creative commons

COMMONS DEED

저작자표시-비영리-변경금지 2.0 대한민국

이용자는 아래의 조건을 따르는 경우에 한하여 자유롭게

- 이 저작물을 복제, 배포, 전송, 전시, 공연 및 방송할 수 있습니다.

다음과 같은 조건을 따라야 합니다:

저작자표시. 귀하는 원저작자를 표시하여야 합니다.

비영리. 귀하는 이 저작물을 영리 목적으로 이용할 수 없습니다.

변경금지. 귀하는 이 저작물을 개작, 변형 또는 가공할 수 없습니다.

- 귀하는, 이 저작물의 재이용이나 배포의 경우, 이 저작물에 적용된 이용허락조건을 명확하게 나타내어야 합니다.
- 저작권자로부터 별도의 허가를 받으면 이러한 조건들은 적용되지 않습니다.

저작권법에 따른 이용자의 권리는 위의 내용에 의하여 영향을 받지 않습니다.

이것은 이용허락규약(Legal Code)을 이해하기 쉽게 요약한 것입니다.

Disclaimer

dCollection

교육학 석사학위논문

수직선 및 수체계, 실수의 성질 개념에 대한 중학생의 오류와 그 오류 사이의 관계

2022년 8월

서울대학교 대학원

수학교육과

박 혜 영

수직선 및 수체계, 실수의 성질 개념에 대한 중학생의 오류와 그 오류 사이의 관계

지도교수 권 오 남

이 논문을 교육학 석사학위논문으로 제출함
2022년 6월

서울대학교 대학원
수학교육과
박 혜 영

박혜영의 석사학위논문을 인준함
2022년 7월

위 원 장 최 영 기 (인)

부위원장 이 경 화 (인)

위 원 권 오 남 (인)

국문초록

수직선은 수가 가지고 있는 특성이 잘 드러나 학교 수학에서 수와 연산을 다루는 데 가장 많이 사용되는 수학적 표현이다. 수직선을 통해 수체계를 학습하고 이를 통해 여러 실수의 성질을 습득하게 되므로 수직선 및 수체계에 관한 정확한 이해는 추후 실수의 성질에 관한 이해에 영향을 준다는 점에서 중요하다.

한편, 어떤 개념의 이해와 적용에 있어서 오류를 분석하는 것은 사고의 도약판 역할을 한다. 오류에 대한 관점은 수학적 내용의 맥락, 오류의 정도, 학습의 맥락에 따라 분류된다. 그동안 수학적 내용의 맥락 측면에서 오류에 관한 연구는 문제해결에 초점을 맞추어 이루어졌고, 상대적으로 모델이나 개념 및 정리 관련 연구는 많이 이루어지지 않았다. 또한 수직선과 수체계에 대한 개념과 그 성질에 관해서는 학생들이 올바르게 이해했는지 여부에 초점을 맞추어 지도방안을 제안한 연구가 주를 이루었으며, 개념과 성질에 대한 오류 사이의 관계를 살펴본 연구는 없었다. 기존에 학생의 인지구조에 오류가 있다면 이는 새로운 개념을 학습할 때 포함되어 새로운 오류를 생성한다. 따라서 학생이 개념을 설명할 때 보이는 오류가 어떻게 성질을 설명할 때 오류로 연결되어 나타나는가를 교사가 미리 인지하고 있는 것은 중요하다. 이에 본 연구에서는 수직선과 수체계에 대한 개념을 설명하는 과정에서 오류와 실수의 성질 중 완비성을 설명하는 과정에서의 오류 유형을 넘어 두 오류 사이의 관계 또한 주목하여 분석했다는 점에서 기존 연구와는 차별되는 의미를 지닌다.

이를 위해 수직선 및 수체계 개념과 실수의 성질 중 완비성 관련 질문에 대한 학생들의 답변을 교과서 및 지도서와 비교하여

Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar (1987)의 오류 분석 유형 6가지를 재구성한 정의 또는 정리의 부적절한 사용, 논리적으로 부적절한 추론, 교과서 서술과 실제 학습한 내용 간 혼동으로 나누어 분석하였다. 완비성은 수직선과 관련하여 '조밀성'과 '유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움' 두 가지 측면에서 살펴보았으며, 특히 조밀성은 '무한히 많은 수가 있음'과 '다음에 오는 수가 없음' 두 가지 부분으로 나누어 살펴보았다. 연구를 위해 중학교 3학년 학생 12명을 모집하여 관련 과제의 문항을 해결하게 하고 연구자와 일대일 반구조화 인터뷰를 약 40분간 진행하였다.

연구 결과, 수직선과 수체계 개념을 설명하는 과정에서 보였던 오류가 많은 부분 완비성을 설명하는 과정에서도 오류 유형으로 연결되어 나타났다. 수직선과 수의 표상에 관한 오류로 수를 이산성에 기초하여 인식하거나, 수체계 정의에 관한 것으로 일상용어와 혼동하는 경우는 완비성을 설명하는 과정에서 정의나 정리의 부적절한 사용으로 연결되었다. 수의 표현 방법과 수체계 관계에 관한 것으로 분수와 소수 의미를 수체계와 혼동하는 경우와 무리수의 수직선 위 대응 방법에 관한 것으로 무리수는 수직선 위에 대응 가능하나 특정한 예($\sqrt{2}$)도 그 방법을 인지하지 못하는 경우, 무리수의 수직선 위 대응 가능하지 않다는 것으로 무리수는 수직선 위에 대응할 수 없다고 생각한 경우는 완비성을 설명하는 과정에서 논리적으로 부적절한 추론으로 연결되었다. 그러나 완비성을 설명하는 과정에서 오류 유형 중 몇 가지는 학생들이 기존에 지니고 있던 수직선과 수체계에 대한 개념 관련 오류와는 무관하게 나타나기도 하였다.

위 결과를 바탕으로 수직선 확대와 관련된 연결고리 언급, 수직선 위 무리수의 과정과 대상 관점을 넘나들 수 있는 관점, 수직선 위 구간에서 양 끝점의 다양화, 일차함수에서 수 전체의 의미 언

급 등의 필요성 제시를 통해 교과서 서술 방향과 교사의 교수학적 방법에 관한 시사점을 도출하였다.

주요어 : 실수, 완비성, 수체계, 수직선, 오류
학 번 : 2020-25772

목 차

국문 초록 ····· i
목차 ····· iv
표 목차 ····· vi
그림 목차 ····· viii

제 1 장 서론 ····· 1

제 2 장 선행연구 분석 ····· 5
제 1 절 오류 ····· 5
제 2 절 수직선과 수체계 ····· 11
제 3 절 학교 수학에서 수직선과 수체계 ····· 15
1. 수직선과 수체계 ····· 16
2. 좌표평면과 수체계 ····· 23

제 3 장 연구 방법 ····· 26
제 1 절 연구참여자 및 표집 방법 ····· 26
제 2 절 연구 절차 ····· 28
제 3 절 인터뷰 문항 ····· 29
제 4 절 자료 분석 방법 ····· 30

제 4 장 연구 결과 ····· 33
제 1 절 수직선 및 수체계 개념 관련 오류 ····· 33
1. 수직선 ····· 33
2. 실수까지의 수체계 ····· 34

3. 수직선 위 유리수, 무리수, 실수의 대응 ····· 36
제 2 절 수직선 및 수체계 성질 관련 오류 ····· 38
1. 조밀성 ····· 38
2. 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움 ····· 52
제 3 절 개념 및 성질 관련 오류 사이의 연결 관계 ····· 56

제 5 장 결론 ····· 60
제 1 절 연구의 요약 ····· 60
제 2 절 시사점 및 후속 연구 제언 ····· 62

참고문헌 ····· 66
Abstract ····· 73
부록 ····· 77

표 목 차

<표 2-1> 오류의 긍정적 역할 관련 대안적 해석의 범주(Borasi, 1986) ····· 7
<표 2-2> 사고의 도약판으로서 수학적 오류 사용의 단계 분류(Borasi, 1996) ····· 8
<표 2-3> 유리수 및 실수의 조밀성 관련 개념 정의(Robert & Donald, 2019; Richard & Fritz, 1974, 재구성) ····· 14
<표 2-4> 분석 대상 교과서(출판사 가나다순) ····· 15
<표 2-5> 유리수, 무리수, 실수의 정의와 수체계(B1, B3 교과서, 재구성) ····· 17
<표 2-6> 교과서 내 유리수의 조밀성이 드러난 예(A1, B1 교과서) ····· 20
<표 2-7> 교과서 내 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움에 관한 서술(B3 교과서) ····· 21
<표 2-8> 교과서 내 구간에서 양끝점 수체계에 따른 문제 유형(A3, J3, B3 교과서) ····· 22
<표 2-9> 교과서 내 양끝점 수체계 종류에 따른 문제 개수 ····· 23
<표 2-10> 일차·이차함수 그래프 관련 서술 예시(E3, B3 교과서) ····· 24
<표 3-1> 연구참여자의 세부 정보(가나다순) ····· 27
<표 3-2> 연구 흐름도 ····· 28
<표 3-3> 오류 분석 유형(Movshovitz-Hadar et al.,1987) 31
<표 3-4> 재구성한 오류 분석 유형 ····· 31
<표 4-1> 수직선 관련 오류 ····· 33
<표 4-2> 유리수, 무리수 정의 관련 오류 ····· 35

<표 4-3> 수직선 위 수 대응 관련 오류1 ····· 36
<표 4-4> 수직선 위 수 대응 관련 오류2 ····· 37
<표 4-5> 유리수의 조밀성 오류 유형1 ····· 39
<표 4-6> 유리수의 조밀성 오류 유형2 ····· 39
<표 4-7> 유리수의 조밀성 오류 유형3 ····· 40
<표 4-8> 실수의 조밀성 오류 유형1 ····· 41
<표 4-9> 실수의 조밀성 오류 유형2 ····· 42
<표 4-10> 실수의 조밀성 오류 유형3 ····· 43
<표 4-11> 다음에 오는 수 관련 오류 유형1 ····· 44
<표 4-12> 다음에 오는 수 관련 오류 유형2 ····· 45
<표 4-13> 다음에 오는 수 관련 오류 유형3 ····· 46
<표 4-14> 다음에 오는 수 관련 오류 유형4 ····· 48
<표 4-15> 다음에 오는 수 관련 오류 유형5 ····· 51
<표 4-16> 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움 관련 오류 유형1 ····· 53
<표 4-17> 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움 관련 오류 유형2 ····· 54
<표 4-18> 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움 관련 오류 유형3 ····· 55
<표 4-19> 수직선 및 수체계에 대한 개념과 실수의 성질을 설명하는 과정에서 오류 사이의 관계 ····· 58

그 림 목 차

[그림 2-1] 교과서에 제시된 수직선의 정의(B1 교과서) 16
[그림 2-2] 무리수를 수직선 위에 표현하는 과정(B3 교과서) 18

제 1 장 서론

수직선은 수의 은유 체계로서 가장 강력하게 사용되는 수학적 표현이다. 수직선은 수를 표현하고 크기를 비교하는 데 유용하여 초등학교 1학년 자연수의 연산에서 처음 도입하고 있으며, 이후 수직선을 이용하여 수와 연산 관련 개념을 학습한다(선춘화, 박만구, 2012). 국내 학생들은 중학교 1학년에서 정수와 유리수를 시작으로 중학교 3학년에서 무리수와 실수까지 학습하면서 점차적으로 실수까지의 수체계 확장을 경험한다. 수직선 개념은 중학교에서 좌표평면, 고등학교에서는 좌표공간으로까지 확장되어 수학 전반에 걸쳐 수체계에 대한 모델로써 사용된다. 수직선은 수의 무한을 인식하고, 연속성, 조밀성 및 크기 비교 등의 이해를 도와줌으로써 실수까지의 수체계에 관한 개념적 이해를 은유적 방식으로 돕는다는 점에서 유용하다(Gray & Doritou, 2008).

그러나 학생들이 수직선의 은유성에 기초하여 완비성을 정확하게 이해하는 것은 어렵다(Herbst, 1997). 따라서 학교 수학에서는 학생들이 실수의 완비성을 직관적으로 이해하도록 하고 있다. 완비성 공리는 실수 전체의 집합 R의 공집합이 아닌 부분집합 S가 위로 유계이면 반드시 상한을 갖는다는 공리다. 이는 직관적으로 실수가 수직선 위 점 하나에 일대일 대응한다는 것을 의미한다. 따라서 완비성은 실수의 성질 중 조밀성과 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움을 포함한다. 조밀성은 임의의 두 수 사이에 항상 또 다른 수가 존재한다는 성질이며, 후자는 수직선 위에 유리수를 대응시켰을 때 생기는 빈틈을 무리수가 채워 하나의 수직선 위를 빈틈없이 이룬다는 성질이다. 특히 조밀성은 단순히 무수히 많다고 생각한다고 해서 조밀성의 개념을 이해했다고 할 수 없다(McMullen et al., 2015). 조밀성의 개념은 두 수 사이에 '무수히 수가 많다'와 '다음에 오는 수가 없다(no successor)'라는 두 개념을 모두 이해해야 한다. 자연수에서 유리수로의 발달에서 가장 큰 개념적 차이는 조밀성이다. 자연수가 지니는 이산적 구조와 다르게 유리수는 조밀하게 나열되어있다(Van Hoof et al., 2018). 따라서 어떤 수의 조밀성 여부는 수체

계 학습에서 개념적 변화가 일어나는 과정이므로 유리수의 자연수와 차별되는 특징으로 주목할만하다. 또한, 조밀성과 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움(fit together)에 관한 이해는 학생들이 어려워하는 실무한 개념과도 연결되어 있다. 덧붙여 우리나라 2015 개정 교육과정 수학 교과서에서 직접적으로 조밀성과 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움에 관한 내용이 내용 요소로 직접 제시되어 있지는 않으나 초·중등 교과서 서술이나 지도상의 유의점, 문제, 읽기 자료 및 보충설명 등에서 학생들이 직관적으로 느낄 수 있도록 하고 있다는 점에서 중요한 성질이다.

그동안의 수직선 관련 연구를 살펴보면, 수직선을 초등학교 저학년에서 처음 도입하므로 수직선의 활용 방안에 관한 연구는 주로 초등학교를 중심으로 이루어졌다(예, 김양권, 홍진곤, 2016; 홍진곤, 김양권, 2015). 실수까지의 수체계와 관련해서는 무리수 개념에 관한 학생의 오류 및 어려움과 대안에 관한 연구(강정기, 2016; 강향임, 최은아, 2017; 오국환, 박정숙, 권오남, 2017; Kidron, 2018; Zazkis & Sirotic, 2010)와 실수의 개념 구성에 관한 연구(신보미, 2008; 신종호 외, 2016; 이지현, 2015), 실수와 그 성질에 대한 학습에 있어서 학생의 어려움에 관한 연구(Bergé, 2010; Giannakoulias, Souyoul, & Zachariades, 2007)가 있었다. 조밀성 관련 초기연구를 살펴보면, 학생들이 자연수에서 유리수로 개념변화를 이해할 때 겪는 어려움이 주로 이루어졌다(Vamvakoussi & Vosniadou, 2004; Vamvakoussi & Vosniadou, 2007). 이후에는 주로 유리수 조밀성에 관한 표현에 따른 학생 혹은 예비교사의 이해 관련 연구가 진행되었다(McMullen & Van Hoof, 2020; Putra, 2019; Vamvakoussi et al., 2011; Vamvakoussi & Vosniadou, 2010; Widjaja, Stacey, & Steinle, 2008). 유리수와 무리수가 수직선 위를 빈틈없이 채움과 관련해서는 예비교사를 대상으로 유리수와 무리수의 농도와 연결하여 유리수와 무리수가 수직선 위를 빈틈없이 채운다는 사실을 어떻게 설명하는지에 관한 연구가 있었다(Sirotic & Zazkis, 2007).

Baki(2015)에 따르면 오개념은 개인의 경험이나 잘못된 신념으로 인해

발생한다. 오개념(misconception)은 오류(error)의 부분집합이다(Eryilmaz & Surmeli, 2002). 오류는 오개념의 결과이며, 오개념은 오류를 체계적으로 생산하는 인식의 유형이다(Sarwadi & Shahrill, 2014; Smith, DiSessa, & Roschelle, 1994). 즉 오개념은 오류가 될 수 있으나 오류는 오개념이 되지 못한다. 따라서 본 연구에서는 오개념과 오류를 통칭하여 오류라고 정의하였다.

1980년대 이후 오류는 제거해야 할 대상이 아닌 사고의 도약판(springboards)으로서 다루어지면서 오류 분석은 수학적 탐구의 중요한 역할을 하기 시작했다. Borasi(1986)가 분류한 오류의 범주에서 수학적 맥락 측면의 선행연구를 살펴보면, 주로 오류 관련 연구는 문제해결과정에 초점이 맞춰져 있었다(김정훈, 2020; 최동원, 허혜자, 2021). 모델에 관한 연구(탁병주, 김다빈, 2020; 한성수, 윤영주, 2021)나 개념 및 정리에 관한 연구(도종훈, 권오병, 2019; Aksoy & Yazlik, 2017)는 상대적으로 적었다. 또한, 그동안의 수직선 및 수체계와 실수의 성질(완비성 등)에 관련된 연구는 학생들의 개념적 이해의 어려움으로 인한 지도방안이 주를 이루었다. 따라서 어떤 수학적 개념과 성질에 대해 학생들이 제대로 이해했는지 정답 여부에 초점을 두고 지도 개선방안을 탐구한 연구가 대부분이었으며, 구체적으로 어떤 오류 유형이 있는지는 제시하는 연구가 많지 않아 수학교육에 가져다주는 시사점을 찾기 어려웠다. 특히 어떤 오류가 있는지를 넘어 개념을 설명하는 과정에서의 오류가 성질을 설명하는 과정에서 오류 유형과 어떤 관계를 가지는지에 주목한 연구는 없었다. 이전에 학생이 지닌 오류가 있다면 그 오류는 새로운 것을 학습할 때 영향을 미쳐 새로운 오류 유형으로 연결되어 드러난다(Ashlock, 2006). 따라서 학생들이 범하는 오류 유형에 대해 교사가 잘 알고 있을 필요가 있다(Eryilmaz, 2002; Voza, 2011). 그러므로 단순히 드러나는 오류뿐 아니라 개념과 성질을 설명하는 과정에서의 오류가 어떻게 연결되는지를 분석했다는 점에서 이 연구는 중요한 의미를 지닌다.

이에 본 연구에서는 수학적 맥락 중 개념과 정리 측면에서 학생들의 수직선과 수체계에 대한 오류와 완비성을 설명하는 과정에서 나타나는

오류 유형을 살펴보고, 그 두 오류 사이의 관계까지 알아보고자 한다. 연구의 목적을 위해 학생들의 답변으로부터 오류의 유형을 구체적으로 범주화하여 분석하고, 분석을 통해 교과서 서술 부분과 교수·학습 방법에 시사점을 제공하고자 한다. 이에 따른 연구 질문은 다음과 같다.

첫째, 학생들이 수직선과 수체계에 대한 개념을 설명하는 과정에서 어떤 오류가 나타나는가?

둘째, 학생들이 실수의 성질을 설명하는 과정에서 어떤 오류 유형이 나타나는가?

셋째, 수직선과 수체계에 대한 개념과 실수의 성질을 설명하는 과정에서 오류는 어떻게 연결되는가?

제 2 장 선행연구 분석

제 1 절 오류

우선 오개념과 오류를 명확하게 정의할 필요가 있다. 오개념과 오류의 사전적 정의를 살펴보면, 오개념은 어떤 사물이나 현상에 대한 잘못된 지식이며, 오류는 대상과 사고 내용이 일치하지 않은 사유(事由)를 판단하는 것이다. Baki(2015)에 따르면 오개념은 개인의 경험이나 잘못된 신념으로 인해 발생한다. 오개념은 오류의 부분집합이다(Eryilmaz & Surmeli, 2002). 오류는 오개념의 결과이며, 오개념은 오류를 체계적으로 생산하는 인식의 유형이다(Sarwadi & Shahrill, 2014). 즉, 오개념은 오류가 될 수 있으나 오류는 오개념이 될 수 없다. 이를 바탕으로 본 연구에서는 오개념과 오류를 통칭하여 오류라고 명명하였다.

초기 수학적 오류 관련 연구는 오류를 제거되어야 할 대상으로만 바라보았다(Tulis, Steuer, & Dresel, 2016). 따라서 대부분의 연구가 질문에 대한 학생들의 답변을 정답과 오답 두 가지 분류로만 나누어 살펴보았다(Bloom, 1976; Gagne, 1968). 그러나 1980년대에 들어서부터 학생들이 지닌 개념을 개인이 능동적으로 구성한 결과인 체계적 인지구조로 바라보기 시작하였다. 특히, 구성주의의 관점에서 오류를 단순히 어떤 특정 요소의 존재 여부가 아니라 복잡하게 계속 변화 가능한 상호관계 요소로 이루어진 지식 체계로 여겼다(Smith et al., 1994). 그에 따라 오류와 관련된 논의는 학생들이 갖는 문제에 대한 정보를 제공하는 자원으로써의 역할과 학생이 스스로 오류를 깨닫고 교정해나가며 수학적 사고를 해나가는 도약판으로서의 역할로 옮겨가면서 오류의 유형에 관해 본격적으로 탐구하게 되었다(이종희, 김부미, 2006; Borasi, 1996; Rushton, 2018).

오류의 형성 원인으로는 크게 인지적 관점과 교수학적 관점이 있다. 본 연구는 그 중 인지적 관점을 중심으로 살펴보고자 한다. 그 동안의 인지적 관점에서 수학적 오류 관련 연구는 크게 세 가지로 방향으로 이

루어졌다. 첫 번째는 잘못된 개념으로 인한 오류다. 이는 학생들은 수학에서 요구하는 전문적인 개념 습득에 어려움을 겪기 때문에 올바른 개념을 학생들이 인지하게 하도록 해당 오류를 교정해주어야 한다는 관점이다. 두 번째는 특정 맥락에서는 적합하여 유용하였던 개념이 더 확장된 맥락에서 개념을 수용하는 과정에서 장애가 되는 오류다. 이는 새로운 개념이 학습자 인지구조에 동화되거나 혹은 학습 과정에서 기존의 지식과 갈등을 일으키면서 더 유용하고 적합한 지식이 되어야 한다는 관점이다. 세 번째는 학생들이 지닌 개념이 유의미하다는 것을 강조하는 대안적 개념[1]으로서의 오류다. 이는 수학적 오류를 바탕으로 지식의 성장을 추구할 수 있다는 관점으로 새로운 지식과 오류 속에서 학생은 좀 더 유용한 지식을 선택하여 사용하는 과정에서 다양한 사고 방법을 꾀할 수 있으므로 더 발전된 지식을 얻을 수 있다는 관점이다. 오류 관련 연구는 크게 두 가지 관점으로 나누기도 하는데, 새로운 지식을 형성해나가는 갈등 과정에서 지식의 단절을 일으키는 불연속성에 초점을 맞추는 관점과 지식의 성장을 위한 연속성을 중요하게 보는 관점이다. 본 연구는 이 중 후자의 관점을 취한다.

한편, 오류는 제거되어야만 하는 대상이 아닌 새로운 상황에서 유용한 정보를 제공한다는 점에서 긍정적인 역할을 한다. 오류는 사고하고 탐구하는 과정을 자극할 수 있고 그 결과 관련 수학 개념에 대해 더 깊게 이해할 수 있도록 도와준다. 이에 따라 Borasi(1986)는 오류의 긍정적인 역할과 관련하여 대안적 해석의 범주 분류를 <표 2-1>과 같이 제안하였다.

1) 대안적 개념이란 어떤 주장에 대한 근거로 가상의 개념을 범주화한 것이다.

<표 2-1> 오류의 긍정적 역할 관련 대안적 해석의 범주(Borasi, 1986)

초점 / 목적	기술적 내용 오류	학문의 본질을 보는 입장 오류	학습 과정 오류
제거되어야 할 대상으로서의 오류	• 오류는 실패한 학습 과정의 상징 • 오류를 제거하기 위한 원인 진단이 필요함	• 오류는 학문의 본질에 대한 학습자의 근본적인 잘못된 이해의 반영 • 교사는 오류를 명확히 하고, 이를 치료하려고 노력해야함	• 오류는 어떤 주제를 학습하는 과정에 있어서 잠재적인 어려움을 확인하게 함 • 추후 어려움을 피하고 교육과정을 개선시키기 위한 수단으로 사용함
탐구를 위한 발판으로서의 오류	• 오류는 학습 과정의 긍정적 단계 • 오류는 그 주제에 대한 이해를 향상시키고 새로운 결과를 생성하는 탐구의 동기를 제공 가능	• 오류는 어떤 학문이 지니는 힘, 한계, 방법론 등을 연구하기 위한 수단	• 오류는 한 개인의 생각하는 과정을 탐구하여 연구하기 위한 수단

<표 2-1>에서 빗금 친 부분은 특히 오류가 사고의 도약판(springboards)으로서의 긍정적 역할을 함을 보여준다. 사고의 도약판으로서 수학 담화 수준에 따른 수학적 오류사용의 단계 분류는 <표 2-2>와 같다.

<표 2-2> 사고의 도약판으로서 수학적 오류 사용의 단계 분류(Borasi, 1996)

학습에 대한 태도 (Stance of learning)	수학 담화의 수준 (Level of Math Discourse)		
	특정 수학 과제 수행 (Performing a Specific Math Task)	기술적인 수학 내용 이해 (Understanding Some Technical Math Content)	수학의 본질 이해 (Understanding the Nature of Mathematics)
처방 (Remediation)	수학적 오류에 대한 분석은 주어진 과제를 성공적으로 수행하기 위해 무엇이 옳고 그른지 이해하기 위해 사용됨	수학적 오류에 대한 분석은 기술적인 수학 내용의 잘못된 이해를 명백하게 밝히는 데 사용됨	수학적 오류에 대한 분석은 수학의 본질이나 일반적인 수학 주제를 다루면서 잘못 이해한 것을 명확하게 해주는 데 사용됨
발견 (Discovery)	오류와 불확실한 결과들은 잠재적인 실수를 식별할 수 있게하고, 새로운 과제나 문제 해결과정을 구성할 때 사용됨	오류와 불확실한 결과들은 새로운 개념, 규칙, 주제 등을 배울 때 사용됨	오류와 불확실한 결과들은 수학의 본질이나 일반적인 수학 주제들을 배울 때 사용됨
탐구 (Inquiry)	오류와 문제해결의 결과들은 새로운 지침을 제공하고, 수행할 새로운 과제에서 탐구를 유발하는 질문을 함	오류와 문제해결의 결과들은 예상치 못했던 새로운 개념, 규칙, 주제로 이끌 수 있는 질문을 함	오류와 문제해결의 결과들은 수학의 본질이나 수학에 대한 태도와 관련해 예상치 못했던 것으로 이끌 수 있는 질문을 함

<표 2-2>와 같이 사고의 도약판으로서 수학적 오류의 사용은 수학 담화 수준에 따라 처방, 발견, 탐구 측면에서 이루어진다. 본 연구에서 오류에 관한 이해는 빗금 친 부분과 같이 수학의 본질 이해와 관련해 수직선과 수체계 개념에 대한 오류가 추후 미적분과 해석학을 학습할 때 완비성을 설명하는 과정에서 드러나는 오류와 연결된다는 점에서 발견 측면에서의 사고의 도약판 역할을 한다고 할 수 있다. Borasi(1986)는 오류가 사고의 도약판이므로 활용되는 유용한 방안으로 세 가지를 언급하였는데 첫째, 오류는 증명·정의·모델과 같은 일반적 수학 개념 탐구과정에 사용될 수 있다는 점이고, 둘째, 오류를 분석하는 것은 수학에서 올바른 개념을 정립하는 데에 도움이 된다는 점이다. 마지막으로 셋째, 관련 수학 지식이 어떻게 형성되고 어떤 개념들이 포함되어있는지 이해하는데 도움을 줄 수 있다고 하였다.

이렇듯 긍정적인 역할을 하는 오류의 범주는 크게 수학적 내용의 맥락, 오류의 정도, 학습의 맥락으로 분류한다(Borasi, 1986). 수학적 내용의 맥락에는 규칙 및 알고리즘, 정리, 개념, 모델, 문제해결이 있으며, 오류의 정도에는 잘못된 결과, 부분적으로 잘못된 결과, 대략적 결과, 틀린 과정에 의한 올바른 결과, 비효율적인 과정에 의한 올바른 결과, 무응답이 있다. 학습의 맥락에는 확립된 지식 습득과 발견이 있다.

오류의 범주 중 수학적 내용의 맥락 측면에서 오류 관련 선행연구를 살펴보면 그동안은 주로 문제해결에 관련된 연구가 이루어졌다. 최동원, 허혜자(2021)는 중학교 3학년 학생들의 형성평가 문제 분석을 통해 인수분해 관련 문제를 해결하는 과정에서 학생들이 보이는 오류를 분석하고, 분석 결과를 토대로 온라인을 통한 개별적으로 적절한 피드백을 제공하는 것이 학업성취도에 미치는 효과를 파악하였다. 또한 문혜영, 김응환(2011)은 고등학교 1학년을 대상으로 함수 관련 문제를 해결하는 과정에서 오류 유형을 7가지 유형에 따라 분석하고, 이를 통해 교수학습방법 보완점을 제안하였다. 이 외에도 문제해결에 관련된 오류 연구는 많이 연구되어왔다(김영아, 김성준, 2013; 김정훈, 2020; 한경민, 고상숙, 2014). 한편, 모델에 관련된 연구로 한성수, 윤영주(2021)는 사회과 교과서에서

제시하고 있는 통계 그래프에 나타나는 수학적 오류 양상을 분석하고, 그래프 오류와 관련된 그래프 작성 지침에 대한 활동을 제안하였다. 또한 탁병주, 김다빈(2020)은 통계적 문제를 해결하는 과정에서 나타나는 그래프 오류 유형을 분석하고 통계적 소양교육, 통계 윤리 및 교사 지식의 관점에서 대안을 제시하였다. 규칙 및 알고리즘에 관련한 연구로는 김영아, 김성준(2013)이 문장제 관련 문제를 학생들이 해결하는 과정에서 문제해결 전략별 사용하는 규칙 및 알고리즘의 오류 유형을 분석하여 그 특징을 파악하고, 이를 통해 문제해결학습 실패 원인에 대해 진단하고자 하였다. 마지막으로 개념과 정리 관련 연구로 Aksoy & Yazlik(2017)은 분수와 분수의 원리를 학생들이 설명하는 과정에서의 오류를 분석하고, 세 가지 유형(정답, 오답, 빈칸)에 따라 구분하여 살펴본 연구가 있었다. 반면 도종훈, 권오병(2019)은 용어와 기호를 포함한 제곱근의 뜻과 그 성질에 관한 이해를 하는 과정에서 수학학습부진 학생들이 보이는 오류를 좀 더 구체적으로 Movshovitz-Hadar 외(1987)가 분류한 오류 유형에 따라 분석하였다.

본 연구에서는 이러한 분류를 토대로 수학적 내용 맥락 측면에서 개념과 정리에 초점을 맞추어 살펴보고자 한다. 즉, 개념과 정리 부분의 확립된 지식의 습득 측면에서 부분적으로 잘못된 결과, 틀린 과정에 의한 올바른 결과, 비효율적인 과정에 의한 올바른 결과에 대한 오류에 초점을 맞추었다. 이전에 학생이 지닌 오류가 있다면 그 오류는 새로운 것을 학습할 때 영향을 미쳐 새로운 오류 유형으로 연결되어 드러난다(Ashlock, 2006). 또한, 만약 학생이 올바르게 어떤 개념의 예들을 정확하게 이해했더라도 기존의 오류로 인해 새로운 오류 유형과 연결될 수 있다. 따라서 발생할 수 있는 오류를 교사가 잘 알고 있어야 학생들이 이전에 지닌 오류로 인해 새로운 오류가 발생하는 것을 사전에 방지할 수 있다는 점에서 오류에 대해 자세히 살펴보는 것은 중요하다(Eryilmaz, 2002; Voza, 2011). 개념은 수학에서 가장 중요한 부분임에도 불구하고 그동안은 문제해결에 관련된 연구가 주를 이루었다. 이에 본 연구에서는 수직선 및 수체계 개념에 대한 오류를 살펴보고, 완비성을 설명하는 과정에서 오류

유형과 두 오류 사이의 관계를 분석하여 교과서 서술방안 및 교사의 적절한 교수 방법을 위한 방향을 탐색하고자 한다.

제 2 절 수직선과 수체계

이 절에서는 수직선과 실수까지의 수체계의 개념과 성질에 관해 간단히 다루고자 한다. 본 연구는 중학생을 대상으로 하였으므로 실수까지의 수체계만을 고려하였다.

수직선은 각 실수(real number)가 하나씩 연결되어 동등한 간격으로 놓여있는 곧게 뻗은 선이다. 수직선은 무한히 어느 방향으로든 뻗어 나갈 수 있고 보통 수평으로 표현된다. 즉 1차원의 좌표계다. 수들은 왼쪽에서 오른쪽으로 증가하며 오른쪽에서 왼쪽으로 감소하도록 놓여있다. 소수와 분수 또한 수직선 위에 놓일 수 있으며 양수, 음수를 모두 표현 가능하다. 수직선은 수 사이에 크기 비교를 용이하게 해주고 사칙연산을 수행할 때도 사용된다.

현대 수학에서는 자연수가 모든 수의 근원이다. 자연수로부터 정수, 유리수, 실수 순으로 수체계가 완성된다. 수체계는 기본적으로 덧셈과 곱셈에 대해 연산이 잘 정의되어야 하며, 원수의 개수가 무한해야 한다. 또한, 교환법칙 및 결합법칙이 성립하고 덧셈과 곱셈에 대해 분배법칙이 성립해야 한다. 자연수는 정수 중 양의 정수만의 의미하며 기호 N으로 나타낸다. 자연수의 성질을 페아노 공리로부터 이끌어진다. 정수는 $n+x=0$ (단, n은 자연수)를 만족시키는 모든 n, x, 0을 통틀어 정수라고 하며, 기호는 Z를 이용하여 나타낸다. 유리수는 두 정수의 비 혹은 분수로 나타낼 수 있는 수다. 특히 분모가 1인 경우 정수가 되므로 모든 정수는 유리수가 될 수 있다. 유리수는 보통 기호 Q로 나타내며 유리수 Q는 다음과 같은 집합으로 나타낼 수 있다.

$$Q = \{\frac{m}{n} \mid m, n \in Z, n \neq 0\}$$

유리수는 사칙연산이 가능하며 표수가 0인 가장 작은 체다. 반면, 무리수

는 두 정수의 비로 나타낼 수 없는 수다. 무리수는 보통 기호 I로 나타내며 무리수 $I=R-Q$ (R은 실수)로 나타낼 수 있다. 또한, 유리수보다 무리수의 개수가 더 많다.

실수의 개념과 그 성질은 수학의 기초인 미적분의 배경이 된다는 점에서 매우 중요하다. 실수를 도입하는 방법은 두 가지다. 하나는 공리적 방법이고 하나는 구성적 방법이다. 먼저 공리적 방법은 실수의 기본 성질들을 공리로 받아들이고, 기본 성질을 토대로 다른 성질을 연역하여 나가는 방법이다. 한편, 구성적 방법은 자연수와 집합 사이의 관계를 설정한 다음 그로부터 정수, 유리수, 무리수를 구성하고 최종적으로 이를 확장하여 실수를 구성하는 것이다. 실수는 19세기와 20세기 초에 이르러서야 수학자 칸토어와 데데킨트에 의해 엄밀하게 구성되었다. 데데킨트는 실수체계의 구성을 위해 데데킨트 절단을 이용하였다. 유리수 전체의 집합 Q를 두 부분집합 A, B로 데데킨트 절단을 하게 되면 다음과 같은 4가지 경우가 있다.

1) A에 최대수가 있고, B에 최소수가 없다.
2) A에 최대수가 없고, B에 최소수가 있다.
3) A에 최대수가 없고, B에 최소수가 없다.
4) A에 최대수가 있고, B에 최소수가 있다.

1)의 조건을 만족하는 데데킨트 절단은 유리수이며, 2)와 4)의 조건은 수학적으로 모순된다. 3)의 조건을 만족하는 데데킨트 절단은 무리수라는 유리수에서 더 확장된 새로운 수가 존재함을 보일 수 있고, 기존의 유리수와 무리수 통틀어 정의된 실수를 데데킨트의 실수라고 한다. 한편 칸토어는 유리수열의 극한을 이용하여 실수를 정의하였다. 칸토어에 따르면 코시수열을 이용하여 유리수열의 수렴성을 보이고, 유리수로 이루어진 코시수열의 극한값은 유리수가 아닐 수 있으므로 그 자체를 하나의 수로 보면 동치관계를 통해 실수가 구성된다고 하였다.

실수는 세 가지 기본 성질을 갖는다. 대수적구조, 순서구조, 위상적구

조 측면에서 각각 체 공리, 순서 공리, 완비성 공리를 지닌다. 체 공리는 사칙연산이 가능하며, 덧셈·곱셈에 대한 교환법칙, 결합법칙을 만족하고, 덧셈·곱셈에 대한 항등원과 역원을 지니며, 분배법칙을 만족한다는 공리다. 순서 공리는 수가 순서를 이룬다는 공리다. 즉, 실수 a와 b가 있다면 $a=b, a<b, a>b$ 중 하나는 성립한다는 것을 의미한다. 또한, 임의의 실수 a, b, c에 대해 $a<b$이면 $a+c<b+c$ 이고, $a<b$이고 $c>0$이면 $ac<bc$가 된다. 완비성 공리는 실수 전체의 집합 R의 공집합이 아닌 부분집합 S가 위로 유계이면 반드시 상한을 갖는다는 공리다. 이는 직관적으로 실수가 수직선 위의 점 하나에 일대일 대응한다는 것을 의미한다. 즉, 완비성은 조밀성과 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움을 모두 포함한다. 조밀성은 임의의 두 수 사이에 항상 또 다른 수가 존재한다는 것이며, 후자는 유리수가 수 전체로 알고 있다면 직선 위에 유리수를 모두 표시해도 빈틈이 남으며, 그 빈틈에 무리수가 존재하므로 실수에는 빈틈이 없다는 것을 의미한다.

조밀성에서 '조밀하다'는 거리공간 Y에서 집합 X에 대하여 폐포 $\overline{X}$ (X집합과 모든 극한점)이 전체집합 Y일 때, Y에서 조밀하다고 한다. 중학교 수학에서는 유리수의 조밀성(density in Q)을 바탕으로 실수의 조밀성(density in R)을 자연스럽게 연결하고 있다. 유리수의 조밀성은 주로 수학교육 선행연구에서 찾아볼 수 있으며 조밀성 탐구를 주로 양 끝점이 유리수인 경우를 대상으로 한다(Vamvakoussi & Vosniadou, 2007). 수학에서는 일반적으로 어느 집합에서 조밀한지 언급하지 않으면 자기 자신 집합에서 조밀함을 의미하므로 이 경우 유리수의 조밀성을 다뤘다고 할 수 있다. 반면, 실수의 조밀성은 주로 전공수학 서적에서 찾아볼 수 있고 조밀성 탐구를 주로 양 끝점이 실수인 경우를 대상으로 한다. 전자와 후자의 차이는 각각 <표 2-3>과 같다.

<표 2-3> 유리수 및 실수의 조밀성 관련 개념 정의(Robert & Donald, 2019; Richard & Fritz, 1974, 재구성)

유리수의 조밀성
정의 3.1 부분집합 $X \subseteq R$이 주어졌을 때, 모든 $a, b \in X$에 대해 $a < b$를 만족하고 $a < c < b$를 만족하는 어떤 $c \in X$가 존재할 때, X가 (X위에서) 조밀하다고 한다.
실수의 조밀성
정의 3.2 부분집합 $X \subseteq R$이 주어졌을 때, 모든 $a, b \in R$에 대해 $a < b$를 만족하고 $a < c < b$를 만족하는 어떤 $c \in X$가 존재할 때, X가 실수 위에서 조밀하다고 한다.

그러나 유리수의 조밀성으로부터 실수의 조밀성이 자연스럽게 확장되지 않으며, 대학 수준의 수학을 이용하여 증명가능하다. 일례로 $X = (0, 1) \cap Q$ (단, Q는 실수) 는 유리수 위에서는 조밀하나 실수 위에서는 조밀하지 않다. 이러한 조밀성에 관한 이해는 학생들에게 어려운 주제로 Vamvakoussi & Vosniadou(2007)의 합성 모델(synthetic model)에 따라 학생들의 조밀성에 관한 이해 수준을 분석한 연구가 있어왔다(McMullen & Van Hoof, 2020; Putra, 2019).

이처럼 조밀성과 유리수와 무리수가 수직선 위를 빈틈없이 채운다는 성질은 학교 수학에서도 간접적으로 다루고 있으며, 학생들이 어려워하는 가무한 및 실무한과도 연결되는 중요한 실수의 성질이다. 따라서 이에 대한 이해를 향상시키기 위해 수직선의 눈금을 확대할 수 있는 고무줄(Vamvakoussi & Vosniadou, 2012)로 실수의 성질을 이해할 것을 제안한 연구가 있었다. 이외에도 공학적 도구를 이용하여 실수의 성질에 관한 이해를 돕는 방법을 제안한 사례도 있었다(김도연, 권오남, 2018; Coles & Sinclair, 2018).

제 3 절 학교 수학에서 수직선과 수체계

수직선은 수를 표현하고 크기를 비교하는 데 유용하여 초등학교 1학년 자연수의 연산에서 처음 도입하고 있다. 수직선의 개념은 중학교에서 좌표평면, 고등학교에서는 좌표공간으로까지 확장되어 수학 전반에 걸쳐 수체계에 대한 모델로써 사용된다. 본 연구에서는 <표 2-4>와 같이 국내 중학교 1, 2학년 수학 교과서 일부와 중학교 3학년 수학 교과서 10종을 대상으로 2015 개정 교육과정 속 학교 수학에서 수직선과 수체계가 어떻게 제시되는지 살펴보고자 한다.

<표 2-4> 분석 대상 교과서(출판사 가나다순)

기호	교과서	출판사	저자
A1	중학교 수학 1	㈜교학사	고호경 외, 2018
A3	중학교 수학 3	㈜교학사	고호경 외, 2020
B1	중학교 수학 1	㈜금성출판사	주미경 외, 2018
B3	중학교 수학 3	㈜금성출판사	주미경 외, 2020
C3	중학교 수학 3	동아출판㈜	강옥기 외, 2020
D3	중학교 수학 3	동아출판㈜	박교식 외, 2020
E2	중학교 수학 2	미래엔	황선욱 외, 2019
E3	중학교 수학 3	미래엔	황선욱 외, 2020
F3	중학교 수학 3	㈜비상교육	김원경 외, 2020
G3	중학교 수학 3	㈜좋은책 신사고	김화경 외, 2020
H3	중학교 수학 3	㈜지학사	장경윤 외, 2020
I3	중학교 수학 3	㈜천재교과서	류희찬 외, 2020
J3	중학교 수학 3	㈜천재교육	이준열 외, 2020

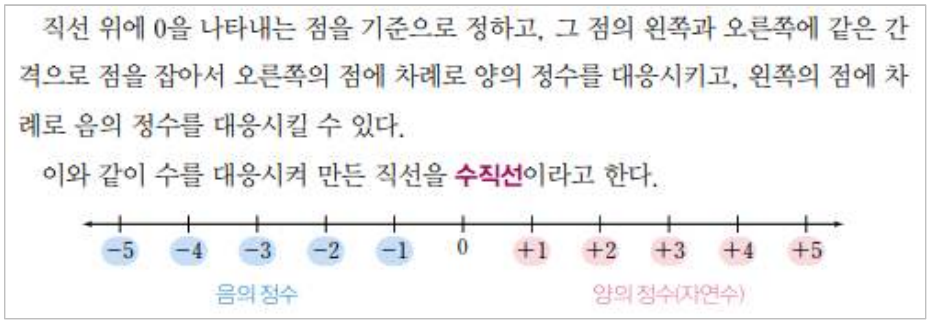
분석 대상 교과서는 출판사 이름을 가나다순으로 하여 차례대로 기호를 붙여 이하부터는 기호로 교과서를 간단히 지칭하고자 한다.[2] 중학교 1, 2학년에서는 수직선과 수체계 중 정수, 유리수와 일차함수를 학습하고, 중학교 3학년에서는 실수체계와 그 특징 및 이차함수를 살펴본다. 중학교 1, 2학년이 학교 수학에서 유리수까지의 수체계를 어떻게 다루는지

2) E3의 경우 E는 교과서 기호, 숫자 2는 2학년 교과서임을 나타낸다.

개략적으로 살펴보기 위해 일부 수학 교과서만을 분석하였다. 그러나 중학교 3학년에서 다루는 실수의 성질에 대해서는 좀 더 구체적으로 비교하며 살펴보기 위해 중학교 3학년 수학 교과서는 10종을 모두 분석을 대상으로 하였다.

1. 수직선과 수체계

수직선은 처음 초등학교에서 다루나 중학교 1학년 정수와 유리수를 학습하는 과정에서 정수와 유리수를 수직선에 나타내며 수직선의 정의를 [그림 2-1]과 같이 서술하고 있다.


직선 위에 0을 나타내는 점을 기준으로 정하고, 그 점의 왼쪽과 오른쪽에 같은 간격으로 점을 잡아서 오른쪽의 점에 차례로 양의 정수를 대응시키고, 왼쪽의 점에 차례로 음의 정수를 대응시킬 수 있다.

이와 같이 수를 대응시켜 만든 직선을 **수직선**이라고 한다.

[그림 2-1] 교과서에 제시된 수직선의 정의(B1 교과서)

[그림 2-1]에서 알 수 있듯이 수직선의 정의는 크게 세 부분 1) 기준점, 2) 같은 간격의 점, 3) 오른쪽에는 양의 정수, 왼쪽에는 음의 정수로 대응으로 볼 수 있다.

실수까지의 수체계와 관련하여 학생들은 초등학교에서 자연수를 시작으로 중학교 1학년에서는 정수와 유리수, 중학교 2학년에서는 유리수와 순환소수, 중학교 3학년에서는 무리수와 실수를 학습한다. 학교 수학에서는 실수까지의 수체계와 관련한 각각의 정의를 <표 2-5>와 같이 언급하고 있다.

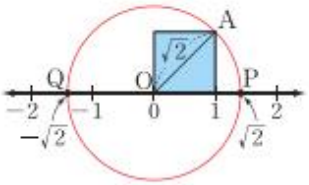
<표 2-5> 유리수, 무리수, 실수의 정의와 수체계(B1, B3 교과서, 재구성)

유리수의 정의	분자와 분모가 모두 자연수인 분수에 양의 부호 +를 붙인 수 $+\frac{7}{10}$, $+\frac{9}{8}$, $+\frac{27}{10}$, …을 **양의 유리수**라 하고, 음의 부호 −를 붙인 수 $-\frac{1}{3}$, $-\frac{8}{7}$, $-\frac{53}{10}$, … 을 **음의 유리수**라고 한다. 그리고 양의 유리수, 0, 음의 유리수를 통틀어 **유리수**라고 한다.
무리수의 정의	이와 같이 유리수가 아닌 수, 즉 어떤 수를 소수로 나타내었을 때 순환소수가 아닌 무한소수가 되는 수를 **무리수**라고 한다.
실수의 정의와 수체계	유리수와 무리수를 통틀어 **실수**라고 한다. 실수를 분류하면 다음과 같다. 실수 { 유리수 { 정수 { 양의 정수(자연수), 0, 음의 정수 }, 정수가 아닌 유리수 }, 무리수 }

<표 2-5>에서 알 수 있듯이 유리수는 분자, 분모가 모두 자연수인 분수에 부호를 붙인 수로만 정의하고 있으나 무리수는 단순히 유리수가 아닌 경우뿐 아니라 소수와 연결하여 순환소수가 아닌 무한소수로 설명하고 있다. 이는 무리수를 가무한, 즉 과정의 관점으로 정의하고 있음을 보여준다(오국환 외, 2017).

수직선 위 수체계 대응과 관련하여 중학교 2학년에서 정수와 유리수를 학습하며 학생들은 수직선 위에 유리수를 표현하는 방법을 학습한다. 그리고 중학교 3학년에서는 무리수와 실수를 학습하며 [그림 2-2]와 같이 무리수를 수직선 위에 표현하는 방법을 학습한다.

생각 깨우기에서 정사각형의 한 변의 길이는 1이므로



$$\overline{OA}=\overline{OP}=\sqrt{2}$$

이다. 이때 원점 O를 중심, $\overline{OA}$를 반지름으로 하는 원을 그려 수직선과 만나는 점을 각각 P, Q라고 하면 두 점 P, Q에 대응하는 수는 각각 $\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$이다.

이와 같이 유리수뿐만 아니라 무리수도 수직선 위에 나타낼 수 있다.

일반적으로 수직선 위의 각 점에 실수를 하나씩 대응시킬 수 있다.

[그림 2-2] 무리수를 수직선 위에 표현하는 과정(B3 교과서)

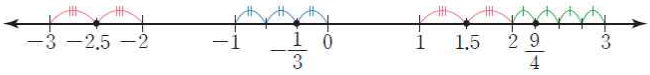
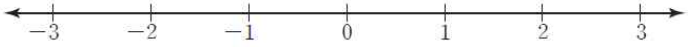
[그림 2-2]와 같이 무리수가 수직선 위에 대응될 수 있음을 살펴보기 위해 대상의 관점에서 $\sqrt{2}$(혹은 $\sqrt{5}$)를 직각삼각형의 빗변의 길이로서 표현하여 컴퍼스를 이용해 원을 그려 수직선 위에 무리수를 나타내는 활동을 한다. 이러한 과정을 통해 무리수도 모두 수직선 위에 나타낼 수 있음을 일반화하고, 실수도 마찬가지로 수직선 위에 나타낼 수 있음을 언급한다.

전체적인 수직선과 수체계 관련 학습의 흐름을 살펴보면, 국내 수학 교과서에서는 중학교 1학년에서 수직선의 정의와 이를 토대로 정수와 유리수를 학습한다. 그리고 중학교 3학년에서 무리수를 어떤 수를 소수로 나타내었을 때 순환하지 않는 무한소수가 되는 수로 도입하고, 무리수가 수직선에 표현 가능함을 기하표현을 사용하여 무리수를 정사각형의 대각선으로써 수직선에 대응시키는 활동을 통해 학습한다. 교과서에서 실수는 수직선에 나타낼 수 있는 수로 도입하고 있으며, 유리수와 무리수를 통틀어 실수라고 언급하여 실수체계를 구조화하여 유·무리수 구분에 중점을 둔다. 즉, 전반부에서는 무리수를 순환하지 않은 무한소수를 통해 무리수의 뜻을 정의하고, 무리수와 실수를 수직선에 의존하여 실수의 구조 및 성질을 설명하고 있다. 이는 학교 수학에서 무리수와 실수를 도입

에서는 과정 관점에서 수를 인식시킨 후, 무리수와 실수를 수직선 위와 연결지어 설명함으로써 정적인 대상의 관점으로 보게 하고 있다는 것을 의미한다(오국환 외, 2017).

실수 성질에 대해서는 중학교 1학년 교과서에서는 <표 2-6>과 같이 '모든 유리수는 수직선 위의 점으로 나타낼 수 있다'라고 정수와 유리수가 수직선 위의 점에 대응될 수 있음을 언급하며 유리수의 조밀성을 간접적으로 드러내고 있다. 또한, 수직선 위에서 간접적으로 학생들이 유리수의 조밀성을 경험할 수 있는 서술이나 문항 및 과제가 제시되고 있다.

<표 2-6> 교과서 내 유리수의 조밀성이 드러난 예(A1, B1 교과서)

유리수의 조밀성이 드러난 서술
모든 유리수는 수직선 위의 점으로 나타낼 수 있다. 예를 들어 -2.5, $-\frac{1}{3}$, 1.5, $\frac{9}{4}$를 수직선 위에 나타내면 다음과 같다. 
유리수의 조밀성이 드러난 문항
9 다음 수에 대응하는 점을 수직선 위에 나타내시오. $-\frac{7}{3}$ $\frac{1}{2}$ -0.25 2 0 
유리수의 조밀성 관련 토론 과제
핵심 역량 의사소통

이 외에도 정수와 유리수 관련 문제에서 유리수의 조밀성 개념을 직관적으로나마 인지해야 원활히 해결되는 문제가 <표 2-6>에 제시된 바와 같이 토론 과제로 제시되고 있는 교과서도 있었다.

중학교 3학년 교과서에서는 <표 2-7>과 같이 무리수도 수직선 위에

나타낼 수 있음을 학습하면서 조밀성 개념을 무리수의 도입에 이용하고 있다. 또한, '유리수뿐만 아니라 무리수도 수직선 위에 나타낼 수 있으며, 일반적으로 수직선 위의 각 점에 실수를 하나씩 대응시킬 수 있다'고 무리수의 조밀성과 함께 수직선에서 유리수와 무리수는 수직선 위를 빈틈없이 채운다는 점에 관련한 서술을 간단히 언급하고 있다.

<표 2-7> 교과서 내 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움에 관한 서술(B3 교과서)

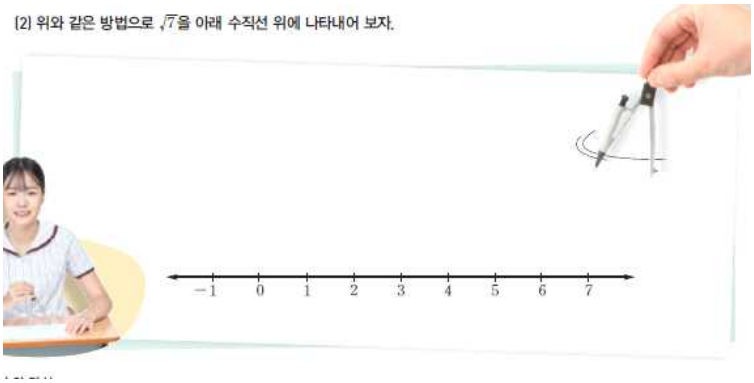
유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움에 관한 서술
이와 같이 유리수뿐만 아니라 무리수도 수직선 위에 나타낼 수 있다. 일반적으로 수직선 위의 각 점에 실수를 하나씩 대응시킬 수 있다.

앞서 언급한 바와 같이 실수의 조밀성은 유리수의 조밀성으로부터 당연하게 얻어지는 결과가 아니다. 따라서 교과서에서는 실수 위 조밀성 관련 이해를 돕기 위해 양 끝점이 유리수뿐 아니라 무리수인 경우도 제시하고 있다. 구체적인 양 끝점의 수체계 종류에 따른 조밀성 관련 예제, 문제 문항 개수를 알아보기 위해 국내 중학교 3학년 수학 교과서 10종을 분석하였다.

서로 다른 유리수 사이에서 무리수가 있음을 보여주는 문항은 <표 2-8>과 같이 수직선 위 정수 사이에 무리수가 대응되는 경우로 분류하였다. 서로 다른 무리수 사이에서 유리수가 있음을 보여주는 문항은 <표 2-8>과 같이 서로 다른 무리수 사이에 적어도 2개 이상의 유리수가 존재함을 생각하게 하는 경우로 분류하였다. 마지막으로 서로 다른 무리수 사이에서 무리수가 있음을 보여주는 문항은 <표 2-8>과 같이 서로 다른 무리수 사이에 적어도 2개 이상의 무리수가 존재함을 생각하게 하는 경우로 분류하였다.

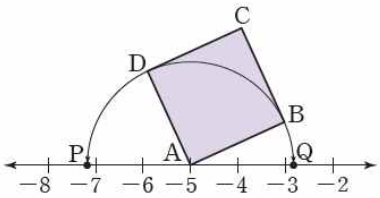
<표 2-8> 교과서 내 구간에서 양끝점 수체계에 따른 문제 유형(A3, J3, B3 교과서)

서로 다른 유리수 사이에서 무리수가 있음을 보여주는 문항



서로 다른 무리수 사이에서 유리수가 있음을 보여주는 문항

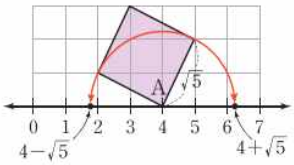
3 오른쪽 그림과 같이 수직선 위에 넓이가 5인 정사각형 ABCD가 있다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\overline{AB}$인 원을 그렸을 때, 원과 수직선이 만나는 두 점을 각각 P, Q라고 한다. 두 점 P, Q에 대응하는 수를 구하시오.



서로 다른 무리수 사이에서 무리수가 있음을 보여주는 문항

핵심 역량 문제 해결

다음 그림에서 모눈의 한 눈금의 길이는 1이다. 점 A를 중심으로 하고 반지름의 길이가 $\sqrt{5}$인 원을 그렸을 때, 수직선과 만나는 두 점에 대응하는 수는 $4-\sqrt{5}$와 $4+\sqrt{5}$이다. 물음에 답하여 보자.



(2) $4-\sqrt{5}$와 $4+\sqrt{5}$ 사이에 있는 무리수 5개를 말하여 보자.

<표 2-8>의 기준에 따라 교과서별 구간의 양끝점의 수체계 종류(유리수, 무리수)에 따른 문제 개수를 분석한 결과는 <표 2-9>와 같다. 서로 다른 유리수 사이에서 유리수를 찾는 문항의 경우 이미 초등학교 과정에서 이미 수차례 다루었기 때문에 제외하였다.

<표 2-9> 교과서 내 양끝점 수체계 종류에 따른 문제 개수

종류	A3	B3	C3	D3	E3	F3	G3	H3	I3	J3
서로 다른 유리수 사이에서 무리수를 찾는 문항	2	-	1	-	-	-	1	-	1	3
서로 다른 무리수 사이에서 유리수를 찾는 문항	1	3	3	3	3	3	4	2	4	2
서로 다른 무리수 사이에서 무리수를 찾는 문항	-	1	3	-	-	-	-	-	2	2
합 계	3	4	7	3	3	3	5	2	7	7

국내 중학교 3학년 교과서 10종을 분석한 결과, 모든 교과서에서 서로 다른 무리수 사이에서 유리수를 찾는 문항은 간접적으로나마 제시하고 있었다. 한편, 서로 다른 유리수 사이에서 무리수를 찾는 문항은 무리수를 도입하며 간접적으로 제시한 것에 그친 교과서가 10종 중 5종이었고, 서로 다른 무리수 사이에서 무리수를 찾는 문항을 제시한 교과서는 전체 10종 중 불과 4종만이 제시하였음을 알 수 있다.

2. 좌표평면과 수체계

좌표평면과 관련해서는 중학교 1학년에서 그래프의 기본적인 특징인 순서쌍과 좌표에 대해 살펴보고, 중학교 2학년에서 일차함수를 학습하며 주어진 일차함수의 그래프를 그릴 때 그래프 위를 지나는 x좌표가 정수인 낱개의 점을 나열하여 점들을 직선으로 연결하는 과정을 거친다. 그

리고 중학교 3학년에서는 이차함수를 학습하며 일차함수와 동일한 방법으로 낱개의 점을 부드럽게 연결하여 곡선으로 나타내는 과정을 거친다. 관련 구체적인 교과서 서술은 <표 2-10>과 같다.

<표 2-10> 일차·이차함수 그래프 관련 서술 예시(E2, B3 교과서)

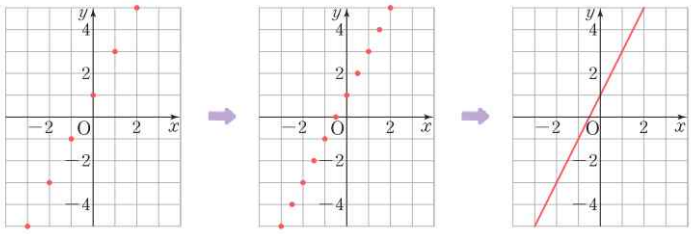
일차함수에서 그래프에 관한 서술

생각 깨우기에서 x의 값이 정수일 때, 일차함수 $y=2x+1$에 대하여 x와 y 사이의 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-3	-2	-1	0	1	2	…
y	…	-5	-3	-1	1	3	5	…

이때 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 [그림 1]과 같다.

또한, [그림 2]와 같이 x의 값 사이의 간격을 점점 작게 하여 그래프를 그리면 그 그래프는 점점 [그림 3]과 같은 직선에 가까워진다. 따라서 x의 값의 범위가 수 전체일 때, 일차함수 $y=2x+1$의 그래프는 직선이 된다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

일반적으로 x의 값의 범위가 수 전체일 때, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 직선으로 나타난다.

이차함수에서 그래프에 관한 서술

생각 깨우기에서 이차함수 $y=x^2$에 대하여 x와 y 사이의 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	…	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	…
y	…	9	6.25	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	…

위 표에서 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점 중

$(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)$

를 좌표평면 위에 나타내면 [그림 1]과 같다.

또한, [그림 2]와 같이 x의 값 사이의 간격을 점점 작게 하여 그래프를 그리면 그 그래프는 점점 [그림 3]과 같은 곡선에 가까워진다.

따라서 x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 매끄러운 곡선이 된다.

<표 2-10>에서 살펴본 바와 같이 중학교 2학년은 수체계를 정수와 유리수만을 학습한 단계이나 교과서에서는 'x의 값 사이의 간격을 점점 작게 하여 그래프를 그리면 그 그래프는 직선에 가까워진다', '따라서 x의 값의 범위가 수 전체일 때, 일차함수 $y=2x+1$의 그래프는 직선이 된다'고 언급하고 있다. 중학교 3학년에서는 수체계를 무리수와 실수까지 학습한 상태로 교과서에서의 서술이 'x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 매끄러운 곡선이 된다'고 언급하고 있다. 즉, 낱개의 점으로부터 직선으로 연결되는 과정을 일차함수에서는 x의 값의 범위가 구체적으로 어떤 수인지 제시되어 있지 않고 단순히 수 전체로 범위를 넓힌 결과로 제시하고 있으나, 이차함수에서는 x의 값의 범위가 실수로 명시되어 실수 전체로 범위를 넓힌 결과로 제시되어 있다.

제 3 장 연구 방법

본 연구는 수직선과 수체계 개념에 대한 오류와 성질 중 완비성을 설명하는 과정에서 이와 연결되어 나타나는 학생들의 오류 유형을 분석하는 것에 목적을 둔다. 이를 위해 연구 방법으로 사례연구를 하였다. 사례연구는 사례에 대한 심층적인 관찰과 분석을 지향하는 질적연구의 한 방법(Stake, 1995)으로 본 연구의 구체적인 연구 방법은 다음과 같다.

제 1 절 연구참여자 및 표집 방법

연구참여자는 2022년 3월 기준 중학교 3학년 학생으로 유리수, 무리수, 실수 개념에 관한 중학교 정규과정 학습을 마친 이번 학년도에 마친 학생이다. 연구참여자는 연구참여를 희망하는 학생 중에 수학 성적이 평균 B, C로 중상 정도의 수준이고 서술형 문항에서 본인이 설명하고자 하는 바를 적절한 용어와 기호를 이용하여 이전 수학 시험에서 서술형 문항 평균 득점률이 70% 이상인 학생으로 선정하였다. 수학 성적이 평균 B, C인 학생들은 중학교 1, 2학년에서 학습한 기본적인 개념은 대부분 숙지하고 있으나, 중학교 3학년에서 새로이 배운 개념이나 성질에 관한 개인의 관념에서는 부분적으로 부족한 부분이 있을 것으로 판단되어 본 연구의 참여자로 선정하게 되었다. 인터뷰 진행 과정에서 수학 성적이 평균 A로 우수한 수준의 학생 답변과 비교할 필요성을 느껴 추가로 2명을 연구참여자로 선정하였다. 따라서 본 연구에서는 적어도 10명 이상의 학생과 인터뷰을 진행하기 위해 중도 탈락자를 고려하여 학생 총 12명을 목표 연구참여자로 선정하였다. 연구참여자의 이름은 모두 가명(사린, 승준, 시연, 시은, 유은, 윤국, 인석, 재영, 정은, 주민, 태규, 혜진, 가나다순)으로 설정하였다. 각 연구참여자의 세부 정보는 <표 3-1>과 같다.

<표 3-1> 연구참여자의 세부 정보(가나다순)

학생 이름	평균 수학 성적
사린	C
승준	C
시연	B
시은	C
유은	C
윤국	C
인석	B
재영	C
정은	A
주민	A
태규	B
혜진	B

연구참여자는 연구책임자가 재직하고 있는 Y중학교에서 2022학년도 중학교 3학년 학생 중 연구참여자의 선정기준에 맞는 학생이다. Y중학교는 서울시 중부에 위치하고 있으며, 학생들의 학력 수준은 서울시 내에서 학력평가 결과를 토대로 비추어볼 때 중상 정도의 수준이다.

학생이 자발적으로 참여 의사를 밝히면 일반용 설명문을 보여주며 연구의 내용과 연구참여자의 권리에 대해 구두로 설명하였다. 또한, 법정대리인에게도 전화로 연구 과정에 관해 설명 후 자녀의 연구 참여 동의를 물었다. 법정대리인 또한 연구 참여에 구두로 동의한 경우, 연구참여자용 동의서와 함께 법정대리인용 설명문을 함께 배부하고 일주일 뒤 동의서를 수거하여 연구참여자와 법정대리인이 모두 서면 동의한 연구참여자에게만 인터뷰 날짜 및 시간을 공지하였다. 동의 과정에는 교사가 어떠한 관여도 하지 않으며 동의서 배포 및 수거는 모두 연구자가 직접 진행하였다. 학생이 고등학교나 대학 수준의 내용을 이미 선행하여 중학교 수준이 아닌 내용을 바탕으로 질문에 대해 답한다면, 중학교 학생들의 이해를 보려는 연구 주제와 거리가 멀어 제외하였다.[3)]

3) 본 연구는 서울대학교 생명윤리심의위원회로부터 승인을 받고 진행되었다(IRB No. 2201/002-010).

제 2 절 연구 절차

연구 참여 의사를 밝힌 학생과 수직선 및 수체계 개념 및 실수의 성질 중 완비성 관련 문항을 설명하는 과정에서 발생하는 오류를 알아보는 인터뷰를 진행하였다. 인터뷰는 본래 연구에 참여하는 학생 모두 조용한 교내 교실에서 대면으로 연구자와 일대일로 1회 진행하고자 하였다. 그러나 학생별 인터뷰를 진행하는 과정에서 코로나바이러스감염증-19의 감염 확산세가 급격하게 커져 전면 온라인 수업으로 전환됨에 따라 1명을 제외한 나머지 11명은 Zoom을 통해 비대면 방식으로 인터뷰를 진행하였다. 인터뷰는 질문지를 바탕으로 이루어졌으며, 반구조화된 형태로 학생당 약 40분간 진행되었다. 인터뷰의 모든 과정은 연구책임자 본인이 직접 녹음을 진행하고 이를 바탕으로 인터뷰 내용을 전사하여 분석하였다. 연구의 날짜 흐름별 과정은 다음 <표 3-2>와 같다.

<표 3-2> 연구 흐름도

21.09~21.11		21.11~22.01		22.01~22.02		22.03		22.04~22.05		22.04~22.07
·이론적 배경 분석 ·오류, 수체계 관련 선행연구, 교과서 분석	⇒	·인터뷰 문항 구성	⇒	·파일럿 연구를 통한 인터뷰 문항 수정	⇒	·연구참여자 모집	⇒	·연구참여자 인터뷰 진행 ·인터뷰 내용 전사 및 분석	⇒	·연구 결과 정리 및 분석

<표 3-2>와 같이 9~11월에는 이론적 배경과 선행연구를 분석하고, 11~1월에는 인터뷰 문항을 구성하였으며, 올바른 답변의 기준 및 문항 답변의 다양성을 미리 살펴보기 위해 1월에 고등학교 1학년 학생을 대상으로 파일럿 연구를 진행하고 인터뷰 문항을 일부 수정하였다. 3월에는 연구참여자를 모집하고 동의하는 과정을 거쳐 4~5월에 인터뷰를 진행하

고 각 인터뷰를 전사 및 분석하였다. 이를 바탕으로 7월까지 연구 결과를 정리하였다.

제 3 절 인터뷰 문항

인터뷰 문항은 세 부분 1, 2, 3장으로 이루어진다. 파일럿 연구를 통해 객관식 문항의 경우 학생들이 정답이라고 생각하는 답은 비교적 쉽게 선택하지만, 그 이유는 잘 설명하지 못하는 경향이 있어 모든 문항은 서술형 문항으로 질문을 재구성하였다. 구체적인 문항은 [부록]과 같다.

1장은 수직선과 수체계에 관한 개념을 묻는 문항으로 구성되어 있다. 문항은 중학교 3학년 교과서 내 개념 설명 부분과 소단원 지도목표를 참고하였다(주미경 외, 2020). 이는 교과서에서 수직선과 실수체계 개념을 학생이 어떻게 이해하고 있는지 각 개인이 지닌 개념의 의미를 살펴보기 위함이다.

2장은 유리수의 조밀성과 실수의 조밀성을 어떻게 이해하고 있는지를 묻는 문항으로 구성된다. 2장에서 [문항 1]은 조밀성 중 무수히 많은 수와 관련된 문항으로 Putra(2019)가 개발한 설문지를 활용하였다. 본래의 설문지는 교사를 대상으로 학생들이 질문 내용과 같은 오류를 지니고 있을 때 어떻게 지도하겠는지를 묻는 문항이었으나, 본 인터뷰에서는 문항의 질문 자체를 활용하여 학생들의 유리수의 조밀성에 관해 설명하는 과정에서 오류를 살펴보고자 하였다. [문항 2]는 조밀성 중 다음에 오는 수와 관련된 문항으로 McMullen 외(2015)의 문항을 재구성하였으며, [문항 3]은 실수의 조밀성와 관련된 문항으로 지도서 내 보충설명을 참고하여 연구자가 재구성하였다. [문항 4]는 Sirotic & Zazkis(2007)가 활용한 설문지 일부로, 해당 문항은 본래 예비교사를 대상으로 수직선 위에서 유리수와 무리수가 서로 어떻게 구성되는지에 관한 인식을 알아보기 위한 문항이었다.

3장은 실수의 유리수와 무리수가 어떻게 빈틈없이 수직선을 이루고 있는지에 관해 묻는 문항이다. 3장에서 [문항 1]은 중학교 2학년 교과서

에서 제시하고 있는 일차함수 그래프를 그리는 상황에 관한 서술 부분이다(주미경 외, 2018). 이와 연결하여 x좌표가 정수인 점에서부터 유리수인 점으로 확장해나가며 직선으로 연결을 학생들이 설명하는 과정을 통해 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움을 설명하는 과정에서 나타나는 오류 유형을 보고자 하였다. 기존 파일럿 연구에서 학생들이 낱개의 점으로부터 직선으로 연결할 수 있는 이유를 단순히 실수의 연속을 이용하여 설명하는 경우가 많았다. 이를 방지하기 위해 직선으로 연결할 수 있었던 이유를 질문하기보다 낱개의 점으로부터 수를 전체로 확장했을 때 직선으로 연결할 수 있다고 서술되어 있는데, 이때 수는 어떤 수인지를 중심으로 질문하는 문항으로 변경하였다.

제 4 절 자료 분석 방법

본 연구는 질적연구로 인터뷰 내용 녹음 파일을 수집하고 분석한다. 자료는 근거이론에 따라 전사와 오픈코딩-축성코딩의 과정을 거쳐 선택적으로 코딩되었다. 선택적으로 코딩된 발화는 발화 내용 내 밑줄로 표시하여 수직선과 수체계에 대한 교과서 및 지도서에서 제시하고 있거나 이해하기를 의도한 개념과 방향을 기준으로 학생들의 답변과 비교하여 이와 다른 경우는 오류로 보고 분석하였다.

구체적인 오류 유형은 Movshovitz-Hadar 외(1987)의 오류 분석 유형에 따라 분석하였다. 구체적인 오류 분석 유형은 <표 3-3>과 같이 6가지로 제시하였다.

<표 3-3> 오류 분석 유형(Movshovitz-Hadar et al., 1987)

오류 분석 유형
① **문제의 조건 및 자료의 잘못된 이용**: 문제에서 주어진 조건이나 자료를 학생이 실제로 사용하는 상황에서 잘못 이용한 오류
② **문제 해석의 오류:** 문제 자체를 잘못 이해해서 생기는 오류
③ **논리적으로 부적절한 추론**: 풀이 과정에서 잘못된 추론을 하거나 논리적으로 비약이 생긴 오류
④ **정의 또는 정리의 부적절한 사용**: 원리나 규칙, 정의를 잘못 사용한 오류
⑤ **검증되지 않은 풀이 오류**: 각 수행과정은 옳으나 최종적으로 나온 결과가 요구하는 답이 나오지 않은 오류
⑥ **기능상의 오류**: 계산 오류, 대수의 부호, 숙달되지 못한 알고리즘으로 인한 오류 등

<표 3-3>과 같이 6가지 오류 유형 중에 연구참여자는 연구자와 일대일 인터뷰을 진행하여 <표 3-4>와 같이 ① 정의 또는 정리 부적절한 사용, ② 논리적으로 부적절한 추론, ③ 교과서 서술과 실제 학습한 내용 간 혼동으로 재구성하여 분류해 살펴보았다.

<표 3-4> 재구성한 오류 분석 유형

오류 분석 유형		재구성한 오류 분석 유형
① 문제의 조건 및 자료의 잘못된 이용		① 정의 또는 정리의 부적절한 사용
② 문제 해석의 오류		
③ 논리적으로 부적절한 추론	⇒	② 논리적으로 부적절한 추론
④ 정의 또는 정리의 부적절한 사용		
⑤ 검증되지 않은 풀이의 오류		③ 교과서 서술과 실제 학습한 내용 간 혼동
⑥ 기능상의 오류		

<표 3-4>와 같이 문제의 조건 및 자료의 잘못된 이용이나 문제 해석의 오류, 기능상 오류 등이 있는 경우 해당 오류는 본 연구의 주된 오류 분석의 목적이 아니므로 연구자가 연구참여자가 재설명하거나 다시 설명하도록 안내하였기 때문에 재구성한 오류 분석 유형에서 제외되었다. 마

찬가지로 본 연구에서는 완비성 관련 내용을 설명하는 과정에서의 오류만을 대상으로 하고 이와 관련된 응용문제(문제해결)는 인터뷰에서 질문하지 않았기 때문에 풀이를 검증하지 않는 오류 유형도 재구성한 오류 분석 유형에서 제외하였다. 앞선 6가지 오류 유형 중 어느 것에도 속하지 않는 유형이 있어 마지막 항목에 ③ 교과서 서술과 실제 학습한 내용 간 혼동을 추가하였다. 수직선 및 수체계 개념을 설명할 때의 오류와 실수의 성질 중 완비성을 설명할 때의 오류 유형이 유사한 경우, 두 오류가 연결된다고 보았다.

인터뷰 분석 과정은 연구원이 소속해있는 연구팀 구성원들과 여러 차례의 토의를 통해 분석을 공유하는 과정을 거쳤다. 이 과정을 통해 개별 편향을 최소화하고 데이터에 대한 해석을 유지하고자 했다.

제 4 장 연구 결과

제 1 절 수직선 및 수체계 개념 관련 오류

수직선 및 수체계 개념에 대해 수직선, 실수까지의 수체계, 수직선 위 수체계 대응으로 나누어 교과서와 지도서에서 제시하고 있는 해당 개념과 비교 분석하여 다른 부분을 중심으로 살펴보았다. 학생들이 답변하는 과정에서의 오류를 살펴보면 다음과 같다.

1. 수직선

학생들에게 각 개인이 지닌 수직선의 의미에 대한 답변을 살펴본 결과, 수직선과 관련된 오류는 <표 4-1>과 같다.

<표 4-1> 수직선 관련 오류

이산성에 기초한 사고	**승 준**: 실수를 선 위에 나타낸 거요.
	태 규: 한 줄에 숫자를 나타낸 선이요.
	재 영: 수를 나열한 선이요.
	혜 진: 수를 직선에 표시한 거요.
그 외	**유 은**: 수가 있는 선이요.
	사 린: 일자로 길게 뻗은 선이요.

<표 4-1>과 같이 12명의 학생 중 수직선을 통해 수가 연속성을 지니고 있다고 올바로 언급한 학생은 4명뿐이었다. 해당 학생들은 '수 표시를 메울 수 있는', '이으면 되는 선' 등을 통해 수직선을 수가 연속적으로 분포해있는 선이라고 인식하고 있는 듯하였다. 반면, 수직선을 통해 수를 이산성을 지니고 있다고 언급한 학생도 4명이었다. 해당 학생들은 '한 줄

에 숫자를 나열', '수를 나열한', '수를 선 위에 나타낸 거' 등을 통해 수직선 위에 수가 이산적으로 놓여있다고 인식하고 있었다. 그 외에 유은이는 '수가 있는 선'이라고 수직선이라는 단어 자체만을 보고 용어를 해석하였고, 사린이는 수직선과 직선의 개념을 혼동하고 있었다. 수학 과목 평균이 높은 편인 정은과 주민의 경우, 이들은 공통으로 '직선 위에 수들을 표시한 선', '선을 놓고서 그 위에 크기에 따라 수를 쓴 것'과 같이 수보다는 직선에 더 초점을 맞추어 수직선을 연속성에 기초하여 인식하고 있음을 알 수 있었다. 이를 통해 학생들이 수직선 위에 수들이 나열되어 있다고 이산적으로 인식하는 경우는 수 또한 이산적으로 배열되어 있다고 생각하며, 수직선 위에 수들을 연속적인 측면에서 인식하는 경우는 수 또한 연속성을 따른다고 생각하고 있음을 알 수 있다.

2. 실수까지의 수체계

학생별 유리수, 무리수, 실수의 정의에 대해 올바르게 대답한 학생은 대다수(50%)가 유리수를 '분수로 나타낼 수 있는 수', 무리수를 '분수로 나타낼 수 없는 수', 실수를 유리수와 무리수를 합한 수로 답변하였다. 유리수, 무리수의 정의에 대한 오류는 크게 세 가지로 나뉘었으며 구체적인 답변은 <표 4-2>와 같다.

<표 4-2> 유리수, 무리수 정의 관련 오류

유형	학생	유리수	무리수
일상용어와 혼동하여 인식	윤국	(소수점 아래가) 끝이 있는 수	(소수점 아래가) 끝이 없는 수
	혜진	(소수점 아래가) 끝이 있는 수	(소수점 아래가) 끝이 없이 계속 반복되는 수
	정은	(소수점 아래가) 끝이 정해져 있는 수	(소수점 아래가) 끝이 안 정해져 있어서 사람들이 새로운 기호를 만들어서 표현한 수
분수와 소수 의미를 수체계와 혼동	시연	정수, 분수나 약간 그런 소수처럼 정수의 비율로 나타낸 수	정수의 비로 나타낼 수 없는 그런 수나 π 같이 순환하지 않는 그런 소수, 무한소수 같은 수
그 외	사린	양수랑 음수를 통틀은 수	실수 중에서 유리수가 아닌 거

<표 4-2>에서 살펴볼 수 있듯이 유리수, 무리수 정의 관련 오류로 첫 번째는 일상언어와 혼동하는 경우다. 학생들은 중학교 2학년에서 순환소수 역시 분수로 고칠 수 있다는 점을 학습했으나, 중학교 3학년 교과서에서 순환하지 않는 무한소수로 무리수를 정의하고 다양한 무리수의 예시를 보여주는 과정에서 무리수는 소수점이 끝없이 이어지는 수 정도로 인식하는 학생이 많았다. 무리수의 '무(無)'와 유리수의 '유(有)'가 주는 일상용어의 의미와 혼동하여 무리수를 무한소수로 여기고 있었다. 무리수의 '무(無)'가 소수점 밑 자릿수와 관련이 없다는 것을 학생들이 인지할 필요가 있다.

두 번째는 분수와 소수 의미를 수체계와 혼동하는 경우다. 분수, 소수는 수를 표현하는 수단이지 수체계는 아니다. 그러나 학생 시연이는 분수와 소수처럼 표현된다면 유리수라고 생각하며, 분수로 나타내지 못하는 수와 순환하지 않는 무한소수가 무리수로 동일함을 인식하지 못하고

있었다. 학생들은 분수와 소수의 의미와 수체계의 차이를 명확히 구분할 수 있어야 할 필요가 있다.

그 외에 수체계에 관한 전반적인 개념 부족한 경우가 있었다. 양수와 음수는 수체계와 무관함에도 둘 사이를 연결지어 설명하고 있었다. 중학교 1학년 때 학습한 정수, 유리수 수체계 개념 자체가 비교적 덜 정립되어 있는 경우임을 알 수 있다.

3. 수직선 위 유리수, 무리수, 실수의 대응

12명 중 8명의 학생은 유리수, 무리수, 실수 모두 수직선 위에 무리수가 대응되고 표시할 수 있다고 하였으나 일부는 수직선 위에 무리수를 나타내지 못하거나 나타낼 수 있을 것 같으나 구체적인 방법을 모르겠다고 답변하였다. 관련 오류를 구체적으로 살펴보면 <표 4-3>, <표 4-4>와 같다.

<표 4-3> 수직선 위 수 대응 관련 오류1

무리수는 수직선 위에 대응	**승 준**: (수직선 위에) 나타낼 수는 있는데 근데 어떻게 나타나는지는 잘 모르겠어요.
가능하나 특정한 예($\sqrt{2}$)도 그 방법을 인지하지 못함	**태 규**: 막 자세하게까지는 나타내지는 못해도 막 $\sqrt{2}$가 1.4 어쩌고저쩌고 인 것처럼 어디와 어디 사이에 있다. 그건 나타낼 수 있을 거라고 생각합니다.

첫 번째 오류로는 <표 4-3>과 같이 무리수를 수직선 위에 대응할 수는 있을 거라 생각하나 특정한 예($\sqrt{2}$)도 그 방법을 인지하지 못하는 경우다. 이는 교과서 내에서 제시된 직각삼각형의 빗변으로서의 무리수를 컴퍼스를 이용하여 원을 그려 수직선 위에 나타내는 것을 학습한 것이 무리수를 수직선 위에 대응시키는 과정임을 연결시켜 떠올리지 못한 것을 의미한다. 오히려 태규의 답변을 살펴보면, 교과서에서 무리수의 도입

부분 중 $\sqrt{2}$와 같은 무리수가 순환하지 않는 무한소수임을 보여주는 과정에서 수직선을 이용하여 $\sqrt{2}$가 대략 얼마인지 살펴보는 과정을 먼저 떠올리고 있었다. 즉, 과정의 관점으로 무리수를 학습한 경험에 얽매여 무리수가 수직선 위에 대응한다는 대상의 관점으로 무리수를 바라보는 것에 어려움을 겪고 있었다.

<표 4-4> 수직선 위 수 대응 관련 오류2

무리수는 특정한 경우($\sqrt{2}$)도 수직선 위에 나타낼 수 없다고 생각한 경우	**시 은**: 무리수는 못 나타내지 않을까요. …(중략)… 계속 끊임없이 이어지니까 정확한 값으로 나타낼 수 없으니까. …(중략)… 실수 중에서 무리수는 못 넣고… (유리수만 넣을 수 있다).
	사 린: 무리수는… 무리수는 좀 나타내기 힘들 것 같아요. …(중략)… 네 수직선이 약간 한정된 거잖아요. 그래서 순환소수나 무한소수 같은 거를 담기에는 안 될 것 같아요.

두 번째 오류로는 <표 4-4>와 같이 무리수 자체를 수직선 위에 나타낼 수 없다고 생각한 경우다. 시은과 사린이의 답변의 조금 다른 측면에서 무리수를 수직선 위에 대응시킬 수 없다고 생각하였다. 시은은 무리수가 순환하지 않는 무한소수라는 가무한 관점, 즉 과정의 개념에서 바라보고 있어 수직선 위에 정확히 대응하기는 어려울 것이라고 여기고 있다. 반면, 사린이는 수직선이 한정적이어서 유리수보다 상대적으로 더 많다고 생각하는 무리수를 담기에는 힘들 것이라 생각하고 있었다. 이는 시은이는 과정의 관점으로 무리수를 바라보아 오류가 형성되었다면, 사린이는 수직선 자체를 한정적으로 바라보아 오류가 형성되었음을 의미한다.

제 2 절 수직선 및 수체계 성질 관련 오류

수직선 및 수체계 성질 관련 오류 유형은 완비성에 대한 질문을 통해 학생들의 답변을 살펴보았다. 완비성 성질은 크게 조밀성과 유리수와 무리수가 수직선 위를 빈틈없이 채움을 포함한다. 그 중 조밀성은 임의의 두 수 사이에 '무한히 많은 수가 있음'과 '다음에 오는 수가 없음' 측면으로 구성된다. 각각의 경우에 대한 학생들의 오류 유형은 다음과 같다.

1. 조밀성

가. 무한히 많은 수

조밀성과 관련하여 임의의 두 수 사이에 무한히 많은 수가 있다와 관련한 문항은 유리수의 조밀성([문항 1])과 실수의 조밀성([문항 2])로 나누어 학생들에게 질문을 하였다.

먼저 임의의 두 유리수 사이에서 유리수 개수를 묻는 유리수의 조밀성 관련 문항에는 12명 중 11명의 학생이 올바르게 인지하고 있었다. 특히 4명의 학생은 $\frac{2}{5}$와 $\frac{4}{5}$ 사이의 수와 0.4과 0.8 사이의 수를 구하는 상황은 $\frac{2}{5}$와 0.4, $\frac{4}{5}$와 0.8가 같으므로 동일하다고 생각하는 등 Vamvakoussi & Vosniadou (2007)가 주장한 유리수의 이해 수준 중에서도 5수준에 해당하는 높은 수준을 지니고 있었다. 12명 중 1명(사린)만이 유리수 조밀성에 관한 오류가 있었으며, 또 다른 1명(재영)은 유리수 조밀성은 올바르게 이해하고 있었으나, 본인의 의견을 정당화하는 과정에서의 오류를 보였다. 오류 유형 및 구체적인 답변은 <표 4-5>, <표 4-6>, <표 4-7>과 같다.

<표 4-5> 유리수의 조밀성 오류 유형1

정의 또는 정리의 부적절한 사용 ①유리수와 정수를 혼동하는 경우	**사 린:** (0과 1 사이에는) 아무것도 없지 않을까요. **연구자:** 아무 수가 없다고 했니? **사 린:** 네. **연구자:** 왜? **사 린:** 왜냐면 0과 1 사이는 이제 다 소수점이잖아요, 그것도.

첫 번째 유형은 <표 4-5>와 같이 유리수와 정수를 혼동하는 경우다. 이는 사린이가 유리수의 의미를 이산적으로 제한하여 생각하여 0과 1 사이에 유리수가 존재하지 않는다고 이해한 것으로 해석된다.

<표 4-6> 유리수의 조밀성 오류 유형2

논리적으로 부적절한 추론 ②유리수 개수를 무한히 많은 것이 아닌 셀 수 없이 많다고 생각한 경우	**연구자:** 유리수는 유한개인데 무리수는 무한개라고 생각하는 거야? **재 영:** 유한개는 아닌데 셀 수 없이 많은 것 같다. **연구자:** 셀 수 없이 많은 거랑 무한개는 무슨 차이지? **재 영:** 그러니까 셀 수 없는 거는 진짜 다 세기 귀찮은거, 무한한 거는 말 그대로 끝도 없이 있는 거에요. **연구자:** 그럼 유리수는 뭐야? 무한히 많은 거야 아니면 셀 수 없이 많은 거야? **재 영:** '셀 수 없이'가 맞는 거 같아요.

두 번째 유형은 <표 4-6>과 같이 유리수가 셀 수 없이 많다고 생각한 경우다. 유리수가 셀 수 없이 무한개가 아닌 '세기 귀찮을 정도로' 매우 많은 것으로 이해하고 있었다. 이 경우도 유리수가 무한하다고 인식하는 데 어려움을 겪고 있는 것을 보여준다.

<표 4-7> 유리수의 조밀성 오류 유형3

논리적으로 부적절한 추론	**연구자:** 0.4와 0.8 사이에는 유리수가 몇 개 있을까? **사 린:** 이건 한정되어 있을 것 같아요. 왜냐하면 0.4 해가지고… 또 (소수점 끝자리가) 뒤로 안 붙을 것 같아서.
③유리수를 이산성에 기초하여 인식하는 경우	**연구자:** 한정되어 있을 것 같다고 한정되면 몇 개가 있을 것 같아? **사 린:** 한정되면 그냥 네 개 있지 않을까요? 0.5, 0.6, 0.7 해가지고… **연구자:** 0.5, 0.6, 0.7…. 3개네? **사 린:** 네네.

세 번째 유형은 <표 4-7>과 같이 유리수를 이산성에 기초하여 인식한 경우다. 사린이는 $\frac{2}{5}$와 0.4, $\frac{4}{5}$와 0.8이 동일한 수를 나타냄에도 $\frac{2}{5}$와 $\frac{4}{5}$ 사이에는 무한히 많은 수가 존재하지만, 0.4와 0.8 사이에는 제한된 숫자(3개, 0.5, 0.6, 0.7)가 존재한다고 답변하였다. 이는 유리수의 조밀성 관련 선행연구에서도 많이 드러났던 결과(VanDooren et al., 2015)로 Vamvakoussi & Vosniadou(2007)의 합성 모델에서 5단계 중 3수준인 유리수 표상에 따라 서로 다른 이해를 하는 혼합된 이해 단계임을 알 수 있다.

또한, 연구 결과에서 주민이는 유리수의 조밀성을 설명하는 과정에서 다음과 같이 언급하였는데, 이에 주목할 필요가 있다.

> **주 민:** 그러니까 확대하면 확대할수록 계속 점이 이렇게 있을 것 같아서…

이는 유리수의 조밀성을 더 잘 설명하기 위한 방법으로 디지털 도구를 이용하여 조밀성을 설명하기 위해 수직선을 확대하거나 축소했다는 연구

(김도연, 권오남, 2018)와 연결된다. 이처럼 '확대'와 관련된 내용을 교수학적 상황에서 교사가 언급하는 것도 학생들의 유리수 조밀성 이해를 돕는 한 가지 방법이 될 것으로 보인다.

두 번째로 임의의 두 실수 사이에서 실수의 개수를 묻는 실수의 조밀성 관련 문항에는 12명 중 10명의 학생이 올바르게 인지하고 있었다. 옳은 정답을 말했으나 정당화하는 과정서의 오류를 보인 학생 1명(유은)과 오답을 말한 학생 2명(시은, 사린)의 오류 유형을 살펴보면 <표 4-8>, <표 4-9>, <표 4-10>과 같다.

<표 4-8> 실수의 조밀성 오류 유형1

정의 또는 정리의 부적절한 사용	**연구자:** 왜 무수히 많은 유리수가 있다고 생각했어?
④무한소수와 유리수를 혼동하는 경우	**유 은:** 그 둘 사이에 무한소수도 있고 순환소수 또 분수(도 있고)…

첫 번째 유형은 <표 4-8>과 같이 무한소수와 유리수를 혼동하는 경우다. 이는 무한소수에서 일상용어와 '무(無)' 사이에 혼동하는 것과는 다르게 유리수가 무수히 많다고 생각해서 무한소수와 연결지어 생각하는 과정에서 오류를 보였다. 이 오류 유형은 무수히 많은 수와 무한소수, 순환소수 사이의 혼동과 수체계와 수의 표현 방법인 소수 사이의 관계를 정확하게 인지하지 못한 것이 합쳐져 이루어진 것으로 보인다.

<표 4-9> 실수의 조밀성 오류 유형2

논리적으로 부적절한 추론	**연구자:** 서로 다른 무리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있을까? 그리고 그 무리수를 수직선 위에 나타낼 수 있을까? **시 은:** 무리수는 오히려 유리수보다 더 훨씬 많은 무리수가 존재할 것 같아요. <u>무수히 많은 무리수는 존재하는데… 수직선 위에는 나타낼 수 없어요.</u>
⑤무리수는 수직선 위에 대응하지 못한다고 생각하는 경우	**연구자:** 서로 다른 실수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있겠네 당연히? 사린이 논리에 따르면. **사 린:** 있을 것 같긴 한데 <u>그거를 수직선 위에 나타낼 수가 없을 것 같은데요.</u>

두 번째 유형은 <표 4-9>와 같이 무리수는 수직선 위에 나타내지 못한다고 생각한 경우다. 교과서에서는 무리수 중 하나인 $\sqrt{2}$가 수직선 위에 대응하는 점으로 나타낼 수 있다는 것을 무리수인 대각선의 길이를 원을 이용해 수직선 위에 대응시키는 예로 제시한다. 이 외에도 다양한 문제를 통해 $\sqrt{5}$, $3+\sqrt{29}$ 등의 무리수를 수직선 위에 대응할 수 있다는 것을 간접적으로 보여준다. 그러면서 이를 통해 무리수를 수직선 위에 대응할 수 있다는 것을 직관적으로 알게한다. 그러나 학생들은 이와 별개로 무리수를 수직선 위에 대응을 생각할 때, 무리수의 도입 부분에서 $\sqrt{2}$의 어림값이 얼마가 되는지를 알아보는 과정과 연결지어 무리수를 순환하지 않는 무한소수로 먼저 떠올리고 있었다. 실제로 시은이는 인터뷰 추후에 교과서에 배웠던 사각형의 대각선을 이용해서 무리수를 수직선 위에 대응시키며 무리수를 수직선 위에 대응하는 방법을 '잊어버렸었다'고 하였다. 이는 학생들이 무리수의 수직선 대응을 무리수 개념과 연결하여 이해했다기보다는 단순하게 무리수를 수직선 위에 대응시키는 방법만을 암기한 채 문제 풀이를 위한 도구로 여긴 결과로 추측된다.

<표 4-10> 실수의 조밀성 오류 유형3

논리적으로 부적절한 추론	**연구자:** 서로 다른 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 있을까? 이거는 어떻게 생각해? **사 린:** 아까 (이전 문제에서) 제가 없다고 하지 않았나요?
⑥유리수, 무리수를 이산성에 기초하여 생각하는 경우	**연구자:** 없다고 한 것 같아. 그럼 서로 다른 무리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있을까? **사 린:** 없을 것 같아요. 왜냐면 이제 수 하나 차이잖아요. 그래서 거기에 또… 또… 소수점이 또 (뒤에) 붙어가지고 (사이에 있는 수는) 없을 것 같다고 생각을 해요.

세 번째 유형은 <표 4-10>과 같이 유리수, 무리수를 이산성에 기초하여 생각하는 경우다. 유리수 및 무리수와 정수를 비교하여 갖는 가장 큰 개념적 변화는 이산성 여부이므로 정수에서 나아가 새로운 유리수, 무리수 등의 수체계를 학습할 때는 이산성에 관한 정확한 이해가 필요하다. 그러나 사린이는 '왜냐면 이제 수 하나 차이잖아요'에서 알 수 있듯이 유리수, 무리수 모두 이산적으로 존재한다고 생각하여 서로 다른 수 사이에서 또 다른 수가 존재하지 못한다고 생각하였다.

나. 다음에 오는 수

조밀성과 관련하여 임의의 두 수 사이에 무한히 많은 수가 있다는 점보다 다음에 오는 수 없음에 관한 이해를 학생들은 더 어려워한다(McMullen et al., 2015). 다음에 오는 수와 관련해서는 학생들에게 두 가지 질문(2장의 [문항 2], [문항 4])을 하였다.

첫 번째로 1과 가장 가까운 유리수, 무리수를 각각 찾아보라는 문항에는 12명 중 7명만이 올바른 대답을 하였다. 학생들이 답변을 설명하는 과정에서의 오류 유형을 살펴보면 <표 4-11>, <표 4-12>, <표 4-13>

과 같다.

<표 4-11> 다음에 오는 수 관련 오류 유형1

정의 또는 정리의 부적절한 사용	**연구자:** 1에 가장 가까운 무리수는 찾을 수 있을까? **윤 국:** 이거는 그래도 찾을 수 있을 것 같습니다. 계속 구하다 보면 이 값이 약간 끝이 없긴 하지만 그래도 0.999… 약간 이런 수가 있잖아요. 그러니까 결국에는 최후의 무리수를 구하면 그게 가장 일에 가깝지 않을까요.
⑦무한소수와 무리수를 혼동하는 경우	**연구자:** 1에 가장 가까운 유리수를 찾을 수 있을까? **정 은:** 유리수는 찾을 수 있다고 생각해요. 근데 이건 약간 헷갈려요. 왜냐하면 약간 유리수의 개념이 약간 헷갈려서… 어… 약간 이거 아니 유리수… 그 순환소수가 유리수였는지 약간 지금 기억이 잘… **정 은:** 순환소수가 유리수였나… 무리수? 우리 만약에 순환소수 같은 게 유리수라면 유리수에 포함시킨다면 찾을 수 없다고 생각하고, 만약에 순환소수가 무리수라면, (답은) 네.

첫 번째 유형은 <표 4-11>과 같이 무한소수와 무리수를 혼동하는 경우다. 윤국이와 정은이가 해당 오류를 보였는데 윤국이는 $0.\dot{9}$이 무한소수이므로 무리수로, 정은이는 순환소수를 무리수로 인식하고 있었다. 이전 문제에서는 무리수를 순환하지 않는 무한소수임을 언급한 것으로 미루어보아 무한소수를 '무한'에만 초점을 맞춰 무리수와 혼동하는 것으로 보인다.

<표 4-12> 다음에 오는 수 관련 오류 유형2

논리적으로 부적절한 추론	**연구자:** 1에 가장 가까운 유리수를 찾을 수 있을까? **승 준:** 1이요. **연구자:** 1보다 작은 수 중에 찾을 수 있을까? **승 준:** 소수가 되게 많으니까… 아닙니다. 0.999… 무한소수가 가장 가까운거 같아요.
⑧$0.\dot{9}$와 1이 다르다고 생각한 경우	**연구자:** 1에 가장 가까운 유리수를 찾을 수 있을까? **인 석:** 무한소수 중에서 0.999….

두 번째 유형은 <표 4-12>와 같이 $0.\dot{9}$와 1이 다르다고 생각한 경우다. $0.\dot{9}$와 1이 같다는 것은 중학교 2학년에서 순환소수에 적당히 10의 제곱근을 곱하여 순환하는 소수 부분이 같도록 하여 빼는 과정을 통해 다루지만 여전히 무한소수($0.\dot{9}$)를 대상의 관점(1 그 자체 수)이 아닌 과정의 관점(1로 다가가는 수)으로 바라봄을 알 수 있다.

<표 4-13> 다음에 오는 수 관련 오류 유형3

논리적으로 부적절한 추론	**연구자:** 1에 가장 가까운 유리수를 찾을 수 있을까? **재 영:** 찾을 수 있을 것 같아요. **연구자:** 찾을 수 있을 것 같아, 왜? **재 영:** 일단 뭐 예를 들면 0.9로 시작하는 거라든지 그런 분수로 나타낼 수 있는… 그래서 유일하고 가까운 유리수가 있지 않을까요. 가장 가까운. …(중략)… **재 영:** 무리수는 당연히 있을 것 같아요.
⑨유리수, 무리수를 이산성에 기초하여 생각한 경우	**연구자:** 무리수는 당연히 있을 것 같아? 왜 유리수는 아닌데 무리수는 당연히 있는 거지? **재 영:** 유리수보다 무리수가 범위가 좀 더 넓은 느낌, 그래서 무리수는 무리수가 유리수보다 더 가까울 것 같아요. 1에. **연구자:** 아, 1에 그럼 제일 가까운 무리수도 찾을 수가 있는 거야? 그럼 1에 가장 가까운 무리수가 뭔지도 궁금하네, 재영이는 뭐라고 생각해? **재 영:** $\sqrt{2}$ 같아요.

세 번째 유형은 <표 4-13>과 같이 유리수, 무리수를 이산성에 기초하여 생각한 경우다. 재영이는 1에 가장 가까운 무리수로 $\sqrt{2}$를 선택하는 것으로 미루어보아, 이는 이전 조밀성의 무한히 많은 수를 답변할 때 사린이가 보였던 답변과도 유사한 유형이다.

두 번째로 서로 다른 두 유리수, 무리수 사이에서 항상 유리수, 무리수를 찾을 수 있는지 여부를 묻는 문항은 12명 중 6명만이 올바른 답변을 하였다. 특히 1, 2번 문항(서로 다른 유리수 사이에서 유리수를 찾는 것이 항상 가능하다, 서로 다른 유리수 사이에서 무리수를 찾는 것이 항상 가능하다)보다 3, 4번 문항(서로 다른 무리수 사이에서 무리수를 찾는 것

이 항상 가능하다, 서로 다른 무리수 사이에서 유리수를 찾는 것이 항상 가능하다)에서 잘못된 답변을 한 비율이 훨씬 높았다. 이는 파일럿 연구와 선행연구에서 나타났던 양상과도 동일한 결과다(McMullen et al., 2015). 학생들의 설명 과정에서 오류 유형을 살펴보면 <표 4-14>, <표 4-15>와 같다.

<표 4-14> 다음에 오는 수 관련 오류 유형4

논리적으로 부적절한 추론	**연구자:** 서로 다른 무리수 사이에서 무리수를 찾는 것은 항상 가능할까? **시 연:** 이거 좀 조금 어려울 것 같기도 할 것 같아요. 왜냐하면 그 수가 저희도 뭐가 나올지 모르는 거니까… 이제 π 같은 것도 되게 뒤에 3.14... 뒤에 되게 뭐가 많잖아요. 그런 거를 저희가 다 예상을 할 수가 없으니까… 그 무리수 애 사이에서 거기를 또 찾기가 어렵지… 어려울 것 같아요.
⑩무리수를 가무한 관점으로만 바라보는 경우	**연구자:** 그럼 서로 다른 무리수 사이에서 유리수를 항상 찾을 수 있을까? **시 연:** 이거 좀 어려울 것 같기도 해요, 이것도. 왜냐하면 이제 계속 예상하지 못한 수들이 나오니까. 그 사이에서 또 이제 뭔가 순환하는 걸 찾기도 어려울 것 같고… 유리수… 항상 가능하지 않을 것 같아요. 약간 가능한 수들이 있긴 있어도 그 모든 수의 무리수 사이에서 유리수를 찾는 게 항상 가능하지 않을 것 같아요… **연구자:** 4번 이유를 다시 정확하게 설명해줄래? **시 연:** 이것도 이제 되게 수들이 많으니까… 그 사이에서 이제 분수 같은 거를 찾는 것도 어려울 것 같고… 만약에 그걸 저희가 그 무리수 자체는 뒤에 되게 순환하지 않는 게 많은 그런 무한소수가 있잖아요. 그거는 그 사이에서 저희가 수를 찾기에는 저희도 뭐가 나올지 예측이 안 되니까… 그 유리수를 찾는 게 항상 가능하지는 않을 것 같아요. **연구자:** 서로 다른 무리수 사이에서 유리수를 항상 찾을 수 있을까?

인　석: 항상 가능하지는 않을 것 같아요. 왜냐하면 무리수 자체가 순환하지 않는 무한소수인데 유리수는 결국에 순환할 수밖에 없는 무한소수이기 때문에. 순환하지 않는 무한소수가… 예를 들어서 정말로 알아볼 수 없을 정도로 비슷한 간격의 차이로 존재한다면 그 사이에서 유리수를 찾는 거는 불가능할 수도 있을 거라 생각해요.

연구자: 그러니까 비슷한 간격이라는게 이제 소수 끝자리가 비슷하다는 거지?

인　석: 네. 제가 인식하지 못할 정도로 작은 정도.

연구자: 서로 다른 무리수 사이에서 무리수를 항상 찾을 수 있을까?

시　은: 무리수가 있으면 순환하지 않는 소수니까 규칙 없이 계속 순환하지 않는 소수면은 찾기 힘들 수도 있을 것 같아요.

연구자: 서로 다른 무리수 사이에서 유리수를 항상 찾을 수 있을까?

시　은: 그 순환하지 않는 규칙 없이 순환하지 않는 무한소수면은 찾기 힘들 것 같아요.

연구자: 이것도 이제 무리수를 순환하지 않는 무한소수를 생각해 보면 그 안에서 이제 무리수를 찾는 건 힘들 것 같다는 거지? 4번은 왜 힘들 것 같아?

시　은: 네. 예를 들어서 규칙 없이 계속 0, 1, 2, 3, 5, 6, 1, 2, 5, 6, 7, 8 이런 식으로 계속 수 계속 이어지면은… 규칙을 못 찾으니까 그 안에서 유리수를 못 찾을 것 같아요.

연구자: 서로 다른 무리수 사이에서 유리수를 항상 찾을 수 있을까?

재　영:	뭔가 애매한데요.
연구자:	왜 애매하다고 생각한 거야?
재　영:	무리수는 저희가 직접 싹 다 계산할 수가 없으니까… 직접 정확하게 유리수들을 다 찾는 건 불가능할 것 같기도 한데, 반대로 반올림이라든지 그런 식으로 해서 대충 계산을 하면 구할 수도 있을 것 같기도 하고.
연구자:	그럼 안 된다고 생각한 이유는 뭐야?
재　영:	지금 무리수 사이가 너무 우리가 막 숫자를 알 수 없고… 정확하게 계산을 못하니까요.

첫 번째 유형은 <표 4-14>와 같이 무리수를 가무한의 관점으로만 바로보는 경우다. 즉, 무리수를 순환하지 않는 소수로서 대상이 아닌 과정으로 바라보는 경우다. 무리수를 $\sqrt{2}$와 같이 대상으로 바라보지 못하고 '뭐가 나올지 모르니까', '예측이 안되니까', '규칙 없이', '정확하게 계산을 못하니까' 등 순환하지 않는 무한소수 이미지로 먼저 떠올리다 보니 과정으로서의 무리수 인지로 인한 오류가 발생되는 것으로 보인다. 실제로 추가 연구참여자로 선정된 평균 수학 성적이 A로 높던 주민이의 경우, 관련 네 개 문항에서 무리수를 과정으로서의 무한인 순환하지 않는 무한소수로 설명하기보다는 대상으로서의 무리수로 바라보고 문항에 관한 답변 이유를 간단하고 명확하게 설명하였다. 예를 들어 서로 다른 무리수 사이에서 무리수를 항상 찾을 수 있냐는 질문에서도 순환하지 않는 무한소수로 접근하는 것이 아닌 $\sqrt{2}$와 $\sqrt{3}$사이 수는 두 수를 더하여 나누면 그 사이에 있는 수도 무리수가 된다고 대답하였다. 즉, 두 무리수를 하나의 대상으로 바라보고 두 수를 더하여 2로 나누면 된다고 간단하게 설명하였다.

<표 4-15> 다음에 오는 수 관련 오류 유형5

논리적으로 부적절한 추론	**연구자:** 서로 다른 유리수 사이에서 유리수를 항상 찾을 수 있을까? **유 은:** 아니오. 없을 것 같은데. **연구자:** 왜? **유 은:** 유리수가 정수에 비로 나타날 수 있는거니까, 한정적이어서… …(중략)… **연구자:** 서로 다른 무리수 사이에서 유리수를 항상 찾을 수 있을까? **유 은:** 아니요. 이것도 못할 것 같아요. 그냥 무리수 사이에 무조건 유리수가 있다는 보장을 못하니까요. **연구자:** 왜 그렇게 생각했을까? **유 은:** 유리수가 한정적이니까.
⑪유리수 개수를 한정적이고 무리수 개수는 한정적이지 않다고 생각하는 경우	**연구자:** 서로 다른 유리수 사이에서 유리수를 찾는 것은 항상 가능할까? **정 은:** 얘는 근데 없을 것 같은게, 다시 그 유리수 약간 개념을 생각해 보면 아무튼 유리수는 (소수점이) 끝이 있는 건데… 그러면 이제 확대하는 것도 이제 확대를 계속하다 보면 그 확대하는 게 끝나긴 하잖아요. 그러니까 1위랑 2는 좀 범위가 큰데 이게 소수점이 엄청 내려가면 그게 끝은 있을 거라 생각해요.

두 번째 유형은 <표 4-15>와 같이 유리수 개수를 한정적이고 무리수 개수는 한정적이지 않다고 생각하는 경우다. 이 유형은 위의 다른 문항에서도 발견되는 사례인데 유리수를 정수보다는 많은 수가 있다는 것은 학생들이 인지하나, 유리수를 여전히 이산적으로 생각하여 발생한 오류로 보인다. 정수와 유리수의 이산성을 구분하는 가장 큰 성질은 조밀성이다. 결국 유리수가 정수와 달리 이산성을 만족시키지 못한다는 점은

조밀성에 대한 부족한 이해와 연결된다. 이 문항에서도 마찬가지로 평균 수학 성적이 높은 주민이는 '아무리 그 간격을 좁게 잡았다고 생각을 해도 그걸 또 확대해보면 그 수직선만큼 또 확대할 수 있잖아요' 라고 언급하며 계속하여 단어 '확대'를 이용하여 자신의 답변을 정당화한 것을 알 수 있다.

2. 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움

유리수가 수직선 위를 채우고 유리수가 채우지 못하는 부분을 무리수가 채워 실수가 된다는 것은 데데킨트가 실수를 정의할 때 사용한 데데킨트의 절단과 비슷한 맥락이다. 앞서 이론적 배경에서 살펴본 바와 같이 일차함수나 이차함수는 선으로 이루어지며 수를 대응시킨 수직선의 일종이라고 할 수 있다. 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움에 관한 문항에 관한 답변은 12명 중 4명이 올바르게 답변하지 못했다. 오답을 말한 학생들의 오류 유형과 답은 옳으나 정당화하는 과정에서 보이는 오류 유형은 <표 4-16>, <표 4-17>, <표 4-18>과 같이 나타났다.

<표 4-16> 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움 관련 오류 유형1

논리적으로 부적절한 추론	**연구자:** 여기서 수는 뭐인거 같아? **윤 국:** 실수요. **연구자:** 그럼 유리수만 수직선 위에 다 대응시키면 그건 직선이 될까? **윤 국:** 네. 되게 촘촘하게 되지 않을까요. 그래서 결국엔 일자가 이렇게 그릴 수 있을 것 같긴 합니다. 정수는 확실히 되고요, 유리수는 그래도 약간 그 사이사이에 유리수를 다 메꾸면은 이제 모양은 잘 모르겠지만… 그래도 결국엔 저렇게 만들 수 있을 것 같습니다. **연구자:** 유리수여도 직선을 만들 수 있겠지만, 여기서의 윤국이 생각은 수는 실수인 것 같다는 거지? **윤 국:** 네.
⑫유리수를 수직선 위에 모두 대응시키면 직선이 된다고 생각하는 경우	**연구자:** 무리수가 아니라 유리수만 찍으면 유리수의 좌표만 찍으면 이게 직선으로 이렇게 연결이 될 수 있을까? **태 규:** 있겠죠. 왜냐하면 이거를 딱 유리수만 되는 것을 찍은 거잖아요.
	연구자: 왼쪽에서 우리 2학년 때 배웠을 때는 그럼 여기에서 'x값의 범위가 수 전체일 때 직선이 된다' 에서 수는 어떤 수일까? 유리수, 정수, 무리수 뭘까? **혜 진:** 무리수도 해당되는거 같은데 무리수를 안 배웠으니까…. 일단 그냥 유리수.

첫 번째 유형은 <표 4-16>과 같이 유리수를 수직선 위에 모두 대응시키면 직선이 된다고 생각하는 경우다. 일차함수를 처음 배우는 중학생

들이 1학년 때는 아직 수체계를 정수와 유리수까지만 학습한 상태다. 따라서 학생들은 유리수는 모두 수직선 위에 대응시킬 수 있으나 유리수는 수직선 위에 모두 대응시키면 매우 많아서 점들이 모여 직선이 된다고 생각하여 무리수 존재의 필요성을 잘 느끼지 못할 것으로 예상된다.

<표 4-17> 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움 관련 오류 유형2

논리적으로 부적절한 추론	**연구자:** (점들을) 연결해준다고 우리가 자로 연결해줬단 말이지. 여기서 이 수는 그러면 유리수인 것 같아, 무리수인 것 같아, 실수인 것 같아, 정수인 것 같아, 아님 무슨 수인 것 같아? **사 린:** 아무래도 다 유리수 쪽에 속하지 않나요. 무리수는 (직선 위에) 못 나타내니까.
⑬무리수는 수직선 위에 대응할 수 없다고 생각하는 경우	**연구자:** 그럼 그게 무리수를 직선 위에 정확하게 나타내지 못한다는거야 아니면 나타내지 못하는거야? **사 린:** 정확하게 나타내지 못하는 거예요. **연구자:** 정확하게 나타내지 못하기 때문에 여기 (직선 위)에는 나타나지 않고 이때는 이제 유리수 해가지고 유리수로만 이제 연결을 한 거라는 거지? **사 린:** 네.

두 번째 유형은 <표 4-17>과 같이 무리수는 수직선 위에 대응할 수 없다고 생각하는 경우다. 이는 이전 문항에서도 계속하여 나왔던 오류 유형으로 직사각형의 대각선으로 무리수를 수직선에 대응시키는 방법은 알아도 이를 무리수가 수직선 위에 대응한다는 사실로 직관적으로 연결지어 인식하기 어려워하는 학생이 있는 것으로 보인다.

<표 4-18> 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움 관련 오류 유형3

교과서 서술과 실제 학습한 내용 간 혼동	**연구자:** 여기서의 수는 뭘까? **유 진:** 실수요. **연구자:** 그럼 선생님이 궁금한 거는 이 수가 그때 우리 여기서 배울 때는 수가 유리수가 전부였단 말이야. 중학교 2학년 때는 유리수만 배웠으니까… 그러면 여기서의 수가 유리수를 만약에 뜻하면 어떻게 될까? **유 진:** 유리수가 무수히 많아서 직선으로 연결했나 싶기도 해요. 하지만 여기서 수는 이건 실수인 것 같아요.
⑭새로 학습한 수체계와 일차함수 관련 서술 문장 사이의 혼동	

세 번째 유형은 <표 4-18>과 같이 수체계와 일차함수 관련 문장 사이에 혼동의 경우다. 중학교 1학년 때 학습한 일차함수에서 x좌표가 정수인 낱개의 점을 좌표평면 위에 표시하고 수 전체에 대하여 나타내면 이를 직선으로 연결할 수 있다는 과정을 학습하는데 이때는 정수와 유리수만 학습한 단계다. 학생들은 실수까지 수체계를 학습한 뒤 수 전체에서 '수'가 실수임을 인지하지만, 몇몇 학생들은 중학교 1학년 때는 유리수 범위까지만 학습하므로 유리수만으로도 수직선을 이룰 수 있나라는 의문을 보이게 된다. 이는 실수에서 유리수가 채우지 못하는 틈을 인지하여 무리수로 정의하는 중학교 3학년에서 인지적 충돌이 일어나거나 무리수의 필요성을 느끼는데 방해의 요인이 될 수 있다.

제 3 절 개념 및 성질 관련 오류 사이의 연결 관계

수직선과 수체계에 관한 개념과 이를 바탕으로 한 실수의 성질에 대한 이해는 학생들이 직관적으로 인지해야 하는 부분이 많아 학생마다 발견되는 오류도 다양하게 나타난다. 위 연구 결과로부터 중학생들의 수직선과 수체계 개념을 설명할 때의 오류와 실수의 성질을 설명할 때 오류 유형 사이의 연결 관계는 다음과 같다.

수직선 및 수체계에 대한 개념을 설명할 때 오류로는 첫째, 수의 표상에 대한 것으로 수를 이산성에 기초하여 인식한다. 학생들은 수직선 위에 수가 하나씩 나열되어 있다고 여긴다. 둘째, 수체계 정의에 대한 것으로 일상용어와 혼동하여 개념을 인식한다. 유리수에서 '유(有)', 무리수에서 '무(無)' 초점을 맞춰 유리수는 소수점의 끝이 있는 수, 무리수는 소수점이 끝이 없는 수로 잘못 인식한다. 셋째, 수의 표현 방법과 수체계 간의 관계에 대한 것으로 분수와 소수 의미를 수체계와 혼동한다. 분수와 소수는 수를 표현하는 방법의 하나일 뿐이나 이를 수체계와 연결지어 생각한다. 넷째, 무리수의 수직선 위 대응 방법에 대한 것으로 무리수는 수직선 위에 대응 가능하나 구체적인 경우($\sqrt{2}$)도 그 방법을 인지하지 못한다. 교과서에서 직사각형의 대각선으로써 구체적인 무리수들을 수직선 위에 대응 가능함을 제시하고 있고, 학생들은 수직선 위에 무리수를 대응시키는 문제는 해결 가능하나 이를 구체적인 무리수를 이용해서 수직선 위에 대응됨을 보여주는 과정임을 알지 못한다. 다섯째, 무리수의 수직선 위 대응 가능하지 않음에 관한 것으로 무리수는 수직선 위에 대응할 수 없다고 인지한다. 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 나타낼 수 있어 수직선 위에 나타내는 것은 불가능하다고 생각한다.

수직선 및 수체계와 관련하여 실수의 성질을 설명하는 과정에서 발생하는 오류 유형으로는 첫째, 정의나 정리의 부적절한 사용에 의한 것으로 이는 학생들이 수직선과 수체계에 관한 개념을 정확하게 이해하지 못하고 있다는 것을 보여준다. 둘째, 논리적으로 부적절한 추론에 의한 것으로 학생들이 가무한과 실무한 혹은 과정과 대상의 관점 간 부정확한

인식을 지녔음을 보여준다. 셋째, 교과서 서술과 실제 학습한 내용 간 혼동에 의한 것으로 이전에 학습한 내용과 교과서 서술 사이의 모호성이 학생들에게 혼란을 야기한다는 것을 보여준다.

수직선 및 수체계에 관한 오류와 실수의 성질을 설명하는 과정에서 연결되어 나타나는 다양한 오류 유형 사이의 관계를 정리하면 <표 4-19>와 같다. <표 4-19>와 같이 왼쪽의 수직선 및 수체계에 대한 개념을 설명하는 과정에서 오류가 오른쪽에서 실수의 성질을 설명하는 과정에서 오류 유형으로 비슷한 유형으로 나타난다면 선으로 연결하여 표시하였다. 예를 들어 개념을 설명할 때의 수의 표상에 관한 오류가 성질 중 완비성을 설명할 때의 오류 유형 중 정의나 정리의 부적절한 사용에 의한 ② 유리수 개수를 무한히 많은 것이 아닌 셀 수 없이 많다고 생각한 경우와 연결된다고 하자. 그러면 개념을 설명하는 과정에서 오류 중 하나인 수직선과 수의 표상으로부터 실수의 성질을 설명하는 과정에서의 오류 유형 중 하나인 ② 유리수 개수를 무한히 많은 것이 아닌 셀 수 없이 많다고 생각한 경우를 직선으로 연결하였다. 나아가 실수의 성질을 설명하는 과정에서 오류 유형들을 분석틀 중 해당 유형과 점선으로 연결하여 오류 유형이 어떤 분석 유형에 포함되는지 나타내고자 하였다.

<표 4-19> 수직선 및 수체계에 대한 개념과 실수의 성질을 설명하는 과정에서 오류 사이의 관계

개념을 설명하는 과정에서 오류	실수의 성질을 설명하는 과정에서 오류 유형	
수직선과 수의 표상	**조밀성 - 무한히 많은 수**	**정의 또는 정리의 부적절한 사용**
수를 이산성에 기초하여 인식	① 유리수와 정수를 혼동하는 경우	
	② 유리수 개수를 무한히 많은 것이 아닌 셀 수 없이 많다고 생각한 경우	
수체계 정의	③ 유리수를 이산성에 기초하여 인식하는 경우	
	④ 무한소수와 유리수를 혼동하는 경우	
일상용어와 혼동하여 인식	⑤ 무리수는 수직선 위에 대응하지 못한다고 생각하는 경우	
	⑥ 유리수, 무리수를 이산성에 기초하여 생각하는 경우	
수의 표현 방법과 수체계 간의 관계	**조밀성 - 다음에 오는 수**	**논리적으로 부적절한 추론**
분수와 소수 의미를 수체계와 혼동	⑦ 무한소수와 무리수를 혼동하는 경우	
	⑧ $0.\dot{9}$와 1이 다르다고 생각한 경우	
무리수의 수직선 위 대응 방법	⑨ 유리수, 무리수를 이산성에 기초하여 생각한 경우	
	⑩ 무리수를 가무한 관점으로만 바라보는 경우	
무리수는 수직선 위에 대응 가능하나 특정한 예($\sqrt{2}$)도 그 방법을 인지하지 못함	⑪ 유리수 개수를 한정적이고 무리수 개수는 한정적이지 않다고 생각하는 경우	**교과서 서술과 실제 학습한 내용 간 혼동**
무리수의 수직선 위 대응 가능하지 않음	**유리수와 무리수가 수직선 위를 빈틈없이 채움**	
	⑫ 유리수를 수직선 위에 모두 대응시키면 직선이 된다고 생각하는 경우	
무리수는 수직선 위에 대응할 수 없다고 인지	⑬ 무리수는 수직선 위에 대응할 수 없다고 생각한 경우	
	⑭ 새로 학습한 수체계와 일차함수 관련 서술 문장 사이의 혼동	

<표 4-19>에서 알 수 있듯이 첫째, 수직선과 수의 표상에 관한 것으로 수를 이산성에 기초하여 인식하거나 수체계 정의에 관한 것으로 일상 용어와 혼동하는 경우는 실수의 성질(완비성)을 설명하는 과정에서 정의나 정리의 부적절한 사용으로 연결되었다. 구체적으로는 유리수 개수를 무한히 많은 것이 아닌 셀 수 없이 많다고 생각한 경우, 유리수를 이산성에 기초하여 인식하는 경우, 무한소수와 유리수를 혼동하는 경우, 무한소수와 무리수를 혼동하는 경우, 유리수와 무리수를 이산성에 기초하여 생각하는 경우로 연결되어 나타났다. 둘째, 수의 표현 방법과 수체계 관계에 관한 것으로 분수와 소수 의미를 수체계와 혼동하는 경우와 무리수의 수직선 위 대응 방법에 관한 것으로 무리수는 수직선 위에 대응 가능하나 특정한 경우($\sqrt{2}$)도 그 방법을 인지하지 못하는 경우, 무리수의 수직선 위 대응 가능하지 않다는 것으로 무리수는 수직선 위에 대응할 수 없다고 생각한 경우는 실수의 성질(완비성)을 설명하는 과정에서 논리적으로 부적절한 추론으로 연결되었다. 구체적으로는 무리수는 수직선 위에 대응하지 못한다고 생각하는 경우, 무리수를 가무한의 관점으로만 바라보는 경우, 유리수 개수를 한정적이고 무리수 개수는 한정적이지 않다고 생각한 경우로 연결되었다.

그러나 실수의 성질(완비성)을 설명하는 과정에서 오류 유형 중 몇 가지는 학생들이 수직선과 수체계 개념에 대해 설명하는 과정에서 드러나는 오류와는 무관하게 나타나기도 하였다. 구체적으로는 첫째, 정의나 정리의 부적절한 사용으로 인해 유리수와 정수를 혼동하는 경우, $0.\dot{9}$와 1이 다르다고 생각한 경우, 유리수를 수직선 위에 모두 대응시키면 직선이 된다고 생각한 경우고, 둘째, 교과서 서술과 실제 학습한 내용 간 혼동으로 인해 새로 학습한 수체계와 일차함수 관련 서술 문장 사이의 혼동이 있었다.

제 5 장 결론

제 1 절 연구의 요약

본 연구에서는 수직선 및 수체계에 대한 개념을 설명하는 과정에서 오류와 실수의 성질 중 완비성을 설명하는 과정에서 오류 유형을 각각 살펴보고, 그 두 오류 사이의 관계를 탐구하고자 하였다. 이를 살펴보기 위해 연구 질문을 아래와 같이 설정하였다.

첫째, 학생들이 수직선과 수체계에 대한 개념을 설명하는 과정에서 어떤 오류가 나타나는가?

둘째, 학생들이 실수의 성질을 설명하는 과정에서 어떤 오류 유형이 나타나는가?

셋째, 수직선과 수체계에 대한 개념과 실수의 성질을 설명하는 과정에서 오류는 어떻게 연결되는가?

연구를 위해 수직선, 정수, 유리수, 무리수, 실수와 그 성질까지 학습을 막 끝마친 중학교 3학년 학생 12명을 대상으로 수직선 및 수체계 개념과 실수의 성질 중 완비성에 대한 문항을 연구자와 일대일로 Zoom을 통해 인터뷰(1명은 대면)하였다. 인터뷰는 세 부분으로 이루어져 있으며, 1장에서는 수직선과 수체계 개념, 2·3장에서는 수직선과 수체계와 관련된 성질 중 완비성을 중심으로 질문하였다. 구체적으로 2장에서는 유리수의 조밀성 및 실수의 조밀성, 3장에서는 유리수와 무리수가 수직선을 빈틈없이 채움에 관한 문항 인터뷰가 이루어졌다. 학생들의 답변에서 나타나는 오류는 Movshovitz-Hadar 외(1987)의 오류 분석 유형 6가지를 재구성하여 ① 정의 또는 정리의 부적절한 사용, ② 논리적으로 부적절한 추론, ③ 교과서 서술과 실제 학습한 내용 간 혼동으로 나누어 교과서 및 지도서에서 제시하고 의도된 바와 비교하여 분석하였다. 수직선 및 수체

계에 대한 개념을 설명하는 과정에서의 오류와 실수의 성질 중 완비성을 설명하는 과정에서의 오류 유형이 유사하면 두 오류가 연결된다고 보았다.

연구 결과, 첫째로, 수직선 및 수체계에 대한 개념을 설명하는 과정에서 드러난 오류로는 수를 이산성에 기초하여 인식하는 경우, 일상용어와 혼동하여 인식하는 경우, 분수와 소수 의미를 수체계와 혼동하는 경우, 무리수는 수직선 위에 대응 가능하나 구체적인 경우($\sqrt{2}$)도 그 방법을 인지하지 못하는 경우, 무리수는 수직선 위에 대응할 수 없다고 생각한 경우가 있었다.

둘째로, 실수의 성질 중 완비성을 설명하는 과정에서 드러난 오류 유형은 다음과 같다. 조밀성에서 무한히 많은 수와 관련해서는 유리수와 정수를 혼동하는 경우, 유리수 개수를 무한히 많은 것이 아닌 셀 수 없이 많다고 생각한 경우, 유리수를 이산성에 기초하여 인식하는 경우, 무한소수와 유리수를 혼동하는 경우, 무리수는 수직선 위에 대응하지 못한다고 생각한 경우가 있었다. 조밀성에서 다음에 오는 수와 관련해서는 무한소수와 무리수를 혼동하는 경우, $0.\dot{9}$와 1이 다르다고 생각한 경우, 유리수 및 무리수를 이산성에 기초하여 생각한 경우, 무리수를 가무한의 관점으로만 바라보는 경우, 유리수 개수는 한정적이고 무리수 개수는 한정적이지 않다고 생각하는 경우가 있었다. 마지막으로 유리수와 무리수가 수직선 위를 빈틈없이 채움과 관련해서는 유리수를 수직선 위에 모두 대응시키면 직선이 된다고 생각하는 경우, 무리수는 수직선 위에 대응할 수 없다고 생각한 경우, 새로 학습한 수체계와 일차함수 관련 서술 문장 사이의 혼동 등이 있었다.

셋째로, 수직선 및 수체계에 대한 개념을 설명하는 과정에서 드러난 오류와 성질을 설명하는 과정에서 드러난 오류 유형은 많은 부분 연결되어 나타났다. 개념을 설명하는 과정에서 오류 중 수의 표상에 관한 것으로 수를 이산성에 기초하여 인식하거나 수체계 정의에 관한 것으로 일상용어와 혼동하는 경우는 완비성을 설명하는 과정에서 정의나 정리의 부적절한 사용으로 연결되었다. 수의 표현 방법과 수체계 관계에 관한 것

으로 분수와 소수 의미를 수체계와 혼동하는 경우, 무리수의 수직선 위 대응 방법에 관한 것으로 무리수는 수직선 위에 대응 가능하나 특정한 예($\sqrt{2}$)도 그 방법을 인지하지 못하는 경우, 무리수의 수직선 위 대응 가능하지 않다는 것으로 무리수는 수직선 위에 대응할 수 없다고 생각한 경우는 완비성을 설명하는 과정에서 논리적으로 부적절한 추론으로 연결되었다. 그러나 완비성을 설명하는 과정에서 오류 유형 중 몇 가지는 학생들이 수직선 및 수체계에 대한 개념을 설명하는 과정에서 보인 오류와 무관하게 나타나기도 하였다.

제 2 절 시사점 및 후속 연구 제언

수직선 및 수체계에 대한 개념을 학생들이 설명할 때 드러난 오류가 실수의 성질 중 완비성을 설명하는 과정에서도 나타났다는 점에서 교사는 학생들의 범할 수 있는 오류와 그 관계를 미리 인지하고 대비하는 것이 중요하다. 학생을 지도하는 과정에서 학생들이 더 깊고 올바른 이해를 돕기 위한 교과서 서술 측면과 교수학적 방법과 관련하여 다음과 같은 시사점을 도출하였다.

첫째, 수직선 및 수의 표상에 관한 올바른 이해를 돕기 위한 방안으로 수직선 확대와 관련 연결고리 제시가 필요하다. 학생들은 유리수와 무리수를 이산성에 기초하여 이해하는 경우 완비성에 관해 설명할 때 종종 오류를 보였다. 따라서 수직선이 단순히 수가 나열된 선이 아니라 그 안에 무수히 많은 수가 존재하여 그 수를 연결한 것이 직선이 되어 수직선을 이룬다는 것을 인지할 필요가 있다. 올바른 답변을 한 학생의 답변에서 '확대'라는 단어가 언급되곤 하는데 수직선이 확대할 수 있음을 교수 상황에서 언급하는 것이 필요하다. 이는 선행연구에서 조밀성에 관한 이해를 돕기 위한 하나의 방법으로 수직선을 눈금을 확대할 수 있는 고무줄(Vamvakoussi & Vosniadou, 2012)로 실수의 성질을 이해할 것을 제안한 바가 있는데, 교수학적 도구로의 이용을 제고해 볼 만하다. 이외에도 공학적 도구 또한 수직선의 확대를 도와준다는 점에서 고려할 수 있

다(김도연, 권오남, 2018; Coles & Sinclair, 2018). 덧붙여, 수직선 위 제시되는 구간에서 양 끝점의 다양화 또한 필요하다. 인터뷰 문항 2장의 [문항 4]에서의 학생들의 답변을 살펴보면, 1), 2)번 문항(서로 다른 유리수 사이에서 유리수를 찾는 것이 항상 가능하다, 서로 다른 유리수 사이에서 무리수를 찾는 것이 항상 가능하다)보다 3), 4)번 문항(서로 다른 무리수 사이에서 무리수를 찾는 것이 항상 가능하다, 서로 다른 무리수 사이에서 유리수를 찾는 것이 항상 가능하다)에서 잘못된 답변을 한 비율이 훨씬 높았다. 이와 관련된 교과서 내 문항을 분석한 결과 서로 다른 무리수 사이에서 유리수를 찾는 문항에 비해 서로 다른 무리수 사이에서 무리수를 찾는 문항에 관한 문항은 극히 적었다. 학생들이 직관적으로나마 완비성을 올바로 이해하기 위해서는 양끝점의 다양한 제시, 특히 서로 다른 무리수 사이에서 무리수를 찾는 문항도 교과서에서 균형있게 제시되어야 할 필요가 있다.

둘째, 수의 표현 방법과 수체계 간의 관계 이해를 돕기 위한 방안으로 분수와 소수는 수체계가 아님을 교수학습상황에서 언급할 필요가 있다. 분수와 소수는 수를 표현하는 하나의 수단이지 수체계가 아님에도 많은 학생이 답변하는 과정에서 분수와 소수를 하나의 수체계로 인지하고 있었다. 따라서 분수와 소수는 유리수와 무리수를 표현하는 방법의 하나일 뿐임을 교사가 교수 상황에서 언급할 필요가 있다.

셋째, 무리수의 수직선 위 대응 방법이나 무리수의 수직선 위 대응 가능하지 않음에 관한 이해를 돕기 위한 방법으로 수직선 위 무리수의 과정과 대상 관점 전환의 유연화가 필요하다. 대다수 학생들의 답변을 살펴보면, 무리수를 순환하지 않은 무한소수인 가무한의 관점, 즉 과정의 관점에서의 무리수를 먼저 떠올리는 경우가 많았다. 오히려 교과서에서 무리수를 대상으로서 보도록 돕기 위해 제시하고 있는 컴퍼스를 이용해 무리수가 수직선 위에 한 점으로 대응되는 것을 학습했던 것을 학생들이 기억하고 있음에도 대상의 관점에서의 무리수의 의미와 쉽게 연결시키지 못하였다. 이는 학생들이 기존 학교 수학에서 수직선 위 무리수 대응 내용을 단순히 하나의 문제를 해결하기 위한 도구로써 암기하여 다루어왔

음을 시사한다. 그러나 무리수를 과정과 대상의 관점을 필요에 따라 자유롭게 전환하던 학생은 완비성과 관련된 문항에서도 그 성질에 관한 답변의 추론도 쉽게 이끌어냈다. 무리수는 순환하지 않는 무한소수로 학생들이 어려워하는 가무한과 실무한 개념과도 연결된다. 따라서 기존의 컴퍼스를 이용하여 무리수를 대상의 관점으로 보게 하는 방법 외에도 과정과 대상의 관점을 유연하게 전환할 수 있는 교수학적 방법에 관한 연구가 필요하다.

이 외에도 일차함수에서 수 전체로의 확장이 실수 전체로의 확장임에 대한 언급이 이차함수 학습시 필요하다. 수직선의 개념은 좌표평면, 좌표공간의 개념으로까지 연결된다. 따라서 학생들이 좌표평면에서 일차함수, 이차함수를 학습할 때에도 직선과 곡선이 결국 수직선의 일종임을 인지하게 된다. 그러나 현재 중학교 1학년 교과서에서는 정수와 유리수만을 학습했음에도 낱개의 점을 모두 연결하여 직선으로 연결하는 과정에서, 학생들은 유리수만을 모두 나열하여도 유리수가 무수히 많으므로 하나의 직선이 된다고 착각할 위험이 있다. 이는 무리수의 필요성을 학생들이 느끼지 못하게 되는 하나의 장애물이 될 수 있다. 따라서 중학교 3학년에서 이차함수를 학습하는 과정에서 일부의 x좌표가 정수인 점을 찍어 모든 실수에 대해 점을 찍으면 곡선이 됨을 설명하는 과정에서 중학교 2학년에서 학습한 일차함수도 일부의 x좌표가 정수인 점만을 찍어 모든 실수에 대해 점을 찍으면 직선이 됨을 추가적으로 언급할 필요가 있다.

본 연구는 수직선과 수체계에 대한 개념을 설명하는 과정에서는 나타나지 않았으나, 실수의 성질 중 완비성을 설명하는 과정에서 나타났던 오류 유형(유리수와 정수의 혼동하는 경우, $0.\dot{9}=1$이 다르다고 생각하는 경우, 유리수를 수직선 위에 모두 나타내면 직선이 된다고 생각하는 경우, 학습한 수체계와 일차함수 관련 서술 문장 사이의 혼동)에 관한 이유는 분석하지 못했다는 한계점이 있다. 또한, 수준별로 학생들이 지니는 수직선 및 수체계에 대한 오류 유형을 분석하지는 못했다. 따라서 연결되어 나타나지 않는 오류 유형에 대한 추가 연구를 비롯하여 수준별 학생에 대한 오류 분석과 함께 관련 교수학적 방법과 관련된 발전된 연구

를 제안하는 바다.

참 고 문 헌

강옥기, 권언근, 황혜정, 전대열, 노지화, 우희정, 윤상혁, 이형주, 유승연, 윤혜미(2020). **중학교 수학 3**. 동아출판.

강정기(2016). 표기 관점에서 무리수 개념 학습의 어려움과 대안. **한국학교수학회논문집, 19**(1), 63-82.

강향임, 최은아(2017). 무리수 개념에 관한 학생의 오류와 어려움 해석에 필요한 교사지식. **학교수학, 19**(2), 319-343.

고호경, 김응환, 김인수, 이봉주, 한준철, 정낙영, 정민석, 최수영, 김정현, 김화영, 정시훈, 조준모, 최화식, 최화정(2020). **중학교 수학 3.** 교학사.

고호경, 김응환, 김인수, 이봉주, 한준철, 최수영, 김정현, 김화영, 정시훈, 조준모, 최화식, 최화정(2018). **중학교 수학 1.** 교학사.

김도연, 권오남(2018). 초등학생의 디지털 테크놀로지를 이용한 유리수 조밀성 탐구 사례 분석: 포괄적 유물론에서의 접근. **C-초등수학교육, 21**(4), 375-395.

김양권, 홍진곤(2016). 수 개념 학습에서 수직선의 도입과 활용. **한국초등수학교육학회지, 20**(3), 431-456.

김영아, 김성준(2013). 초등학생들의 문제해결전략에 따른 오류 유형 분석. **한국학교수학회논문집, 16**(1), 113-139.

김원경, 조민식, 방금성, 임석훈, 김동화, 강순자, 배수경, 지은정, 김윤희(2020). **중학교 수학 3**. 비상교육.

김정훈(2020). 초등학교 6학년 학생이 식 세우기를 통한 덧셈 문장제 해결에서 보이는 오류 및 인지적 특징에 관한 사례연구. **교사교육연구, 59**(2), 187-204.

김화경, 나귀수, 이애경, 이미라, 권영기(2020). **중학교 수학 3**. 좋은책신사고.

도종훈, 권오병(2019). 제곱근의 뜻과 성질에 대한 이해 및 근호를 포함

한 식의 계산에서 나타나는 수학 학습 부진 학생들의 오류 분석. **한국학교수학회논문집, 22**(1), 1-21.

류희찬, 선우하식, 신보미, 정동승, 장영훈, 설정수, 박슬히(2020). **중학교 수학 3**. 천재교과서.

문혜영, 김응환(2011). 고등학교 1학년 함수단원 문제해결에서의 오류에 대한 분석. **한국학교수학회논문집, 14**(3), 281-297.

박교식, 이종희, 김진환, 남진영, 김남희, 임재훈, 유연주, 권석일, 김선희, 김재원, 박소현, 양수영, 이은영, 장미라, 장미선, 정주연, 주미, 최수연, 황지연(2020). **중학교 수학 3**. 동아출판.

선춘화, 박만구(2012). 초등수학교과서에 나타난 수직선 활용법 분석 - 우리나라와 외국교과서 비교를 중심으로. **한국초등수학교육학회 연구발표대회 논문집,** 32-55.

신보미(2008). 실수로의 수체계 확장을 위한 유리수의 재해석에 대하여. **한국학교수학회논문집, 11**(2), 285-298.

신종호, 연은모, 김종백, 설보연, 강미라(2016). 예비교사들이 지각하는 학습자의 실수의 개념화. **교육심리연구, 30**(4), 735-761.

오국환, 박정숙, 권오남(2017). 무리수 단원에 대한 교과서 분석 연구: 과정과 대상의 관점으로. **A-수학교육, 56**(2), 131.

이종희, 김부미(2006). 일차방정식에서 오류 탐지-교정 학습법의 교수학적 효과 분석, **교과교육학연구, 10**(2), 461-483.

이준열, 최부림, 김동재, 김상미, 원유미, 강해기, 김성철, 강순구(2020). **중학교 수학 3**. 천재교육.

이지현(2015). 유리수와 무리수의 합집합을 넘어서: 실수가 자명하다는 착각으로부터 어떻게 벗어날 수 있는가? **수학교육학연구, 25**(3), 263-279.

장경윤, 강현영, 김동원, 안재만, 이동환, 홍은지, 이미영, 김민정, 송은영, 하승수, 지영명, 구나영(2020). **중학교 수학 3**. 지학사.

주미경, 강은주, 강소영, 이현구, 강석주, 오화평, 권상순(2018). **중학교 수학 1**. 금성출판사.

주미경, 강은주, 강소영, 강석주, 김호경, 오화평, 권상순(2020). **중학교 수학 3**. 금성출판사.

최동원, 허혜자(2021). 인수분해에 대한 오류 분석과 온라인 개별화 수업의 효과. **한국학교수학회논문집, 24**(1), 83-105.

탁병주, 김다빈(2020). 통계적 소양 교육을 위한 그래프 오류 유형 분석 : 자료 분석 단계에서의 통계 윤리 문제. **한국초등수학교육학회지, 24**(1), 1-30.

한경민, 고상숙(2014). 원의 방정식의 서술형 평가에서 오류유형 분석. **수학교육, 53**(4), 509-524.

한성수, 윤영주(2021). 중학교 사회과 교과서 내 통계 그래프의 수학적 오류 분석. **학습자중심교과교육연구, 21**(20), 399-412.

홍진곤, 김양권(2015). 초등학교 수학 교과서의 수직선 활용과 문제점. **수학교육 논문집, 29**(3), 353-372.

황선욱, 강병개, 윤갑진, 이광연, 장홍월, 정종식, 조성율(2019). **중학교 수학 2**. 미래엔.

황선욱, 강병개, 윤갑진, 이광연, 장홍월, 정종식, 조성율(2020). **중학교 수학 3**. 미래엔.

Aksoy, N., & Yazlik, D. (2017). Student Errors in Fractions and Possible Causes of These Errors. *Journal of Education and Training Studies, 5*(11), 219.

Ashlock, R. B. (2006). *Error patterns in computation: Using error patterns to improve instruction*. Upper Saddle River, NJ: Pearson.

Baki, A. (2015). *Mathematics education from concept to practice (6th ed.)*. Ankara: Letter Education Publishing.

Bergé, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*(2), 217-227.

Bloom, B. S. (1976). *Human characteristics and school learning*. New York: McGraw-Hill.

Borasi, R. (1986). *On the Educational Roles of Mathematical Errors: Beyond Diagnosis and Remediation.* Ph. D. Dissertation, State University of New York at Buffalo.

Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: a focus on errors.* Norwood, NJ, Ablex Pub.

Coles, A., & Sinclair, N. (2018). Re-Thinking 'Normal' Development in the Early Learning of Number. *Journal of Numerical Cognition, 4*(1), 136-158.

Eryilmaz, A. (2002). Effects of conceptual assignments and conceptual change discussions on students' misconceptions and achievement regarding force and motion, *Journal of Reseach in Science Teaching, 39*(10), 1001-1015.

Eryılmaz, A. & Surmeli, E. (2002). *The assessment of students' misconceptions about heat and temperature concepts by means of three-tier questions.* Retrieved February 2, 2010, from http://www.fedu.metu.edu.tr/ufbmek-5/netscape/b_kitabi/PDF/Fizik/Bildiri/t110d.pdf.

Gagne, R. M. (1968). Learning hierarchies. *Educational Psychologist, 6*, 1-9.

Giannakoulias, E., Souyoul, A., & Zachariades, T. (2007). Students' thinking about fundamental real numbers properties. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education,* 426 - 425, Cyprus: ERME, Department of Education, University of Cyprus.

Gray, E., & Doritou, M. (2008). The number line: Ambiguity and interpretation. In O. Figueras, J. Cortina, S. Alatorre, T. Rojano & A. Sepulveda (Eds.), *Proceedings of the 32nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,*

3, 97-104.

Herbst, P. (1997). The number-line metaphor in the discourse of a textbook series. *For the Learning of Mathematics, 17*(3), 36-45.

Kidron, I. (2018). Students' Conceptions of Irrational Numbers. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education, 4*(1), 94-118.

McMullen, J., Laakkonen, E., Hannula-Sormunen, M., & Lehtinen, E. (2015). Modeling the developmental trajectories of rational number concept (s). *Learning and Instruction, 37*, 14-20.

McMullen, J., & Van Hoof, J. (2020). The role of rational number density knowledge in mathematical development. *Learning and Instruction, 65,* 101228.

Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O., & Inbar, S. (1987). An Empirical Classification Model for Errors in High School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 18*(1), 3-14.

Putra, Z. H. (2019). Praxeological change and the density of rational numbers: The case of pre-service teachers in Denmark and Indonesia. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(5), em1711.

Robert, G. B., & Donald, R. S. (2019). *Introduction to Real Analysis.* Hoboken, NJ: Wiley.

Richard, C. & Fritz, J. (1974). *Introduction to Calculus and Analysis, Voulume 2.* New York: Interscience Publishers.

Rushton, S. (2018). Teaching and learning mathematics through error analysis. *Fields Mathematics Education Journal, 3*(1), 1-12.

Sarwadi, H. R., & Shahrill, M. (2014). Understanding Students' Mathematical Errors and Misconceptions: The Case of Year 11 Repeating Students. *Mathematics Education Trends and Research*,

1-10.

Sirotic, N., & Zazkis, A. (2007). Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics, 65*(1), 49-76.

Smith III, J., DiSessa, A., & Roschelle, J. (1994). Misconceptions Reconceived: A Constructivist Analysis of Knowledge in Transition. *The Journal of the Learning Sciences, 3*(2), 115-163.

Stake, R. E. (1995). *The Art of Case Study Research*. Thousand Oaks: Sage Publications.

Tulis, M., Steuer, G., & Dresel, M. (2016). Learning from errors: A model of individual processes. *Frontline Learning Research, 4*(4), 12-26.

Vamvakoussi, X., Christou, K. P., Mertens, L., & Van Dooren, W. (2011). What fills the gap between discrete and dense? Greek and Flemish students' understanding of density. *Learning and Instruction, 21*(5), 676-685.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2004). Understanding the structure of the set of rational numbers: *A conceptual change approach. Learning and Instruction, 14*(5), 453-467.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2007). How many numbers are there in an interval? Presuppositions, synthetic models and the effect of the number line. In S. Vosniadou, A. Baltas, & X. Vamvakoussi (Eds.), *Reframing the conceptual change approach in learning and instruction,* 267 - 283. Oxford, UK: Elsevier.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2010). How Many Decimals Are There Between Two Fractions? Aspects of Secondary School Students' Understanding of Rational Numbers and Their Notation. *Cognition and Instruction, 28*(2), 181-209.

Vamvakoussi, X., & Vosniadou, S. (2012). Bridging the gap between

the dense and the discrete: The number line and the “rubber line” bridging analogy. *Mathematical Thinking and Learning, 14*(4), 265 - 284.

Van Hoof, J., Degrande, T., Ceulemans, E., Verschaffel, L., & Van Dooren, W. (2018). Towards a mathematically more correct understanding of rational numbers: A longitudinal study with upper elementary school learners. *Learning and Individual Differences, 61*, 99-108.

Voza, L. (2011). Winning the “hundred years’ war”. *Teaching Children Mathematics, 18*(1), 32-37.

Widjaja, W., Stacey, K. C., & Steinle, V. (2008). Misconceptions about density of decimals : insights from Indonesian pre-service teachers’ work. *Journal of science and mathematics education in Southeast Asia, 31*, 117-131.

Zazkis, R., & Sirotic, N. (2010). Representing and defining irrational numbers: Exposing the missing link. *CBMS Issues in Mathematics Education, 16*, https://doi.org/10.1090/cbmath/016/01.

Abstract

Middle school students' errors and their relationship: The concept of number line, number system, and the properties of real numbers

Park, Hye Young
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

keywords : Real number, Completeness, Number system, Number line, Error
Student Number : 2020-25772

The number line is the most used mathematical expression for dealing with numbers and operations in school mathematics because the characteristics of numbers are well exposed. The number system is learned through number lines, and through this, the properties of various real numbers are acquired. Therefore, an accurate understanding of the number line and number system is important in that it affects the understanding of the nature of real numbers in the future.

Analyzing errors in the understanding and application of certain

concepts serves as a springboard for thinking. Perspectives on errors are classified according to the context of the mathematical content, the degree of error, and the context of learning. In the meantime, research on errors in the context of mathematical content has been focused on problem solving. Relatively few studies on models, concepts, and theorems have been conducted. In addition, the main focus was on whether or not the students understood correctly the concept of number lines and number systems and their properties, and studies that suggested instructional methods were mainly conducted. On the other hand, there have been no studies examining the relationship between errors in concepts and errors in properties. If there is an error in the student's cognitive structure, it is included when learning a new concept and creates a new error. Therefore, it is important for the teacher to recognize in advance how the errors that students see when explaining concepts are connected to errors when explaining the properties. Therefore, this study examined the types of errors in the process of explaining the completeness among the properties of errors and real numbers in the process of explaining the concepts of number lines and number systems. Furthermore, it has a different meaning from previous studies in that the relationship between the two errors was also analyzed with attention.

Therefore, for this study, students' responses were compared with textbooks and tutorials, and six types of error analysis of Movshovitz-Hadar, Zaslavsky, & Inbar (1987) were reconstructed and used to analyze. In relation to the number line, completeness was examined from two aspects: 'density' and 'rational and irrational numbers fit together'. In particular, the density was examined by dividing it into two parts: 'there are infinitely many numbers' and 'there is no successor'. For the research, 12 third-year middle school

students were recruited and asked to solve the related tasks, and a one-on-one semi-structured interview was conducted with the researcher for about 40 minutes.

As a result, the errors seen in the process of explaining the concepts of number lines and number systems were found to be related to error types in the process of explaining the completeness to a large extent. Errors related to the representation of numbers and number lines lead to inappropriate use of definitions or theorems in the process of explaining completeness in the case of recognizing numbers based on discreteness or confusing them with everyday terms as they relate to the definition of a number system. In the case of confusing the meaning of fractions and decimals with the number system as it relates to the method of expressing numbers and the relationship of the number system, it was logically inappropriate in the process of explaining the completeness. It is about a method of coping on the number line of irrational numbers, and if an irrational number can be dealt with on a number line, but even a specific example ($\sqrt{2}$) does not recognize the method, it is logically inappropriate in the process of explaining the completeness. When it was thought that an irrational number could not correspond to a number line because it was not possible to correspond to an irrational number on the number line, it was logically inappropriate in the process of explaining the completeness. However, in the process of explaining completeness, some of the types of errors appeared regardless of the errors related to the concepts of number lines and number systems that students had.

Based on the above results, implications regarding the textbook narrative direction and teachers' pedagogical methods were derived. Specifically, first, a link related to number line expansion is needed.

Second, it is necessary to have a perspective that can cross the process and object viewpoint of the irrational number on a number line. Third, it is necessary to diversify both endpoints in the section on the number line. Fourth, it is necessary to mention what the meaning of 'the whole number' in a linear function is.

[부록] - 인터뷰 질문지

※ 이 인터뷰는 여러분의 수직선 및 수체계에 대한 이해를 알고자 하는 인터뷰입니다. 인터뷰의 내용은 연구를 위해서만 사용되며 개인 정보는 외부에 유출되지 않습니다. 인터뷰 내용에 대해서는 다른 학생들에게 알리지 않길 바랍니다. 연구에 참여해주셔서 감사합니다.

1장. 수직선 및 수체계

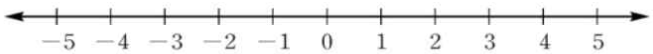
[문항 1] 수직선(number line)은 무엇인가요?

[문항 2] 본인이 생각하는 수직선의 이미지를 그려볼까요? 이미지를 설명해주세요.

[문항 3] 유리수, 무리수는 무엇인가요? 실수는 무엇인가요? 각각 설명해주세요.

[문항 4] 유리수, 무리수, 실수는 수직선 위에 각각 나타낼 수 있을까요?

2장. 수직선 및 수체계에 대한 이해1



[문항 1] 다음 물음에 대한 답을 설명해주세요.

1) 0 과 1 사이에는 유리수가 몇 개 존재하나요? 그렇게 생각한 이유는 무엇인가요?

2) $\frac{2}{5}$ 와 $\frac{4}{5}$ 사이에는 유리수가 몇 개 존재하나요? 그렇게 생각한 이유는 무엇인가요?

3) 0.4 와 0.8 사이에는 유리수가 몇 개 존재하나요? 그렇게 생각한 이유는 무엇인가요?

[문항 2] 다음 물음의 참 거짓을 말하고, 그렇게 생각한 이유를 설명해주세요.

1) 1에 가장 가까운 유리수를 찾을 수 있다.

2) 1에 가장 가까운 무리수를 찾을 수 있다.

[문항 3] 다음 문장의 참 거짓을 말하고, 그렇게 생각한 이유를 설명해주세요.

1) 서로 다른 두 유리수 사이에는 무수히 많은 유리수가 있고, 이들은 모두 수직선 위에 나타낼 수 있다.

2) 서로 다른 두 무리수 사이에는 무수히 많은 무리수가 있고, 이들은 모두 수직선 위에 나타낼 수 있다.

3) 서로 다른 실수 사이에는 무수히 많은 실수가 있고, 이들은 모두 수직선 위에 나타낼 수 있다.

[문항 4] 다음 문장의 참 거짓을 말하고, 그렇게 생각한 이유를 설명해주세요.

1) 서로 다른 두 유리수 사이에서 유리수를 찾는 것은 항상 가능하다.
2) 서로 다른 두 유리수 사이에서 무리수를 찾는 것은 항상 가능하다.
3) 서로 다른 두 무리수 사이에서 유리수를 찾는 것은 항상 가능하다.
4) 서로 다른 두 무리수 사이에서 무리수를 찾는 것은 항상 가능하다.

3장. 수직선 및 수체계에 대한 이해2

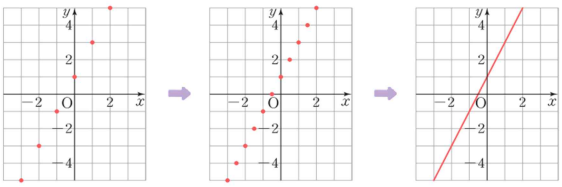
[문항 1] 다음은 중학교 2학년 일차함수 시간에 학습한 내용의 일부입니다.

밑줄 친 부분과 같이 일차함수 그래프를 그릴 때, x좌표가 정수인 점 몇 개를 찍고 그 점들을 자로 연결하여 직선으로 연결합니다.

생각 깨우기에서 x의 값이 정수일 때, 일차함수 $y=2x+1$에 대하여 x와 y 사이의 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2	-1	0	1	2	$\cdots$
y	$\cdots$	-5	-3	-1	1	3	5	$\cdots$

이때 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점을 좌표평면 위에 나타내면 [그림 1]과 같다.
또한, [그림 2]와 같이 x의 값 사이의 간격을 점점 작게 하여 그래프를 그리면 그 그래프는 점점 [그림 3]과 같은 직선에 가까워진다. 따라서 x의 값의 범위가 수 전체일 때, 일차함수 $y=2x+1$의 그래프는 직선이 된다.



[그림 1] [그림 2] [그림 3]

일반적으로 x의 값의 범위가 수 전체일 때, 일차함수 $y=ax+b$의 그래프는 직선으로 나타난다.

생각 깨우기에서 이차함수 $y=x^2$에 대하여 x와 y 사이의 관계를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	-2.5	-2	-1.5	-1	-0.5	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	$\cdots$
y	$\cdots$	9	6.25	4	2.25	1	0.25	0	0.25	1	2.25	4	6.25	9	$\cdots$

위 표에서 순서쌍 (x, y)를 좌표로 하는 점 중

$(-3, 9), (-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4), (3, 9)$

를 좌표평면 위에 나타내면 [그림 1]과 같다.
또한, [그림 2]와 같이 x의 값 사이의 간격을 점점 작게 하여 그래프를 그리면 그 그래프는 점점 [그림 3]과 같은 곡선에 가까워진다.
따라서 x의 값의 범위가 실수 전체일 때, 이차함수 $y=x^2$의 그래프는 매끄러운 곡선이 된다.

중1에서는 정수와 유리수, 중2에서는 유리수와 소수, 중3에서는 무리수와 실수를 배웁니다. 왼쪽은 중1에서 일차함수 그래프를 그릴 때, x의 값이 정수인 점을 몇 개 찍어 x의 값 범위가 수 전체일 때 직선이 된다고 하였던 부분이고, 오른쪽은 중3에서 이차함수를 그릴 때, x의 값이 정수인 점을 몇 개 찍어 x의 값 범위가 실수 전체일 때 매끄러운 곡선이 된다고 하였던 부분입니다. 그렇다면 중2 때 학습한 왼쪽 일차함수 부분에서 '수 전체'에서 '수'와 중3 때 학습하는 오른쪽 이차함수 부분에서 '실수 전체'는 같은 수를 의미할까요?