생산용량 제한 하에서의 가격변수 Newsvendor 게임*

남 익 현**

《目 次》

Ⅰ. 들어가며

전통적인 Newsvendor 모형에서는 가격을 상수로 보고 최적주문량을 구하는 것을 다루었는데 이를 확률적 수요함수가 가격변수에 의해 영향을 받는 것으로 확장하는 것이 의미가 있다. Petruzzi and Dada (1999)에서는 Newsvendor 모형의 수요가 가격에 의해 영향을 받는 경우를 다루고 있다. 해당 논문에서는 수요가 가산형인 경우와 곱의 형태인 경우를 다루고 있다. 가산형 수요의 경우 $D(p,\epsilon)=a-bp+\epsilon$를 다루어 수요가 확정적 선형함수와 확률변수 ϵ의 합의 형태를 띠는 경우를 다루었다. 곱의 형태에서는 $D(p,\epsilon)=ap^{-b}\epsilon$를 다루었다. Dana and Petruzzi (2001)에서는 두 가지 확률분포에 따라 수요가 결정되는 모형을 다루고 있다. 총괄적 수요(aggregate demand)를 확률변수 A로 나타내고 소비자의 외부 대안의 가치를 나타내는 확률변수를 u로 표현하여 두 변수를 이용한 곱의 형태로 유효수요를 나타내는 모형을 다루고 있다. 본 논문에서는 소비자의 수요함수가 다음과 같이 가격에 의해 확정적으로 결정되는 부분$(1-p)$과 확률적인 부분(ϵ)의 곱으로 구성되는 경우를 다루어 보기로 하자. 구체적인 분석을 위해서 확률성은 균등분포를 따르는 경우를 상정하기로 하자.

$D=(1-p)\epsilon,$

$\epsilon \sim U[0,1],\ 0 \le p \le 1.$

본 논문에서의 핵심적인 내용은 2인의 소매상이 존재하여 상호 가격 경쟁을 한다는 것이다. 두

* 본 연구는 서울대학교 경영정보연구소의 연구비 지원에 의해 이루어졌습니다.

** 서울대학교 경영대학 교수

소매상이 상호 가격 경쟁을 하는데 각자 생산용량의 제한으로 인해 의사결정이 영향을 받는다는 것을 보일 것이다. 이를 다루기 이전에 1인 소매상의 경우를 참고로 살펴보기로 하자.

Ⅱ. 가격 모형

가격의 수요에 대한 영향을 다루기 위한 Newsvendor 모형에서는 수요에 대한 확률밀도함수와 누적분포함수에 가격변수 p를 포함하여 $f_p(x), F_p(x)$로 표현할 수 있을 것이다. 기존 확률밀도함수와 누적분포함수와는 달리 첨자 p가 부여되었음에 유의하여야 한다. 이 경우 소매상의 최적 주문량도 가격의 함수로 표현될 것이므로

$$q^*(p) = F_p^{-1}(r) = F_p^{-1}\left(\frac{p-c}{p-s}\right)$$

을 만족할 것이다. 여기서 p는 소매상이 최종소비자에게 부과하는 판매가격이고 c는 생산자 혹은 도매상으로부터의 구매원가, s는 소매상이 미판매 재고를 처분할 때 얻는 잔존가치를 나타낸다. 또한 q^*는 소매상의 최적 주문량을 나타낸다. 이때 소매상의 최적목적함수값은

$$R(q^*) = (p-c)q^*(p) - (p-s)\int_0^{q^*(p)} F_p(t)dt$$

최적주문량을 구하면

$$\frac{q^*}{1-p} = \frac{p-c}{p-s}$$

$$\therefore q^*(p) = \frac{(1-p)(p-c)}{p-s}.$$

이 식으로부터 우리는 최적주문량이 소매가격 p의 함수로 표현됨을 알 수 있다.

이를 활용하여 목적함수값을 표현하면

$$R(q^*(p)) = (p-c)q^*(p) - (p-s)\int_0^{q^*(p)} F_p(t)dt$$

$$= \frac{1}{2}\frac{(1-p)(p-c)^2}{p-s}.$$

이를 p에 대해 미분을 하면

$\dfrac{dR(q^*(p))}{dp} = \dfrac{-(p-c)[2p^2-(3s+1)p+sc+2s-c]}{2(p-s)^2}$을 구할 수 있고 이 식은 $p \neq s$에 대해 정

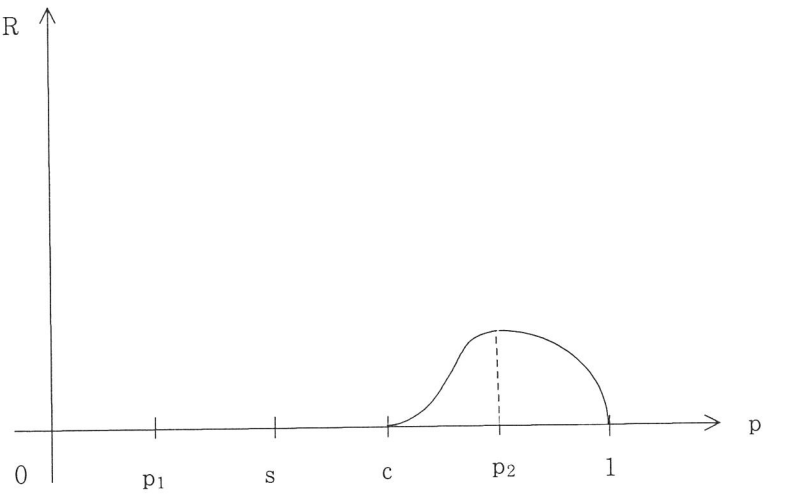
의됨을 알 수 있다.

극값을 구하기 위해 $\frac{dR(q^*(p))}{dp}=0$을 풀면 다음과 같이 세 개의 해가 나온다.

$$p=c, \frac{3s+1+\sqrt{9s^2-10s+1-8sc+8c}}{4}, \frac{3s+1-\sqrt{9s^2-10s+1-8sc+8c}}{4}.$$

추가 분석을 통해 최적 가격은

$p^*=p_2=\frac{3s+1+\sqrt{A}}{4}$이 된다.



〈그림 1〉 소매가와 목적함수값

최적가격은 구매원가 c 이상의 경우에 의미가 있는 것이므로 목적함수값의 그래프는 〈그림 1〉과 같이 표현할 수 있으며 $p_2=\frac{3s+1+\sqrt{A}}{4}$에서 최대값을 얻을 수 있음을 확인할 수 있다.

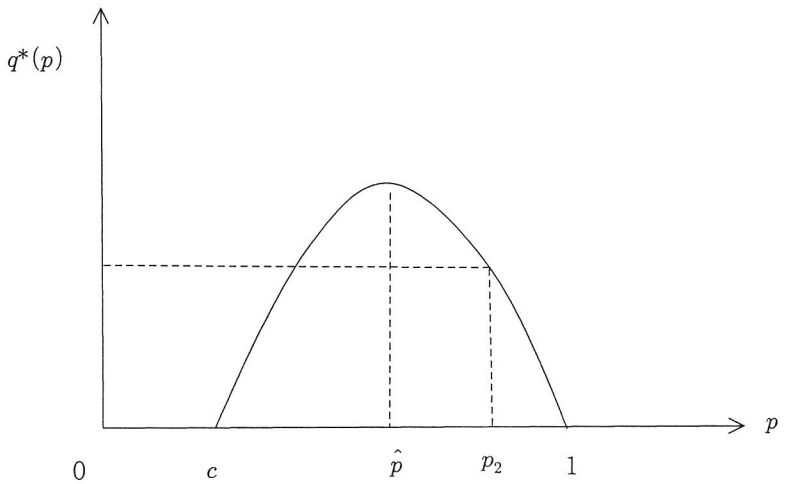
최적가격을 $q^*(p)$에 대입하면 소매상의 최적주문량은 다음과 같이 구할 수 있다.

$$q^*(p_2)=\frac{(1-p_2)(p_2-c)}{p_2-s}$$

$$=\frac{(1-\frac{3s+1+\sqrt{A}}{4})(\frac{3s+1+\sqrt{A}}{4}-c)}{\frac{3s+1+\sqrt{A}}{4}-s}$$

$$= \frac{1-9s^2+8s+10sc-9c+(1-3s+2c)\sqrt{A}}{2(1-s+\sqrt{A})}.$$

또한 최적주문량이 가격에 의해 받는 영향은 〈그림 2〉에 표현된다.



〈그림 2〉 소매가와 최적 주문량

그리고 최적목적함수값은 $R(q^*)$에 최적가격을 대입하여 $\frac{(3-3s-\sqrt{A})(\sqrt{A}+3s+1-4c)^2}{2(1-s+\sqrt{A})}$로 구할 수 있다.

참고로 다음에 다루게 될 생산용량 게임에서처럼 주문량의 제한이 있을 때에는 q^*가 생산용량을 초과할 경우 $R(q^*(p))$의 기대이익을 얻을 수 없게 된다. 따라서 주문량이 q일 경우 기대이익을 구해보면 다음과 같다.

$$R(q) = \int_0^q ptf(t)dt + \int_q^\infty pqf(t)dt - cq + \int_0^q s(q-t)f(t)dt$$

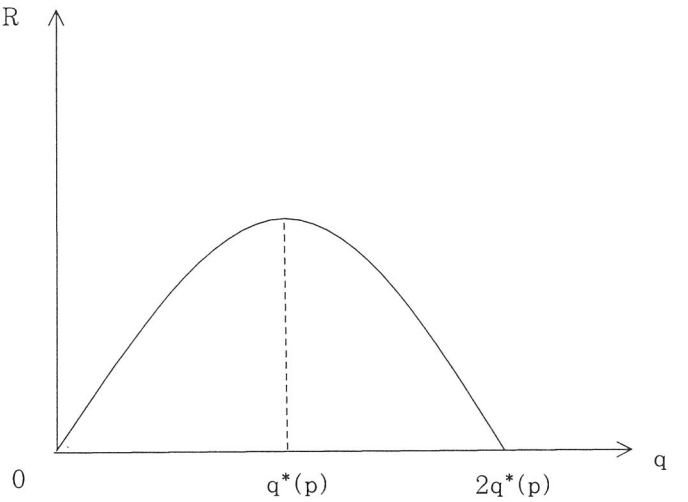
$$= (p-s)\int_0^q tf(t)dt + pq(1-F(q)) + sqF(q) - cq$$

$$= (p-s)\int_0^q tf(t)dt + (s-p)qF(q) + (p-c)q$$

$$= (p-s)\int_0^q t\frac{1}{1-p}dt + (s-p)q\frac{q}{1-p} + (p-c)q$$

$$= \frac{(s-p)q^2}{2(1-p)} + (p-c)q.$$

이를 그림으로 표현하면 다음과 같다.



〈그림 3〉 주문량과 목적함수 값

Ⅲ. 생산용량 게임

본 논문에서는 2인의 소매상이 존재하는 경우를 다루며 각 소매상은 k의 생산용량을 확보하고 있다고 하자. 즉 각 소매상은 c원의 생산원가로 k개 까지 제품을 가공할 수 있다. 이는 각 소매상이 도매상으로부터 주문한 물품에 대해 추가로 가공하여 완제품을 만든 후 최종소비자에게 판매하는 상황에서 처리용량의 제한이 k라는 것을 의미한다. 두 소매상의 의사결정변수는 소매가이고 따라서 소비자에게 판매하는 가격의 결정을 통해 게임을 하게 된다. 우리는 생산용량 k에 따라 Nash equilibrium이 어떻게 영향을 받는지 살펴보고자 한다. 소매상이 원하는 주문량이 크더라도 실제 주문 가능량이 k에 의해 제한되므로 이러한 생산용량이 소매상의 의사결정에 영향을 줄 수 있는 것이다. 먼저 우리가 상정하고 있는 newsvendor model의 특성을 살펴보기로 하고 〈그림 2〉를 중심으로 설명을 하자. 〈그림 2〉는 단일 소매상의 경우, 판매가에 따른 소매상의 최적주문량을 표현하는 것이다.

〔Proposition 1〕

$\frac{\hat{q}}{2} < \bar{q} = 1 - c$

〔Proof〕

먼저 $\hat{p} = s + \sqrt{(c-s)(1-s)}$ 로부터

$$\hat{q} = \frac{(1-\hat{p})(\hat{p}-c)}{\hat{p}-s}$$

$$= \frac{(1-s-\sqrt{(c-s)(1-s)})(s-c+\sqrt{(c-s)(1-s)})}{\sqrt{(c-s)(1-s)}}$$

$$= (\sqrt{1-s} - \sqrt{c-s})^2$$

$$= 1 + c - 2s - 2\sqrt{(1-s)(c-s)}.$$

$$\bar{q} - \hat{q}/2 > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-s)(c-s)} - \frac{3c-1-2s}{2} > 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-s)(c-s)} > c - s + \frac{c-1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{(1-s)(c-s)} + \frac{1-c}{2} > c - s$$

$$\Leftrightarrow (1-s)(c-s) + (1-c)\sqrt{(1-s)(c-s)} + \frac{(1-c)^2}{4} > (c-s)^2$$

$$\Leftrightarrow (1-c)\sqrt{(1-s)(c-s)} > c^2 - cs - c + s - \frac{(1-c)^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow (1-c)\sqrt{(1-s)(c-s)} > -(c-s)(1-c) - \frac{(1-c)^2}{4}.$$

마지막 부등식 좌측항은 양수이고 우측항은 음수이므로 부등호가 성립한다.

〔Proposition 2〕

$k \le \frac{q}{2}$ 인 경우 (p_2, p_2)는 Nash Equilibrium이다.

〔Proof〕

이는 〈그림 1〉의 목적함수값 함수를 통해 증명할 수 있다.

〔Proposition 3〕

충분히 큰 k에 대해, 0의 기대이익을 제시하는 (c,c)이 Nash Equilibrium이 된다.

〔Proof〕

+의 이익을 발생시키는 가격에 대해 상대방은 가격을 조금 낮춤으로써 발생하는 이익 전부를 얻고자 할 것이며, 이러한 상호작용에 의해 기대이익이 0으로 되는 경우가 Nash 균형점이 된다.

Ⅳ. 예제 및 결론

우리는 c=0.5, s=0.3인 경우를 상정한 예제를 통해 보다 구체적인 분석을 하기로 하자. 앞서 언급한 것처럼 두 소매업자는 자신의 판매가격을 결정함으로써 상호 경쟁을 한다. 소매업자가 제시한 가격에 따라 최적주문량이 앞서 분석한 바(〈그림 2〉 참조)와 같이 산출된다. 그런데 여기서 주목할 상황은 각 소매업자에게 용량제한이 존재한다는 것이다. 우리의 예제에서 각 소매업자는 k=0.07의 용량을 갖고 있다고 가정하자. 즉 자신이 원하는 주문량은 최대 0.07이라는 것이다. 따라서 소매업자가 제시한 가격에 대응하여 최적주문량을 주문하고자 할 경우에도 자신의 용량제한에 의해 원하는 양만큼 물량을 확보하지 못할 수가 있는 것이다.

두 소매업자가 동일한 가격을 제시할 경우 발생하는 이익은 균등하게 배분된다고 가정하자. 두 소매업자가 상이한 가격을 제시할 경우, 저렴한 가격을 제시한 소매업자가 요구하는 주문량을 먼저 확보한다. 그리고 높은 가격을 제시한 소매업자가 낮은 가격을 제시한 소매업자에 의해 이미 충족된 수요를 차감하고 나머지 수요에 대해 판매기회가 발생한다고 가정하자.

해당 예제에 대해 가격 설정을 0.01단위로 할 경우 계산을 해보면 Nash Equilibrium이 (0.76,0.76)의 가격을 제시할 경우로 유도된다. 이때 두 소매상은 0.0132의 기대이익을 예상하게 된다. 이것이 주는 의미는 생산용량제한으로 인해 상호 지나친 경쟁을 제어할 수 있게 된다는 것이다. 생산용량 제한이 없다면 각 소매상은 보다 많은 이익을 얻기 위해 경쟁을 하게 되고 결과적으로 0의 기대이익을 얻게 될 것이다. 따라서 각 소매업자는 생산용량의 제한을 통해 오히려 이

익을 볼 수 있다는 아이러니가 발생하게 된다. 실례로 화학 산업이 호황을 누릴 때 타 경쟁업체보다 더 큰 이윤을 추구하기 위해 생산용량을 확대한 경우 전체 산업의 수익성이 악화되는 경우를 볼 수 있다. 이러한 점에서 본 논문의 시사점이 크다고 할 수 있다.

참 고 문 헌

1. Dana, J.D., Petruzzi, N.C., 2001. Note: The Newsvendor Model with Endogenous Demand. Management Science Vol. 47, No. 11, 1488-1497.
2. Nahmias, S., 1993. Production and Operations Analysis, IRWIN.
3. Petruzzi, N.C., Dada, M., 1999. Pricing and the Newsvendor Problem: a review with extensions. Operations Research Vol. 47, No. 2, 183-194.
4. Protter, M.H., Morrey, C.B., 1977. A First Course in Real Analysis, Springer-Verlag.