있음을 보여준 것이다. 이는 기존 수학자들이 보인 반례들을 통해 코시 이전 적분 정의를 정적분의 정의로 선택하기엔 무리가 있으나, 넓이와 변화율, 변화량을 연결하는 미적분의 기본정리가 정적분의 자연스럽고 중요한 성질 중 하나로 인식하고 있었음을 알 수 있다.

Ⅳ. 리만 적분으로 확장

1. 디리클레 함수와 정적분의 존재성 문제

디리클레(Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, 1832~1858)는 유한구간에서 무한개의 불연속 점을 갖는 함수의 존재에 대해 처음으로 고려하였고 이러한 특징을 갖는 함수에 대한 적분 개념을 확장하는 문제를 고민하였다(Hawkins, 2001). 당시 코시의 적분 정의에 따라 적분을 조각적 연속함수까지 논할 수 있었다. 그러나 만약 함수가 닫힌 구간에서 무한개의 불연속 점을 갖는다면 코시 적분인 $\int_a^b f(x)dx$는 아무 의미를 갖지 못하게 되었다. 따라서 디리클레는 이러한 함수를 다루기 위해 무한소 해석학의 기본 원리와 연결되고 포괄적인 새로운 적분 이론이 필요하다고 제안했다(Dunham, 2005). 디리클레는 확장된 적분 이론을 개발하진 못하였으나 무한개의 불연속 점을 갖는 함수가 존재한다는 것을 제시하였다. 현재는 잘 알려진 디리클레 함수로 x가 유리수일 땐 $D(x)=0$, x가 무리수일 땐 $D(x)=1$인 함수 $D(x)=\begin{cases}1 & x\notin Q\\ 0 & x\in Q\end{cases}$ 를 제시하였고[6] 식으로 정의되지도 않고 평면에 곡선으로 그릴 수도 없는 함수이다.

따라서 디리클레 함수는 코시의 연속 정의에 따라 모든 점에서 불연속인 함수이고, 코시의 적분 정의로 디리클레 함수의 적분에 대하여 더 이상 논할 수 없었다. 디리클레 함수와 같은 예시로 인하여 새로운 적분

---

6) 18세기에는 달랑베르(Jean-le-Rond d'Alember, 1717~1783)과 오일러(Leonhard Euler, 1707~1783)의 함수 개념에 대한 논쟁이 있었을 만큼 함수 개념이 확립되지 않았던 시기이다(김경화, 2008). 디리클레 함수 $D(x)$는 x와 $f(x)$의 대응으로서 함수 개념을 사용하였다. Hawkins(2001)에 따르면 해석적 표현보다 대응으로서 함수 개념은 오일러와 푸리에의 임의의 함수 개념에 의해 제시됐으나 디리클레 전에는 대응으로서 함수 개념을 진지하게 받아들이지 않았었다.

이론에 대한 동기가 부여되었고 그의 제자인 리만이 함수의 연속성과 적분가능성을 분리시킨 적분 이론을 개발하게 된다.

2. 리만 적분 이론의 탄생

디리클레의 제자였던 리만(Georg Friedrich Bernhard Riemann, 1826~1866)은 디리클레가 제기하였던 새로운 적분 이론에 대해 고민하였다. 즉 “언제 함수가 적분 가능한가?”의 디리클레의 질문으로부터 시작하였다. 리만은 적분 가능성의 의미를 함수에 대응되는 코시 합으로 해석하였다. 따라서 질문은 곧 “어떤 조건에서 함수의 코시 합이 분할의 크기가 0이 됨에 따라 유일한 극한을 갖는가?”로 번역되었다(Hawkins, 2001). 결국, 리만은 1854년 「함수를 삼각급수로 나타낼 수 있는 것에 대하여(Über die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe)」를 괴팅겐 대학교에 제출하고 한동안 널리 인정받는 적분 이론이 세상에 알려지게 된다. 리만은 다음과 같이 적분을 정의하였다.

$f(x)$를 구간 $[a,b]$에서 유계인 함수라고 하자. a,b사이에 차례로 $x_1,x_2,...,x_{n-1}$를 선택하고 편의를 위해 x_1-a는 δ_1, x_2-x_1는 δ_2, ...,$b-x_{n-1}$ 는 δ_n이라 하고 $0 \le \epsilon_k < 1$이라 하자. 그러면 다음과 같은 합 S를 얻는다.

$$S=\delta_1 f(a+\epsilon_1\delta_1)+\delta_2 f(x_1+\epsilon_2\delta_2)+\cdots+\delta_n f(x_{n-1}+\epsilon_n\delta_n)$$

이 합S는 구간 δ와 수 ϵ의 선택에 의존한다.
그러나 δ와 ϵ의 선택에 상관없이 모든 δ가 한없이 작아질 때 고정된 극한 A로 한없이 다가가는 성질(R_1)을 가지면 그 극한을 $\int_a^b f(x)dx$라 한다. 만약 이 성질을 갖지 않는다면 $\int_a^b f(x)dx$는 아무 의미를 갖지 않는다(Riemann, 1854: 12-13).

그리고 적분 존재성에 대한 필요충분조건을 다음과 같이 제시하였다.

δ들이 충분히 작아진다면 합 S가 충분히 작아진다고 가정하자.
$x=a$와 $x=x_1$ 사이에 변화폭 즉 이 구간에서 가장 큰 함숫값과 가장 작은 함

숫값의 차를 D_1이라 하고 $x=x_1$과 $x=x_2$ 사이의 변화폭은 D_2로, ..., $x=x_{n-1}$과 $x=b$ 사이의 변화폭은 D_n으로 표기하자. 그러면 δ들이 한없이 작아짐에 따라 $\delta_1 D_1+\delta_2 D_2+\cdots+\delta_n D_n$은 한없이 작아진다.

이제 모든 δ들이 σ보다 작다고 가정하고 고정된 수 $d>0$에 대하여 부분 구간들의 길이가 d보다 작거나 같은 분할에 대하여 $\delta_1 D_1+\delta_2 D_2+\cdots+\delta_n D_n$의 최댓값을 $\triangle$라 하자($\triangle$는 d에 대한 함수이다). 그러면 $f(x)$가 적분 가능하다는 것은 d가 충분히 작으면 $\triangle$가 0으로 수렴하는 것과 같다.

이제 σ보다 큰 변화폭을 갖는 구간의 총 길이를 s라고 하면 다음이 성립한다.

$$\sigma s \le \delta_1 D_1+\delta_2 D_2+\cdots+\delta_n D_n \le \triangle \ , \ s \le \frac{\triangle}{\sigma}.$$

σ가 주어졌을 때 d를 적절히 선택함으로 $\frac{\triangle}{\sigma}$는 원하는 만큼 작게 만들 수 있다. 따라서 s도 동일하게 적용되어 결과는 다음과 같다.[7] σ에 상관없이 변화폭이 σ보다 큰 구간의 총 길이는 d를 적절히 선택함으로 임의로 작게 만들 수 있다(R_2). 즉 R_2는 R_1의 필요조건이다.

반대로 $f(x)$가 유한하고 δ들과 주어진 σ보다 큰 변화폭을 갖는 구간의 총 길이 s가 한없이 작아질 수 있다면 합 S는 수렴한다. 먼저 $f(x)$가 R_2를 만족한다면 다음이 성립한다.

$$\delta_1 D_1+\delta_2 D_2+\cdots+\delta_n D_n \le Ds+\sigma(b-a) \ (D\text{는 } f(x)\text{의 } [a,b]\text{에서 변화폭}).$$

따라서 σ를 한없이 작다고 가정하면 s역시 한없이 작아질 것이고 따라서 $\delta_1 D_1+\delta_2 D_2+\cdots+\delta_n D_n$도 한없이 작아진다. 즉 R_2는 R_1의 충분조건이다(Riemann, 1854:14-15).

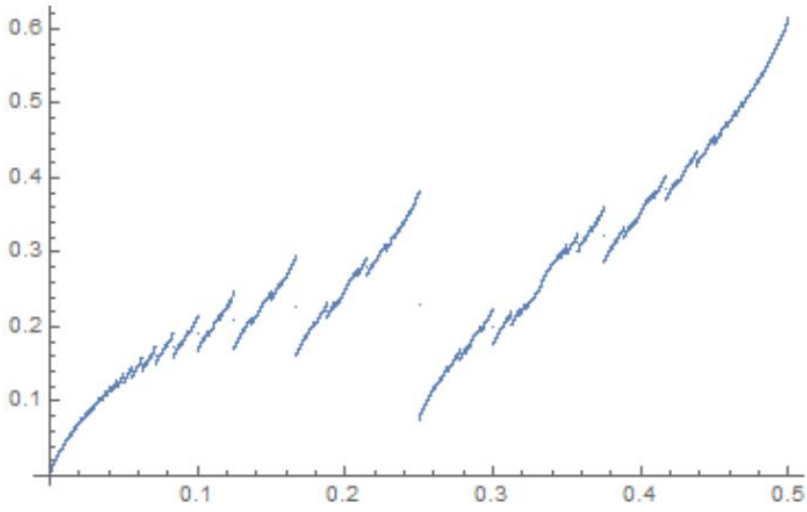
적분 가능성에 대한 리만의 아이디어는 다소 기호적으로 복잡하였음에도 불구하고 근본적인 아이디어는 간단했다. 바로 “함수가 리만 적분을 갖기 위해서는 함수의 변화폭이 통제(control) 아래 있어야 한다”라는 아이디어이다. 즉 함수가 너무 자주 그리고 광범위하게 변화폭이 크다면 적분 될 수 없다. 기하적인 관점에서 그러한 함수는 곡선 아래 넓이가 정의될 수 없을 것 같기 때문이다(Dunham, 2005). 리만이 제시한 적분 가능성은 디리클레가 제기했던 무한개의 불연속 점을 갖는 함수에 대한

7) $f(x)$가 적분 가능하다는 것은 d가 충분히 작으면 $\triangle$가 0으로 수렴하는 것과 같다는 성질에 의해서 성립한다.

적분을 논할 수 있게 되었다. 이는 리만이 제시한 예와 디리클레 함수에 관하여 확인할 수 있다.

리만은 무한개의 불연속 점을 가짐에도 리만 적분 가능한 함수에 대한 예시도 제시하였다.

먼저 함수 (x)를 $(x)=\begin{cases} x, & -\frac{1}{2}<x<\frac{1}{2} \\ 0, & x=\pm\frac{1}{2} \end{cases}$ 이고 모든 x에 대해 주기가 1인 함수를 정의하였다. 다음 함수 $f(x)$를 정의한 함수 (x)를 이용하여 $f(x)=\frac{(x)}{1}+\frac{(2x)}{4}+\frac{(3x)}{9}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2}$와 같이 정의하였다. 그러면 $f(x)$는 모든 x에 대해 급수가 수렴하므로 잘 정의된 함수이고 $x=\frac{p}{2n}$ ($\frac{p}{2n}$은 기약분수)에서만 불연속인 함수이다. 함수 $f(x)$가 모든 $x=\frac{p}{2n}$에서 불연속인 이유는 $f(x+0)=f(x)-\frac{1}{2n^2}(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots)=f(x)-\frac{\pi^2}{16n^2}$이고 $f(x-0)=f(x)+\frac{1}{2n^2}(1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\cdots)=f(x)+\frac{\pi^2}{16n^2}$ 이므로 극한이 존재하지 않은 것을 확인할 수 있다. $f(x)$가 실수의 조밀한(dense) 집합에서 불연속함수임에도 불구하고 모든 유계 닫힌 구간에서 리만 적분 가능하다. 왜냐하면, 임의의 $\sigma>0$에 대하여 오직 유한개의 점 $x=\frac{p}{2n}$을 포함한 구간에서만 σ보다 큰 변화폭 $f(x-0)-f(x+0)=\frac{\pi^2}{8n^2}$이 존재한다. 따라서 리만의 적분 가능 조건 R_2를 만족시키므로 리만이 제시한 함수 $f(x)$는 리만 적분 가능하다.



[그림 Ⅳ-1] 리만이 제시한 함수 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(nx)}{n^2}$의 그래프 (Ruch, 2017)

이와 반대로 디리클레 함수는 무한개의 불연속 점을 가짐에도 리만 적분 불가능한 함수임을 다음을 통해 알 수 있다.

$\sigma=\frac{1}{2}$라고 하고 임의의 분할 $0<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<1$을 고르자. 모든 부분 구간 $[x_{k-1},x_k]$에 대한 변화폭 $D_k=1-0=1$이다. 이제 σ보다 큰 변화폭을 갖는 구간의 총 길이인 s는 다음과 같다.

$$s=(x_1-0)+(x_2-x_1)+\cdots+(1-x_{n-1})=1.$$

따라서 리만의 적분 가능 조건 R_2를 만족하지 못하므로 디리클레 함수는 리만 적분 불가능한 함수이다.

두 함수에 대한 적분 가능성을 확인함으로써 리만이 제시한 새로운 적분 이론은 코시의 적분 이론보다 훨씬 방대한 함수들에 적용 가능함이 확인되었다. 하지만 리만은 적분을 정의한 것 외에 적분에 대한 아무런 정리도 증명하지 않았다. 그리고 리만 적분에 관한 이론들은 프랑스 수학자 다르부에 의해 확립된다.

3. 다르부의 리만 적분 확립

다르부(Jean Gaston Darboux, 1842~1917)는 1875년 「불연속함수에 대한 논문(Mémoire sur les fonctions discontinues)」에서 리만 적분을 새로운 형태로 정의하였다.

함수 $f(x)$가 임의의 구간 $[a,b]$ 에서 정의된 유계함수이고 구간 $[a,b]$에 $n-1$개의 점 $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$을 추가한 분할 $a(=x_0) < x_1 < x_2 < \ ... \ < x_{n-1} < b(=x_n)$에 대하여 $M = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \cdots + M_n\delta_n$, $m = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \cdots + m_n\delta_n$, $\Delta = \Delta_1\delta_1 + \Delta_2\delta_2 + \cdots + \Delta_n\delta_n$ 를 생각하자. 이때 $\delta_i = x_i - x_{i-1}$, $M_i = \sup f(x)\,(x_{i-1} \le x \le x_i)$, $m_i = \inf f(x)\,(x_{i-1} \le x \le x_i)$, $\Delta_i = M_i - m_i$ 로 δ_i는 구간 $[x_{i-1}, x_i]$의 길이, M_i는 구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 $f(x)$의 최소상계, m_i는 구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 $f(x)$의 최대하계, Δ_i는 구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 $f(x)$의 변화폭을 의미한다.
이제 나눈 횟수 n이 충분히 커지고 모든 구간의 길이가 0에 한없이 가까워진다면 연속함수나 불연속함수에 상관없이 M, m, Δ는 유일한 극한값으로 수렴할 것이다. 이 극한값들은 오직 함수 $f(x)$와 구간의 경계 a,b에만 의존한다 (Darboux, 1875: 72).

다르부는 먼저 합 M, m과 변화폭 Δ이 유일한 극한을 가짐을 보인 뒤 리만 적분을 다음과 같이 재정의하였다.

함수 $f(x)$가 임의의 구간 $[a,b]$ 에서 정의된 유계함수이고 구간 $[a,b]$에 $n-1$개의 점 $x_1, x_2, ..., x_{n-1}$을 추가한 분할 $a(=x_0) < x_1 < x_2 < \ ... \ < x_{n-1} < b(=x_n)$에 대하여 합 $\sum = \delta_1 f(a + \theta_1\delta_1) + \delta_2 f(x_1 + \theta_2\delta_2) + \cdots + \delta_n f(x_{n-1} + \theta_n\delta_n)$ 를 생각하자.
여기서 $\delta_i = x_i - x_{i-1}$이고 θ_i는 0과 1 사이의 실수이고 합 $\sum$는 δ_i와 θ_i에 의존한다. 이제 M_i는 구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 $f(x)$의 최소상계, m_i는 구간 $[x_{i-1}, x_i]$에서 $f(x)$의 최대하계라 한다면 $\delta_i f(x_i + \theta_{i+1}\delta_{i+1})$는 θ_{i+1}에 상관없이 $\delta_i m_i \le \delta_i f(x_i + \theta_{i+1}\delta_{i+1}) \le \delta_i M_i$를 만족시킨다. 따라서 합 $\sum$는
$M = M_1\delta_1 + M_2\delta_2 + \cdots + M_n\delta_n \le \sum \le m = m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \cdots + m_n\delta_n$를 만족시킨다.
이제 만약 구간의 개수가 한없이 많아지고 모든 구간의 길이가 0에 한없이

가까워진다면, θ_i들에 상관없이 합 $\sum$가 극한을 갖기 위한 필요충분조건은 M과 m의 극한이 같아지는 것이다. 즉 임의의 σ에 대하여 모든 구간의 길이가 0에 한없이 가까워질 때 σ보다 변화폭이 큰 구간의 길이들의 합이 0에 한없이 가까워지는 것과 필요충분조건이다. [8]따라서 위와 같은 조건이 만족하였을 때, $\sum$의 극한을 a부터 b까지 $f(x)$의 정적분이라 정의하고 $\lim\sum=\int_a^b f(x)dx$ 라고 표기한다(Darboux, 1875:72-73).

다르부는 적분 정의를 제시한 뒤 다음 명제들을 증명함으로써 리만 적분 이론을 확립하였다.

[명제 1] 모든 연속함수는 적분 가능하다.
[명제 2] $f(x)$의 유한개의 함숫값을 바꾸어도 여전히 적분이 가능하고 적분 값도 변하지 않는다.
[명제 3] 임의의 유계함수 $f(x)$에 대하여 $\int_a^x f(x)dx$는 항상 x에 대한 연속함수이다.
[명제 4] $F(x)=\int_a^x f(x)dx$라 하고 $f(x)$는 $x=x_0$에서 연속이라 하자. 그러면 $F(x)$는 $x=x_0$에서 미분가능하고 $F'(x_0)=f(x_0)$이다.
[명제 5] 구간 $[a,b]$에서 함수 $F(x)$가 리만 적분 가능 도함수 $f(x)(=F'(x))$를 가지면
$a\le x\le b$인 모든 x에 대하여 $\int_a^x f(x)dx=F(x)-F(a)$이다.

특히 [명제 1]을 통해 리만과 다르부의 적분 정의는 코시의 적분 정의를 포함하는 확장된 적분 정의임을 알 수 있다. 이로써 리만 적분 이론은 확립되었고 한동안 대표적인 적분 이론으로 자리를 잡게 된다.

---

8) 이로써 다르부의 적분 가능 조건이 리만의 적분 가능 조건 R_2와 필요충분관계에 있으므로 다르부의 적분 정의와 리만의 적분 정의는 일치한다.

4. 리만과 당대 수학자들의 적분에 대한 관점

4.1 미분과 독립적으로 합의 극한으로써 정의

리만은 코시의 적분 정의를 기반으로 하여 함수 $f(x)$에 대하여 연속이라는 가정이 제거된 합의 극한으로써 적분 정의를 제시하였다. 즉 코시와는 다르게 리만에게는 함수의 연속성은 전혀 문제가 되지 않았다(Dunham, 2005). 따라서 리만 적분은 함수가 유계일 때 적분 가능성을 논할 수 있는 코시보다 확장된 정의이다. 리만 적분은 코시 합에 기반을 둔 가장 일반화된 정의라고 그 당시에 받아들여 졌다. 그 이유는 리만이 제시한 적분 가능성에 대한 조건이 불연속 점이 조밀 집합인 함수까지 확장될 수 있을 만큼 약했기 때문이다. 그러므로 코시 합이 적분 정의에 대한 유일한 접근이라고 생각하는 한 리만 적분에서 더 일반화하는 것은 생각하기 어려웠다(Hawkins, 2001)[9].

리만 적분을 재정의한 다르부의 적분 정의 역시 합의 극한으로써 적분을 정의하고 있다. 리만과 다르부의 정의 모두 미분과 독립된 채 적분의 정의가 유계함수로 확장되었다는 것을 확인할 수 있다. 특히 합이 극한을 갖기 위해선 변화폭이 통제 아래에 있어야 하고 기하적인 관점에서 함수는 곡선 아래 넓이가 정의되어야 한다는 아이디어를 통해서도 코시에 이어 리만 역시 적분을 미분의 역으로가 아닌 넓이와 연결지어 합의 극한으로 생각했음을 확인할 수 있다. 그리고 코시와 마찬가지로 새로운 적분 정의를 통해 미적분의 기본정리를 비롯한 명제들을 증명함으로써 리만과 다르부의 적분 정의가 기존의 적분 이론들을 포괄하며 엄밀한 미적분학을 발전시키는 데 일조하였다.

Medvedev(1991)에 따르면 코시와 마찬가지로 적분을 합의 극한으로 정의함으로써 미분과 독립된 것도 있지만 코시 적분과 리만 적분의 본질적인 차이점은 코시 적분은 원시함수의 함숫값의 차로 재정의가 가능하지

9) Laugwitz(1998), Hawkins(2001)에 따르면 당시 리만 적분 정의는 자연에서 발생하는 모든 함수에 적용 가능한 정의라고 생각되었다.

만 리만 적분에서는 훨씬 더 복잡하다는 것이다. 리만 적분으로 인해 수학자들은 많은 예기치 못한 것을 마주치는 불연속함수 세계로 들어가게 되었다. 특히 볼테라 함수(Volterra's function) 같은 예시들로 인해 리만 적분과 리만 적분 가능한(혹은 불가능한) 함수들의 특징은 미분과 필수적으로 연결될 필요가 없는 적분의 성질에 관한 연구의 필요성을 갖게 되었다. 즉 리만 적분은 코시 적분처럼 원시함수의 함숫값의 차로 재정의하는 것이 불가능하였고 미분으로부터 독립된 적분의 성질들이 존재함을 확인함으로써 적분 이론의 발달은 미분과 분리되게 된다. 이를 통해 리만과 다르부에게 적분 이론의 전개를 위해서는 합의 극한으로써 정적분 정의가 필연적이었음을 확인할 수 있다.

4.2 미적분의 기본정리를 통한 미분과의 연결

리만과 다르부의 적분 역시 코시 적분과 마찬가지로 미분과 독립적으로 정의되었으나 코시 이전 적분 정의를 유지하려는 노력 역시 확인할 수 있다. 특히 다르부를 통해서 리만의 적분과 미분의 연결이 진행되었다. 다르부가 증명한 미적분의 제2 기본정리인 "구간 $[a,b]$에서 함수 $F(x)$가 유계 적분 가능 도함수 $f(x)(=F'(x))$를 가지면 $a \le x \le b$인 모든 x에 대하여 $\int_a^x f(x)dx = F(x) - F(a)$이다."는 코시가 도함수의 연속성을 가정했어야 했던 것에 반해 더 약한 조건인 도함수의 적분 가능성이 미적분의 제2 기본정리를 증명하는 데 충분함을 보여주었다(김경화, 2008). 따라서 미적분의 제1 기본정리의 결과인 "$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x)dx = (F(x) - F(a))' = f(x)$" 역시 동일한 조건에서 성립함을 알 수 있다.

즉 코시 적분으로 제시된 미적분의 기본정리보다 리만 적분으로 제시된 미적분의 기본정리가 더 약한 조건으로 성립하는 확장된 정리가 된 것이다. 하지만 1881년 볼테라(Vito Volterra, 1860~1940)의 적분 가능하지 않은 유계 도함수 예시를 통해 도함수의 적분 가능성 조건은 필수적인 조건이 되었고 미적분의 기본정리 확장은 멈추게 된다. 이로써 많은 도함

수에 대한 리만 적분은 원시함수의 함숫값의 차로 재정의 할 수 있었으나 모든 도함수에 적용할 수는 없었으므로 한계를 띄게 된다[10].

리만 적분이 그 당시 가장 일반화된 적분 이론이라고 인정받고 있었고 리만 적분이 가능하지 않은 유계 도함수가 발견되었음에도 여전히 코시 이전 적분 정의를 인정하는 수학자들이 많았다. 토매(Karl Johannes Thomae, 1840~1921)는 리만 적분 이론 발전에 많은 기여를 했음에도 1875년 「정적분 이론 소개(Einleitung in die Theorie der bestimmten Integrale)」에서 원시함수의 함숫값의 차와 합의 극한으로서 적분의 정의를 고수하였고 두 정의를 조화시키려고 하였다. 이때 토매는 합의 극한으로서 적분의 정의를 사용하지 않고 원시함수의 존재성을 증명하는 것이 매우 어려운 일이라는 것을 스스로 알고 있었다. 그리고 볼테라도 1881년에 적분 불가능한 유계 도함수를 제시했음에도 불구하고 1887년 「선형 미분 방정식 이론의 기초 (Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari)」에서 미분과 적분은 서로의 역인 무한소 연산임을 서술하였다(Medvedev, 1991). Hawkins(2001)에 따르면 볼테라는 적분 불가능한 유계 도함수를 제시하고 곧이어 리만 적분이 적분의 존재성을 확립하였기 때문에 원시함수의 존재성을 가정하는 과거의 적분 개념보다 리만 적분 개념이 더 우수하다고 서술하였다. 리만 적분 이론에서 미분과 적분이 역관계에 있지 않음을 알면서도 미분과 적분을 역관계로 간주했다. 이로써 리만 적분 이론의 발달로 인해 미분과 적분이 독립된 연산이 되었고 미적분의 기본정리가 더 이상 성립하지 않는 예시가 발견되었음에도 다르부, 토매와 볼테라를 포함한 수학자들에게 원시함수의 함숫값의 차로써 적분 정의는 적절한 적분 정의로 받아들여 지고 있었음을 알 수 있다.

---

10) 볼테라 함수의 발견 당시에는 리만 적분 이론의 한계를 보여준다고 생각하지 않았으나 리만 적분 이론을 많은 수학자가 점차 연구함에 따라 적분 가능하지 않은 유계 도함수의 존재성은 리만 적분 이론의 한계로 받아들여 졌다.

Ⅴ. 르베그 적분으로 이행

1. 볼테라 함수와 미적분의 기본정리 성립 문제

디니(Ulisse Dini, 1845~1918)는 유계 도함수를 갖고 양의 외용량(positive outer content)을 갖는 조밀 집합에서 0의 함숫값을 갖는 상수 함수가 아닌 함수 $f(x)$가 존재할 것으로 추측하였다. 디니의 추측은 볼테라에 의해 확인되었다.

볼테라는 1881년 「불연속 점선 함수에 대한 몇 가지 관찰(Alcune Osservazioni Sulle Funzioni Punteggiate Discontinue)」에서 양의 측도를 갖는 조밀한 곳이 없는 집합(nowhere dense set)을 제시하였고 같은 해 「적분학의 원리에 대하여(Sui Principii del Calcolo Integrale)」에서 리만 적분 가능하지 않은 유계 도함수를 제시했다(Hawkins, 2001).

$f(x)=x^2\sin(\frac{1}{x})$을 이용하여 임의의 구간 $[a,b]$에서 적분 불가능한 유계 도함수를 생성한다.

$f_{a,b}:[a,b]\to R$ 을 다음과 같이 정의하자.

1. $f_{a,b}(x)=0$ $(x=a$ 또는 $x=b)$
2. $f_{a,b}(x)=(x-a)^2\sin(\frac{1}{x-a})$ $(a<x\le x_1)$ 이때 x_1은 a와 $\frac{a+b}{2}$ 사이의 실수 x 중

   $(x-a)^2\sin(\frac{1}{x-a})$이 극대가 되게 하는 가장 큰 실수 x이다.
3. $f_{a,b}(x)=(b-x)^2\sin(\frac{1}{b-x})$ $(x_2\le x<b)$ 이때 x_2는 $\frac{a+b}{2}$와 b 사이의 실수 x 중

   $(b-x)^2\sin(\frac{1}{b-x})$이 극대가 되게 하는 가장 작은 실수 x이다.
4. $f_{a,b}(x)=(x_1-a)^2\sin(\frac{1}{x_1-a})=(b-x_2)^2\sin(\frac{1}{b-x_2})$ $(x_1\le x\le x_2)$ 이다.

$f_{a,b}(x)$의 도함수 $f_{a,b}'(x)$는 열린 구간 (a,b)에선 연속이고 a와 b의 근방에서

-1과 1사이를 수렴하지 않은 채 진동하므로 a와 b에선 불연속하다. 그리고 $|f_{a,b}'(x)| \le 2(b-a)+1$ 이 성립하므로 $f_{a,b}'(x)$는 유계이다.

스미스-볼테라-칸토어 집합(Smith-Volterra-Cantor set)[11]을 C라 하면 함수 $F:[0,1]\to R$ 를 다음과 같이 정의한 함수를 볼테라 함수라 한다. 그리고 함수 $F(x)$의 그래프는 [그림 Ⅴ-1]과 같다.

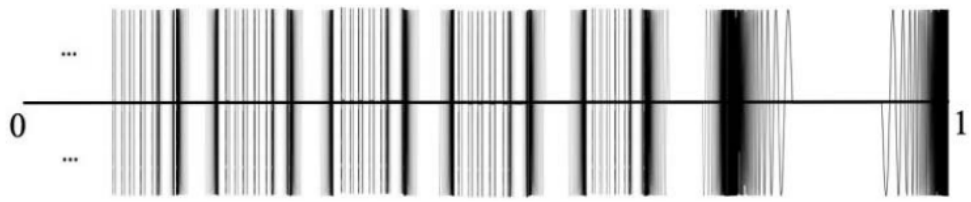
$$F(x)=\begin{cases} f_{a,b}(x) & x\in(a,b),\,(a,b)\subset[0,1]\setminus\overline{C} \\ 0 & x\in\overline{C} \end{cases}$$

[그림 Ⅴ-1] 함수 $F(x)$의 그래프(Ponce Campuzano, Maldonado Aguilar, 2015)

11) 스미스-볼테라-칸토어 집합(Smith-Volterra-Cantor set) C는 측도가 0보다 큰 집합이고 조밀한 곳이 없는 집합(nowhere dense set)으로 즉 폐포(closure) $\overline{C}$의 내부(interior)가 공집합인 집합이다. 그리고 $x\in[0,1]\setminus\overline{C}$인 모든 x에 대하여 x를 포함하는 열린 집합 $(a,b)\subset[0,1]\setminus\overline{C}\,(a,b\in\overline{C})$가 존재한다. 따라서 $[0,1]\setminus\overline{C}$는 열린 구간의 서로소 합집합이다.

$F(x)$는 미분 가능한 함수로[12] $F'(x)$를 갖고 [그림 Ⅴ-2]와 같은 그래프를 갖는다.

$$F'(x)=\begin{cases} f'_{a,b}(x) & x\in(a,b),\ (a,b)\subset[0,1]\setminus\overline{C} \\ 0 & x\in\overline{C} \end{cases}$$



[그림 Ⅴ-2] 함수 $F'(x)$의 그래프(Ponce Campuzano, Maldonado Aguilar, 2015)

12) $F(x)$가 미분 가능한 함수임을 증명하는 과정은 다음과 같다.

첫째, $x\in(a,b),(a,b)\subset[0,1]\setminus\overline{C}$인 경우, $F(x)=f_{a,b}(x)$이고 $f_{a,b}(x)$는 미분 가능하므로 $F'(x)=f'_{a,b}(x)$이다.

둘째, $x\in\overline{C}$인 경우, 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 $\delta=\epsilon$가 존재하여 다음을 만족한다.

(1) $t\in\overline{C}$ 이면 $\dfrac{F(t)-F(x)}{t-x}=0.$

(2) $t\notin\overline{C}$ 이면 t는 어떤 열린 구간 $(a,b)\subset[0,1]\setminus\overline{C}$ 에 속하므로 x와 가까운 구간의 경계를 a라 가정하면,

$$\left|\frac{F(t)-F(x)}{t-x}\right|=\left|\frac{(t-a)^2\dfrac{1}{\sin(t-a)}}{t-x}\right|\le\left|\frac{(t-a)^2\dfrac{1}{\sin(t-a)}}{t-a}\right|\le|t-a|\le|t-x|<\epsilon.$$

즉 임의의 양수 ϵ에 대하여 양수 $\delta=\epsilon$가 존재하여 $|t-x|<\delta$이면 $\left|\dfrac{F(t)-F(x)}{t-x}\right|<\epsilon$ 이므로 $F'(x)=0$이다.

$F(x)$의 도함수 $F'(x)$는 $|F'(x)| \leq 3$ 이므로 유계함수이고 $f'_{a,b}(x)$가 연속함수이므로 $x \in (a,b) \subset [0,1] \setminus \overline{C}$인 모든 x에서 연속이다. 그리고 $F'(x)$는 $x \in \overline{C}$인 모든 x에서 불연속이다.[13]

즉 $F'(x)$는 측도가 0보다 큰 집합 $\overline{C}$에서 불연속하므로 유계 도함수임에도 불구하고 리만 적분 불가능하다.

따라서 볼테라가 제시한 함수 $F'(x)$는 유계이고 원시함수가 존재하지만 미적분의 제2 기본정리가 성립하지 않는 함수이다(Ponce Campuzano, Maldonado Aguilar, 2015).[14]

김경화(2008)에 따르면 볼테라가 제시한 함수는 리만의 정의가 충분히 일반적이지 않음을 보여준다. 왜냐하면, 함수 $f(x)$를 미분하는 과정이 리만 적분 가능하지 않은 유계 도함수 $f'(x)$를 생성할 수 있기 때문이다. 즉 리만의 적분과 미분은 완전히 가역적은 아니다. 그리고 Medvedev(1991)는 볼테라가 제시한 함수로 인하여 리만 합의 극한으로써 적분은 적절치 않지만, 원시함수의 차로써 적분은 적절한 적분 정의

---

13) $F'(x)$는 $x \in \overline{C}$인 모든 x에서 불연속임을 증명하는 과정은 다음과 같다.

$x \in \overline{C}$, $\epsilon = \frac{1}{2}$이라 하자. $\overline{C}$는 조밀한 곳이 없는 집합이므로 임의의 양수 δ에 대해 열린 구간 $(x-\delta, x+\delta)$은 $t \in [0,1] \setminus \overline{C}$ 를 포함한다. $\overline{C}$의 성질에 의해 t를 포함하는 어떤 열린 집합 $(a,b) \subset [0,1] \setminus \overline{C}$ $(a,b \in \overline{C})$가 존재한다. 만약 $t < x$ 라면 $b \leq x$ 이므로, $t < \beta < b$이고 $F'(\beta) = 1$을 만족시키는 β가 존재한다. 따라서 $|\beta - x| < \delta$ 이지만 $|F'(\beta) - F'(x)| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon$ 이다.

마찬가지로 만약 $t > x$ 라면 $x \leq a$이므로, $a < \alpha < t$이고 $F'(\alpha) = 1$을 만족시키는 α가 존재한다. 따라서 $|\alpha - x| < \delta$ 이지만 $|F'(\alpha) - F'(x)| = 1 > \frac{1}{2} = \epsilon$ 이다.

즉 $\epsilon = \frac{1}{2}$은 모든 양수 δ에 대해서 $|s - x| < \delta$ 이지만 $|F'(s) - F'(x)| > \epsilon$ 를 만족하는 s가 존재하므로 $\epsilon - \delta$ 논법에 의해 $F'(x)$는 $x \in \overline{C}$인 모든 x에서 불연속인 함수이다.

14) 비슷한 예로 브로덴(Torsten Brodén, 1857~1931)이 1896년에 제시한 함수가 있다. 이 함수의 도함수 역시 리만 적분이 불가능한 함수로 미적분의 제2 기본정리가 항상 참이 되는 것은 아님을 보여주었다.

가 되도록 하는 예시가 발견되었음을 보여준다고 하였다. 볼테라 함수가 제시된 당시에는 이 함수가 리만 적분의 한계를 보여준다는 비판적 해석은 없었으나 향후 리만 적분 이론이 발달함에 따라 유계 도함수임에도 불구하고 미적분의 제2 기본정리가 성립하지 않는 예의 존재는 새로운 적분 이론의 탄생을 불러일으켰다. 그리고 1902년 르베그(Henri Léon Lebesgue, 1875~1941)에 의해 리만 적분보다 일반화된 새로운 적분 이론이 제시되었다.

2. 르베그 적분 이론의 탄생

르베그는 1902년 「적분, 길이, 면적(Intégrale, Longueur, Aire)」에서 해석학에서 다루는 정적분, 곡선의 길이, 곡면의 넓이에 대하여 가능한 일반적이고 엄밀한 정의를 제시하려고 노력하였다. 특히 일반화된 정적분에 관한 고민은 그의 논문 서론에서 찾아볼 수 있다. 르베그는 서론에 리만 적분을 택하였을 때 적분 불가능한 도함수의 존재로 인해 미적분의 제2 기본정리가 적용되지 않음을 문제로 인식하였다. 따라서 첫째, 리만의 정의를 특수한 경우로 포함하며 둘째, 유계 도함수가 주어졌을 때 미적분의 기본정리가 항상 적용되는 새로운 적분 정의를 제안하고자 하였다.

르베그는 적분을 정의하기에 앞서 1장에서 측도를 정의하였다. 르베그의 측도 정의는 보렐(Émile Borel, 1871~1956)과 조르단(Wilhelm Jordan, 1842~1899)의 측도 연구로부터 영향을 받았다. 르베그의 외측도(outer measure)는 보렐의 외용량(outer content) 정의로부터 일반화한 개념이고 르베그의 내측도(inner measure)와 측정가능성(measurability)은 조르단의 내용량(inner content)과 측정가능성을 일반화한 개념이다. 특히 르베그는 측도는 가산 가법적(countably additive) 해야 한다고 하였는데 이는 보렐의 영향을 받았음을 확인할 수 있다(Hawkins, 2001; 김경화, 2008).

르베그는 측도를 정의하는 데 있어 다음 세 가지 성질을 만족시키는 것을 중요시하였다. 첫째, 측도가 0이 아닌 집합이 있다. 둘째, 임의의 실수 a에 대하여 집합 E와 집합 $E+a=\{x+a|x\in E\}$는 같은 측도를 갖는다. 셋째, 서로소인 유한개 혹은 가산개의 집합의 합집합의 측도는 각 집합의 측도들의 합과 같다. 르베그는 만약 $[0,1]$의 측도를 1로 한다면 서로소인 구간 I_n에 대해 $m(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n)=\sum_{n=1}^{\infty} L(I_n)$ ($L(I_n)$은 구간 I_n의 길이)인 가산가법성이 성립하게 된다. 따라서 임의의 집합 E에 대해 E의 측도가 부등식 $m(E)\le m(\bigcup I_n)\le \sum L(I_n)$ (이때 $E\subset \bigcup I_n$이고 I_n은 구간)을 만족

하므로 자연스럽게 상계 $\sum L(I_n)$을 갖게 된다. 따라서 르베그는 외측도를 $m_e(E)=\inf\left\{\sum_{n\in J}L(I_n)\,|\,J\subset N, E\subset\bigcup_{n\in J}I_n\right\}$으로 정의하였다. 그리고 외측도를 이용하여 내측도를 $m_i(E)=b-a-m_e([a,b]-E)$로 정의하였다. 따라서 E의 측도 $m(E)$가 정의된다면 부등식 $m_i(E)\le m(E)\le m_e(E)$ 가 성립되도록 하였다. 르베그는 $m_i(E)=m_e(E)$가 성립하면 E는 측정가능하다고 정의하였고 이때 E의 측도 $m(E):=m_i(E)=m_e(E)$로 정의하였다.

측도에 관한 정의와 성질들을 제시한 뒤 르베그는 새로운 적분 이론을 제시하였다. 르베그가 길이, 넓이와 같이 크기를 재는 측도를 엄밀히 정의하기 위해 노력한 이유 중 하나는 바로 적분 이론을 전개하기 위함일 것이다.[15] 왜냐하면, 르베그는 적분을 기하학적 관점에서 넓이로 보았다. 즉 $\int_a^b f(x)dx$를 곡선 $y=f(x)$가 주어졌을 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 그리고 직선 $x=a, x=b$ 로 둘러싸인 도형의 넓이로 보았다. 르베그의 정적분의 기하학적 정의는 다음과 같다.

> 함수 $f(x)$가 $[a,b]$에서 정의된 유계함수라 하자. 집합 $E=E_1\cup E_2$ ($E_1=\{x\in[a,b]|f(x)>0\}$, $E_2=\{x\in[a,b]|f(x)<0\}$)이라 할 때 E가 측정 가능한 집합(따라서 E_1과 E_2 역시 측정 가능한 집합)이면 함수 $f(x)$는 적분 가능하고 $\int_a^b f(x)dx=m(E_1)-m(E_2)$이다(Lebesgue, 1902: 250).

르베그는 적분의 기하학적 정의를 제시한 뒤 해석적 정의도 제시하였다. Lebesgue(1902)의 서론에서 볼 수 있듯 르베그 적분의 해석적 정의는 리만의 적분 정의와 유사하게 합의 극한으로 정의하였다. 르베그는 코시, 리만, 다르부의 적분 정의가 논리적으로 자연스러웠지만, 연속함수

---

15) 측도 이론은 한켈(Hermann Hankel, 1839~1873), 조르단, 보렐, 보이스 레이몬드(Emil Heinrich du Bois-Reymond, 1818~1896), 칸토어(Georg Cantor, 1845~1918) 등에 의해 발전해왔고 르베그의 측도 이론 역시 보렐과 조르단으로부터 영향받았음에도 측도 이론을 적분 이론에 직접 적용한 것은 르베그가 처음이다(Hawkins, 2001).

와 달리 불연속함수에 대해서는 더 작은 구간 $[x_i, x_{i+1}]$을 택하는 것이 반드시 변화폭을 더 작게 한다고 보장할 수 없다고 하였다. 즉 르베그는 리만 적분이 함수의 불연속 점을 어느 정도 이상 가정하지 않은 것을 한계로 생각하였다. 따라서 함수 $f(x)$가 정의된 구간 $[a,b]$를 나누는 것이 아닌 함수 $f(x)$의 변화폭 $[m,M]$을 분할하는 새로운 아이디어를 제시하였다(Hawkins, 2001; 김경화, 2008; Boyer, Merzbach, 2011).[16] 르베그가 제시한 적분의 해석적 정의는 다음과 같다.

함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 측정가능한 함수라 하자.[17] 그리고 함수 $f(x)$의 구간 $[a,b]$에서 최대하계, 최소상계를 각각 실수 m과 M이라고 하자. 이제 $f(x)$의 변화폭을 $m = a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n = M$ 으로 분할하자. 이제 변화폭의 분할로 인해 구간 $[a,b]$의 부분집합 $e_i = \{x | a_i \le f(x) < a_{i+1}\}$ $(i = 0,1,\ldots,n-1)$를 정의할 수 있다. 그러면 집합 E는 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i m(e_i)$ 와 $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i)$ 인 측도를 갖는 두 집합 사이에 놓인다. 따라서 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i m(e_i) \le \int_a^b f \le \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i)$이 성립하게 되고 이때 두 측도의 차는 $\sum_{i=0}^{n-1} (a_i - a_{i+1}) m(e_i) \le \| P \| (b-a)$ ($\| P \|$ 는 $a_{i+1} - a_i$의 최댓값) 이다. 따라서 분할의 크기 $\| P \|$ 가 0으로 한없이 가까워 짐에 따라 두 합 $\sum_{i=0}^{n-1} a_i m(e_i)$ 과 $\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i)$ 은 공통인 유일한 극한을 갖고 이 극한값을 함수 $f(x)$의 정적분으로 정의한다. 즉 $\int_a^b f = \lim_{\| P \| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_i m(e_i) = \lim_{\| P \| \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} m(e_i)$ 이다(Lebesgue, 1902:

16) Boyer, Merzbach(2011)은 르베그의 새로운 관점은 스스로 자기 회의와 외부적으로 많은 비판을 동반한 출발이라고 평하였다. 르베그는 이론이 일반화될수록 수학은 알맹이 없는 아름다운 껍데기에 불과하여 빨리 수명을 다할 것을 걱정하였다. 이 논문의 저자는 르베그가 걱정한 이유 중 하나로 당시 르베그는 측정불가능한 집합을 생성하지 못했었고 따라서 적분 불가능한 함수를 발견하지 못했기 때문일 것으로 생각한다.

17) 르베그는 임의의 실수 $\alpha < \beta$에 대하여 집합 $\{x | \alpha < f(x) < \beta\}$가 측정가능하다면 함수 $f(x)$가 측정가능한 함수라고 말한다.

253).

르베그는 그의 새로운 적분에 대한 많은 정리를 증명하였는데 그중 새로운 적분 정의가 리만 적분을 특수한 경우로 포함하고 있음을 보여주는 정리 역시 증명하였다. 한가지 예로 디리클레 함수 $D(x)$에 대한 리만 적분과 르베그 적분의 비교를 해볼 수 있다. 디리클레 함수 $D(x)$는 리만 적분 불가능한 함수였다. 하지만 구간 [0,1]에서 정의된 디리클레 함수 $D(x)$는 유계이고 측정가능한 함수이다.

치역의 임의의 분할을 $0=a_0<a_1<a_2<\cdots<a_n=1$ 이라 하자. e_i의 정의에 따라$e_0=\{x|0\le D(x)<a_1\}=[0,1]-Q_{[0,1]}$ ($Q_{[0,1]}$ 은 닫힌 구간 [0,1]의 모든 유리수의 집합이다.), $e_i=\{x|a_i\le D(x)<a_{k+1}\}=\varnothing\ (i=1,2,\ldots,n-1)$, $e_n=\{x|D(x)=1\}=Q_{[0,1]}$ 이다. 따라서 다음의 결과를 얻는다.

$$\sum_{i=0}^{n}a_i m(e_i)=a_0\cdot m(e_0)+a_1\cdot m(e_1)+\cdots+a_{n-1}\cdot m(e_{n-1})+a_n\cdot m(e_n)$$

$$=0\cdot m([0,1]-Q_{[0,1]})+a_1\cdot m(\varnothing)+\cdots+a_{n-1}\cdot m(\varnothing)+1\cdot m(Q_{[0,1]})$$

$=0\cdot 1+a_1\cdot 0+\cdots+a_{n-1}\cdot 0+1\cdot 0=0$ 이므로 $\int_0^1 D(x)dx=0$ 이다.

즉 디리클레 함수 $D(x)$는 리만 적분 이론에서는 적분 불가능한 함수였으나 르베그 적분 이론에서는 적분 가능한 함수이다. 따라서 르베그의 적분 정의는 리만의 적분 정의보다 더 일반화된 이론임을 알 수 있다.

또한, 유계 도함수의 적분 가능성과 미적분의 제2 기본정리의 성립함을 제시하는 정리, 푸리에 급수에서 푸리에 계수를 구하는 데 필요했던 적분 연산과 극한 연산의 교환법칙 성립을 제시하는 정리 등 기존의 적분 이론이 해결치 못했던 많은 한계를 르베그 적분 이론이 극복하게 되었고 새로운 적분 시대를 열게 된다.[18]

---

18) 르베그의 적분 아이디어는 Denjoy(Arnaud Denjoy, 1884~1974), Haar(Alfréd Haar, 1885~1933) 등에 영향을 미쳤고 Denjoy 적분, Haar 적분 등 더 일반화된 적분 이론이 개발되는 데에 길을 열었다(Boyer, Merzbach, 2011).

3. 르베그의 적분에 대한 관점

3.1 미분과 독립적으로 합의 극한으로써 정의

르베그의 새로운 적분 이론에 대한 동기 중 하나는 Lebesgue(1902)의 서론에서 볼 수 있듯이 원시함수의 엄밀한 정의와 유계도함수의 미적분의 기본정리 성립이다. 이를 위해서 르베그는 적분의 두 가지 정의를 제시하였다. 먼저 기하학적으론 적분을 곡선과 x축으로 둘러싸인 넓이로 보아 측도이론을 이용하여 $\int_a^b f(x)dx = m(E_1) - m(E_2)$로 정의하였다. 그리고 해석적으론 리만 적분의 아이디어와 유사하게 공역을 분할하여 얻은 합의 극한으로 르베그 적분을 정의하였다(Hawkins, 2001). 즉 두 가지 적분 정의 모두 미분과는 독립적으로 정의하였다.

르베그 적분 전에 존재하던 코시, 리만, 다르부의 적분 정의가 기하학적으론 적분을 넓이로 해석하고 있으며 해석적으론 적분을 합의 극한으로 해석하고 있었기 때문에 그들의 적분 정의를 논리적 관점에서 자연스럽게 생각한 르베그 역시 이 두 관점을 택했을 것이다(김경화, 2008). 리만이 기하학적 관점에서 정적분이 정의되기 위해선 곡선 아래의 넓이가 정의되어야 한다는 아이디어를 르베그가 받아들이므로 먼저 넓이의 엄밀한 정의에 대한 논의가 이루어졌고 측도 이론을 이용하여 정적분을 정의한 것이다. 그리고 Dunham(2005)에 따르면 리만, 다르부의 적분 정의와 르베그의 해석적 적분 정의가 본질적으로 같은 것을 정의하고자 하였다는 것을 르베그의 1996년 「Measure and the Integral」에 서술된 비유를 통하여 알 수 있다. 르베그는 하루 정산을 하려는 가게 주인을 생각하였다. 한 가지 방법은 손에 잡히는 순서대로 동전과 지폐를 더하는 방법이고, 다른 방법은 화폐를 다임, 달러 등으로 단위별로 분류하여 각 개수를 세어 단위를 곱해 더하는 방법이다. 전자의 방법은 리만 적분의 방법으로 구간 $[a,b]$를 왼쪽에서 오른쪽으로 진행함에 따라 만나는 함숫값들을 취하는 방법이다. 하지만 후자의 방법은 순서를 고려치 않은 채 함숫값

들을 (화폐의 단위를) 대응되는 집합의 측도 (해당하는 화폐의 개수)와 곱하여 더하는 방법이다. 르베그는 두 방법이 유한한 개수에 대해서는 같은 결과를 내지만 무한한 개수에 대해서는 중요한 차이를 갖는다고 하였다.

이렇게 르베그는 코시, 리만, 다르부처럼 적분 이론을 전개하기 위해서는 정적분을 미분과 독립적이게 넓이와 합의 극한으로써 정의하는 것이 필요하다고 생각하였음을 알 수 있다.

3.2 미적분의 기본정리를 통한 미분과의 연결

르베그는 새로운 적분 정의를 제시한 뒤 원시함수의 정의와 유계 도함수에 대하여 코시 이전 적분 정의로 대체될 수 있음을 증명하였다.

[미적분의 제2 기본정리] 함수 $f(x)$가 구간 $[a,b]$에서 유계 도함수 $f'(x)$를 가지면 $f'(x)$는 르베그 적분 가능하고 $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$이다.

따라서 이 정리로 인하여 모든 유계 도함수에 대해 적분 구간의 윗 경계를 미지수로 하는 적분을 원시함수로 얻을 수 있게 되었다.

곧이어 르베그는 이 정리가 유효함을 볼테라 함수 예시를 통해 보여주었다. 볼테라 함수는 유계 도함수를 가지지만 리만 적분 불가능한 함수로 리만 적분 정의로는 미적분의 제2 기본정리가 성립하지 않았었다. 그러나 르베그가 제시한 정리 때문에 볼테라 함수도 르베그 적분 정의로는 미적분의 제2 기본정리인 $\int_a^b F'(x)dx = F(b) - F(a)$가 성립하였다. 이로써 르베그 적분은 리만 적분을 특수한 경우로 포함할 뿐 아니라 미적분의 제2 기본정리가 이론적으로 완전히 해결시킨 적분 이론으로 리만 적분을 대체하게 된다.

르베그는 적분의 일반화가 유용하기 위해서는 적분의 기본 특징인 미적분의 기본정리가 해결되어야 했다고 생각했다. 따라서 유계 도함수에 대해서 미적분의 제2 기본정리가 성립하도록 적분을 정의하였다. 이로써 새로운 적분은 더 많은 함수에 대해 적분할 수 있을 뿐 아니라 유계라는

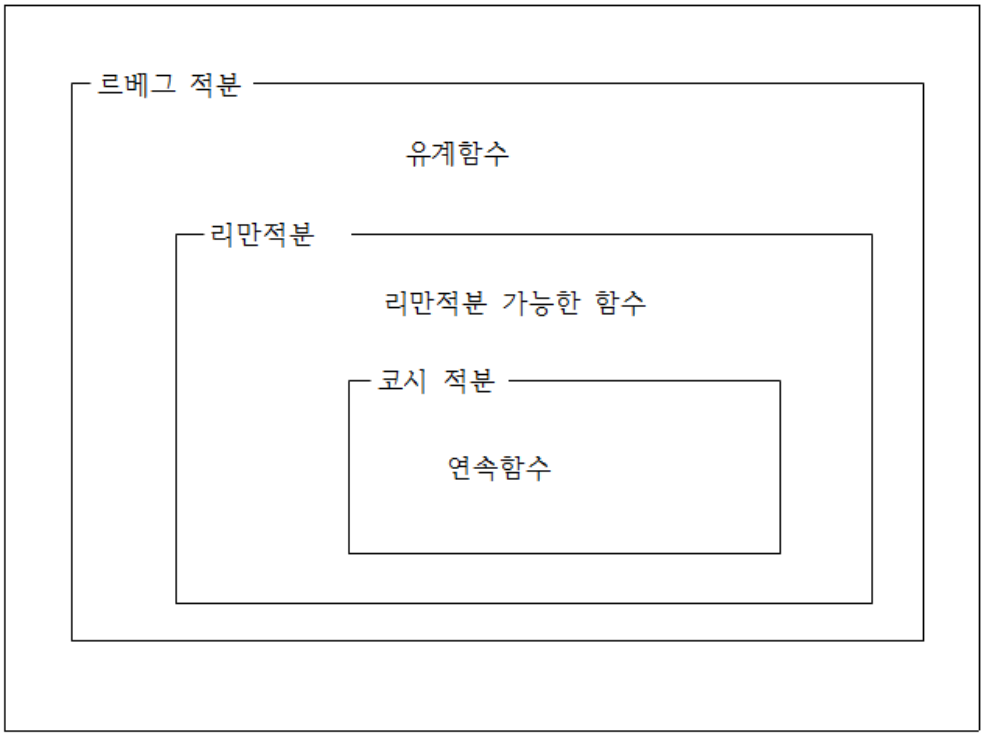
사소한 예외를 제외하곤 미분과 적분의 역관계를 유지시켰다(Hawkins, 2001; Dunham, 2005; Boyer, Merzbach, 2011). 그리고 르베그는 고전적인 미분 정의뿐 아니라 디니의 네 가지 미분 정의에 대해서도 미적분의 제2 기본정리가 성립함을 증명하려고 노력하였으나 끝내 증명하지는 못하였다.[19] 하지만 르베그가 보인 적분과 미분을 연결하려는 많은 시도를 통해서 르베그는 미적분의 기본정리가 성립하는 것이 적분의 자연스러운 성질이라고 여겼음을 알 수 있다.

이상의 역사적 분석에 의하면 코시 이전 원시함수의 함숫값의 차로써 정적분 정의는 원시함수 존재의 모호성으로 인하여 임의의 함수에 대해 적분의 존재, 적분 가능성을 논하는데 어려움이 발생하였다. 따라서 코시는 정적분을 합의 극한으로 정의함으로써 모든 연속함수가 적분 가능함을 증명하였고 조각적 연속함수까지 적분을 논할 수 있었다. 이후 디리클레 함수의 예시로 인해 코시 적분이 의미를 띄지 않는 함수가 존재하게 되었고 리만은 코시 적분 정의를 기반으로 한 리만 적분 정의를 제시하였다. 이로써 적분하는 구간에서 무한개의 불연속 점을 갖는 함수에 대해서도 적분 가능성을 논할 수 있게 되었다. 리만 적분 이론은 한동안 가장 일반화된 적분 이론으로 인정받았지만, 적분 이론이 발달함에 따라 볼테라 함수와 같은 여러 한계점이 발견되었다. 르베그는 코시, 리만 적분 정의와 유사하게 치역을 분할하는 아이디어를 이용한 합의 극한으로 적분을 정의하였고 리만 적분 이론의 한계를 극복한 새로운 적분 이론으로 위상을 얻었다.

다른 한편으론 적분 개념의 발달 역사는 [그림 Ⅴ-3]과 같이 미적분의 제2 기본정리의 확장 역사와 같다. 코시는 코시 적분을 통해 모든 연속함수에 대해 원시함수가 존재함과 따라서 미적분의 제2 기본정리가 항상 성립함을 증명하였다. 이후 리만과 다르부의 적분 정의를 통해 미적분의 제2 기본정리는 도함수가 연속함수조건에서 더 약한 조건인 적분 가능한 함수로 확장될 수 있었다. 하지만 볼테라 함수의 등장으로 인하여 리만

19) 적분뿐 아니라 미분 정의도 발달 과정 동안 다양한 정의가 제시되었다.

적분으로는 적분 가능성 조건을 제외할 수 없게 되었다. 리만 적분이 보인 한계가 새로운 적분 이론의 필요성을 불러일으켰고 르베그 적분 이론을 통해 적분 가능성의 조건은 제거될 수 있었다. 즉 유계 도함수이기만 한다면 항상 원시함수가 존재하고 미적분의 제2 기본정리가 성립하게 된 것이다.



[그림 Ⅴ-3] 적분 이론에 따른 미적분의 제2 기본정리가 성립하는 도함수 $f'(x)$

적분 개념의 발달 역사는 다음 두 가지 관점으로 정리할 수 있다.

첫째, 코시 적분부터 르베그 적분까지 모두 미분과는 독립된 넓이로써 기하학적 정의와 합의 극한으로써 해석적 정의를 택함으로써 적분의 성질, 정리 등 적분 이론을 엄밀하게 전개할 수 있었다. 즉 적분 이론의 발달을 위해서는 원시함수의 함숫값의 차로써보다 합의 극한으로써 적분이

더 적절하였음을 알 수 있다.

둘째, 합의 극한으로써 적분 정의를 택하였지만, 코시와 르베그의 적분 이론을 발달시킨 동기는 미적분의 기본정리를 성립시키기 위함이었다. 그리고 토매와 볼테라를 포함한 많은 수학자가 미분과 적분의 역관계가 자연스럽고 이상적인 적분의 성질로 간주함 역시 확인할 수 있었다. 즉 적분 정의 자체는 미분과 독립되었지만, 넓이와 변화율, 변화량을 연결하는 미적분의 기본정리가 중요한 성질로 받아들여 졌고 이 정리가 유지되도록 적분 이론이 발전함을 알 수 있다.

Ⅵ. 2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서 분석

본 장은 2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서의 적분 단원을 분석한다. 첫째 적분 개념 발달 역사와 비교했을 때 적분에 대한 어떤 관점을 택했는지, 둘째 교과서의 적분 단원에 그 관점이 잘 드러났는지 분석하고 교과서 개발 방향을 논의하고자 한다. 따라서 적분 단원 중 부정적분부터 정적분 정의까지 학습경로를 분석을 통하여 현 교육과정 수학Ⅱ 교과서가 갖는 적분에 대한 관점을 분석하고 적분 단원의 주 내용인 정적분과 미분 관계, 정적분과 넓이 관계, 속도와 거리 관계를 분석하여 교과서 개발 방향을 제언한다. 분석하는 교과서 목록은 <표 Ⅵ-1>과 같다.

<표 Ⅳ-1> 분석한 교과서 목록

2015 개정 교육과정 <수학 Ⅱ> 교과서		
출판사	저자	해당 페이지
㈜교학사	권오남 외 14인	116~151쪽
㈜금성출판사	배종숙 외 6인	116~145쪽
㈜미래엔	황선욱 외 8인	114~146쪽
㈜비상교육	김원경 외 14인	106~134쪽
㈜지학사	홍성복 외 10인	112~151쪽
동아출판(주)	박교식 외 19인	110~147쪽
(주)좋은책신사고	고성은 외 6인	112-144쪽
(주)천재교육	이준열 외 9인	114~143쪽
(주)천재교과서	류희찬 외 10인	112~144쪽

1. 교과서의 적분에 대한 관점

교과서가 택한 적분에 대한 관점을 알아보기 위해서 정적분이 정의되기까지 어떤 학습경로를 택했는지와 정적분의 정의에 내포된 수학적 의미를 분석한다. 2015 개정 수학과 교육과정은 정적분을 부정적분의 함숫값의 차 즉 미적분의 제2 기본정리로 정의하였다. 미적분의 제2 기본정리는 곡선 아래 넓이인 정적분 값이 변화율에 따른 변화량 곧 부정적분의 함숫값의 차와 같다는 성질을 보여주는 정리이다. 따라서 정적분 정의가 포함해야 할 수학적 의미로 '변화율에 따른 변화량'과 '곡선 아래 영역의 넓이'를 선택하였다.

2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서에서는 미분 단원을 학습한 뒤 도함수의 정의를 이용해 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$를 함수 $f(x)$를 도함수로 갖는 함수로 정의한다.

> 함수 $F(x)$의 도함수가 $f(x)$일 때, 즉 $F'(x)=f(x)$일 때 $F(x)$를 $f(x)$의 부정적분이라고 한다.
> 이제, 함수 $F(x)$와 $G(x)$가 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나라고 하면 $F'(x)=f(x), G'(x)=f(x)$이므로 $\{G(x)-F(x)\}'=G'(x)-F'(x)=f(x)-f(x)=0$ 이다. 그런데 도함수가 0인 함수는 상수함수이므로 그 상수를 C라 하면 $G(x)-F(x)=C$ 이므로 $f(x)$의 부정적분은 $F(x)+C$ (단, C는 상수)로 나타낼 수 있고 이것을 기호 $\int f(x)dx$로 나타낸다. 즉 $\int f(x)dx=F(x)+C$ (단, C는 상수)이다. 이때 상수 C를 적분상수라고 한다(홍성복 외, 2018: 113-114).

즉 함수 $f(x)$를 도함수로 갖는 함수를 부정적분 중 하나로 정의하였고 $f(x)$의 어떤 부정적분 $F(x)$가 존재할 경우 상수를 더한 $F(x)+C$ (단, C는 상수) 역시 $f(x)$의 부정적분임을 명시한다. 부정적분을 정의한 뒤 $y=x^n$ (n은 음이 아닌 정수)의 부정적분과 함수의 실수배, 합, 차의 부정적분을 구하는 부정적분의 다양한 성질을 소개한다. 이를 통해 모든

다항함수의 부정적분을 계산할 수 있다.

n이 음이 아닌 정수일 때, $(\frac{1}{n+1}x^{n+1})' = x^n$이므로

$\int x^n dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$ (단, C는 적분상수) 이다 (홍성복 외, 2018: 117).

2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서의 정적분의 도입은 교과서별로 차이가 있으나 크게 부정적분의 함숫값의 차가 일정함을 이용하거나 곡선과 x축 사이 넓이를 이용하였다. 먼저 부정적분의 함숫값의 차가 일정함을 이용하여 도입하는 방법은 다음과 같다.

닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$의 서로 다른 부정적분을 $F(x), G(x)$라 하면 $G(x) = F(x) + C$(C는 상수)이다.

이때 두 실수 a,b에 대하여 $G(b) - G(a) = \{F(b) + C\} - \{F(a) + C\} = F(b) - F(a)$ 이다. 따라서 $F(b) - F(a)$의 값은 적분상수 C에 관계없이 하나의 값으로 정해진다.

이와 같이 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 할 때, $F(b) - F(a)$를 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분이라고 하며, 이것을 기호로 $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$와 같이 나타낸다. 이때 $F(b) - F(a)$를 기호로 나타내면 $[F(x)]_a^b$ 과 같다. 이상을 정리하면

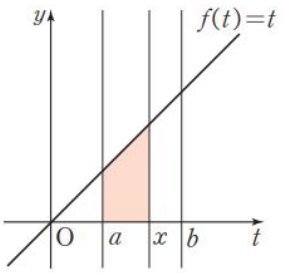
닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)$의 부정적분 중의 하나를 $F(x)$라고 하면 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분은

$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ (권오남 외, 2018: 130-131).

다음 곡선과 x축 사이 넓이를 이용하여 도입하는 방법은 다음과 같다.

닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(t) = t$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t = a, t = x\ (a \le x)$ 로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(x)$라고 하면 $S(x) = \frac{1}{2}(x^2 - a^2)$ 이다. 이때 $S'(x) = x$이고 $f(x) = x$이므로 $S'(x) = f(x)$이다. 그러므로 $S(x)$는

$f(x)$의 한 부정적분이다. 한편, 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 $S(x)=F(x)+C$ (단, C는 적분상수)이다.



이 식의 양변에 $x=a$를 대입하면 $S(a)=0$이므로 $0=F(a)+C, C=-F(a)$이다. 따라서 $S(x)=F(x)-F(a)$이다. 이때 함수 $f(x)=t$의 그래프와 t축 및 두 직선 $t=a, t=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $S(b)$이므로 식 $S(x)=F(x)-F(a)$에 $x=b$를 대입하면 $S(b)=F(b)-F(a)$이다. 일반적으로 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 닫힌 구간 $[a,b]$에서 $f(x)\geq 0$이고 연속인 함수 $y=f(x)$의 그래프와 x축 및 두 직선 $x=a, x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이는 $F(b)-F(a)$이다. 이를 확장하여 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속인 함수 $f(x)$에 대하여 $f(x)\geq 0$인 경우뿐만 아니라 $f(x)<0$이거나 $f(x)$의 부호가 바뀌는 경우를 포함하여 다음을 정의한다.

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, 함수 $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $F(b)-F(a)$를 $f(x)$의 a에서 b까지 정적분이라 하고, 이것을 기호 $\int_a^b f(x)dx$로 나타낸다. 따라서 만약 $F(b)-F(a)$를 기호 $[F(x)]_a^b$ 로 나타내면 다음 식이 성립한다. $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$.

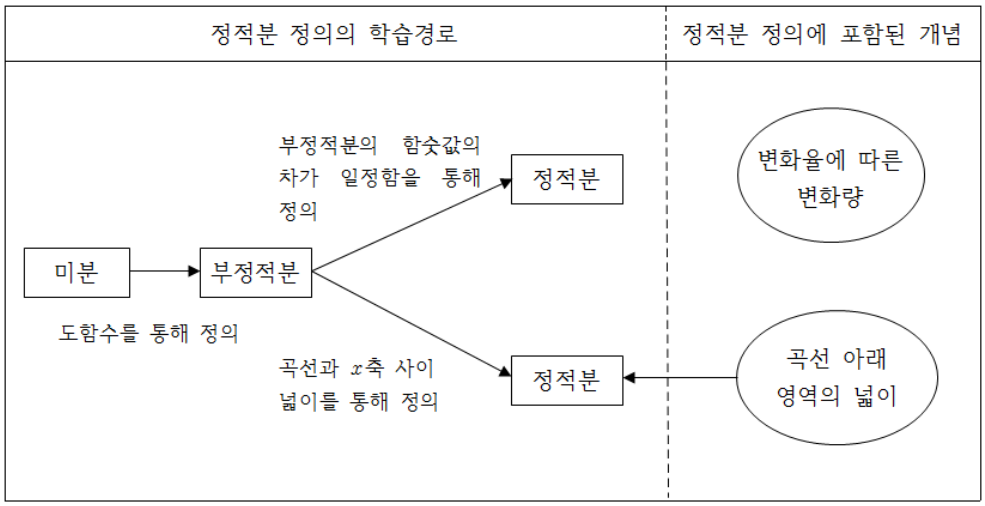
그리고 $[F(x)+C]_a^b=\{F(b)+C\}-\{F(a)+C\}=F(b)-F(a)=[F(x)]_a^b$ 이므로 정적분에서는 적분상수에 관계없이 같은 값이 나온다. 이상을 정리하면 다음과 같다.

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, $f(x)$의 한 부정적분 $F(x)$에 대하여 $f(x)$의 a에서 b까지의 정적분을 $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$ 라고 한다(홍성복 외, 2018: 126-127).

부정적분 단원은 부정적분의 소개와 부정적분의 성질, 다항함수의 부정적분 계산 순으로 내용이 전개되었다. 부정적분은 도함수와 관련하여 정의되었고 부정적분의 성질과 다항함수의 부정적분 계산 역시 미분법을 통해 유도된다. 2015 개정 수학과 교육과정에서 '적분에 필요한 공식은 미분법의 공식에서 유도할 수 있게 한다.'라는 교수학습 방법 및 유의 사항이 교과서의 부정적분 단원에 반영된 것으로 나타났다(교육부, 2015).

한편 부정적분의 계산은 부정적분의 존재성과 밀접하게 관련이 있다. 2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서는 부정적분의 정의는 임의의 함수 $f(x)$에 대해 정의하였으나 다항함수의 부정적분을 계산함으로써 부정적분의 존재성에 대한 탐구를 대체하였다고 볼 수 있다. 실질적으로 미분법을 이용하여 다항함수가 아닌 함수의 부정적분을 계산하는 것은 미적분 과목에서 탐구된다. 다항함수는 도함수를 계산하는 미분법이 존재하므로 부정적분을 항상 구할 수 있다는 장점이 있다. 따라서 학생들은 부정적분의 존재성을 자연스럽게 받아들이는 장점이 있으나 반대로 수학자들이 고민하였던 부정적분의 존재성에 대해 고민해볼 기회가 사라지기도 한다. 2015 개정 수학과 교육과정에서 정적분은 리만 합의 극한이 아닌 부정적분의 함숫값의 차로 정의되기 때문에 부정적분의 존재성은 곧 정적분의 존재성을 암시한다. 따라서 부정적분의 존재성에 대한 고민은 정적분의 존재성에 대한 고민으로 이어지므로 교사의 적절한 지도를 통해 부정적분의 도입이 이루어져야 한다.

정적분의 도입에서 부정적분의 함숫값의 차가 일정함을 이용하여 도입하는 방법을 택한 교과서는 구체적인 혹은 일반적인 함수 $f(x)$와 부정적분 $F(x)$에 대하여 부정적분의 함숫값의 차가 일정한 것으로 일반화하는 과정이 주요 내용임을 확인할 수 있다(박진희, 박미선, 권오남, 2018). 어떤 부정적분을 선택하여도 부정적분의 함숫값의 차가 일정하다는 성질에 집중함으로써 정적분을 정의하기까지 내용이 적고 쉽다는 장점이 있다. 하지만 이러한 도입 방법을 택하면 미적분의 기본정리가 갖는 수학적 의미가 부각 되지 않은 채 새로운 정의와 기호가 도입될 우려가 있다. 한편 곡선과 x축 사이 넓이를 이용하여 도입하는 방법은 넓이 함수 $S(x)$가 함수 $f(x)$의 한 부정적분이 됨을 이용하여 곡선과 x축 사이 넓이가 부정적분의 함숫값의 차로 표현될 수 있음을 보였다. 즉 부정적분의 함숫값의 차로 정의된 정적분에 넓이라는 기하학적 개념이 포함되었다. 그러므로 정적분을 정의하기까지 부정적분의 함숫값의 차가 갖는 수학적 의미가 분명하다는 장점이 있다. 정적분 정의의 학습경로와 정적분 정의에 포함된 개념은 [그림 Ⅵ-1]과 같다.



[그림 Ⅵ-1] 정적분 정의의 학습경로와 정적분에 포함된 개념

이상의 교과서 분석에 의하면 우리나라 2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서는 먼저 부정적분을 정의한 뒤 부정적분의 함숫값의 차로 정적분을 정의하였다. 교과서에 따라 부정적분의 함숫값의 차로 정적분을 정의하였을 때 정적분에 포함된 개념은 차이가 있었다. 그렇지만 모든 교과서가 적분상수에 상관없이 부정적분의 함숫값의 차가 같은 값을 가짐을 통해 부정적분의 함숫값의 차로 잘 정의할 수 있음을 보이므로 정적분을 정의하였다. 그리고 정적분의 정의를 이용해 정적분과 관련된 정리와 성질을 증명하며 적분 단원을 전개함을 확인하였다.

이러한 전개방식은 적분 개념 발달 역사의 특징과 비교해볼 때, 수학자들이 중요시한 적분 성질인 미적분의 기본정리를 정적분 정의로 택한 전개방식임을 알 수 있다. 적분을 바라보는 관점이 정적분을 합의 극한으로써 해석적 정의를 택한 뒤 정적분의 성질, 미적분의 기본정리 등을 엄밀히 증명하던 2009 개정 교육과정 교과서와는 다르다. 한편 교육부(2015)는 적분 단원의 성취기준 중 '[12수학 Ⅱ 03-03] 정적분의 뜻을 안다.'와 교수·학습 방법 및 유의 사항 중 '적분법을 단순히 적용하기보다는 적분의 의미를 이해하게 한다.'를 제시하였다. 미적분의 기본정리 의

미에 따라 정적분을 부정적분의 함숫값의 차로 정의함으로써 가질 수 있는 적절한 개념은 변화율에 따른 변화량, 곡선 아래 넓이가 있다. 그러므로 현 교육과정의 수학Ⅱ 교과서가 택한 적분에 대한 관점에 따라 정적분 도입에서 부정적분의 함숫값의 차가 가진 수학적 의미를 부각시킬 필요가 있다. 그리고 2015 개정 수학과 교육과정에서 적분의 일반화된 지식은 '미분과 역관계에 있는 적분은 도형의 넓이와 부피를 구하는 데 필요한 개념으로, 미분과 함께 변화 현상을 다루는 데 활용된다.'라고 명시되었다(교육부, 2015). 따라서 학생들이 정적분의 정의를 통해 관련된 정리와 성질들을 엄밀히 증명하기보다 코시 이전 정의가 가진 특징인 적분과 미분이 서로 역연산임을 확립하고 미적분의 기본정리의 의미인 변화율, 변화량과 곡선 아래의 넓이 사이 관계를 이해를 강화하도록 내용을 구성할 필요가 있다.

2. 적분 단원에서 나타나는 미적분의 기본정리

본 절은 정적분을 정의한 뒤 학습하는 세 명제인 정적분과 미분 관계, 정적분과 넓이 관계, 속도와 거리 관계에서 나타나는 미적분의 기본정리를 분석한다. 이 세 명제는 적분과 미분의 관계, 변화량과 넓이 사이 관계인 미적분의 기본정리에 관련된 명제들이기 때문이다. 정연준, 이경화(2009a)에 따르면 역사적으로 미적분의 기본정리는 속도 그래프 아래의 넓이와 거리 곧 위치 변화량 사이 관계를 탐구함으로써 발견되었고 일반화되었다. 따라서 세 명제를 분석하는 것은 미분과 적분의 역관계, 미적분의 기본정리 의미를 강화하도록 향후 교과서 개발 방향을 모색하는 데 도움이 될 것이다.

2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서는 정적분을 정의한 뒤 정적분과 미분 관계 곧 미적분의 제1 기본정리를 증명하였다. 정적분이 부정적분의 함숫값의 차로 정의된 덕분에 증명은 정적분의 정의와 미분을 통해 이루어진다. 정적분과 미분 관계의 증명은 다음과 같다.

정적분과 미분 관계

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속일 때, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$ (단, $a<x<b$).

[증명] 함수 $y=f(t)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $y=f(t)$의 한 부정적분을 $F(t)$라고 할 때, $a<x<b$인 x에 대하여 $\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)$이다. 등식의 양변을 x에 대해 미분하면 $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=F'(x)=f(x)$가 성립한다(홍성복 외, 2018: 129).

리만 합의 극한으로 정적분을 정의하였던 2009 개정 교육과정과 달리 정적분을 부정적분의 함숫값의 차로 정의함에 따라 적분 단원에서 정적분과 미분 관계까지 학습경로가 크게 단축되었다는 장점이 있다. 따라서 적분과 미분의 역관계를 기호적인 측면에서 쉽게 이해할 수 있다. 하지

만 부정적분의 함숫값의 차를 이용해 도입한 교과서의 경우 정적분의 정의에 수학적 개념이 잘 포함되지 않았으므로, 정적분과 미분 관계를 곧이어 다루게 되면 미분과 적분 연산을 확인하는 수준으로 그칠 수 있다. 이는 <표 Ⅵ-2>와 같이 로그와 지수의 관계와 유사하다.

<표 Ⅵ-2> 로그와 지수의 관계와 비교한 정적분과 미분 관계의 증명

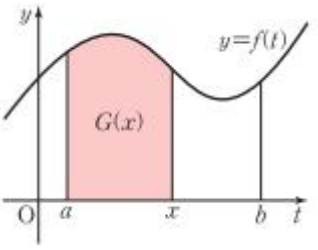
함수 $f(x)$의 부정적분 $F(x)$는 $F'(x)=f(x)$를 만족하는 함수	$\log_a b$는 방정식 $a^x=b$를 만족하는 x의 값
$\int_a^x f(t)dt=F(x)-F(a)$로 정의	함수 $g(x)=\log_a f(x)$로 정의
$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=\frac{d}{dx}\{F(x)-F(a)\}=F'(x)$ $=f(x)$ 가 성립한다.	$g(x)=\log_a f(x)$를 만족하는 함수라면 $a^{g(x)}=a^{\log_a f(x)}=f(x)$가 성립한다.

정적분과 미분 관계를 단순히 미분과 적분 연산을 확인하는 절차에 그치지 않기 위해서는 정적분 $\int_a^x f(t)dt$에 적절한 수학적 의미를 내포할 필요가 있다. 예를 들어 곡선과 x축 사이 넓이를 이용하여 도입하는 교과서의 경우 정적분에 미분과는 독립된 넓이라는 개념이 포함되어 있다. 그러므로 '$y=f(x)$의 곡선 아래 넓이 함수 $S(x)$의 순간변화율은 $f(x)$의 함숫값과 같다.'와 같은 수학적 의미를 내포할 수 있다. 따라서 정적분과 미분 관계의 학습경로가 단축된 만큼 적분과 미분 연산을 적용해보는 단계에 머물지 않도록 교과서 내용을 구성해야 한다.

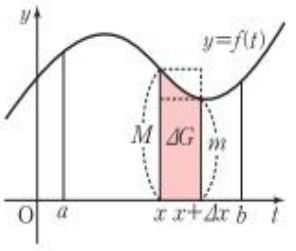
소단원 정적분의 활용에서는 정적분과 넓이 관계, 속도와 거리 관계를 학습한다. 박진희, 박미선, 권오남(2018)에 따르면 정적분과 넓이 관계는 교과서별로 크게 4가지의 방법이 존재한다. 두 가지 방법은 정적분의 정의를 통해 설명하거나 직관적인 설명을 통해 일반화하는 방법이다. 그리고 다른 두 가지 방법은 증명을 통해 정적분과 넓이 관계를 제시하는 방법이다. 먼저 최대, 최소 정리를 이용한 증명은 다음과 같다.

정적분과 넓이 관계

함수 $f(x)$가 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고 $f(x) \geq 0$일 때, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 $x=a, x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 $S=\int_a^b f(x)dx$ 이다 (배종숙 외, 2018: 131-132).



닫힌 구간 $[a,b]$에 속하는 임의의 x에 대하여 곡선 $y=f(t)$와 t축 및 두 직선 $t=a, t=x$로 둘러싸인 도형의 넓이를 $G(x)$라고 하자. 이때 $G(x)$는 연속함수이고 $G(a)=0, S=G(b)$이다. 여기서 $a<x<b$일 때, x의 증분 $\Delta x(\Delta x>0)$에 대한 $G(x)$의 증분을 ΔG라고 하면 $\Delta G=G(x+\Delta x)-G(x)$이다. 이때 $f(t)$는 닫힌 구간 $[x,x+\Delta x]$에서 연속이므로 이 구간에서 최댓값과 최솟값을 가진다. 그 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라고 하면 $m\Delta x \leq \Delta G \leq M\Delta x$ 이므로 $m \leq \frac{\Delta G}{\Delta x} \leq M$임을 보일 수 있다.



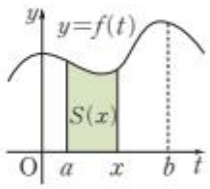
함수 $f(t)$는 닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이므로 $\Delta x \to 0$일 때 $m \to f(x), M \to f(x)$이다. 따라서 $G'(x)=\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta G}{\Delta x}=f(x)$이므로 함수 $G(x)$는 $f(x)$의 부정적분 중 하나이다. 한편 함수 $f(x)$의 한 부정적분을 $F(x)$라고 하면 $a<x<b$일 때 $G'(x)=f(x)=F'(x)$이므로 닫힌 구간 $[a,b]$에서 $G(x)=F(x)+C$인 상수 C가 존재한다. 이때 $G(a)=F(a)+C=0$이므로 $C=-F(a)$이다. 따라서 다음이 성립한다.

$S=G(b)=F(b)+C=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$ (배종숙 외, 2018: 131-132).

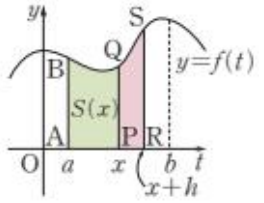
다음은 적분의 평균값 정리를 이용한 증명이다.

닫힌 구간 $[a,b]$에서 연속이고, $f(t) \geq 0$인 함수 $f(t)$와 $a \leq x \leq b$인 x에 대하여 곡선 $y=f(t)$와 두 직선 $t=a, t=x$ 및 t축으로 둘러싸인 도형의 넓이를 $S(x)$라고 하자. 넓이 $S(x)$의 도함수를 구하기 위하여 $h>0$일 때, 점

$(x+h,0),(x+h,f(x+h))$를 각각 R,S라고 하자. 이때 $S(x+h)-S(x)$는 오른쪽 그림의 색칠한 부분 $PRSQ$의 넓이와 같다.

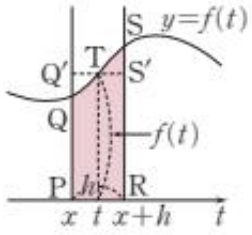


오른쪽 그림에서 색칠한 부분 $PRSQ$와 넓이가 같은 직사각형 $PRS'Q'$을 나타낼 때, 선분 $Q'S'$과 곡선 $y=f(t)$의 교점을 $T(t,f(t))$라고 하면 직사각형 $PRS'Q'$의 넓이는 $S(x+h)-S(x)=hf(t)$이다.



즉 $\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(t)$이다.

같은 방법으로 $h<0$일 때도 같은 결과를 얻을 수 있다. 이제 $h\to 0$일 때, $t\to x$이므로 $f(t)\to f(x)$이다.



즉 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}=f(x)$이다.

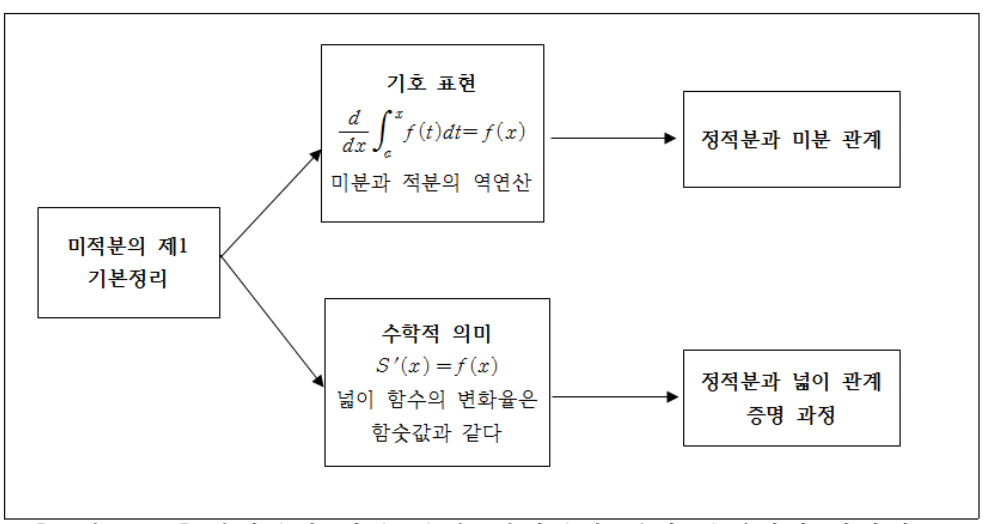
그러므로 $S'(x)=f(x)$가 성립한다. 따라서 $S(x)$는 함수 $f(x)$의 부정적분 중의 하나이다. 그러므로 $F(x)$를 $f(x)$의 또 다른 부정적분이라고 하면 $S(x)=F(x)+C$ (단, C는 상수)이다. 그런데 $x=a$일 때, $S(x)$의 정의에 의하여 $S(a)=0$이 되므로 $F(a)+C=0$이다. 따라서 $C=-F(a)$이고 $S(x)$를 다음과 같이 나타낼 수 있다. $S(x)=F(x)-F(a)$.

곡선 $y=f(x)$와 x축 및 두 직선 $x=a,x=b$로 둘러싸인 도형의 넓이 S는 앞 식에 $x=b$를 대입한 $S(b)=F(b)-F(a)=\int_a^b f(x)dx$ 와 같다 (권오남 외, 2018; 142-143).

각 교과서에 존재하는 정적분과 넓이 관계를 설명하는 방법은 차이가 있었으나 모두 곡선 $y=f(t)$와 t축 그리고 $t=a,t=x$로 둘러싸인 도형의 넓이 $S(x)$가 $f(t)$의 부정적분 곧 $S'(x)=f(x)$임을 보임으로써 정적분과 넓이 관계를 설명하였다. 박진희, 박미선, 권오남(2018)에 따르면 정적분과 넓이 관계를 최대, 최소 정리를 이용해 설명하는 방법은 2009 개정 교육과정에서의 정적분과 미분의 관계와 미적분의 기본정리의 설명을 합쳐놓은 것이다. 즉 정적분이 넓이 개념과 변화율에 따른 변화량 개념을 가짐에 따라 정적분을 리만 합의 극한으로 정의했던 2009 개정 교육과정

에서는 정적분과 미분의 관계에서 두 개념이 연결되었다면 정적분을 부정적분의 함숫값의 차로 정의한 2015 개정 교육과정에서는 정적분과 넓이 관계에서 두 개념이 연결되고 있다. 미적분의 제2 기본정리의 의미인 '변화율 함수 아래 넓이가 변화율에 따른 변화량과 같다.'가 정적분과 넓이 관계에서 학습되고 있다.

모든 교과서가 정적분과 넓이 관계를 설명하는 데 있어 정적분과 미분 관계를 사용하지 않음을 통해서도 정적분과 미분 관계에 대한 지식이 없어도 변화량 개념과 넓이 개념을 연결하는 데 문제가 없음을 확인할 수 있다. 특히 정적분과 넓이 관계의 증명 중 $S'(x)=f(x)$임을 보이는 과정은 곧 미적분의 제1 기본정리인 '넓이 함수의 순간변화율은 함숫값과 같다.'를 보이는 과정이다. 즉 정적분과 넓이 관계의 증명 과정이 정적분과 미분 관계의 수학적 의미를 포함하고 있다. 따라서 현 교육과정에서는 정적분과 넓이 관계가 미적분의 기본정리의 수학적 의미를 잘 보여주고 있으므로 미적분의 제1 기본정리인 정적분과 미분 관계를 통해 어떤 수학적 의미를 학습시킬 것인지에 대한 연구가 필요하다.



[그림 Ⅵ-2] 정적분과 미분 관계, 정적분과 넓이 관계에서 나타나는 미적분의 제1 기본정리

정적분과 넓이 관계를 학습한 뒤 속도와 거리 관계를 학습한다. 속도와 거리 관계는 교과서별로 내용 차이가 크지 않았다. 속도와 거리 관계에 관한 내용은 다음과 같다.

속도와 거리 관계

수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 t에서의 속도 $v(t)$와 시각 t_0에서의 점 P의 위치 $x_0 = f(t_0)$이 주어졌을 때, 시각 t에서의 점 P의 위치 $x = f(t)$를 구해 보자.

$f'(t) = v(t)$에서 $f(t)$는 $v(t)$의 한 부정적분이므로 $\int_{t_0}^{t} v(t)dt = f(t) - f(t_0) = x - x_0$ 이다.

따라서 시각 t에서의 점 P의 위치 $x = f(t)$는 $x = f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$ 이다.

또, 시각 $t = a$에서 $t = b$까지 점 P의 위치 변화량은 $f(b) - f(a) = \int_{a}^{b} v(t)dt$이다 (홍성복 외, 2018: 148-149).

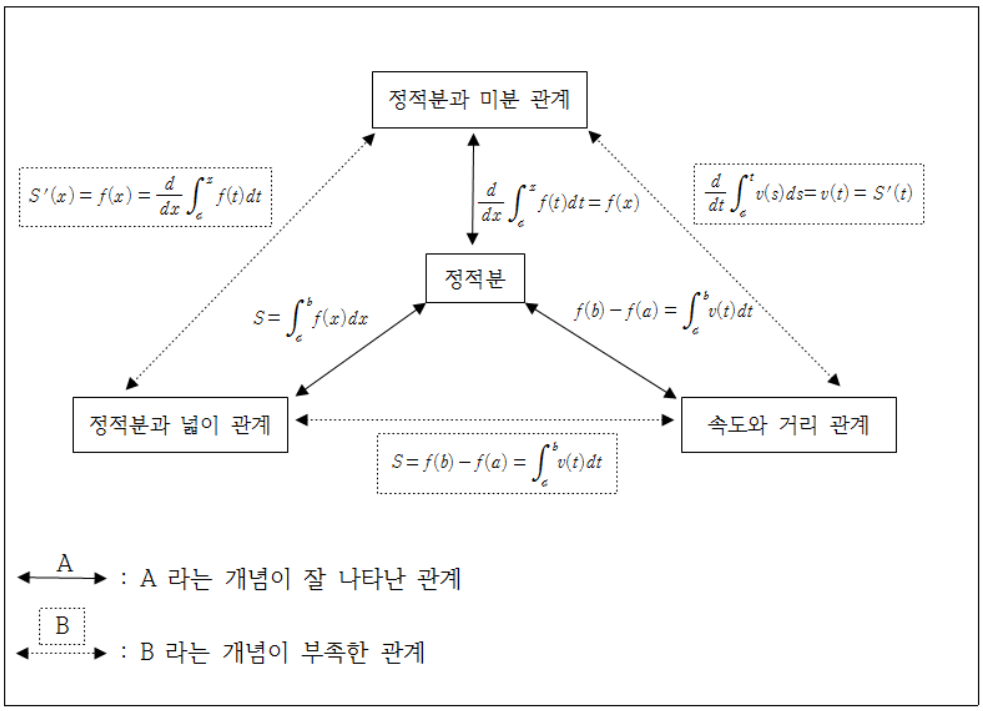
속도와 거리 관계에 대한 설명은 위치 함수가 속도 함수의 부정적분임을 이용하여 $t = a$에서 $t = b$까지의 위치 변화량인 위치함수의 함숫값의 차를 정적분을 통해 나타낸다. 그러므로 시각 t에서의 점의 위치는 $x = f(t) = x_0 + \int_{t_0}^{t} v(t)dt$으로 나타낼 수 있다. 2009 개정 교육과정 교과서와 2015 개정 교육과정 교과서의 정적분 정의가 다름에도 불구하고 정적분 활용에서 속도와 거리 관계를 설명하는 방법은 동일하다. 이유는 두 교육과정 모두 미적분의 제2 기본정리를 이용하여 속도와 거리 관계를 설명하기 때문이다. 따라서 현 교육과정의 속도와 거리 관계는 미분과 부정적분의 개념만으로 설명할 수 있다. 즉 미적분의 제2 기본정리로 정의된 정적분의 정의를 통해 자연스럽게 설명할 수 있다는 장점이 있다. 따라서 미분 단원에서 위치를 미분하여 속도를 얻고 적분 단원에서 속도를 적분하여 위치를 얻음으로써 쉽게 미분과 적분의 역관계임을 파악할 수 있다.

한편 정연준, 이경화(2009a)에 따르면 거리 계산 문제는 단지 정적분 계산법 곧 미적분의 제2 기본정리를 적용하는 기회만이 아닌 속도 그래프 아래의 넓이와 거리 사이의 관계를 파악하여 미적분의 역사적 발달에서 본질적이었던 변화율의 의미를 파악하는 기회로 다루어져야 한다고 하였다. 하지만 교과서 분석 결과 미분과 부정적분의 개념만으로 속도와 거리 관계를 설명하고 있으므로 미적분의 제2 기본정리의 수학적 의미인 그래프 아래의 넓이와 거리 사이에 어떤 관계가 있는지 탐구할 기회가 부족하다. 또한, 속도, 거리 맥락에서 정적분과 미분 관계 곧 미적분의 제1 기본정리에 대한 탐구할 수 있는 기회 역시 부족하였다. 따라서 미분과 적분의 역관계, 정적분과 넓이 관계를 종합하여 속도 그래프 아래의 넓이와 거리 사이의 관계에 대해 파악하고 이로써 변화율과 변화량의 관계를 탐구하는 기회를 제공해야 할 것이다.

이상의 교과서 분석에 의하면 정적분의 정의와 세 명제 사이에 나타난 미적분의 기본정리는 [그림Ⅵ-3]과 같다. 현 교육과정 교과서는 명제마다 정적분의 정의와의 관계에서 미적분의 기본정리가 잘 나타났지만 세 명제 사이 관계에서는 미적분의 기본정리가 다소 부각되지 못한 것으로 나타났다. 정적분과 미분 관계는 정적분으로 정의된 변화량 함수 $\int_a^x f(t)dt$의 미분이 변화율 함수 $f(x)$와 같다는 관계를 서술하였다. 정적분과 넓이 관계에서는 정적분 $\int_a^b f(x)dx$가 곡선 $y=f(x)$와 x축 그리고 직선 $x=a, x=b$ 사이 넓이와 같다는 관계를 학습한다. 속도와 거리 관계에서는 위치 변화량 $f(b)-f(a)$가 속도의 정적분 $\int_a^b v(t)dt$와 같다는 관계가 나타났다.

하지만 정적분과 미분 관계에서는 미적분의 제1 기본정리의 기호 표현을 다루고 정적분과 넓이 관계의 증명 과정에서 미적분의 제1 기본정리의 수학적 의미를 보이지만 두 명제 사이 연결은 적절히 이루어지고 있지 않다. 속도와 거리 관계에서는 미적분의 제2 기본정리를 통해서만 탐구 활동이 주로 이루어지고 속도, 거리 맥락에서 정적분과 미분 관계, 정

적분과 넓이 관계의 탐구가 적절히 이루어지지 않고 있다. 따라서 코시 이전 정의가 가진 특징인 적분과 미분이 서로 역연산임을 강조하고 미적분의 기본정리 의미를 부각하기 위해서는 다음의 고민이 필요해 보인다. 첫째 정적분과 미분 관계의 의미에 대한 재고, 둘째 속도와 거리 맥락에서 정적분과 미분 관계, 정적분과 넓이 관계의 의미 탐구이다.



[그림 Ⅵ-3] 정적분 정의와 정적분과 미분 관계, 정적분과 넓이 관계, 속도와 거리 관계에서 나타난 미적분의 기본정리

Ⅶ. 결론

2015 개정 교육과정에서 정적분 정의를 부정적분의 함숫값의 차로 정의함에 따라 교육과정, 교과서, 수업 현장에서 많은 변화가 발생하고 변화에 따른 혼선이 초래될 것으로 예상한다. 따라서 본 연구는 역사 발생적 원리를 통해 교과서의 개발 방향을 제시하여 위와 같은 혼선에 대한 하나의 대책을 제공하는 데 의의가 있다. 이에 따라 다음의 세 가지 연구 문제를 설정하였다.

첫째, 적분 개념은 발달 과정 동안 어떤 관점으로 형성되었는가? 적분 개념은 두 가지 관점에 따라 발달하였다. 첫 번째 관점은 적분 이론의 엄밀한 전개를 위해선 미분과 독립된 합의 극한으로써 해석적 정의가 필수적임을 보여주는 관점이다. 이 관점은 코시 적분, 리만 적분, 르베그 적분으로 발달하는 동안 적분 정의가 모두 합의 극한으로써 정의한 것을 통해 알 수 있다. 두 번째 관점은 적분을 부정적분의 함숫값의 차로 여기는 것이 적분의 자연스러운 성질임을 보여주는 관점이다. 이 관점은 코시 적분과 르베그 적분이 부정적분의 존재성 보장, 미적분의 기본정리의 이론적 해결을 위하여 제시되었다는 사실과 리만 적분이 발달하고 볼테라 함수가 발견되었음에도 여전히 미분과 적분이 서로 역연산임을 간주하였던 수학자들이 있었다는 사실로부터 알 수 있다.

둘째, 2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서의 정적분 정의의 학습경로는 어떠한가? 2015 개정 교육과정 수학Ⅱ 교과서는 코시 이전 적분 정의를 택하여 적분 단원을 전개하였다. 그러므로 적분 단원의 엄밀한 전개보다 미분과 적분의 역 관계를 확립하고 미적분의 기본정리의 수학적 의미를 충분히 음미할 수 있는 전개가 더 적절하다고 보았다. 수학자들이 미적분의 기본정리를 중요한 성질로 보았던 이유는 넓이와 변화율, 변화량을 연결시켜주는 정리였기 때문이다. 하지만 교과서 분석 결과 정적분이 미적분의 기본정리로 정의되었을 때 정적분에 변화율에 따른 변화량, 곡선 아래 영역의 넓이의 개념이 적절히 포함되지 않은 것으로 나타났다.

셋째, 정적분과 미분 관계, 정적분과 넓이 관계, 속도와 거리 관계에서

미적분의 기본정리는 어떻게 나타나는가? 현 교육과정 교과서는 명제마다 정적분의 정의와의 관계에서 미적분의 기본정리가 잘 나타났다. 하지만 세 명제 사이 관계에서는 미적분의 기본정리가 다소 부각되지 못한 것으로 나타났다. 정적분과 넓이 관계의 증명 과정 중 넓이 함수의 변화율이 함숫값과 같음을 보이는 과정은 정적분과 미분 관계의 수학적 의미를 보여주는 과정이었다. 즉 정적분과 넓이 관계의 증명 과정은 미적분의 제1 기본정리의 수학적 의미를 포함하고 정적분과 미분 관계는 미적분의 제1 기본정리를 기호 맥락에서만 탐구하고 있었다. 또한, 속도와 거리 관계를 학습할 때 정적분의 정의를 통해서만 이해할 뿐 속도와 거리 맥락에서 정적분과 넓이 관계, 정적분과 미분 관계에 대한 탐구는 이루어지지 않았다. 따라서 정적분과 미분 관계를 통해 학습할 의미에 대한 재규정과 세 명제 사이에서 미적분의 기본정리가 부각되기 위한 내용 구성이 필요하다.

따라서 본 연구는 미적분의 기본정리 의미가 강조되는 교과서 개발 방향에 다음 네 가지 시사점을 제언한다.

첫째, 정적분 정의가 도입될 때 부정적분의 함숫값의 차가 변화율에 따른 변화량이란 개념을 충분히 탐구할 수 있도록 내용을 구성해야 한다. 현재 정적분을 미적분의 기본정리로 정의하지만 도입방식에 따라 적절한 수학적 의미가 부재하고 있었음을 확인하였다. 특히 도입방식에 상관없이 정적분 정의가 변화율에 따른 변화량 개념을 포함하지 않는 것으로 나타났다. 역사적으로 수학자들이 미적분의 기본정리를 중요한 성질로 여기고 이 성질이 유지되도록 적분 이론을 발달시켰던 이유는 미적분의 기본정리가 넓이와 변화율, 변화량을 연결해주는 정리이기 때문이다. 특히 미적분의 제2 기본정리는 곡선 아래 넓이와 변화율에 따른 변화량이 같다는 정리이다. 그러므로 정적분과 넓이 관계에서 정적분에 넓이 개념이 포함되었을 때 미적분의 제2 기본정리의 의미를 이해하기 위해서는 정적분의 정의에서 변화율에 따른 변화량이란 개념이 포함되어 있어야 한다. 따라서 부정적분의 함숫값의 차가 일정한 성질은 변화율이 같으면

변화량 역시 같다는 성질이므로 이 일정한 변화량을 정적분으로 정의하고 있음을 교과서에 명시할 필요가 있다.

둘째, 정적분과 넓이 관계를 정적분과 미분 관계보다 선행해서 다루어야 한다. 정적분이 부정적분의 함숫값의 차로만 정의될 경우 정적분과 미분 관계 학습 시 미적분의 기본정리 의미를 탐구하지 못한 채 적분과 미분의 역연산 관계를 확인하는데 그칠 수 있는 것으로 나타났다. 수학자들이 미적분의 제1 기본정리를 중요시했던 이유는 넓이 함수의 변화율이 함숫값이 되기 때문이다. 따라서 정적분과 넓이 관계를 먼저 다루게 된다면 정적분이 미분과는 독립된 넓이라는 개념으로도 정의될 수 있고 따라서 정적분과 미분 관계에서 '$y=f(x)$의 곡선 아래 넓이 함수 $S(x)$의 순간변화율은 $f(x)$의 함숫값과 같다.'와 같은 수학적 의미를 내포할 수 있다.

셋째, 정적분과 미분 관계를 학습할 때 정적분과 넓이 관계의 증명 과정 일부인 '$S'(x)=f(x)$'를 적분과 미분 기호를 이용한 기호 맥락에서 재음미해야 한다. 정적분과 넓이 관계를 선행하여 학습한다면 정적분과 미분 관계의 수학적 의미를 정적분과 넓이 관계의 증명 과정 중 이미 탐구하게 된다. 따라서 정적분과 미분 관계에서는 '정적분과 넓이 관계에 의해 $S(x)=\int_a^x f(t)dt$이므로 $S'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x)$이다.'와 같이 정적분과 넓이 관계의 증명 과정을 기호 맥락에서 탐구해야 한다. 이로써 미분과 적분의 역연산을 확인하는 것으로 그치는 것이 아닌 미적분의 제1 기본정리의 의미인 넓이와 변화율의 연결 관계를 정적분과 미분 관계에 포함할 수 있다.

넷째, 속도와 거리 맥락에서 정적분 정의뿐 아니라 정적분과 넓이 관계, 정적분과 미분 관계의 수학적 의미를 탐구할 수 있도록 내용을 구성해야 한다. 현 교육과정의 교과서는 속도와 거리 관계를 미분, 부정적분, 정적분 정의를 이용해서 설명하고 있으므로 속도와 거리 맥락에서 미적분의 기본정리 의미를 탐구할 기회가 부족한 것으로 나타났다. 따라서 '속도 그래프 아래 넓이가 위치 변화량과 같다. 즉 $S=f(b)-f(a)=\int_a^b v(t)dt$ 가

성립한다.' 그리고 '속도 그래프 아래 넓이의 변화율은 속도이다. 즉 $\frac{d}{dt}\int_a^t v(s)ds = v(t)$가 성립한다.'와 같은 미적분의 기본정리를 탐구할 기회 역시 제공해야 한다. 속도 거리 맥락에서 미적분의 기본정리의 의미에 대한 이해는 곧 일반화된 미적분의 기본정리에 대한 이해를 강화해줄 것이다.

제언한 네 가지 시사점을 향후 교과서 개발 방향에 적용하게 되면 [그림 Ⅶ-1]과 같은 미적분의 기본정리를 강조하는 학습경로를 기대할 수 있다. (★) 표시가 있는 내용은 교과서에 시사점이 적용된다면 더 강조될 것이라 기대되는 내용이다.

수학적 개념	기호 표현	수학적 의미
부정적분	$F(x)$ $(F'(x)=f(x))$	함수 $f(x)$를 도함수로 갖는 함수
↓ 정적분	$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$	변화율에 따른 변화량 (★)
↓ 정적분과 넓이 관계	$S=\int_a^b f(x)dx$	곡선 $y=f(x)$ 아래 영역의 넓이와 변화율에 따른 변화량은 같다. (★)
↓ 정적분과 미분 관계	$\frac{d}{dx}\int_a^z f(t)dt = f(x)$	곡선 $y=f(x)$ 아래 넓이 함수의 변화율은 함숫값과 같다. $(\frac{d}{dx}\int_a^z f(t)dt = f(x)=S'(x))$ (★)
↓ 속도와 거리 관계	(1) $f(b)-f(a)=\int_a^b v(t)dt$ (2) $\frac{d}{dt}\int_a^t v(s)ds=v(t)$ (★)	(1) 속도 그래프 아래 영역의 넓이는 위치변화량과 같다. $(S=\int_a^b v(t)dt=f(b)-f(a))$ (★) (2) 속도 그래프 아래 영역 넓이 함수의 변화율은 속도와 같다. $(\frac{d}{dt}\int_a^t v(s)ds=v(t)=S'(t))$ (★)

[그림 Ⅶ-1] 미적분의 기본정리가 강조된 학습경로

끝으로 현 교육과정에서 부정적분의 함숫값의 차로 정적분을 정의한 것은 단순히 학생들의 학습량을 감축하는 차원을 넘어 적분에 대한 수학자

들이 가졌던 하나의 관점을 음미할 기회라 생각한다. 현 교육과정은 수학자들이 중요시한 미적분의 기본정리의 수학적 의미를 탐구하기 좋은 교육과정이다. 따라서 적분 단원 학습 시 미분과 적분의 역연산 관계와 미적분의 기본정리의 수학적 의미를 강조하고 충분히 탐구할 수 있도록 교육과정, 교과서, 교수법 등에 대한 후속 연구들이 필요하다.

참 고 문 헌

강정기(2019). 미적분의 기본정리에 대한 Newton과 Leibniz의 직관 및 발견적 교수법 탐색. **수학교육학연구** 29(4). 대한수학교육학회. 525-549.

고성은, 이진호, 이승우, 차순규, 김윤희, 오택근, 조성철(2018). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: ㈜좋은책신사고.

교육부(2015). 교육부 고시 제2015-74호 [별책 8] 수학과 교육과정. 교육부.

권오남, 신준국, 전인태, 김미주, 김철호, 김태홍, 박재희, 박정숙, 박지현, 박찬호, 박효근, 오국환, 조경희, 조상현, 황성문(2018). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: ㈜교학사.

김경화(2008). 적분개념의 발달(리만적분에서 르베그적분으로의 이행을 중심으로). **한국수학사학회지** 21(3). 67-96.

김부미, 박지현(2011). 미적분학의 기본정리에 대한 교사의 Folding Back 사고 모형 제안. **학교수학** 13(1). 대한수학교육학회. 65-88.

김원경, 조민식, 방금성, 윤종국, 신재홍, 임석훈, 김동화, 강순자, 김기탁, 박희정, 심주석, 오혜정, 이동근, 이성재, 정재훈(2018). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: ㈜비상교육.

김은숙, 조완영(2019). 2015 개정 교육과정에 따른 <수학Ⅱ> 교과서에 나타난 수학사 활용 유형 분석. **수학교육논문집** 33(4). 대한수학교육학회. 471-488.

김하연(2019). 고등학교 학생들의 정적분 개념의 해석 전략과 표현 방식에 따른 이해. 박사학위논문. 이화여자대학교.

류희찬, 선우하식, 신보미, 조정묵, 이병만, 김용식, 임미선, 한명주, 남선주, 김명수, 정성윤(2018). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: 천재교과서.

박교식, 이종희, 김진환, 남진영, 김남희, 임재훈, 유연주, 권석일, 김선희, 김종욱, 김경직, 윤형석, 고현주, 윤형주, 김영실, 김해성, 이경진, 조유미, 이정연, 양정은(2018). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: 동아출판(주).

박문환, 민세영(2002). 역사발생적 관점에서 본 미적분 지도. **학교수학** 4(1). 대한수학교육학회. 49-62.

박진희, 박미선, 권오남(2018). 2015 개정 교육과정에 따른 <수학Ⅱ> 교과서의 정적분의 도입 및 활용 분석. **수학교육** 57(2). 대한수학교육학회. 157-177.

배종숙, 여태경, 조보관, 김민경, 천화정, 조성현, 변도열(2018). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: ㈜금성출판사.

신보미(2008). 구분구적법과 정적분의 개념 분석. **한국학교수학회논문집** 11(3). 한국학교수학회. 421-438.

신수진, 조완영(2018). 2015 개정 교육과정에 따른 <수학Ⅱ> 교과서의 정적분 정의에 대한 대안. **학교수학** 20(4). 대한수학교육학회. 723-741.

우정호, 민세영(2002). 역사발생적 수학 학습-지도 원리에 관한 연구. **수학교육학연구** 12(3). 대한수학교육학회. 409-424.

이기돈(2019). 2015 개정 <미적분> 교과서의 '정적분과 급수의 합 사이의 관계'서술 내용 분석 및 제언, <수학 Ⅱ>와의 연계성 관점에서. **수학교육학연구** 29(1). 대한수학교육학회. 93-112.

이준열, 최부림, 김동재, 이정례, 전철, 장희숙, 송윤호, 송정, 김성철, 김미영(2018). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: ㈜천재교육.

정연준, 이경화(2009a). 미적분의 기본정리에 대한 고찰, 속도 그래프 아래의 넓이와 거리의 관계를 중심으로. **수학교육학연구** 19(1). 대한수학교육학회. 123-142.

정연준, 이경화(2009b). 부정적분과 정적분의 관계에 관한 고찰. **학교수학** 11(2). 대한수학교육학회. 301-316.

조윤동(2003). 미적분의 역사와 변증법적 유물론. **학교수학** 5(4). 대한수학교육학회. 521-540.

한국과학창의재단(2015). 2015 개정 수학과 교육과정 시안 개발 연구Ⅱ. 한국과학창의재단.

허학도 (2006). 직사각형 넓이 공식의 이해와 인식론적 장애. 석사학위

논문. 서울대학교.
홍성복, 이중권, 신태교, 이채형, 이병하, 신용우, 전형숙, 김형균, 권백일, 최원숙, 강인우(2018). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: ㈜지학사.
황선욱, 강병개, 윤갑진, 이광연, 김수영, 이문호, 김원일, 박문환, 박상의(2018). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: 미래엔.
Bettina Rösken, Katrin Rolka(2007). Integrating Intuition: The role of concept image and concept definition for students learning of integral calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast, ISSN 1551-3440. Monograph 3.* 181-204.
Dave Ruch(2017). *The Definite Integrals of Cauchy and Riemann. Analysis.* 11.
David M. Bressoud(2011). Historical Reflections on Teaching the Fundamental Theorem of Integral Calculus, *The American Mathematical Monthly* 118(2), 99-115.
Dennis M. Cates(2019). *Cauchy's Calcul Infinitésimal: An Annotated English Translation*. Switzerland: Springer Nature Switzerland AG.
Detlef Laugwitz(1999). *Bernhard Riemann 1826-1866: Turning Points in the Conception of Mathematics*. Boston: Birkhäuser.
Fyodor A. Medvedev(1991). *Scenes from the History of Real Functions*. Springer Basel AG.
Georg Friedrich Bernhard Riemann(1854). Ü*ber die Darstellbarkeit einer Function durch eine trigonometrische Reihe*. Göttingen.
H. Lebesgue(1902). Intégrale, Longueur, Aire. *Annali di Matematica* 3(7). 231-359.
Jean Gaston Darboux(1875). Mémoire sur les fonctions discontinues. *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure* 2(4), 57-112.
Joseph Fourier(1822). *Théorie analytique de la chaleur*. Paris.
Joseph F. Wagner(2018). Students' Obstacles to Using Riemann Sum Interpretations of the Definite Integral, *Int. J. Res. Undergrad.*

Math. Ed. 4, 327 - 356.

Juan Carlos Ponce-Campuzano, Miguel Ángel Maldonado-Aguilar(2015). Vito Volterra's construction of a nonconstant function with a bounded, non-Riemann integrable derivative. *BSHM Bulletin* 30(2). 143-152.

Judith V. Grabiner(2005). *The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus*. New York: Dover Publications, Inc.

Lakatos. I. (1976). *Proofs and refutations*. Cambridge: Cambridge University Press.

Steven R. Jones(2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms, *Journal of Mathematical Behavior 32*, 122-141.

Thomas Hawkins(2001). *Lebesgues Theory of Integration Its Origins and Development(2nd Ed.)*. United States of America: American Mathematical Society.

Uta C. Merzbach, Carl B. Boyer(2011). *A History of Mathematics(3rd Ed.)*. New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.

Vicki Sealey (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals, *Journal of Mathematical Behavior 33*, 230-245.

William Dunham(2005). *The Calculus Gallery: Masterpieces from Newton to Lebesgue*. New Jersey: Princeton University Press.

Abstract

An Analysis of the Integral Unit in the 2015-Revised Curriculum From the Point of View of Integral Theory

Lee, Joo Young

Department of Mathematics Education

The Graduate School

Seoul National University

Since a definition of definite integral was defined as the difference of values of an indefinite integral in the 2015 revised curriculum, This study began with the question ‘what integral classes should be given’compared to integral classes up to the 2009 revised curriculum, where the definition of definite integral was defined as the limit of Riemann sum. Integral is an important mathematical concept that not only is used to determine the area and volume of the shape, but also describes the phenomenon of change. Also, knowledge of functions,

differentials, and series is connected in the integral units, and it is a mathematical concept that is applied in many fields in university mathematics. Therefore, it is necessary to study how to develop textbooks based on the current definition of definite integral.

Based on the historical principles, we studied 'what perspective the concept of integral developed', 'what integral perspective did the 2015 revised curriculum math II textbook take' and 'the fundamental theorem of calculus in the relationship of definite integral and differentiation, the relationship of definite integral and area, and the relationship of speed and distance'. The concept of integral developed from two perspectives. The first point of view is the view that analytical definition as a limit of sum which is independent of differentiation is essential for the precise development of integral theory. Thus, during the development of Cauchy, Riemann, and Lebesgue integral, the theory of integration was developed by defining definite integral as a limit of sum. The second view is that it is a natural and important nature of the integral to regard it as the difference of values of an indefinite integral. Thus, attempts to redefine definite integral as the second fundamental theorem of calculus had been made continuously while developing into Cauchy, Riemann and Lebesgue integral.

As results of analysis of textbooks, The current curriculum mathematics II textbook defines definite integral as the second fundamental theorem of calculus and follows the deployment method of adopting the definition of integral which is before Cauchy. However, although the integral definition which is before Cauchy contains mathematical meaning that the area of the change rate function is the difference of values of a change function, the definite integral of the Mathematics II textbook did not adequately include

this mathematical meaning. And the fundamental theorem of calculus was well shown between the definition of definite integral and 'the relationship of integral and differentiation', 'the relationship of definite integral and area','the relationship of speed and distance', but the fundamental theorem of calculus was not well revealed among the three proposition. In particular, despite the fact that 'the relationship of integral and differentiation' is the first fundamental theorem of calculus, the first fundamental theorem of calculus is explored in the context of symbols in 'the relationship of integral and differentiation', and the mathematical meaning of the first fundamental theorem of calculus is explored in the process of proving 'the relationship of definite integral and area'. It was also confirmed that 'the relationship of integral and differentiation' and 'the relationship of definite integral and area' were not adequately addressed in the context of speed and distance.

Therefore, the following four implications were suggested in this study: First, when the definition of definite integral is introduced, the content should be structured to fully explore the concept that the difference of values of an indefinite integral is the amount of change according to the rate of change. Second, 'the relationship of definite integral and area' should be treated in advance of 'the relationship of integral and differentiation'. Third, in learning 'the relationship of integral and differentiation', '$S'(x)=f(x)$'should be re-tasted in the context of symbols using integral and differential symbols, which are part of the proving process of 'the relationship of definite integral and area'. Fourth, in the context of speed and distance, content should be organized to explore the mathematical meaning of 'the relationship of definite integral and area' and 'the relationship of integral and differentiation' as well as the definition of definite integral.

As integral has an important position In school mathematics, the change of the definition of definite integral is expected to cause confusion in integral classes. Therefore, this research was intended to be a measure against confusion by seeking and presenting directions for developing textbooks based on the changed definition of definite integral.

keywords : Integration Theory, the Fundamental Theorem of Calculus, Analysis of Textbook
Student Number : 2019-21925