교육학박사학위논문

학교수학의 공약불가능성 현상 연구

- 무한소 담론과 극한 담론을 중심으로 -

2022년 8월

서울대학교 대학원

수학교육과

백 승 주

학교수학의 공약불가능성 현상 연구

-무한소 담론과 극한 담론을 중심으로-

지도교수 최 영 기

이 논문을 교육학박사 학위논문으로 제출함

2022년 5월

서울대학교 대학원

수학교육과

백 승 주

백승주의 박사 학위논문을 인준함

2022년 6월

위 원 장 ______________________ (인)

부위원장 ______________________ (인)

위 원 ______________________ (인)

위 원 ______________________ (인)

위 원 ______________________ (인)

국문초록

서로 다른 배경지식을 가진 사람들의 의사소통이 효과적으로 이루어지지 않는 경우가 존재한다. 과학분야에서는 다른 이론으로 사고하는 사람들이 동일한 언어를 사용하고 있지만 서로를 이해하지 못하는 현상을 패러다임의 공약불가능성으로 설명한다. 이와 유사한 모습을 수학교실에서도 어렵지 않게 찾아볼 수 있다. 때때로 학교현장에서 교사와 학생은 동일한 주제에 대해 말하고 있지만 서로의 관점을 이해하지 못하며 의사소통이 효과적으로 이루어지지 않는 현상이 발생한다. 만약 수학교실에서 의사소통이 적절히 이루어지지 못한다면 수학학습이 효과적으로 이루어지기 어렵다. 이에 본 연구는 수학교육 현장의 이러한 공약불가능성 현상을 이해하는 목적으로 수행되었다.

본 연구는 먼저 공약불가능성에 대해 이론적 탐색을 하였다. 공약불가능성이라는 용어의 기원이 되는 그리스 수학의 ‘공통 단위’로 잴 수 없는 양이 존재한다는 발견으로부터, 쿤의 과학혁명 이론의 공약불가능성 개념, 그리고 수학교육의 담론적 관점에서 사용되는 공약불가능성의 의미를 선행연구를 통해 검토하였다. 공약불가능성의 수학사적 분석 결과 공약불가능한 양의 발견은 단지 기존에 알지 못했던 양의 존재성 발견 이상의, 그리스 수학 전반에 근본적인 변화를 가져온 중대한 사건이었음을 확인하였다. 다음으로 쿤의 공약불가능성 개념에 대해 이론적 고찰을 하였다. 쿤의 공약불가능성은 초기 방법론적 공약불가능성, 의미론적 공약불가능성, 관찰적 · 존재론적 공약불가능성의 세 가지 측면이 있었지만 후기에는 패러다임 사이의 분류체계의 전환이라는 의미론적 공약불가능성에 집중되었다. 그리고 이러한 쿤의 분류학적 공약불가능성은 존재론적 전환으로서 일반화될 수 있음을 확인하였다. 마지막으로 최근 수학교육의 담론적 접근의 공약불가능성에 대한 이론적 논의들을 검토하였다. 이론적 탐색의 결과 담론 사이에 메타규칙이 변화할 때와 수학적 대상의 존재론적 전환이 일어날 때 공약불가능성이 발생함을 확인하고, 이를 공약불가능성 현상 분석에 사용하고자 하였다.

공약불가능성의 이론적 탐색을 바탕으로 학생들의 무한소 담론을 분석

하였다. 학생들이 극한 담론의 교육과정을 학습하지만, 여전히 무한소 관점을 갖는 현상들이 보고되고 있다. 그동안 수학교육 연구들은 학생들이 어떤 수학적 내용과 관련하여 무한소 관점을 갖는지, 그리고 무한소 사고가 어떤 양상으로 나타나는지를 중심으로 이루어져 왔다. 본 연구에서는 학생들이 극한 담론의 교사와 의사소통하고, 극한 담론의 교과서를 공부하면서도 무한소 담론을 가진 현상이 공약불가능성과 관련이 있다고 보고 이를 분석하고자 하였다.

우선 학생들의 무한소 관점의 기원을 파악하기 위해 수학사에서 무한소와 관련 있는 연속체의 구성과 무한분할 및 극한 개념의 역사를 알아보았다. 이를 통해 수학사에서 무한소 개념이 나타난 양상과 맥락을 확인하였다. 또한 그리스 시대부터 수학자들에게도 꾸준히 나타났던 무한소 개념이 현대 학문수학의 정리들로 인해 제외되었다는 사실로부터, 무한소 관점이 학생들에게 나타나는 것은 자연스러우며 또한 극복하기 어려운 개념임을 확인하였다.

다음으로 공약불가능성의 이론적 탐색 결과를 적용하여 무한소 담론과 극한 담론의 관계를 분석하였다. 수학적 대상의 존재론적 변화와 메타규칙을 중심으로 분석한 결과 무한소 담론과 극한 담론은 공약불가능함을 확인하였다. 또한 수학교육 현장에서 나타나는 무한소 담론과 극한 담론의 공약불가능성 사례를 두 가지 제시하였다.

마지막으로 본 연구는 예비교사와 고등학생들을 대상으로 이들이 무한소 관점을 가졌는지 여부와 그들이 가지고 있는 구체적 담론 양상 및 그들의 담론이 극한 담론과 공약불가능한지를 사례연구를 통해 확인하였다. 해석학을 학습한 경험이 있는 일부 예비교사들은 무한소 관점을 갖고 있었다. 일부 예비교사들의 메타규칙은 해석학의 메타규칙 달랐으며, 무한소와 무한히 큰 수가 존재한다는 관점을 갖고 있었으므로 이들은 극한 담론으로 전환하지 못하고 무한소 담론에 머물러 있음을 관찰할 수 있었다. 고등학생들의 경우 일부 학생들이 무한소와 무한히 큰 수가 존재한다는 인식을 보였고 이와 관련된 구체적 내러티브들을 확인하였다. 특히 본 연구에서는 일부 학생들이 학교수학의 메타규칙에 대해 의문을 품고 있었으며, 학교수학의 메타규칙은 잠정적이고 일시적이라고 생각하

고 있음을 관찰할 수 있었다.

본 연구는 공약불가능성의 이론적 탐색을 통해 메타규칙의 변화와 수학적 대상의 존재론적 전환이 담론의 공약불가능성의 요소임을 확인하였으며, 예비교사와 학생들에게서 보인 무한소 사고를 공약불가능성의 관점에서 분석하였다. 또한 공약불가능성이 수학교육의 다양한 현상과 문제를 분석하는 도구로서 기능할 수 있음을 확인하였다.

주요어 : 공약불가능성, 존재론적 전환, 메타규칙, 무한소, 담론
학　번 : 2015-30420

목 차

표 목 차

그 림 목 차

Ⅰ. 서론

1. 연구 목적 및 필요성

수학교실에서는 교사와 학생, 학생과 학생 사이에 다양한 유형의 의사소통이 이루어진다. 이때, 효과적인 의사소통은 학생들의 수학적 사고력의 향상을 위한 중요한 요소이다. 그동안 교실 의사소통을 강조한 다양한 형태의 연구가 이루어졌다. 교실 내의 의사소통 활동을 촉진시키기 위한 연구, 효과적인 담론 활동을 구성하기 위한 연구(김진호, 2009; 이은주, 이대현, 2011; 조진우 외, 2016) 및 집단 토론활동을 강조한 연구(McCrone, 2005; Weber, Maher, Powell & Lee, 2008) 등이 이루어져 왔다. 그리고 최근에는 사고와 의사소통의 관계를 강조하며 사고가 곧 의사소통이고 따라서 수학적 사고의 발달은 곧 수학적 의사소통 능력의 신장을 의미한다는 주장이 제기되었다(Sfard, 2007, Sfard, 2008).

그러나 학교현장에서 교사와 학생이 동일한 주제에 대해 말하고 있으면서도 서로의 관점을 이해하지 못하며 의사소통이 효과적으로 이루어지지 않는 현상이 발생한다(Sfard, 1994). 이는 비단 교사와 학생 사이에서만 일어나는 일은 아니다. 학생과 학생 사이에서도 일어나며, 학생들이 교과서나 교육과정의 내용을 이해할 때도 양방향의 상호 의사소통은 아니지만 일어나는 상황이다. 수학교육의 담론적 접근(discursive approach)은 이러한 현상을 공약불가능한 담론(incommensurable discourses) 사이의 갈등(commognitive conflict)으로 언급하고 있다(Sfard, 2007; Sfard, 2008). 만약 수학교실에서 공약불가능성 현상이 발생하면 학습이 효과적으로 이루어지기 어렵다. 따라서 공약불가능성 현상을 이해하고, 어떤 경우에 공약불가능성 현상이 발생하는지를 파악하는 것은 수학학습이 적절하게 이루어지기 위해 필요한 일이다. 따라서 본 연구는 이러한 공약불가능성 현상을 이해하고 분석하는 것을 목적으로 수행하였다.

수학교육에서 비효율적인 의사소통이 발생한 배경과 그 이유를 분석한 연구들이 존재한다(서호성, 이경화, 2020; 오택근 외, 2014; Sfard, 2007, Sfard, 2021). 이 연구들은 담론 사이의 메타규칙(meta-rules)이 달라지는 경우에 담론이 공약불가능하며, 학생들이 갈등을 겪게 됨을 특정한 과제 맥락에서 제시하였다. 그리고 Cooper & Lavie(2021)는 공약불가능한 담론의 문제를 극복하기 위한 방안에 대해 연구한 바 있다. 그러나, 여전히 수학교실의 공약불가능성 현상에 대한 연구는 부족한 실정이며, 다양한 주제와 관련하여 담론의 공약불가능성 현상을 구체적으로 기술하고 그 원인을 찾는 것은 필요한 일이다.

공약불가능성의 어원은 그리스 시대 정사각형의 한 변과 대각선 사이의 관계에서 비롯된 것으로서 공약불가능성이란 원래 두 양을 측정할 수 있는 공통단위(common measure)가 없음을 표현하는 용어이다(Kuhn, 1983). 1962년 쿤이 과학혁명이론을 주장하며, 서로 다른 패러다임 사이에 공약불가능성이 성립함을 제시한 이후 공약불가능성은 현재 과학이론, 사회과학 등의 여러 분야에서 사용되고 있다. 특히, 과학철학과 과학교육에서는 패러다임의 변화에 대한 연구와 함께 이론과 이론 사이의 개념변화 현상 및 공약불가능성 연구가 이루어져 왔다. 본 연구는 수학의 양 사이에 성립하는 성질이자, 과학의 패러다임 사이에 성립하는 성질로서 사용된 공약불가능성으로부터 수학교육의 공약불가능성 현상까지 이론적 탐색을 통해 공약불가능성 현상을 세밀하게 분석하고자 한다. 이를 통해 공약불가능성 현상의 원인과 구체적 양상을 파악하고 수학교실에서 발생할 수 있는 공약불가능성 사례를 제시하고자 한다.

한편, 학교수학의 수 체계에는 무한소가 존재하지 않지만 일부 학생들은 무한소 관점을 갖는 현상들이 보고되었다. 일부 학생들은 dy, dx를 무한히 작은 양으로 생각하였고(Orton, 1983; Tall, 1980), 어떤 학생들은 순간속도를 무한히 작은 양을 이용하여 이해하였다(Job & Schneider, 2014). 그리고 정적분과 관련해서도 학생들이 영역의 넓이를 ‘폭이 무한히 작은 직사각형의 넓이들의 합 또는 무한히 많은 선분의 넓이들의 합’과 같이 무한소 관점으로 이해하는 현상이 보고되었다(신보미, 2009; 정연준, 강현영, 2008; Czarnocha et al., 2001; Jones, 2013). 또한, Ely(2007)는 학생들의 무한소 관점이 미적분학의 발달시기에 무한소를 이용하였던 Leibniz의 관점과 유사함을 제시하기도 하면서 학생들의 무한소 사고를 오개념보다 표준적인 개념과 대비되는 비표준 개념으로 보

기를 제안하였다. 그리고 Ely(2017, p. 164)는 '비형식적 무한소 접근'이 적분 이해에 도움이 될 수 있음을 제안하기도 하였다. 이처럼 선행연구들은 학생들이 극한, 순간 속도, 정적분과 같은 수학적 개념과 관련하여 무한소 관점을 가졌다는 사실과 그 구체적 양상을 밝히고자 노력하였으며 일부 연구는 개념 이해를 위해 무한소 관점의 사용을 제안하기도 하였다.

본 연구는 학생들의 무한소 사고와 관련하여 '학생들이 무한소가 배제된 학교수학을 학습함에도 지속해서 무한소 관점을 보이는 이유는 무엇인가?'에 집중하였다. 학생들이 학교수학의 극한 관점을 학습하지 못하고 여전히 무한소 관점을 유지하는 현상은 수학교실에서 학생과 교사가 의사소통하고 있지만, 사실은 그 의사소통이 효과적이지 않았음을 보여준다. 본 연구는 이 현상이 학생이 무한소 담론으로부터 극한 담론으로 적절하게 전환하지 못한 사례이며, 이는 담론의 공약불가능성에서 기인한 것으로 가정하였다. 따라서 본 연구는 학생들이 극한 담론의 교육과정을 학습하고, 극한 담론의 교사와 의사소통하면서도 여전히 무한소 담론을 유지하는 현상을 담론의 공약불가능성의 관점에서 논의하고자 한다. 따라서 무한소 담론이 극한 담론과 공약불가능한지, 이것이 담론의 공약불가능성의 사례가 될 수 있는지에 대해 탐구하고자 한다.

요약하면, 본 연구의 목적은 크게 두 가지이다. 첫째, 수학교실의 담론의 공약불가능성 현상을 이해하고자 하는 것이며, 둘째, 공약불가능성 현상의 사례를 제시하는 것이다. 특히 극한 담론의 학교수학을 공부함에도 불구하고 여전히 무한소 담론에 머물러 있는 학생들의 사고가 담론의 공약불가능성 현상의 사례가 될 수 있는지 확인하고자 한다.

2. 연구 문제

1절에서 제시한 연구 목적을 위해 다음의 연구 문제를 설정하였다.

연구 문제 1. 수학과 과학철학 그리고 수학교육의 공약불가능성은 각각 어떤 의미가 있으며 이들이 공유하는 기본적인 특징은 무엇인가? 또한 수학 학습 담론의 공약불가능성의 특징과 원인은 무엇인가?

연구 문제 2-1. 수학사에서 무한소 개념은 어떤 형태로 나타났으며 무한소 개념이 극한 개념으로 어떻게 변화했는가?

2-2. 무한소 담론과 극한 담론은 공약불가능한가? 공약불가능하다면 두 담론은 어떤 점에서 공약불가능한가?

2-3. 학교수학에서 무한소 담론과 극한 담론이 공약 불가능한 구체적인 사례는 무엇인가?

연구 문제 3. 무한소와 극한 관련 과제에 대해 예비교사와 학생들이 보인 담론의 특징은 무엇인가? 이들 과제에 대한 학생 담론과 극한 담론이 공약 불가능한 지점은 무엇인가? 공약불가능성에 대한 논의가 수학 교수학습에 시사하는 것은 무엇인가?

연구 문제 1을 위해 Ⅱ장에서 공약불가능성의 어원인 그리스 시대의 공약불가능한 양의 발견과 그 의의로부터, 쿤의 패러다임이론의 공약불가능성의 의미와 수학교육의 공약불가능성의 의미를 탐색한다. 이를 통해 서로 다른 담론들이 공약불가능하다고 할 때, 그 이론들의 관계는 어떤 특징이 있는지를 확인한다.

연구 문제 2-1을 위해 Ⅲ장에서는 수학사를 분석하여, 무한소 개념이 주로 등장한 역사적 맥락을 확인하고, 극한 관점으로 정립되기까지 어떤 과정을 거쳤는지 확인한다. 이를 통해 학생들의 무한소 담론의 기원과 학생들이 극한 담론으로의 전환을 어려워하는 이유에 대해 추론할 수 있을 것이다. 연구 문제 2-2를 위해 Ⅲ장의 2절에서 무한소 담론과 극한

담론의 관계를 논의하며, 연구 문제 2-3에 답하기 위해 Ⅲ장의 3절에서는 수학학습에서 공약불가능성 현상의 구체적 사례를 제시한다.

연구 문제 3을 위해 Ⅳ장에서 실제 예비교사와 학생들의 담론을 조사하여 그들이 무한소 관점을 갖고 있는지, 예비교사와 학생들의 담론은 극한 담론과 공약불가능한지 여부를 사례연구를 통해 확인하고 시사점을 도출한다.

그리고 Ⅴ장에서는 Ⅱ, Ⅲ, Ⅳ장의 결과에 대해 논의하고 결론을 도출한다.

3. 용어 정의

3.1. 공약불가능성

정사각형의 한 변과 대각선은 공통단위(common measure)의 정수 배로 표현할 수 없다. 수학에서는 정사각형의 한 변과 대각선의 관계와 같이 두 양을 측정할 수 있는 ‘공통 단위’가 없을 때 그 양들은 공약불가능(incommensurable)하다고 한다. 1962년 쿤(Kuhn)과 파이어아벤트(Feyerabend)는 이 단어를 과학의 이론 사이에 성립하는 성질로서 은유적으로 사용하였다(Kuhn, 1983). 즉 쿤의 공약불가능성은 ‘두 이론을 비교할 공통 척도가 없음’을 의미한다(Bird, 2022). 혁명 전후의 과학자들이 같은 단어를 사용하더라도, 각 단어는 서로 다른 패러다임의 영향 아래 있으므로 동일한 의미와 용법으로 사용되지 않고 따라서 이론과 주장들을 비교할 공통 언어와 기준이 존재하지 않는다는 것이다(Hacking, 2012).

이러한 공약불가능성은 기하학적 양과 과학이론 이외에 사회 및 교육 현상을 표현하는 데도 사용되고 있다.[1] 특히 수학교육에서는 Sfard의 담론적 접근을 중심으로 담론들의 공약불가능성을 제시한다. Sfard(2021)는 공약불가능성을 내러티브들의 관계로, ‘X에 대한 두 개의 내러티브를

1) 국내에서 incommensurable은 통약불가능, 동일표준상 비교 불가능 등 다양하게 번역되어 사용되지만 본 연구에서는 ‘공약불가능’을 사용한다.

승인하는 규칙과 입증 루틴이 동일할 때 그들은 공약가능하다’고 하며, 공약가능하지 않을 경우 공약불가능하다고 정의하였다.

본 연구는 학교수학의 담론의 공약불가능성 현상을 논의하기 위해 Sfard(2007, 2008, 2021)의 관점을 받아들이되, Ⅱ장에서 수학사, 쿤, Sfard의 공약불가능성에 대한 이론적 탐색을 통해 공약불가능성의 의미와 용법을 구체적으로 한정하여 제시하고자 한다.

3.2. 담론

본 연구는 담론의 공약불가능성의 의미를 분석하고, 학생들의 담론을 분석한다. 이때, 용어 담론(discourse), 담론적 접근(discursive approach)의 사용은 Sfard(2007, 2008, 2014, 2021)를 따른다. Sfard는 수학교육 연구에서 학습을 의사소통 활동으로 제안하였고(Sfard, 2014), 다양한 언어규칙을 갖는 각각의 의사소통 집단이 있는 것처럼, 다양한 규칙을 따르는 서로 다른 담론이 존재한다고 하였다(Sfard, 2008). 이러한 관점에서 담론이란 ‘잘 정의된 다중 양식(multimodal) 의사소통 활동 유형’(Sfard, 2014, p. 234)이며, ‘허용 가능한 행동 및 행동과 반응이 쌍을 이루는 방식에 의해 구별되는 의사소통 유형’(Sfard, 2008, p. 297)이다. 담론을 식별하는 특징에는 ‘단어, 시각적 매개체, 루틴, 승인된 내러티브’가 있다(Sfard, 2008, p. 297).

3.3. 무한소 담론

무한소란 0보다 크지만, 임의의 양수보다 작은 수로서, 다음과 같은 아르키메데스 정리를 만족시키지 못하는 수이다.

> 임의의 양수 $a>0$와 임의의 실수 b에 대하여, $b<na$를 만족하는 자연수 $n\in\mathbb{N}$이 존재한다. (Wade, 2014, p. 18)

본 연구에서는 무한소 존재를 가정하며, 무한소의 존재를 내포한 수학적 진술들을 포함한 의사소통 유형을 무한소 담론이라 한다. 그런데 이러한 무한소 담론은 유일하지 않다. 예를 들어, Bueno(2007)는 라이프니

츠(Leibniz)와 로빈슨(Robinson)의 이론 모두 무한소 양의 존재를 가정하지였지만 이들 이론은 서로 다르다고 하였다. 즉, 무한소 담론의 형태는 다양할 수 있는데, 본 연구는 이들을 구별하고 분류하는 것을 목표로 하지 않으므로 무한소 담론을 세분화해서 제시하지 않는다. 본 연구의 Ⅲ장에서는 라이프니츠의 담론을, Ⅳ장에서는 무한소가 존재한다고 생각한 예비교사와 학생들의 담론을 무한소 담론이라 표현한다.

3.4. 극한 담론

본 연구는 수체계에서 무한대와 무한소를 배제한 의사소통 형태를 극한 담론이라 부른다. 예를 들어 수학의 해석학 관점에서 의사소통하는 경우는 극한 담론이다. 해석학의 실수체계에는 아르키메데스 정리에 의해 무한소가 존재하지 않으며 극한 정의는 다음과 같다.

> $a \in \mathbb{R}$ 이고 I 는 a를 포함한 열린구간이라 하자. 또 f는 a를 제외한 I 위의 모든 점에서 정의된 실함수라고 하자. 모든 $\epsilon > 0$에 대해 $\delta > 0$이 존재해서 (일반적으로 δ는 ϵ, f, I, a에 의존한다)
>
> $$0 < |x-a| < \delta \text{ 일 때 } |f(x) - L| < \epsilon \text{이면,}$$
>
> x가 a로 갈 때, $f(x)$는 L로 수렴한다고 한다.
> 이 경우 $L = \lim_{x \to a} f(x)$ 또는 $x \to a$일 때, $f(x) \to L$라고 쓰고, L을 x가 a로 갈 때 $f(x)$의 극한이라고 부른다. (Wade, 2014, p. 68)

해석학의 관점을 따르는 학교수학 역시 수체계에서 무한소와 무한대를 배제하여 전개하였으므로 극한 담론의 일종이다. 학교수학에서 극한의 정의는 다음과 같다.

> 함수 $f(x)$에서 x의 값이 a가 아니면서 a에 한없이 가까워질 때, $f(x)$의 값이 일정한 값 L에 한없이 가까워지면 함수 $f(x)$는 L에 수렴한다고 한다. 이때 L을 $x = a$에서의 함수 $f(x)$의 극한값 또는 극한이라고 하며, 이것을 기호로
>
> $$\lim_{x \to a} f(x) = L \text{ 또는 } x \to a \text{일 때, } f(x) \to L$$
>
> 과 같이 나타낸다. (이준열 외, 2018, p. 12)

해석학과 학교수학의 수체계에는 무한소가 존재하지 않고 극한의 계산에서도 무한소는 배제된다. 따라서 본 연구에서는 해석학의 담론과 무한과정 극한, 미적분과 관련된 학교수학의 담론을 극한 담론이라 부른다. 해석학과 학교수학은 모두 무한소가 배제되어 전개되며 극한, 미분, 적분의 동일한 주제들을 다루기도 하지만 구체적인 진술 양상은 다르다. 따라서 극한 담론을 세부적으로 나눌 수 있지만, 본 연구에서는 이들을 분류하는 것을 목표로 하지 않으므로 극한 담론들을 구분하지 않는다.

극한 담론과 무한소 담론을 구분하는 대표적인 예시로서 0.999⋯의 해석을 제시할 수 있다. 극한 담론에서 순환소수 0.999⋯의 기호 ‘⋯’는 ‘극한’을 의미하고, 0.999⋯=1이다. 그러나 무한소의 존재를 받아들이는 무한소 담론에서는 ‘⋯’을 다양하게 해석할 수 있다(Stewart, 2009, p. 176). 만약 기호 ‘⋯’을 무한소의 역수인 고정된 무한히 큰 수로 보면 0.999⋯는 1보다 작다는 해석이 가능하다(Katz & Katz, 2010).

Ⅱ. 공약불가능성의 이론적 탐색

'고대 그리스의 피타고라스 학파에 의한 공약불가능한 선분의 발견과 그것을 고려한 에우독소스(Eudoxus)의 비례이론은 현대적인 실수 개념의 발생적 기원' (우정호, 2017, p. 302)으로 그리스의 중요한 업적이다. 일부 학자들은 그리스 시대 공약불가능한 양의 발견을 기초의 위기나 논리적 스캔들(logical scandal)로 설명하는 반면(Knorr, 1975, p. 307), Dauben(1984)은 위기보다는 수학에 극적인 발달을 가져온 혁명적 사건으로 보았다. 이와 같은 상반된 견해에도 불구하고 학자들은 공약불가능한 양의 발견이 수학사에서 중요한 전환점이 되었다는 것에는 의견을 같이 한다.

이러한 공약불가능성은 쿤이 「과학혁명의 구조」에서 패러다임 사이의 성질로 사용한 이후 과학사를 설명하는 주요 개념이 되었다. 그리고 현재 이 용어는 과학철학 외에도 인식론, 심리학과 같은 다양한 분야에서 사용되고 있다. 최근 수학교육의 담론적 접근에서 공약불가능한 담론 사이의 갈등과 해소에 대한 논의가 활발해지면서 공약불가능성은 수학교육 현상을 설명하는 중요한 용어가 되었다.

본 장에서는 이러한 공약불가능성 용어의 의미를 선행연구들의 검토를 통해 확인한다. 따라서 기하학의 용어 공약불가능성의 어떤 핵심적인 특징이 수학 외의 분야에서 사용되는데 영향을 끼쳤는지를 알아보며 수학의 공약불가능성의 의의를 확인한다. 또한 과학분야의 공약불가능성의 의미, 사용 맥락, 원인 등을 확인하여, 기하학적 양, 과학의 패러다임, 수학교육의 담론 등 서로 다른 대상 사이에 성립하는 '공약불가능성'이 여러 분야를 아울러 사용될 때 갖는 중심적인 특징은 무엇인지 탐색하고자 한다. 이를 통해 공약불가능성의 핵심 사항을 파악하고, 공약불가능성을 포괄적인 범위에서 바라보며, 과학철학 및 과학교육의 패러다임 사이의 의사소통과 이해의 문제와 같은 공약불가능성의 연구결과를 수학교육 현상 분석에의 적용 가능성을 탐색하고자 한다.

1. 공약불가능성의 수학사적 의의

본 절은 공약불가능성의 수학사적 의의에 대한 선행연구들을 검토한다. 공약불가능성은 양 사이의 관계를 나타내는 수학용어였지만, 쿤이 과학철학에서 이론들 간에 성립하는 성질로서 은유적으로 사용하였고, 최근 다시 수학교육에 도입되어 교육 현상을 설명하는 용어가 되었다. 본 절은 수학 외의 타 학문분야들이 수학의 공약불가능성의 어떤 측면에 집중하여 패러다임 또는 담론 간 공약불가능성을 도입하였는지의 질문으로 시작되었다. 수학사의 공약불가능성을 살펴봄으로서, 수학사적 의의뿐만 아니라 수학과 과학철학, 그리고 수학교육의 공약불가능성이 서로 동일한 용어를 사용하는 만큼 어떤 유사점이 있으며, 그들을 관통하는 특징은 무엇인지 확인할 수 있을 것으로 판단된다.

1.1. 그리스 시대 공약불가능한 양의 발견

본 절은 그리스 시대 공약불가능한 양의 발견 방식에 대해 Knorr(1975)와 von Fritz(1945)의 논의를 중심으로 전개한다.

공약불가능성(incommensurability)은 ‘두 양을 측정할 수 있는 공통단위가 없음’을 나타내는 단어로, 유클리드 원론 10권의 정의 1은 다음과 같이 제시되어 있다.

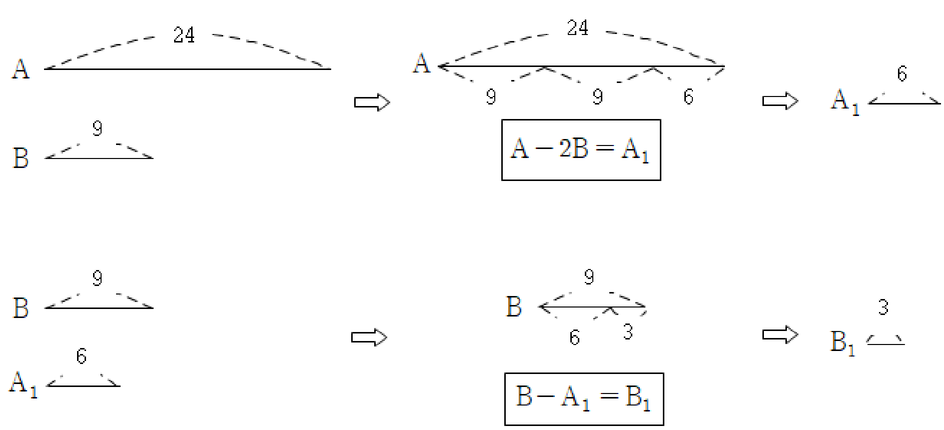
> 원론 10권의 정의 1
> 같은 단위(same measure)로 측정할 수 있는 양들은 공약가능하다고 하고(commensurable), 공약불가능한(incommensurable) 양들은 공통단위(common measure)를 갖지 않는다. (Heath, 1956c, p. 10)

공약불가능한 양은 대략 기원전 5세기경 피타고라스 학파에 의해 발견되었다고 추정되는데(Knorr, 1975, p. 298; von Fritz, 1945, p. 260), 발견 방식에 대한 견해는 학자마다 차이가 있다. von Fritz(1945)는 피타고라스 학파가 황금비를 중요하게 생각했음을 고려하여 정오각형의 한 변과 대각선 사이의 황금비를 구하는 과정에서 당시 anthyphairesis 방법으로

불리던 유클리드 알고리즘에 의해 공약불가능한 양이 발견되었다고 보고 있다.

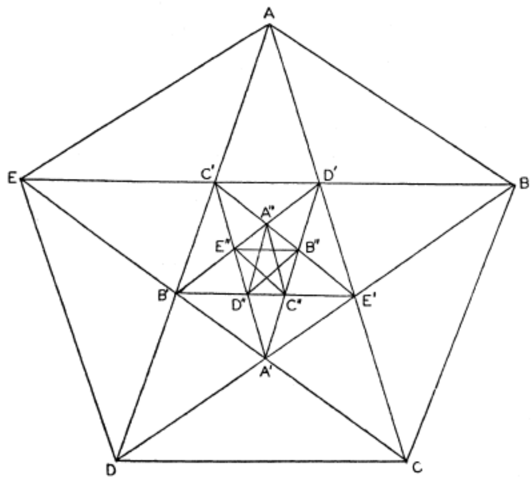
우선 두 수의 최대공약수 혹은 두 양의 공통단위를 찾는 방법인 유클리드 알고리즘을 살펴보자. 공약가능한 두 선분의 길이 A와 B에 유클리드 알고리즘을 적용하자. A가 B보다 더 크다고 가정하고($A>B$) A에서 B를 n_0번 뺀 길이를 A_1, $A_1<B$라 하자. 즉, $A-n_0B=A_1$이고 $A_1<B$이다. 두 선분의 길이 B와 A_1에 같은 과정을 반복하자. 즉, B에서 A_1을 n_1번 빼서 $B-n_1A_1=B_1$이고 $B_1<A_1$이 되게 만들자. 이 과정을 반복했을 때, 특정 단계에서 더 큰 길이(이 길이를 A_k라고 하자)가 더 작은 길이(B_k라 하자)의 정수배가 되면, B_k는 A_k를 측정하는 단위가 된다. B_k는 앞 단계의 길이를 측정할 수 있는 단위가 되고, 또 원래의 길이인 A와 B를 측정할 수 있는 단위가 된다. 따라서 B_k는 두 길이 A와 B의 공통단위가 된다(Fowler, 1979, p. 817).

이러한 유클리드 알고리즘을 이용하여 공약가능한 두 선분의 공통단위를 찾아보자. [그림 Ⅱ-1]과 같이 두 선분의 길이 A와 B를 각각 $A=24$, $B=9$라 하자. B에 적당한 정수를 곱하여 A에서 빼서 $A-n_0B=A_1$이고, $A_1<B$가 되게 하자. $A-2B=6$이고, $A_1=6$라 하면 $A_1<B$이다. 같은 과정을 한 번 더 시행하여 $B-A_1=3$이고, $B_1=3$라 하면, $B_1<A_1$이다.



[그림 Ⅱ-1] 유클리드 알고리즘

이때, $A_1 = 2 \times B_1$이다. $B - A_1 = B_1$이므로 $B = A_1 + B_1 = 3B_1$이므로 B_1은 B의 단위이다. $A - 2B = A_1$이므로 $A = 2B + A_1 = 6B_1 + 2B_1 = 8B_1$이므로 B_1은 A의 단위이다. 즉 B_1은 A와 B의 공통단위이므로 두 양 A와 B는 공약가능하다. 이렇게 공약가능한 두 양은 서로 빼는 방법을 유한 번 시행하여 공통단위를 찾을 수 있다.

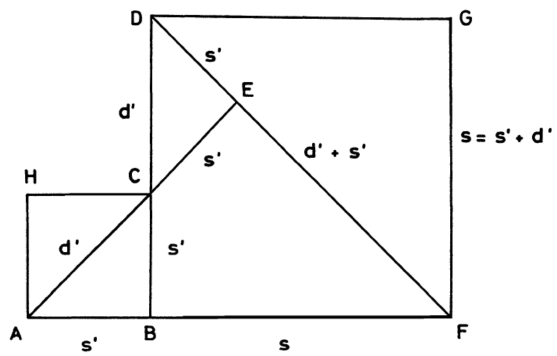


[그림 Ⅱ-2] 정오각형에서 유클리드 알고리즘(von Fritz, 1945, p. 257)

von Fritz(1945)는 그리스 시대 정오각형의 한 변과 대각선의 공통단위가 없다는 사실이 유클리드 알고리즘에 의해 발견되었음을 제안한다. von Fritz(1945, pp. 257-258)가 제안한 방식을 [그림 Ⅱ-2]의 정오각형 ABCDE를 통해 알아보자. 변 AE와 대각선 AD의 공통단위를 찾기 위해 유클리드 알고리즘을 적용하면, $\overline{AE} = \overline{AB'}$이므로 $\overline{AD} - \overline{AE} = \overline{AD} - \overline{AB'} = \overline{DB'} = \overline{AC'}$이다. $\overline{AD}$와 $\overline{AE}$의 공통단위는 $\overline{AE}$와 $\overline{AC'}$의 공통단위와 같다. 그리고 $\overline{AE} = \overline{AB'}$에서 $\overline{AE} - \overline{AC'} = \overline{AB'} - \overline{AC'} = \overline{B'C'}$이다. 따라서 $\overline{AE}$와 $\overline{AC'}$의 공통단위는 $\overline{AC'}$와 $\overline{B'C'}$의 공통단위와 같다. 그런데, $\overline{AC'} = \overline{C'E'}$이므로, $\overline{AC'}$과 $\overline{B'C'}$의 공통단위는 $\overline{C'E'}$과 $\overline{B'C'}$의 공통단위와 같다. 따라서, $\overline{AD}$와 $\overline{AE}$의 공통단위는 $\overline{AE}$와 $\overline{AC'}$의 공통단위와 같고, 이는 $\overline{AC'}$과 $\overline{B'C'}$의 공통

단위가 되며, 다시 이것은 $\overline{C'E'}$과 $\overline{B'C'}$의 공통단위와 같다. 즉, 큰 정오각형 ABCDE의 한 변과 대각선의 공통단위는 작은 정오각형 A′B′C′D′E′의 한 변과 대각선의 공통단위와 같다. 그런데 이렇게 공통단위를 찾는 과정은 닮은 정오각형에 무한히 반복하여 적용되므로 결국 공통단위를 찾을 수 없다. 따라서 정오각형 ABCDE의 한 변과 대각선의 공통단위는 없다.

Heller는 정사각형의 한 변과 대각선에 유클리드 알고리즘을 적용하여 공약불가능한 양이 발견되었음을 주장하였다.[2] Knorr는 Heller의 주장을 재구성한 유클리드 알고리즘의 방법을 다음과 같이 제안하였다(Knorr, 1975, pp. 31-32)



[그림 Ⅱ-3] 정사각형에서 유클리드 알고리즘(Knorr, 1975, p. 32)

[그림 Ⅱ-3]에서 정사각형 ABCH의 한 변과 대각선의 길이를 각각 s'과 d'이라고 하자. 그리고 변 $\overline{BC}$와 맞닿아 있으면서 한 변의 길이가 $s'+d'$인 정사각형 BFGD를 그리자. 정사각형 BFGD의 한 변을 $s=s'+d'$라 하고 대각선의 길이는 d라 하자. 이제 ABCH의 대각선 AC를 연장한 선분이 선분 FD와 만나는 점을 E라 하면, 두 삼각형 ABC와 CED는 합동인

2) Knorr(1975)에 의하면 Heller는 한 논문에서는 von Fritz(1945)와 같이 정오각형을 통해 공약불가능한 양이 발견되었음을 주장하였지만 다른 논문에서는 정사각형의 한 변과 대각선에 유클리드 알고리즘을 적용함으로써 공약불가능한 양의 존재를 발견했음을 주장하였다.

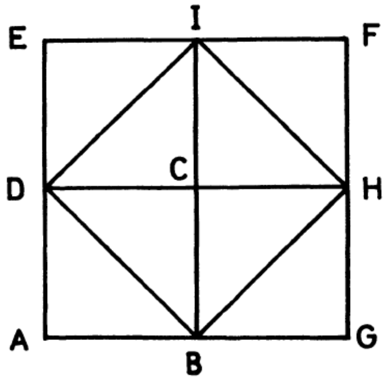
직각이등변삼각형이므로 $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CE}=\overline{DE}=s'$이다. 또 두 삼각형 AEF와 DBF는 합동인 직각삼각형이므로, $\overline{BF}=\overline{EF}$가 되어 $\overline{EF}=d'+s'$이 된다. 정사각형 BFGD의 대각선의 길이는 $d=2s'+d'$가 된다. 지금까지 한 변과 대각선의 길이가 각각 s'과 d'인 작은 정사각형 ABCH으로부터 한 변과 대각선의 길이가 각각 $s=s'+d'$, $d=2s'+d'$인 정사각형 BFGD을 구성하는 과정을 보였지만, 이 과정을 반대로 적용하여 큰 정사각형 BFGD로부터 작은 정사각형 ABCH를 그릴 수 있다.

Knorr(1975, p. 32)는 위와 같은 방식으로 구성한 정사각형 BFGD의 한 변과 대각선의 공통단위가 없음을 보이기 위해서, 유클리드 알고리즘을 적용하였다. 만약 BFGD의 한 변 s와 d사이에 공통단위가 존재한다면, $d-s=(2s'+d')-(s'+d')=s'$이므로 d와 s의 공통단위는 s와 s'의 공통단위와 같게 된다. $s-s'=(d'+s')-s'=d'$이므로 s와 s'의 공통단위는 s'과 d'의 공통단위와 같다. 즉, d와 s의 공통단위는 s'과 d'의 공통단위와 같다. 정사각형 BFGD로부터 정사각형 ABCH를 그리는 과정을 정사각형 ABCH로부터 더 작은 새로운 정사각형을 그리는 방법으로 무한히 반복할 수 있다. 그리고 이렇게 그린 정사각형들의 한 변과 대각선의 공통단위는 BFGD의 d와 s의 공통단위와 같게 된다. 따라서 s와 d의 공통단위를 찾는 과정은 무한히 계속될 것이다. 즉 정사각형의 한 변과 대각선의 공통단위를 찾는 과정은 무한히 계속되므로 그 공통단위를 찾을 수는 없다.

이처럼 유클리드 알고리즘을 통해 공약불가능한 양의 발견이 이루어졌다는 주장이 있다. 그러나 Knorr(1975)는 공약불가능한 양이 이러한 방법에 의해 이루어졌다는 의견에 반대한다. Knorr(1975)는 이 두 방법 모두 높은 수준의 기하학적 기술을 이용하는데 그보다는 더 직관적 방법에 의해 공약불가능한 양이 발견되었을 것이라고 주장하였다. 특히 Knorr(1975)는 황금비와 유클리드 알고리즘을 이용한 von Fritz(1945)의 방법은 고대 희랍 문헌에 이러한 방식으로 공약불가능성을 언급한 사례가 없으므로 이 방법으로 공약불가능성이 발견되었다는 것은 적절하지 않다고 주장하였다.[3]

Knorr(1975, p. 22)는 플라톤과 아리스토텔레스가 정사각형에서 공약불

가능성을 언급한 사례를 근거로 공약불가능성의 발견은 정사각형의 한 변과 대각선의 논의에 의해서라고 제안하였다. 그리고 Knorr(1975)는 플라톤의 「메논」과 아리스토텔레스의 「De lineis insecabilibus」의 논의를 바탕으로 추론하여 정사각형의 한 변과 대각선에 대한 짝수와 홀수의 논의를 이용하여 공약불가능성이 발견되었음을 제안하였다.[4)]



[그림 Ⅱ-4] 짝수와 홀수를 이용한 공약불가능성 논의(Knorr, 1975, p. 26)

Knorr(1975)는 플라톤의 「메논」을 근거로 [그림 Ⅱ-4]을 통해 정사각형 DBHI의 한 변의 길이 $\overline{DB}$와 대각선의 길이 $\overline{DH}$가 공약불가능함을 보이는 방식에 대해 제안하였다. Knorr(1975, pp. 27-28)의 논의를 자세히 살펴보자. 먼저 결론을 부정하여 $\overline{DB}$와 $\overline{DH}$가 공약가능하다고 가정하면 $\overline{DB}$와 $\overline{DH}$는 어떤 공통단위의 정수배로 표현될 수 있다. 이제 $\overline{DB}$와

3) 그러나 Knorr는 당시 유클리드 알고리즘(anthyphairesis 방법)이 알려져 있고 사용되었음을 부정하지는 않는다. 그는 공약불가능한 양의 발견이 이루어졌을 시기에 유클리드 알고리즘은 공약불가능한 양의 발견과 정당화가 아닌 비의 근삿값을 구하는 방법으로 사용되었음을 주장한다(Knorr, 1975, p. 22).

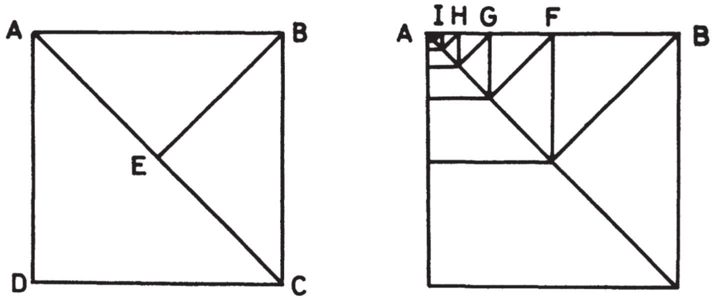
4) 플라톤의 「메논」의 내용 중에 소크라테스가 노예에게 '정사각형의 넓이의 두 배의 넓이를 갖는 정사각형을 만들도록' 하는 부분이 있다. 노예는 넓이가 두 배인 정사각형의 한 변을 찾기 위해 시도하지만 실패하는데 이때 소크라테스는 노예에게 정사각형의 한 변과 대각선이 공약불가능함을 제시한다(Knorr, 1975, p. 26).

$\overline{DH}$를 공통단위를 이용하여 정수로 표현하자. [그림 Ⅱ-4] 에서 보듯이 정사각형 AGFE의 넓이는 정사각형 DBHI의 두 배이고 따라서 정사각형 AGFE의 넓이는 짝수가 되며, 그 한 변의 길이 $\overline{DH}$ 역시 짝수이다. 따라서 정사각형 AGFE의 넓이는 4의 배수가 되며, 동시에 ABCD의 넓이의 4배이므로 정사각형 ABCD의 넓이도 정수가 된다. 그런데 정사각형 DBHI의 넓이는 정사각형 ABCD의 넓이의 두 배이므로 정사각형 DBHI의 넓이도 짝수가 되며 그 한 변의 길이 $\overline{DB}$ 역시 짝수가 된다. 즉, DBHI의 한 변의 길이 $\overline{DB}$와 대각선의 길이 $\overline{DH}$는 모두 짝수가 된다. 그런데 정사각형 AGFE와 정사각형 DBHI의 관계는 정사각형 DBHI와 정사각형 ABCD의 관계와 동일하기 때문에[5] 마찬가지 추론을 적용하면 정사각형 ABCD의 넓이는 정사각형 DBHI의 넓이의 반이면서 동시에 짝수가 된다. 또한 ABCD의 대각선의 길이 $\overline{DB}$와 한 변의 길이 $\overline{AB}$ 모두 짝수가 된다. 그리고 이러한 과정은 무한히 계속될 수 있다. 즉, 한 변의 길이가 짝수인 작은 정사각형을 무한히 계속 만들 수 있다. 그런데 처음 정사각형 AGFE의 넓이는 유한하며, 따라서 이 과정이 무한히 계속될 수는 없다. 따라서 처음에 $\overline{DB}$와 $\overline{DH}$가 공약가능하고 두 길이의 비를 정수비로 나타낼 수 있다고 한 가정이 잘못이다. 즉, 정사각형 DBHI의 한 변과 대각선 $\overline{DB}$와 $\overline{DH}$은 공약불가능하다.

Knorr(1975, pp. 27-28)는 이 외에도, 아리스토텔레스의 저서 「De lineis insecabilibus」에 제시된 도형을 근거로 공약불가능성의 발견에 대한 논의 방식을 추론하여 다음과 같이 제시하였다. [그림 Ⅱ-5]와 같이 $\overline{AB}$를 한변으로 하는 정사각형 ABCD를 그리면, $\overline{AC}$는 정사각형 ABCD의 대각선이다. 만약 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$가 공약가능하다고 가정하면 두 선분의 길이비는 정수비로 표현될 수 있다. 이제 점 B에서 대각선 $\overline{AC}$에 내린 수선의 발을 E라 하자. $\overline{AC}$와 $\overline{BE}$는 수직이며 삼각형 AEB는 직각이등

5) 정사각형 AGFE는 정사각형 DBHI의 대각선을 한 변으로 한 정사각형이며, 정사각형 DBHI는 정사각형 ABCD의 대각선을 한 변으로 하는 정사각형이라는 점에서 □AGFE와 □DBHI의 관계가 □DBHI와 □ABCD의 관계와 같다고 표현하였다.

변삼각형이 된다. 그런데 $\overline{AC}$와 $\overline{AB}$의 공약가능성의 가정은 $\overline{AE}$와 $\overline{AB}$의 공약가능성의 가정으로 연결되며, 따라서 $\overline{AE}$와 $\overline{AB}$는 정수비로 표현될 수 있다. 이제 $\overline{AE}$와 $\overline{AB}$를 공통단위를 이용하여 정수로 표현하자. 또한 피타고라스 정리에 의해 $\overline{AB}^2 = \overline{BE}^2 + \overline{AE}^2$이므로 $\overline{AB}$는 짝수이다. 이제 $\overline{AB}$의 중점을 F라 하고 점 F와 점 E를 연결한 선분 $\overline{EF}$를 생각하자. $\overline{AB}$와 선분 $\overline{EF}$는 수직이며 각 FAE는 45° 이므로 삼각형 FAE는 직각이등변삼각형이다. 따라서 $\overline{AE}^2 = \overline{AF}^2 + \overline{FE}^2$이므로 $\overline{AE}$는 짝수이다. 그런데 이 과정은 [그림 Ⅱ-5]에서 보듯이 무한히 반복될 수 있다. 따라서 $\overline{AB}$와 $\overline{AE}$, $\overline{AF}$, …는 모두 짝수여야 하며 이는 불가능하다. 즉, 처음 두 선분 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$의 공약가능성을 가정한 것이 문제이며, 따라서 $\overline{AB}$와 $\overline{AC}$는 공약불가능하다.



[그림 Ⅱ-5] 아리스토텔레스 논의의 재구성(Knorr, 1975, p. 28)

Knorr(1975)는 플라톤과 아리스토텔레스가 짝수와 홀수를 이용하여 공약불가능성을 논의한 사실과 유클리드 알고리즘에 비해 본인이 제시한 방법이 더 직관적임을 근거로서 이 방식들이 공약불가능성의 발견 형태로서 더 적절함을 주장하였다. 그런데, 학자들의 공약불가능성의 초기 발견 방식에 대한 의견이 다양함에도 그들이 모두 공통으로 전제하고 있는 사실이 있다. 그것은 공약불가능한 양의 존재성을 발견하고 정당화하는데 무한과정에 대한 추론이 필요하다는 점이다. von Fritz(1945)나 Heller의 유클리드 알고리즘(Knorr, 1975)과 Knorr(1975)가 제안한 방식은 상이한 형태이지만 이들 모두 두 양이 공약불가능하다는 결론을 위해 무

한에 대한 추론이 필요하다. 그렇다면 이렇게 공약불가능한 양의 발견과 그 과정에서 필요한 무한에 대한 추론은 그리스 수학에 어떤 영향을 가져왔는지에 대해 다음 절에서 논의한다.

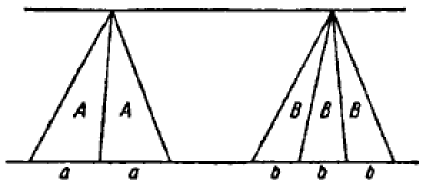
1.2. 새로운 비 이론과 무한과정에 대한 정리 등장

본 절은 공약불가능한 양의 발견이 수학에 끼친 영향에 대해 Knorr(1975)의 논의를 중심으로 살펴본다.

임의의 공약가능한 두 양의 비는 공통단위를 이용하여 판단할 수 있다. 예를 들어, 두 양 a와 b의 비가 $3:2$라고 표현하면 a와 b의 공통단위 c가 존재하여 a는 c를 3번 포함하고, b는 c를 2번 포함한다고 생각할 수 있다. 그러나 a와 b가 공약불가능할 경우 두 양의 공통단위가 존재하지 않으므로 이러한 해석은 불가능하다.

유사하게 공약불가능한 양들의 넓이비 역시 공통단위로 해석할 수 없다. 그리스 시대 높이가 같은 두 삼각형의 넓이는 밑변의 길이에 비례한다는 사실이 알려져 있었지만, 이는 두 삼각형의 밑변이 공약가능할 때 성립하는 성질이었다. 높이가 같은 두 삼각형의 밑변의 길이의 비가 $a:b$이면 두 삼각형 A, B의 넓이 비는 $A:B=a:b$임을 생각하자. 공약가능한 두 양 a와 b가 $a:b=3:2$일 때, [그림 Ⅱ-6]과 같이 밑변의 길이가 a인 삼각형 두 개와 밑변의 길이가 b인 삼각형 3개가 각각 붙어있는 두 삼각형을 생각하면 두 삼각형의 넓이는 같다. 즉 $2A=3B$이다. 따라서 삼각형 A, B의 넓이의 비는 $A:B=3:2$가 되어 밑변의 비와 같아진다(Toeplitz, 1967, p. 14). 그러나 그리스 시대 공약불가능한 양의 발견으로 도형의 비와 관련된 정리들에 의문이 제기되었으며 수학자들은 공약불가능한 양들의 비 $a:b$의 의미를 다시 정의할 필요가 있었다(Toeplitz, 1967, p. 15; von Fritz, 1945).

수학자들은 새로운 비 이론에 대해 고민하였고 그 결과 그리스 시대에 비 이론의 진보가 이루어졌다. Knorr(1975)는 유클리드 원론과 선행연구를 분석한 결과 그리스 비 이론의 발달을 크게 두 단계로 나눌 수 있음을 제안하였다. 첫 번째는 플라톤학파의 테아이테토스(Theaetetus)에 의



[그림 Ⅱ-6] 공약불가능성의 발견과 도형의 비(Toeplitz, 1967, p. 14)

한 것이며, 두 번째는 에우독소스(Eudoxus)에 의한 비 이론의 발달이다. 유클리드 원론에는 양의 비 이론과 산술의 비 이론의 크게 두 가지 비 이론이 존재한다. 5권은 에우독소스의 비 이론으로 양에 대한 비 이론이며, 7권은 자연수의 비 이론이다. 그러나 Knorr(1975)는 원론에 명시적으로 나타나진 않지만, 7권의 자연수의 비 이론 즉, 유클리드 알고리즘을 사용한 비 이론이 그리스 시대에 양에도 적용되었음을 논의하였다. 즉 Knorr(1975)는 에우독소스의 비 이론이 정립되기 전에, 유클리드 알고리즘을 이용한 양의 비 이론이 존재하였음을 주장하였다.[6)]

6) Fowler(1979, p. 821)와 Knorr(1975, p. 258)는 유클리드 알고리즘을 바탕으로 한 비 이론이 사용되었음을 아리스토텔레스의 Topics(158b-29)을 근거로 제시하였다.

> ... it is not easily proved (γράφεσθαι), for instance, that the line parallel to the side and cutting the plane figure (ἐπίπεδον) divides similarly (ὁμοίως) the base (γραμμὴν) and the area (χωρίον). But once the definition is stated, the said becomes immediately clear. For the areas and the bases have the same antanairesis; such is the definition of the same ratio(Knorr, 1975, p. 257 재인용).

Alexander는 아리스토텔레스의 Topics에 등장하는 단어 ‘antanairesis’가 철자에서는 차이가 있지만, 유클리드 알고리즘을 가리키는 ‘anthyphairesis’와 같은 단어였음을 제시하고 있다(Knorr, 1975). 위 아리스토텔레스의 표현에 의하면 직사각형을 세로와 평행한 선분으로 잘랐을 때 가로와 면적이 같은 ‘antanairesis’를 가지면, 그들의 비는 같다고 표현하고 있다. 아리스토텔레스의 이 구문은 유클리드 알고리즘이 아리스토텔레스 시대에 비를 구하는 방법으로서 알려져 있었음을 지지한다(Knorr, 1975).

원론 10권의 법칙 5 ‘공약가능한 양들의 비율은 수와 수의 비율이다’(Heath, 1956c, p. 24)를 증명할 때 유클리드는 양의 비율 문제를 산술의 비율인 ‘7권의 정의 20’을 사용하였다. Knorr(1975)는 이를 근거로 제시하며 그

Knorr(1975)는 그리스 시대에 유클리드 알고리즘의 비 이론이 자연수 외에도 공약가능한 양과 공약불가능한 양을 포함하도록 발달되었지만, 여전히 여러 정리들을 논의할 때 엄밀성이 부족한 부분이 존재하였음을 제시하였다. 대표적으로 '$A:C=B:C$이면 $A=B$'를 유클리드 알고리즘으로 증명할 때, 무한한 과정이 계속되지만 이를 당시의 이론으로는 해결할 수 없었다. Knorr(1975)는 유클리드 알고리즘을 기반으로 한 비 이론의 이러한 문제를 해결하기 위해서 원론의 10권의 법칙 1(소진법)과 5권의 정의 4(아르키메데스 원리)가 고안되었음을 주장하였다.

원론 10권의 법칙 1
두 개의 같지 않은 양이 있을 때, 더 큰 것에서 절반보다 큰 양을 빼고 나머지에서 절반보다 큰 양을 빼면 이 과정을 계속 반복하면 처음의 작은 양보다 더 작은 양이 남게 될 것이다. (Heath, 1956c, p. 14)

원론 5권의 정의 4
양들이 다른 것에 대해 비율을 가진다는 것은, 곱할 때 다른 양보다 커지게 할 수 있다는 것이다. (Heath, 1956b, p. 114)

에우독소스는 이후 비 이론을 더욱 엄밀하게 형식화하여 유클리드 원론 5권에 나타난 비례이론을 정립하였고, 따라서 새로운 비 이론이 탄생되었다.

원론 5권의 정의 5
Magnitudes are said to be in the same ratio, the first to the second and the third to the fourth, when, if any equimultiples whatever be taken of the first and third, and any equimultiples whatever of the second and fourth, the former equimultiples alike exceed, are alike equal to, or alike fall short

---

리스 시대에 7권의 산술의 비 이론인 유클리드 알고리즘을 바탕으로 한, 양의 비 이론 또한 있었음을 주장하였다. 유클리드가 원론을 편집할 때, 양에 대한 유클리드 알고리즘의 비 이론을 사용하지 않고, 에우독소스의 양의 비 이론만 남겼지만, 당시에는 유클리드 알고리즘의 양의 비 이론이 있었다는 것이 Knorr(1975)의 주장이다.

of, the latter equimultiples respectively taken in corresponding order. (Heath, 1956b, p. 114)

이렇게 새로 정의된 비의 의미는 이전과는 전혀 다른 의미를 갖게 되었다. 원래 두 양의 비는 공통단위가 존재하여 각 양이 공통단위를 어느 정도로 포함하고 있는지를 의미하는 것이었다. 그러나 공약불가능한 양을 포함하도록 표현된 에우독소스의 비의 정의는 이전과는 다른 형식적인 체계를 갖추게 되었다.

요약하면 고대 그리스 시대에 유클리드 알고리즘을 통한 비의 근삿값을 구하는 방법이 사용되었다. 이 방법은 테아이테토스의 비 이론의 기초가 되었다. 이 방법으로 공약불가능성을 판정하고 여러 가지 정리를 정당화하고 증명하는 과정에서 수학자들은 무한의 영역을 처리해야 했다. 특히 '$A:C=B:C$이면 $A=B$'의 명제의 증명과정에서 원론 10권의 법칙 1의 수렴원리와 원론 5권의 정의 4의 아르키메데스 원리를 고안하게 되었다(Knorr, 1975). 즉, 공약불가능한 양의 발견과 이를 포함한 비 개념을 정립하는 과정에서 수학자들은 무한을 다루는 방법에 대해 고민하고 정리하게 된 것이다. 공약불가능한 양의 발견 및 정당화에서 수학자들은 무한에 대해 추론을 해야 했으므로 무한을 다루는 정리를 형식화하였고, 새로운 비 이론의 기초를 마련하였다.

1.3. 경험적 수학에서 이론적 수학으로의 전환

본 절의 공약불가능성의 발견의 영향에 대한 논의는 Szabó(1978)의 연구 결과를 중심으로 한다.

공약불가능성의 발견으로 추정되는 방법과 원론의 공약불가능성의 판정 방법은 모두 무한에 대한 추론이 필요하다. 즉, 공약불가능한 양을 받아들이는 것은 무한과정에 대한 분석을 통해 이루어진 것으로서 경험적 판단이 불가능한 철저하게 이론적 판단이었다(Knorr, 1975, Szabó, 1978). 실제로 물리적으로 길이를 측정할 때 측정 결과 무리수의 길이를 갖는다고 이야기하기는 어렵다. '자' 또는 단위 길이로 사용하는 도구

를 이용하면 유리수 길이만을 측정할 수 있으며 유리수로 표현될 수 없는 길이가 존재한다는 사실을 발견하는 것은 불가능하다. 이런 관점에서 공약불가능성은 물리적 대상 사이의 관계가 아닌 수학적 양 사이의 수치적인 관계이다(Grunbaum, 1951).

예를 들어 [그림 Ⅱ-3]과 같이 유클리드 알고리즘으로 공약불가능성을 판정하는 방법을 생각해보자. 만약 무한에 대한 추상적인 추론을 도입하지 않은 경험적인 단계에서 유클리드 알고리즘을 사용하면 충분히 많은 시행 후에는 두 양의 공통단위의 근삿값을 구할 수 있다(Szabó, 1978, p. 212). 그러나 무한에 대해 이론적인 사고를 하는 수학자는 [그림 Ⅱ-3]의 유클리드 알고리즘을 단지 몇 단계를 시행함으로써, 이것이 무한하게 시행 가능하다고 판단하고, 그 결과를 추론하게 된다. 단계를 시행하면 할수록 정사각형의 크기는 줄어들어 실제 측정은 불가능하지만 그러한 실제 측정 가능성 여부는 수학자에게는 중요하지 않다. 수학자들은 수학적 반성의 결과로서 공약불가능한 경우 유클리드 알고리즘이 끝나지 않음을 이론적으로 추론하게 된다(Szabó, 1978).

이렇게 경험적으로 증명할 수 없는 양을 수용하며, 무한과정과 이론적 추론을 도입함으로써 그동안 수학에서 당연하게 받아들이던 진술들에 대해 재고가 필요하게 되었고, 수학자들은 수학적 대상이란 무엇이며 참이란 무엇이고, 수학의 진술이 무엇을 의미하는지도 다시 생각해야만 했다. 그리고 이러한 사고는 수학의 기초에 관한 관심으로 이어졌다. 공약불가능한 양의 발견 이후, ‘숫자’와 ‘비’와 같은 기존에 사용하던 단어들도 이제 다른 의미를 갖게 되었다(Dauben, 1984). 기존의 경험적이고 실제적이며 직관적인 용어들이 추상적이고 형식적인 대상이 되었다. 마찬가지로 수학적 진술들도 더 이상 경험적이고 물리적인 것에 한정되지 않으며 이론적이고 추상적인 진술이 되었다.

Szabó(1978)는 이론적 판단에서는 시각적 다이어그램의 역할 역시 변화함을 논의하였다. 2.1.절에서 두 양의 공약불가능성을 보인 [그림 Ⅱ-2] 방법은 단지 몇 단계의 과정만 시행했을 뿐이다. 시각적 다이어그램을 통해 두 단계를 보인 후 무한과정에 대해서도 같은 추론이 가능하다고 판단하였고, 따라서 무한한 시행 후 공통단위가 존재하지 않는다는 결론

을 제시하였다. 이 논증에서 시각적인 다이어그램은 결정적인 도구가 아닌 이론적인 추론을 위한 보조도구의 역할을 하였다. 이런 점에서 Szabó(1978)는 공약불가능성 논쟁에서 시각적인 다이어그램은 가장 핵심적인 사항을 파악하는 데 큰 도움이 되지 않는다는 점을 강조하였다. 예를 들어 [그림 Ⅱ-2]는 유클리드 알고리즘의 초기 몇 단계는 보여주지만, 이 과정이 무한히 반복될 수 있는 충분한 근거를 제시하지는 못한다. 따라서 시각적 다이어그램은 공약불가능한 두 양에 대해서 유클리드 알고리즘이 무한히 계속될 수 있다는 추론에 도움을 줄 수는 있지만, 수학적으로 완전한 정당화를 제공하지는 못한다. 따라서 Szabó(1978)은 수학적 증명은 시각적인 다이어그램을 통해 정당화될 수는 없으며 이성의 이론적인 판단에 의해서만 정당화될 수 있음을 주장하였다. 즉 공약불가능한 양의 존재성을 정당화할 때 시각적인 도구는 단지 보조도구로서 역할로 한정된다. 이러한 관점에서 Szabó(1978, p. 199)는 공약불가능성의 발견은 '그리스 수학의 반-경험주의적이고 반-시각주의적인 과학으로의 전환'과 관련이 있다고 하였다.

1.4. 수학적 대상의 존재성에 대한 질문의 중요성 인식

공약불가능성의 발견의 영향에 대한 본 절의 내용은 Zeuthen(1896)과 유미영, 최영기(2015)의 논의를 중심으로 전개한다.

공약불가능한 양이 존재한다는 인식은 '수치적 맥락'으로부터 '비수치적인 존재'의 발견이었다(Knorr, 1975, p. 71). 피타고라스 정리라는 수치적 관계로부터 기존에 알지 못했던 기하학적 양이 존재한다는 사실이 발견되었고, 선분들 사이의 관계를 나타내는 정수 비가 존재하지 않을 수도 있다는 사실 또한 깨닫게 되었다. 따라서 공약불가능성의 발견의 영향으로 수학자들은 '단순히 존재한다는 가정만으로는 수학 용어가 가리키는 대상의 존재성을 보장할 수 없다'는 사실을 인식하게 되었다(Harari, 2003, p. 3)[7]. 이런 맥락에서 Zeuthen은 공약불가능한 양의 발견

7) Harari(2003, p. 3)이 서술한 이 문구는 Harari(2003)가 Zeuthen(1986)의 관점을 표현한 것이다.

이 수학적 대상이 존재하는지에 대해 질문하고 이에 대해 증명하고 답하는 것이 중요하다는 인식으로 이어졌다고 보았다(Harari, 2003, p. 3)

Zeuthen은 그리스인들이 작도를 수학적 대상의 존재성의 증명으로 인식하는데 공약불가능성 연구가 중요한 역할을 했음을 제안한다(Zeuthen, 1896). Zeuthen은 당시 비산술적 대상인 공약불가능한 양의 존재성을 보이기 위해서는 산술이 아닌 다른 영역의 방법을 이용해야 했고, 이때 작도가 그 역할을 한 것으로 보았다(Knorr, 1975, p. 71). 따라서 Zeuthen은 그리스인들은 공약불가능성의 발견으로 인해 '정의된 용어와 그것이 언급하는 현실 사이의 일치를 당연하게 여길 수 없음'을 깨달았으며, 정의와 실제 존재 사이를 연결하는데 작도가 중요한 역할을 하게 되었다고 보았다(Harari, 2003, pp. 3-4 재인용).

우선 그리스 시대의 작도의 의미를 살펴보면, 칸트는 유클리드의 작도는 실제 종이 위에 도형을 그려보는 실세계의 활동이라기보다는 수학적 대상을 정신적으로 구성해보는 활동, 즉 물리적 조작을 이상화한 것으로서 보았다(Shapiro, 2000). 유클리드 원론에서는 '작도'라는 표현은 자주 등장하는 성분이다. 그러나, 유클리드 원론의 정의에 의하면 '점은 부분이 없는 것'이며, '선은 폭이 없이 길이'이다. 따라서 유클리드 공준에서 표현된 '임의의 점에서 임의의 점으로 직선을 그릴 수 있다', '유한한 직선을 직선으로 연속적으로 늘릴 수 있다'(Heath, 1956a, pp. 153-154)의 문장을 물리적으로 구현할 수는 없다. 즉, 정의와 공준에 나타난 표현대로 실세계에서 자와 컴퍼스를 이용하여 종이에 작도할 수는 없다. 따라서 작도는 마음속에서 이루어지는 이상화된 작용으로서 보는 것이 적절하다. 작도를 이와 같은 추상적인 정신 작용으로 해석하면 정의와 공준에 모순되지 않게 '두께 없는 선분'을 그릴 수 있다.

유미영, 최영기(2015)는 그러한 작도가 유클리드 원론에서 수학적 대상의 존재성을 보장하는 역할을 하였음을 논의하였다. 우선 원론에서 '수학적 대상의 존재성은 유클리드 공리 안에서 허용되었다는 의미의 존재성'이다(유미영, 최영기, 2015, p. 372). 즉, 원론에서 수학적 대상이 존재한다는 것은 공리에 의해 그 대상을 보장할 수 있을 때 가능하다. 작

도란 컴퍼스와 눈금이 없는 자를 이용하여 기하학적 도형을 그리는 행위로서 유클리드의 〈공리1〉 ‘임의의 점에서 임의의 점으로 직선을 그릴 수 있다’와 〈공리2〉 ‘유한한 직선을 직선으로 연속적으로 늘릴 수 있다’는 작도를 통해 어떤 도형을 그릴 수 있는지를 제안한다. 또한 〈공리3〉 ‘임의의 점에서 임의의 거리를 반지름으로 갖는 원을 그릴 수 있다’(Heath, 1956a, p. 154)는 컴퍼스를 이용하여 원을 작도할 수 있음을 보장한다. 즉, 작도를 통하여 도형을 구성할 수 있음을 유클리드 원론에서는 공리를 통해 보장하고 있고, 이러한 작도를 이용하여 어떤 도형을 구성할 수 있을 때, 다시 그 도형이 유클리드 원론 안에 수학적 대상으로 존재한다는 것을 말할 수 있다. 결국 자와 컴퍼스만을 이용하여 어떤 기하학적 대상이 작도 가능하다는 것은 유클리드의 공리에 근거하여 수학적 대상이 원론 안에서 존재한다는 것을 의미한다. 따라서 원론에서는 수학적 대상의 존재한다는 것을 보이기 위해서 작도하는 방법을 보여주고 있다(유미영, 최영기, 2015, p. 372).

또한 원론은 작도를 통해 존재성이 보장된 도형들을 이론 전개에 사용하고 있다(Harari, 2003). 유클리드 원론의 1권에 제시된 정의 22와 법칙 46을 살펴보자.

원론의 1권의 정의 22
사각형 중에, 정사각형은 모든 변의 길이가 같고 모든 각이 직각인 사각형이다. 직사각형은 모든 각이 직각인 사각형이다. 마름모는 모든 변의 길이가 같은 사각형이다. 평행사변형(rhomboid)은 마주 보는 변과 각이 모두 같은 사각형이다. 그리고 이들 외의 사각형은 사다리꼴이라 부른다. (Heath, 1956a, p. 153)

원론의 1권의 법칙 46
주어진 선분을 한 변으로 갖는 정사각형을 만드시오. (Heath, 1956a, p. 347)

유클리드는 정의 22에서 정사각형의 정의를 언급하지만, 실제로 법칙 46이 등장하기 전에는 전혀 정사각형을 사용하지 않는다. 그리고 법칙 47에서 정사각형을 사용하기 전에 법칙 46에서 작도를 이용하여 정사각형의 존재한다는 사실을 보인다. 즉, 원론에서 1권의 법칙 46은 정의 22

에서 존재한다고 언급한 정사각형이 실제로 존재함을 보이는 역할을 하고 있다(Harari, 2003). 이렇게 그리스 시대에 정의한 수학적 대상이 실제로 존재함을 보여야 한다는 인식, 즉 수학적 대상의 존재성을 보장하기 위해서는 작도를 통한 존재 증명이 필요하다는 인식을 하는 데에는 공약불가능한 양의 발견이 중요한 역할을 하였다.

1.5. 결론

본 절에서는 공약불가능성의 수학사적 의의에 대해 알아보고자 그리스 시대의 공약불가능한 양의 발견 방식과 그 영향에 대한 선행연구들을 검토하였다. 선행연구들을 검토한 결과 공약불가능한 양의 발견의 의의는 다음과 같다.

첫째, 공약불가능한 양의 발견 및 수용으로 인해 비의 개념과 정리들에 의문이 제기되었으며 새로운 비 이론을 생각해야 했다. 비 이론의 발달 과정에서 에우독소스의 비 이론이 발달하였고, 한편으로는 유클리드 알고리즘의 비 이론을 전개하는 과정에서 무한을 다루기 위한 원론 10권의 법칙 1과 같은 원리를 고안하였다(Knorr, 1975).

둘째, 두 양의 공약불가능성의 발견과 그 수용으로 경험적인 수학에서 이론적인 수학으로의 전환 및 시각적 다이어그램의 역할이 변화되었다(Szabó, 1978). Szabó(1978, p. 215)는 ‘두 양 사이에 공통단위를 찾을 수 없음을 인정하는 것’과 ‘두 양 사이에 공통단위가 존재하지 않음을 확립하는 것’은 같지 않으며 중대한 의미 차이가 있음을 지적한 바 있다. 전자는 경험적이고 실제적인 입장에서 두 양 사이에 공통단위를 찾을 수 없음을 의미한다. 반면 후자는 형식적이고 이론적인 관점에서 공통단위가 존재하지 않는다는 사실을 받아들이는 진술로서, 정사각형의 한 변과 그 대각선의 길이가 서로 공약불가능하다는 인정은 후자에 의존한다. 즉, 공약불가능한 양의 존재의 발견과 인정은 그리스 수학이 이론적 수학으로의 전환되었음을 의미한다.

또한, 시각적 다이어그램이 보조도구로서 역할을 하게 되었다(Szabó, 1978). 실제로 공약불가능한 양을 보이는 과정에서 시각적 도구들을 이

용하여 몇 단계를 보인 후 무한한 과정에 대해서도 같은 추론을 할 수 있음을 판단하고, 무한회의 시행 후에 공통단위가 존재하지 않는다는 결론을 도출해 내었다. 이는 시각적인 다이어그램이 실제적이고 실천적인 과정이라기보다는 이론적 추론에 대한 보조도구임을 의미한다.

셋째, 공약불가능성의 발견으로 그동안 알지 못했던 양이 존재함을 깨닫게 되었고, 이는 그리스 학자들에게 수학적 대상의 존재성을 실제로 보이는 것이 중요하다는 인식으로 연결되었다. 그리고 원론에서 작도가 그러한 수학적 대상의 존재성을 보장하는 역할을 하게 되었다(Zeuthen, 1896).

그리스 시대 공약불가능한 양의 발견은 에우독소스의 새로운 비 이론이 정립되는 계기가 되었으며, 수학에서 시각적인 도형 및 다이어그램의 역할이나 증명방식의 변화를 유발하는 등 수학 전반에 큰 변화를 가져왔다. 이러한 변화는 단지 이전의 수학에 새로운 개념이나 정리를 추가하는 수준이 아닌 수학 전반의 근본적인 변화를 가져왔다(Dauben, 1984). 즉 정수비로 표현할 수 없는 양의 발견은 단지 새로운 길이가 존재한다는 단순한 사실이 아닌 무한 과정의 도입 및 이론적 수학으로의 변화, 시각적 다이어그램의 역할 변화, 새로운 비 이론의 정립, 수학적 대상의 존재성이라는 철학적 질문의 중요성 인식과 같은 근본적인 변화를 가져온 사건이었다.

2. 공약불가능성의 철학적 논의

본 절에서 논의할 주제는 무리수의 특징과는 다른 맥락에서 사용되는 공약불가능성의 개념이다. 공약불가능성은 과학이론들 사이에 성립하는 성질로서 1962년 쿤(Kuhn)과 파이어아벤트(Feyerabend)에 의해 과학사의 특정한 현상을 설명하기 위한 도구로 사용되었고, 이후 쿤의 패러다임 이론의 유행과 함께 다양한 분야에서 언급되고 있다. 또한 최근 수학교육에서도 Sfard(2007, 2008)에 의해 서로 다른 담론 사이에 발생할 수 있는 현상으로 공약불가능성(incommensurability)이 언급되면서 교육 현상

을 설명하는 표현으로 종종 등장하게 되었다.

그렇다면 쿤의 과학이론 간에 성립하는 공약불가능성의 본성은 무엇이며 이러한 현상이 수학 이론 사이에서도 성립한다고 할 수 있는지, 또 쿤의 공약불가능성과 Sfard의 담론 간에 존재하는 공약불가능성은 서로 어떤 관련이 있으며 두 공약불가능성의 의미가 동일한지, 혹은 같은 용어를 사용하지만, 의미상에 차이를 지닌 것인지에 대한 의문이 제기된다. 이 질문들에 대한 답을 위해 먼저 쿤의 공약불가능성과 Sfard의 공약불가능성의 의미와 특성을 명확히 하는 것은 중요하다. 따라서 본 절에서는 공약불가능성에 대한 논의들을 분석하여, 공약불가능성의 표현이 가진 핵심 사항은 무엇인지 확인하고, 수학교육에서 교실 상황을 서술하기 위한 도구로 사용하기 위해 공약불가능성의 의미를 한정하여 제시하고자 한다.

2.1. 쿤의 패러다임 이론의 공약불가능성

쿤은 1962년 「과학혁명의 구조」를 출판하면서 과학사에 대한 새로운 해석을 제안하였다. 쿤의 대표적인 아이디어는 과학이 점진적이고 축적적으로 발달하는 것이 아닌 혁명을 통해 이론이 변화한다는 것이다. 이러한 설명을 위해 쿤은 과학이 점진적인 발달을 겪는 시기를 정상과학 시기로, 이론이 전복되고 혁명적인 변화가 일어나는 시기를 과학혁명으로, 그리고 혁명에 의한 이론 변화를 패러다임의 변화로 설명하였다(Kuhn, 1962).

공약불가능성이란 서로 다른 패러다임 사이에 성립하는 성질로서 ‘경쟁 관계에 있는 패러다임은 서로 동의하지 않는 것을 넘어서 서로 말이 통하지 않는다’는 의미이다(장하석, 2014, p. 128). 일반적으로 과학 용어 중 관찰 가능한 대상은 그것을 직접 가리켜서 단어의 의미를 배울 수 있다. 그러나 ‘전자’와 같은 이론적 용어는 대상을 가리킬 수 없으며 특정 이론 안에서만 의미가 있다. 따라서 이론이 변하면 같은 용어라 하더라도 그 의미나 용법이 변화한다. 그래서 같은 문장이 한 패러다임 안에서는 참이지만, 다른 패러다임 안에서는 거짓이 되는 일 또한 가능한

데, 이것은 모순의 현상이 아니며 이론이 변했기 때문에 그 문장의 의미가 변하여서 발생하는 현상이다(Hacking, 2012, p. 40). 이런 관점에서 공약불가능성은 과학이론들을 서로를 같은 잣대로 비교할 수 있는 공통 언어가 없으며, 따라서 서로 다른 패러다임의 과학자들은 의사소통하기 어려울 뿐만 아니라 서로를 이해할 수 없게 되는 현상을 가리킨다(Kuhn, 1983). 이러한 공약불가능성은 과학의 역사를 축적적인 과정이 아닌 전혀 다른 이론으로 대체되는 불연속적인 과정이라고 본 쿤 이론의 핵심 논제이다. 만약 혁명 전후의 패러다임들 사이에 공약불가능성이 존재하지 않는다면, 혁명 전후에 발생한 변화와 한 패러다임 내에서 일어난 변화를 구분할 필요가 없기 때문이다(조인래, 2018).

쿤의 공약불가능성의 의미를 더 자세히 파악하기 위해서는 1962년 출판된 쿤의 저서「과학혁명의 구조」에서 드러난 세 측면인 ‘방법론적 공약불가능성, 의미론적 공약불가능성, 관찰적·존재론적 공약불가능성’(조인래, 2018)을 살펴볼 필요가 있다. 첫째, 방법론적 공약불가능성은 어떤 문제들이 해결되어야 할 문제인지, 어떤 방법으로 해결되어야 하는지에 대해 다른 입장을 갖는 것을 말한다. 예를 들어, 중력은 데카르트주의자들에게는 설명되어야 할 현상이지만, 뉴턴주의자들에게는 설명이 필요 없는 당연한 사실로 생각되었다(조인래, 2018). 둘째, 의미론적 공약불가능성은 경쟁 관계에 있는 패러다임이 공통의 단어를 사용할지라도, 그 용어들은 각 패러다임 속에서 다른 용어 및 이론들과 밀접한 관계를 갖게 되며, 따라서 다른 뜻을 갖게 되는 것을 말한다. 예를 들어, ‘지구’라는 단어의 경우 지동설과 천동설에서 모두 사용되는 용어이지만 그 의미가 다르다. 천동설의 지구는 고정된 위치를 갖는 속성을 가졌지만 지동설에서 사용하는 지구는 태양을 중심으로 움직이는 특징을 가진다. 단어 ‘공간’ 역시 뉴턴과 아인슈타인의 이론에서 그 의미가 각각 다르다. 뉴턴의 공간은 편평한 특징을 갖지만 아인슈타인의 공간은 휘어져 있으므로 두 용어는 의미와 속성에서 다르다(조인래, 2018). 마지막으로 관찰적·존재론적 공약불가능성이란 서로 다른 패러다임을 배경지식으로 갖는 과학자들은 서로 다른 세계에서 살게 되며 그들이 시각적으로는 같은 현상을 보는 것 같지만, 서로 다른 것을 보게 되는 현상을 의미

한다. 한 예로 뉴턴 역학의 패러다임 안의 과학자는 편평한 공간에서 살지만, 아인슈타인의 패러다임을 갖는 과학자는 휘어진 공간인 전혀 다른 세계 속에서 살게 된다. 이러한 관찰적 · 존재론적 공약불가능성의 원인으로 관찰의 이론 적재성이 언급되고 있다. 관찰은 시각적이고 단지 물리적인 현상으로 생각되지만 실제로는 이론의 영향을 받는다는 것이다(조인래, 2018).

그러나 쿤의 공약불가능성 개념은 많은 비판을 받았으며, 쿤은 그 비판에 응답하면서 이 용어의 의미의 명확화를 시도하였고 그 과정에서 공약불가능성 개념은 변화를 겪었다. 공약불가능성에 대한 첫 번째 비판은, 두 패러다임이 같은 언어로 표현될 수 없다면 두 이론은 비교 불가능하고 따라서 어떤 이론을 선택할지에 대한 논쟁이 의미가 없게 된다는 점이다. A와 B의 비교는 어떤 공통된 기준에서만 가능한 것이며 이론의 차이에 대해 언급할 때 역시 이를 바탕으로 할 수 있지만, 공약불가능성을 주장하는 사람들은 바로 이 공통 기준을 부정하게 된다. 그러므로 두 이론이 공약불가능하다면 비교 불가능하며, 새로운 이론은 이전 이론에 비해 어떤 과정을 거쳐서 선택되었는지 설명하거나 이론이 합리적인 방향으로 발달한다고 이야기하기 어렵다는 문제가 제기된다. 즉, 공약불가능성의 문제는 이론 선택의 합리성에 대한 의문 및 과학 발달의 합리성을 설명할 수 없게 된다는 문제를 가져온다. 두 번째 공약불가능성에 대한 대표적인 비판은 이론들이 서로 공약불가능하면, 서로 다른 이론을 가진 사람들은 서로를 이해하지 못하는 상황인데, 쿤과 같이 과학의 역사에 대해 언급하는 사람들은 현대의 이론과 언어를 이용하여, 과거의 이론을 이해하고 이야기하는데 바로 그 불가능한 일을 하고 있다는 점이다. 즉, 쿤은 아리스토텔레스와 맥스웰과 같은 과거의 과학자들의 이론들을 이해할 뿐만 아니라 현대의 이론과 언어로 그들의 이론을 재구성하는 일을 한다. 이런 상황은 쿤 스스로가 공약불가능성에 대해 모순적인 입장에 있는 것처럼 여겨진다(Kuhn, 1983, p. 227)

이 비판들에 대응하여 답하는 과정에서 쿤의 공약불가능성의 개념은 변화를 겪었다. 가장 대표적인 개념변화를 크게 두 가지로 정리할 수 있다. 첫째는 쿤이 공약불가능성을 다소 완화된 형태인 '국소적인 공약불

가능성’으로 제시한 것이다. 쿤은 1983년 논문 「Commensurability, Comparability, Communicability」에서 ‘국소적 공약불가능성’이 원래 그의 의도였음을 언급하면서 이론 변화에서 의미 변화는 국소적인 부분에서 일어나고, 상당수의 용어는 의미가 변하지 않음을 주장한다. 따라서 이론 변화 시기에 의미가 변하지 않는 용어들은 이론 비교를 위한 바탕을 제공하며, 따라서 공약불가능한 용어들의 의미 또한 탐구할 수 있다는 것이다. 쿤은 이 과정을 ‘해석’의 과정으로 불렀다. 동일한 용어의 용법이 변하거나, 또는 존재하지 않았던 용어들이 새로운 패러다임에서 등장한다고 하더라도, 두 이론 사이에 여전히 동일하게 사용되는 용어들을 이용하여 해석의 과정을 거쳐서 이해할 수 있음을 국소적 공약불가능성 논제를 통해 제시하였다(Kuhn, 1983).

두 번째는 쿤이 의미론적 공약불가능성에 초점을 맞추면서, 공약불가능성을 용어들의‘분류체계가 달라짐에 따른 번역불가능성’으로 특징지은 것이다(조인래, 2018). 쿤은 패러다임 사이에 번역이 불가능한 상황을 설명하기 위해 어휘집(lexicon)과 분류체계(taxonomy)를 도입한다. 쿤은 「과학혁명이란 무엇인가?」라는 논문에서는 과학혁명의 특징을 ‘분류범주들의 변화’로 제시하였다(Kuhn, 1987, p. 212). 이 변화들은‘범주화에 유관한 기준들의 조정인 동시에 주어진 사물과 상황들이 기존 범주들에 분산 · 배치되는 방식에서의 조정’으로 설명한다(Kuhn, 1987, p. 212). 예를 들어. 아리스토텔레스의 물리학에서 ‘운동’은 어떤 대상의 위치변화와 전반적인 변화 현상을 의미한다. 예를 들어 아리스토텔레스에게는 ‘도토리가 떡갈나무가 되는 것과 같은 성장, 쇠막대의 가열과 같은 강도의 변화, 병든 상태에서 건강한 상태로의 전이’가 모두 운동의 범주에 포함된다. 하지만 갈릴레이와 뉴턴의 역학에서는 이들을 운동으로 바라보지 않는다. 쿤은 자신이 처음에 아리스토텔레스의 역학에 대해 전혀 이해할 수 없다가 어느 순간 용어들의 범주가 재배치 되고 재구조화되면서 아리스토텔레스의 역학이 전체적으로 이해된 경험을 제시하면서, 과학혁명 시기의 개념변화를 ‘분류학적 전환’으로서 제시하였다(Kuhn 1987, p. 195). 쿤이 보기에 같은 패러다임에 속한 과학자들은 같은 어휘집 또는 같은 분류체계를 갖는 어휘구조를 공유하지만, 이론이

변화하면 분류체계가 변화하고 이 경우 각 용어들이 서로 대응 관계가 성립하지 않기 때문에 용어와 용어 사이에 번역이 불가능하고 이때 공약불가능성이 발생한다. 즉 쿤의 공약불가능성은 분류체계의 변화로 인해 번역불가능성이 발생하는 현상이다(천현득, 2013, p. 126).[8)]

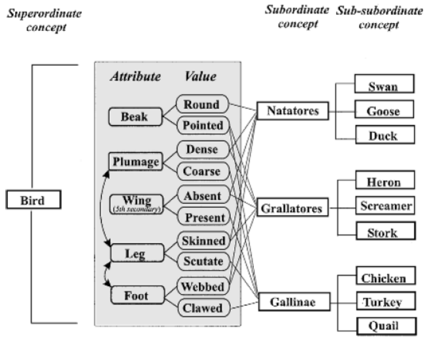
Barker, Chen, Andersen(2003)은 프레임이론을 통해 쿤의 분류학적 전환으로서의 공약불가능성 논제를 뒷받침한다. 프레임은 '구조적 연결에 의해 통합된 여러 속성의 집합'이다(p. 224). 그리고 새의 특징에 따라 분류된 구조는 새들의 특징들의 구조적 연결상태를 보여주는 일종의 프레임이다. Barker, Chen, Andersen(2003)은 조류학의 역사에서 나타난 프레임 변화가 분류학적 공약불가능성의 중요한 예시가 됨을 제안한다.

17세기에 새의 분류방식이 처음 개발되었을 때, 새를 분류하는 기준은 부리 모양과 발의 구조 두 가지였다. 이 기준에 의해 새는 '물새'와 '육지 새'로 구분되었고 오리는 '물새'로서 부리가 둥글고 발에는 물갈퀴가 있었으며 닭은 '육지 새'로서 부리는 뾰족하고 발톱을 가졌다는 특징이 있었다. 그러나 이러한 분류방식에 맞지 않는 새들이 발견되었고 분류체계의 수정이 필요하게 되었다(Barker, Chen, Andersen, 2003).

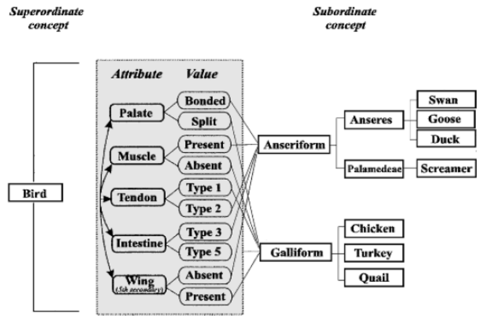
1830년대에 Sundevall은 그동안 발견된 분류체계에 맞지 않는 새들이 포함되도록 새로운 분류체계인 [그림 Ⅱ-7]을 제안하였다. [그림 Ⅱ-7]은 분류 기준으로 '부리 모양, 깃털 패턴, 날개-깃털 배열, 다리 형태, 발 구조'를 포함한다. Sundevall의 새로운 분류체계에 따르면 물갈퀴가 있고, 뾰족한 부리를 가졌기에 '물새'에도 '육지새'에도 포함될 수 없었던 '스크리머(screamer)'는 새로운 범주인 '섭금류(grallatores)'에 포함되게 되었다(Barker, Chen, Andersen, 2003, p. 288).

---

8) 1980년대 쿤은 공약불가능성을 번역불가능성으로 특징지으면서 번역을 두 가지 종류로 제시하였다. 좁은 의미의 번역은 기계적 번역이며 하나하나 대응되는 단어들을 번역하는 것이다. 그리고 넓은 의미의 번역은 해석을 포함한 번역이다. 공약불가능성은 기계적 번역이 실패하는 경우이며, 만약 기계적 번역이 실패하더라도 넓은 의미의 번역인 해석의 작업을 통해서 다른 이론을 이해하는 것이 가능하다(천현득, 2013).



[그림 Ⅱ-7] 분류학적 전환과 공약불가능성(1) (Barker, Chen, Andersen, 2003, p. 228)



[그림 Ⅱ-8] 분류학적 전환과 공약불가능성(2) (Barker, Chen, Andersen, 2003, p. 229)

이후 진화론을 주장한 다윈으로 인해 새의 분류체계는 급진적인 변화를 겪게 되었다. 진화론에 영향을 받은 조류학자들은 새의 분류 기준이 진화적 기원과 관련이 있어야 한다고 생각하였고, 이에 따라 1893년 Gadow는 [그림 Ⅱ-8]의 새로운 분류체계를 제안하였다. Gadow는 같은 범주에 포함되는 새들이 공통의 진화적 기원을 포함하도록 '구개음 구조, 골반의 근육 형태, 힘줄 유형, 창자의 주름 유형, 날개 깃털 배열'을 분류 기준으로 사용하였다(Barker, Chen, Andersen, 2003, p. 228). 새로운 분류체계에서는 이전에는 다른 범주에 포함되었던 새들이 동일한 범주에 포함되었으며, 새로운 분류 범주로서 '기러기목(anseriform)'이 도입되기도 하였다. 이러한 새의 분류체계의 변화는 공약불가능성과 분류 구조 사이의 연관성을 잘 보여준다. 새와 관련된 개념들이 삭제되거나 생성되고, 또한 새들이 범주들에 재배치되는 모습은 이전의 분류체계의 용어와 이후의 분류체계의 용어들이 서로 번역이 불가능하므로 서로 다른 분류체계를 가진 사람들 사이에 이해와 의사소통이 어려워지는 현상에 대한 설명을 제공한다(Barker, Chen, Andersen, 2003).

2.2. 존재론적 범주와 과학의 개념변화

천현득(2016, p. 367)은 과학의 개념변화 현상에 대한 이해를 위해 쿤

의 '분류학적 전환'과 더불어 '존재론적 변화'를 중요하게 다룰 것을 제안한다. 존재론적 변화는 쿤의 분류학적 전환을 포괄하는 더 일반적인 개념이다. 그는 쿤의 '분류학적 전환으로서의 과학혁명'은 '존재론적 전환으로서의 과학혁명'으로 일반화될 수 있으며 과학혁명 시기의 대표적인 개념변화 유형으로 '대상'과 '사건'의 존재론적 범주의 변화를 제안한다.

아리스토텔레스 시대부터 모든 것들은 어떤 범주에 속한다고 생각되어 왔다. 그리고 존재하는 모든 것들은 일반적으로 계층구조를 이룬다. 범주 구조의 구체적 양상에 대해서는 논쟁의 여지가 있지만 모든 것들이 존재론적 범주에 속한다는 것은 일반적으로 받아들여지고 있는 가정이다(Chi & Hausmann, 2003). 대표적으로 서로 다른 존재론적 범주로 생각되는 것으로는 '대상'과 '사건'이 있다. '대상'은 특정한 공간에 존재하고 시간을 관통하여 지속되는 상태를 유지하며, 어떤 것에 작용하는 반면, '사건'은 발생하는 것으로서 시간이 지나면 한 상태에서 다른 상태로 변화하고, 공간 속의 특정한 장소를 차지하지 않는다. 이들은 존재 방식과 시간, 공간과 관계 맺는 방식이 전혀 다른, 서로 다른 존재론적 범주에 속하는 것이다(천현득, 2016, p. 370).

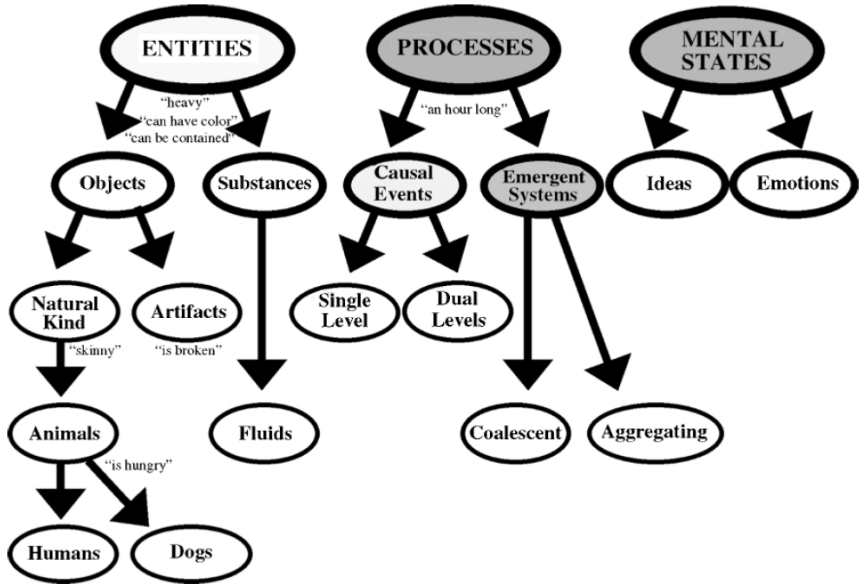
쿤의 분류학적 전환이란 패러다임이 변하는 시기에 과학개념을 분류하는 기준과 범주들이 변하고 새로운 분류구조에 개념들이 재배치되는 현상으로, '대상' 범주에 속하는 용어들의 변화만을 의미한다. 그러나 존재론적 전환은 이러한 '대상'범주 안에서의 재배치뿐만 아니라, 존재론적으로 다른 범주에 속하는 '대상'과 '사건'의 범주들을 넘어서는 변화를 포함하는 더 넓은 개념이다. 이러한 존재론적 전환은 쿤이 제안한 분류학적 전환과 더불어 과학 혁명기의 주요한 개념 변화의 한 형태이다(천현득, 2016).

천현득(2016, pp. 393-394)은 과학사에서 열에 대한 관점 변화를 존재론적 전환의 한 예로써 제시하였다. 고대의 원자론자들은 열과 불을 하나의 실체 즉 대상으로서 간주하였으며, 아리스토텔레스주의자들도 열을 불로서 이해하였다. 따라서 열을 가하는 것은 불 위에 올려놓는 것으로 이해하였다. 오랜 시간 동안 열은 입자 혹은 물질과 같은 '대상'으로

서 여겨졌다. 이는 18세기의 열에 대한 ‘칼로릭 이론’이 지배적이었을 때도 마찬가지였다. 18세기에 과학자들은 칼로릭을 ‘무게 없는 유체’로서 간주하였고, 어떤 물체에 칼로릭을 더하면 온도가 높아지며 칼로릭을 줄이면 온도가 낮아지는 것으로 생각하였다. 즉, 열 현상을 칼로릭이라는 물질에 의한 것으로서 이해하였다. 그러나 19세기에 열에 대한 지배적 이론이 ‘운동 이론’으로 대체되었다. 운동 이론은 칼로릭 이론과는 달리 실체를 가정하지 않으며 열을 입자들의 운동으로 발생하는 ‘운동 에너지’로 여긴다. 따라서 열의 흐름은 물질인 칼로릭의 양이 적거나 많은 것으로 여기는 것이 아닌 ‘에너지의 전이’로서 여겨진다. 그러나 이렇게 칼로릭이라는 대상으로서 이해되던 열 현상이 ‘운동 이론’으로서 존재론적 전환이 일어난 것은 쉽지 않은 일이었고 오랜 시간이 소요되었다. 즉 열 개념에 대한 역사는 존재론적 전환이 어려운 일이며 과학 혁명기의 개념변화 현상의 한 사례임을 보여주는 좋은 예이다.

과학혁명과 관련된 구체적 사례 이외에도 과학개념에 대해 한 존재론적 범주에서 다른 존재론적 범주로의 재범주화가 인지적으로 쉽지 않음을 보이는 연구들이 이루어져 왔다. Chi(1992)는 존재론적 범주 안의 개념변화와 존재론적 범주를 넘어서는 개념변화를 구분할 필요가 있음을 제안하며, 존재론적 범주를 넘어서는 변화는 일반적으로 쉽지 않음을 제시한다. [그림 Ⅱ-9]는 Chi(1992)가 제안한 존재론적 범주이다. [9]

9) 존재론적 범주의 구조와 도식에 대해서는 다양한 주장이 있으며, 하나로 합의된 형태가 존재하지는 않는다. 본 연구는 과학개념 및 일상 개념의 구체적인 존재론적 범주의 형태를 제안하거나 주장하는 것을 목표로 하지 않으며, 따라서 이에 대해 논의하지 않는다. 본 연구는 모든 것들은 특정한 존재론적 범주에 속한다는 사실과 존재론적 범주들이 구조를 이루며 이 범주의 변화가 공약불가능성의 원인이 된다는 선행연구의 결과를 수용하여 논의를 전개한다.



[그림 Ⅱ-9] Chi의 존재론적 범주(Chi, 1992, p. 131)

Chi & Hausmann(2003, pp. 433-434)는 존재론적 이동이 어려운 이유로서 '대안 범주의 부재, 변화의 필요성에 대한 인식의 부족, 존재론적 범주가 가진 자원 집약적 특징'의 세 가지 근거를 제안하였다.

첫째, 과학개념의 학습에서 학생들은 어떤 과학적 개념이 속한 적절한 존재론적 범주에 대한 지식이 부족하고, 따라서 그 개념의 올바른 존재론적 범주에 배치해야 한다는 사실을 깨닫지 못하기 때문에 존재론적 이동에 성공하지 못할 수 있다. 둘째는, 존재론적 범주의 변화에 대한 필요성의 부족이다. 때때로, 잘못된 존재론적 범주는 일상생활에서 성공적으로 작용하고 따라서 적절한 존재론적 범주로 이동의 필요성을 느끼지 못할 수 있다. 이의 대표적인 예로 열은 [그림 Ⅱ-9]의 '과정(processes)'의 존재론적 범주에 속하지만 한 위치에서 다른 위치로 흐를 수 있는 '개체(entities)'의 하위 범주인 '대상(objects)'으로 잘못 생각하는 경우가 있다. 사람들은 열을 공간을 이동하는 '대상'으로 생각하면서 열이 밖으로 나가지 못하도록 창문을 닫고 열이 잘 빠져나가도록 창문을 여는데, 이러한 잘못된 범주의 할당이 일상생활에서 성공적으로 적용된다. 따라서 학생들은 열의 과학개념을 학습하면서 바른 존재론

적 범주로 재할당해야 할 필요성을 느끼지 못하고 따라서 이 경우 존재론적 범주의 이동이 어렵다. 마지막으로 존재론적 이동이 어려운 이유는 존재론적 범주 구조는 자원 집약적인 성질을 갖기 때문이다. A라는 존재론적 범주에서 B라는 존재론적 범주로 이동할 때는 A가 가진 많은 특징을 포기하고 B의 특징을 받아들여야 하는데 이는 인지적으로 부담이 큰 일이다. 한 가지 예로서 '인지'는 '과정' 즉 상호작용으로 인식해야 하지만, 머릿속의 물질인 '대상'으로서 생각하는 경우가 많고, 이때 '과정'으로의 존재론적 범주의 이동은 쉬운 일이 아니다. 그 이유는 '인지'를 '과정'으로 존재론적 범주를 이동할 때, '대상'의 많은 특징을 버리고 '과정'의 특징을 수용해야 하기 때문이다.

이처럼 존재론적 범주의 이동은 인지적 부담이 큰 쉽지 않은 일이다. 천현득(2016)과 Chi(1992), Chi & Hausmann(2003)의 논의는 존재론적 범주의 변화가 학생들이 개념을 학습하면서 겪어야 하는 개념변화 현상이면서 충분히 어려운 일임을, 그리고 공약불가능성 현상과 밀접한 관련이 있음을 보여주는 좋은 근거가 된다.

3. 수학학습의 공약불가능성

수학교실에서는 학생과 교사 및 학생과 학생의 상호 의사소통, 그리고 학생과 교과서 혹은 교육과정의 내용 사이의 의사소통이 효과적으로 이루어지지 않는 현상이 발생하기도 한다. 때때로 이러한 상황은 학생이 가진 이론적 배경이 교사, 다른 학생, 또 교과서의 이론적 배경과 다른 것에서 기인한다. 이렇게 패러다임이나 담론이 달라서 서로를 이해하지 못하고 의사소통이 적절히 이루어지지 않는 경우를 공약불가능하다고 한다(Kuhn, 1962; Sfard, 2021). 이러한 공약불가능성 현상은 그동안 수학교육 연구에서 많이 언급되는 주제는 아니었다(Sfard, 2021). 그러나 Sfard(2021)는 수학적 사고의 발달에서 불연속적인 단계는 피할 수 없는 과정이며, 이때 공약불가능한 담론으로의 전환이 일어나기 때문에 수학적 사고를 이해하기 위해서는 공약불가능성 현상을 중요하게 다루어야 함을 제안하였다. 본 절에서는 수학적 사고를 의사소통적 관점에서 바라

보며 공약불가능을 언급한 Sfard의 논의를 중심으로 수학교육의 공약불가능성 현상에 대한 이론적 정립을 하고자 한다.

3.1. 수학학습의 담론적 접근

수학교육에서 공약불가능성 현상을 언급한 Sfard(2007, 2008)는 사고와 의사소통의 관계를 중요시하였다. 특히 Sfard(2014, p. 234)는 연구 틀(research framework)로서 ‘학습에 대한 담론적 접근(discursive approach)’을 제시하며 수학교육 연구에서 학습을 일종의 ‘의사소통 활동(communicational activity)’으로 바라볼 것을 제안하였다. ‘담론적 틀(discursive framework)’에서는 ‘사고는 의사소통의 특수한 경우’이고, 수학을 학습하는 것은 수학적으로 활발히 의사소통하게 되는 것을 의미한다(Kieran, Eforman, Sfard, 2001, p, 5).[10)]

‘학습에 대한 담론적 접근’은 최근 여러 분야에서 인간 지식을 ‘절대 진리’로 보는 관점을 거부하고, ‘일종의 담론’이자, ‘인류의 대화’로서 보는 관점의 전환 현상과 관련이 있다(Sfard, 2014, p. 234). 이 경향에서 비고츠키는 ‘사고와 언어의 분리를 부정’하였고(Sfard, 2014, p. 235) 비트겐슈타인은 생각할 수 있는 것과 말할 수 있는 것이 서로 밀접한 관련이 있다고 하였다(Sfard, 2021). 이제 사고와 의사소통의 깊은 관련성을 수용하면, 수학적 사고를 파악하기 위해 의사소통 형태를 관찰할 수 있다. 그리고 대화에서 사용되는 ‘의사소통의 매개체(communication-mediating tools)’와 ‘의사소통의 메타규칙

---

10) Morgan & Sfard(2016, p. 102)는 ‘사회기호학적 관점(social semiotic approach)와 의사소통적 접근(communicational approach)을 결합한 이론적 틀’을 담론적(discursive)이라 부르며, ‘담론적 틀(discursive framework)’, ‘담론적 접근(discursive approach)’의 표현을 사용하였다. 국내 연구자로서는 김원(2019)이 Morgan & Sfard(2016)의 이론을 받아들이고 사회기호학적 관점과 의사소통학적 관점을 통합한 것으로 담론적 관점이라는 용어를 사용한 바 있다. ‘담론적 접근’의 용어에 대해 몇 가지 사용 방식이 존재하지만, 본 연구에서는 Sfard(2014)의 ‘담론적 접근’, ‘담론적 관점’ 용어를 사용한다.

(meta-rules)’으로 수학교육의 일부 현상들을 설명할 수 있다(Sfard, 2001, p. 13)

Sfard(2007, 2008)는 사고가 일종의 의사소통이라는 관점에서 의사소통(communication)과 인지(cognitive)를 결합한 코모그니션(commognition)이라는 용어를 사용하였다. 각 문화를 이해하기 위해 언어규칙을 배움으로써 언어게임에 참여하게 되는 것과 같이 Sfard(2007, 2008)는 서로 다른 규칙에 의해 지배되는 다양한 코모그니션(commognition)이 있으며, 사람들은 각각의 규칙에 의해 지배되는 다양한 유형의 의사소통에 참여하거나 배제될 수 있음을 주장한다. 그리고 이러한 형태의 의사소통을 담론(discourse)이라 하였다. Sfard(2007, p. 573)에 의하면 각 개인은 그들이 속한 의사소통 그룹, 즉 담론 커뮤니티(communities of discourses)에서 의사소통 활동에 참여하게 되며, 학생들은 수학교실에서 의사소통에 참여하면서 수학 담론 커뮤니티의 구성원이 된다. 이러한 입장에서 수학학습은 ‘학습자가 다른 사람 및 본인 스스로와 수학적으로 의사소통하게 되는 과정’으로 여겨진다. 따라서 수학교실에 들어오는 학생들은 수학학습을 하면서 본인의 수학적 담론을 수정하고 변형하며 수학적 의사소통 능력을 향상하게 된다.

Sfard(2007, pp. 571-572)는 수학 담론의 성격을 규정짓는 대표적인 요소로서 단어(words), 시각적 중재자(visual mediators), 내러티브(narrative), 루틴(routines)을 제안하였다. 첫 번째 담론의 요소는 단어이다. 학생들은 수학적 담론에 참여하면서 새로운 수학 용어를 배우고 체계적으로 사용하는 방법을 학습하게 되는데, 이러한 어휘들은 학습자가 수학과 세상을 바라보는 방식에 영향을 주게 된다. 두 번째 담론의 요소는 시각적 중재자로서 그래프나 도형과 같은 그림 뿐 아니라 수식과 표와 같은 수학적 도구들을 모두 포함한다. 학생들은 시각적 중재자를 통해 대상들을 식별할 수 있고, 의사소통을 위한 효과적인 도구로 사용할 수 있다. 세 번째 요소는 내러티브이다. 내러티브는 글이나 말 또는 수학식들로 표현한 수학의 진술들을 의미하는데, 이들은 승인되거나 거부될 수 있다. 마지막 담론의 요소는 루틴으로서 표현 그대로 담론에서 반복되는 패턴을 말한다. 이러한 담론의 요소들을 통해서 수학적 담론의

특징을 파악할 수 있고 학생들의 수학적 사고를 이해할 수 있다.

이렇게 네 가지 성분으로 특징지어진 수학적 담론은 고정불변이거나 유일한 것은 아니다. 수학적 담론은 다양하며, 수학의 역사와 개인 학습자의 관점 모두에서 수학적 사고의 발달은 담론의 변화로 간주된다. 담론의 변화로서의 수학학습은 크게 대상 수준과 메타 수준으로 나눌 수 있다. 대상 수준 학습은 한 담론 안에서의 변화이며 담론의 각 요소들의 변화로서 ‘어휘 확장, 새로운 루틴의 구성, 새롭게 지지된 내러티브의 생산’과 같은 변화이다. 예를 들어 ‘$2+3=5$, $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$, 삼각형의 내각의 합은 180° 이다’와 같은 수학적 진술을 추가하는 것은 대상 수준의 학습이다(Sfard, 2007, p. 572). 반면 메타 수준의 학습은 담론 안에서의 발달이 아닌 기존의 담론과는 질적으로 다른 새로운 담론으로의 전환이다. Sfard는 학생들이 수학학습을 하면서 필연적으로 새로운 담론으로의 전환을 겪게 되지만 담론들이 서로 ‘공약불가능’하기 때문에 의사소통에 어려움을 겪게 되며, 이는 수학학습에 장애요인으로 작용함을 논의하였다(Sfard, 2007, 2008).

수학학습에서 수준의 질적인 도약이 ‘공약불가능한 담론으로의 전환’이라면, 담론이 공약불가능하다는 것은 어떤 의미이며 그 사례는 무엇인지에 대해 의문이 제기된다. 따라서 다음 절에서는 담론의 공약불가능성의 의미와 사례 및 공약불가능성의 원인에 대해 구체적으로 논의한다.

3.2. 담론적 접근의 공약불가능성

공약불가능성은 그리스 시대에 공통단위로 잴 수 없는 양의 발견에서 기원한 용어로서, 1962년 쿤의 패러다임 이론에서의 사용 이후 다양한 분야에서 사용하는 용어가 되었다. 수학교육에서도 Sfard(2007, 2008, 2021)는 수학적 사고의 발달에서 공약불가능한 담론으로의 전환이 필수적임을 제안하면서 공약불가능의 용어를 도입하였다. 그러나 Sfard(2007, 2008, 2021)은 공약불가능성의 용어의 사용에 있어서 쿤과 차별화하기를 원한다. 그 이유는 Sfard(2021)가 보기에 쿤의 공약불가능성은 크게 두

가지 개념적인 문제점을 가지고 있었기 때문인데, 첫째, 쿤의 패러다임은 그 개념이 모호하고 따라서 공약불가능성 역시 어떤 대상 사이에 성립하는 것인지 명확하지 않다. 둘째, 두 대상이 공약불가능하다고 할 때 그 대상이 가진 어떤 측면이 공약불가능성을 유발했는지 원인이 분명하지 않다. 따라서 Sfard(2021)는 첫 번째 불명확한 요소에 대처하기 위해 공약불가능성을 '패러다임'이 아닌 '담론' 사이에 성립하는 것으로 제안하였고, 두 번째로는 담론을 특징짓는 요소인 내러티브를 이용하여, 공약불가능성을 두 내러티브 사이에 성립하는 것으로 정의하였다.

Sfard(2007, 2008)는 두 내러티브 사이의 공약불가능성을 제시하기 위해 Rorty(1979)의 정의를 수용하였다. 우선 Rorty의 지식에 대한 관점을 보자. Rorty는 '자연의 거울로서의 지식'이라는 지식의 관념을 반박하고자 하였다(김희정, 2006, p. 6). '자연의 거울로서의 지식'은 거울이 그 앞에 있는 사물을 정확하게 보여주는 것과 같이 지식이 자연을 정확하게 표상한다는 관점이다. 과거의 지식이론은 어떤 것과 관련된 '불변적인 구조'가 있다는 전제하에, 그러한 불변적 구조 혹은 '개념 틀과 표상'을 찾아내고자 하였지만 Rorty는 그러한 토대를 부정하였다(김희정, 2006 p. 82, p. 97). Rorty는 지식이 '사회, 언어, 문화'에 의해 만들어지기 때문에, 진리를 '동료들에 의해 승인된 언어 표현'으로서, 사람들에게 지식으로 전해지는 것은 '관례와 사회적 습관에 의해 좌우되는 세계관'임을 주장하였다(Southwell, 2013, p. 178).

이러한 지식관을 바탕으로 Rorty는 쿤의 정상과학과 혁명과학을 각각 '정상적인' 담론과 '비정상적인' 담론으로 일반화하였다. 정상적 담론이란 질문에 대한 답으로 적절한 것, 그리고 좋은 논거나 비판으로서 적절한 것이 무엇인지에 대해 동의하는 사람들 사이의 담론이며, 비정상적인 담론이란 그러한 동의와 규약(convention)을 공유하지 않는 사람들 사이의 대화이다(Rorty, 1979, p. 346). Rorty(1979)의 공약불가능성은 비정상적인 담론에서 나타나는 현상이며 정상적인 담론은 공약가능하게 만들 수 있는 상황을 말한다. 다음은 Rorty(1979)는 공약가능성에 대한 설명이다.

공약가능성은 명제들이 갈등하는 것처럼 보이는 모든 점에서 문제를 어떻게 해결할 것인지에 대해서 합리적인 동의에 도달할 수 있는 방법을 알려주는 일련의 규칙을 마련할 수 있음을 의미한다. 이러한 규칙들은 이상적인 상황을 구축하는 방법을 말해주며, 이러한 상황에서 나머지 모든 불일치는 “비인식적인”, 즉 단지 말뿐이거나 일시적인-좀 더 지나면 해결될 수 있는-것으로 보일 것이다. (Rorty, 1979, p. 342)

Sfard는 Rorty(1979)의 공약불가능성을 받아들이면서 공약불가능성의 의미의 명확화를 시도하였다. Sfard(2021)는 공약불가능성을 내러티브 사이의 관계로 규정하면서, 하나의 대상 혹은 하나의 현상에 대한 두 내러티브가 ‘진리’에 대한 규칙을 공유하며, ‘동일한 루틴에 의해 승인가능한 경우 공약가능’하고, 그렇지 않은 경우는 공약불가능하다고 하였다. 이 조건에 의하면 두 내러티브가 서로 다른 담론에 속할 때는 진리를 판단하는 메타규칙이 다르고, 동일한 루틴을 따르지 않기 때문에 공약불가능하다. 그리고 이 정의에 따라 공약불가능한 내러티브들을 포함하는 두 담론 또한 공약불가능하게 된다.

Sfard(2021)는 이러한 담론의 공약불가능성 현상이 그동안 수학교육에서 비교적 중요하게 다루어지지는 않았지만, 분명히 존재하며, 학생들의 사고를 이해하는 데 도움이 됨을 주장하였다. 때때로 수학교실에서 학생과 교사가 모두 적절한 추론 과정에 의한 진술을 하는데, 이들이 서로 모순되는 경우가 있다. 예를 들어, 자연수의 담론에서 사고하는 아동들은 ‘임의의 두 수 a, b에 대해 $a < b$이면 $1/a > 1/b$이다’의 명제를 참이라고 생각하지만, 유리수나 실수체계 입장에서 생각하는 교사들은 이 명제가 거짓이라고 판단한다. 한 명제 A에 대해 모순된 주장을 하는 두 사람이 만약 다른 담론에 속해 있다면 그들은 모두 참이 될 수도 있다. 즉, X 담론의 ‘A이다’와 Y 담론의 ‘A가 아니다’는 모두 참이 되는 경우도 있다. 그리고 이는 공약불가능한 현상의 대표적 사례이다(Sfard, 2021).

Sfard(2021)는 수학적 담론이 공약불가능한 경우를 크게 두 가지로 제시하고 있다. 우선, Sfard(2021)는 본인이 제안한 공약불가능성의 정의에 따라서 X라는 같은 대상에 대해서 말하고 있는 서로 다른 두 개의 내러

티브가 만약 참과 거짓을 판단하는 규칙을 공유하지 못하거나, 혹은 그 참 거짓을 정당화하는 방식이나 루틴이 다른 경우에 두 내러티브가 공약불가능하다고 하였다. 이 대표적인 예는 ‘유한집합 담론’과 ‘무한집합 담론’으로서 두 담론은 공약불가능하다. 그 이유로서 유한집합 담론의 내러티브의 참과 거짓의 판단은 경험적 증거에 의해 이루어지지만, 무한집합 담론의 내러티브의 참과 거짓은 경험으로 판단할 수 없으며 공리와 정리에 따라 판단한다. 즉, 내러티브의 참과 거짓을 판단하는 루틴과 메타규칙이 서로 다르기에 그 내러티브들은 공약불가능하며 공약불가능한 내러티브를 포함하는 담론들 역시 공약불가능하다.

Sfard(2021)는 공약불가능한 담론의 특징으로 ‘같은 단어를 서로 다르게 사용’하는 경우를 들었다. Sfard(2021)는 이러한 담론들의 단어 사용의 차이는 내러티브를 판단하는 규칙의 차이 또한 유발하므로, 본인이 제시한 공약불가능성의 정의에 따라 공약불가능성의 판단에도 사용 가능하다고 하였다. 만약 각각의 담론에서 같은 수학적 대상에 대해 말하고 있지만, 그들이 서로 다른 대상을 지칭하거나 의미하는 바가 다를 때 두 담론은 공약불가능한 상황에 처하게 된다. Sfard(2021)에 의하면 수학학습에서 이러한 사례는 크게 두 가지로 나뉠 수 있다. 첫 번째는 두 담론에서 사용하는 같은 단어가 ‘존재론적 차이가 없는 경우’이며, 두 번째는 두 담론에서 동시에 사용하는 단어 사이에 ‘존재론적 차이’가 있는 경우이다. 첫 번째 공약불가능성의 사례는, 한 담론에서는 사다리꼴을 ‘정확히 한 쌍의 평행한 변을 갖는 것으로 정의’하고 다른 담론에서는 ‘적어도 한 쌍의 평행한 변을 갖는 사각형으로 정의’하는 경우이다. 두 번째 강한 공약불가능성의 사례는, 한 담론에서는 수학적 대상을 플라톤적 실체로서 보는 것이고, 다른 담론에서는 이성에 의해 구성된 대상으로 보는 경우이다.

수학학습에서 공약불가능성의 대표적인 경우는 수 체계의 확장이다. 한 예로, 자연수 담론에서 정수 담론으로의 전환에서 내러티브의 승인 여부가 구체적인 모델 및 경험적 판단에서 공리에 의한 판단으로 바뀐다. 즉 이때 진리를 승인하는 메타규칙이 변화한다. 또한 수는 어떤 물리적 대상들의 모임을 가리키는 것에서 추상적인 대상을 의미하는 것으

로 바뀌며 명제의 참과 거짓 여부가 바뀌기도 한다(Sfard, 2007). 이러한 공약불가능한 담론의 대표적인 사례는 <표 Ⅱ-1>에 제시하였다.

<표 Ⅱ-1> 공약불가능한 담론의 특징과 예 (Sfard, 2021).

담론	사례(1) : D1-자연수 D2-정수	사례(2) : D1-유한 집합 D2-무한 집합
담론들은 입증 루틴에서 다르다(메타규칙의 차이)	D1: 경험적 증거에 기반하여 승인 D2: 공리와의 일관성을 보임으로써 승인	D1: 경험적 증거에 기반하여 승인 D2: 공리와의 일관성을 보임으로써 승인
공통된 용어가 D1와 D2에서 서로 다르게 사용된다.	D2에서는 D1과 달리, 수학적 대상인 수 중에 존재하는 물리적 대상들의 집합을 지시하는 것으로 해석될 수 없는 것이 존재한다.	D2에서는 D1과 달리 수학적 대상인 수 또는 집합 중에, 동시에 존재하는 물리적 대상의 모임으로서 해석될 수 없는 것이 존재한다.
한 담론에서만 발견될 수 있는 대상이 존재한다.	D2는 D1에서는 존재하지 않았던 음수를 포함한다.	D2는 무한집합을 포함하지만, D1은 무한집합을 포함하지 않는다.
담론들 사이에 명백하게 모순된 내러티브들이 존재한다.	‘임의의 두 수에 대해서 만약 $a<b$이면 $1/a>1/b$이다’의 내러티브가 D1에서는 참이지만 D2에서는 참이 아니다.	D2에서는 부분이 전체보다 작다는 것이 더 이상 참이 아니다.

결국 Sfard(2021)의 공약불가능성은 메타규칙의 변화와 수학적 용어 사용의 차이로 정리되며, 그로 인해 모순된 내러티브가 존재하고, 서로 다른 담론에서 사고하는 사람들은 의사소통에 어려움을 겪게 된다.

3.3. 수학적 개념의 존재론적 변화

Sfard(2021)는 수학학습에서 공약불가능성을 일으키는 요소로서 수학 용어 사용의 차이를 제시하고 있다. 본 연구에서는 Sfard(2021)가 제시한

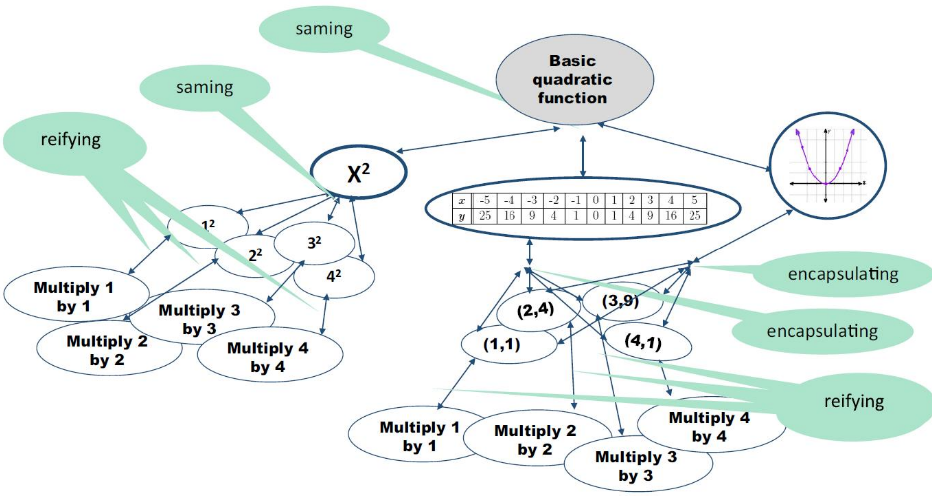
수학 용어 사용의 차이로 인한 공약불가능성 중에 수학적 대상의 존재론적 차이가 있는 ‘강한 공약불가능성’을 분석한다.[11] 존재론적 변화는 과학이론의 연구에서도 그리고 여러 수학학습의 연구에서도 의사소통과 인지적 장애의 원인으로 지적하고 있다. 따라서 본 절에서는 여러 선행 연구들을 검토하여 수학적 대상의 존재론적 범주의 변화가 수학적 담론의 공약불가능성 현상을 유발하는 한 요소임을 확인하고 이를 담론의 공약불가능성의 한 요인으로서 제시하고자 한다.

공약불가능성과 존재론적 변화의 관계를 논의하기에 앞서 수학에서 존재론적 범주란 무엇인지에 대해 정리할 필요가 있다. 일반적으로 수학적 대상의 존재에 대한 논의는 ‘플라톤주의와 반플라톤주의’의 두 가지 경향으로 나눌 수 있다. 플라톤주의는 인간과 독립적으로 수학적 대상이 존재한다는 입장이며, 반플라톤 주의는 수학적 대상이 인간의 마음 또는 사고에 의해 구성되어 존재한다고 보거나 혹은 그러한 대상이 실체로서 존재하지 않는다고 보는 철학적 관점이다(이지선, 2002, p. 3). 또한 플라톤주의와 반플라톤주의 안에서도 각각 수학적 대상의 존재에 대한 세부적인 여러 논의가 존재한다(이지선, 2002, p.8). 이처럼 수학적 대상의 존재에 대한 다양한 주장이 있지만, 본 연구는 수학적 대상의 존재 의미에 대한 철학적인 주장을 하지 않으며 그러한 논의는 본 연구의 범위를 넘어서기 때문에 다루지 않는다.

본 연구에서는 Sfard(2021)의 수학적 대상의 존재의 의미를 받아들인다. 담론적 관점에서는 의사소통에 의해 수학적 대상이 존재하게 된다. 즉, 사람들이 수, 도형, 함수, 집합과 같은 대상에 대해 언급하는 과정에서 수학의 대상이 생성되며, 이러한 관점에서 Sfard(2021)는 수학은 ‘대상을 생성하는 자기 생산적인 시스템(autopoietic system)’이라 하였다. 즉, 의사소통 활동에서 수학적 대상이 존재한다는 것은 플라톤적인 실체

11) 용어의 존재론적 차이가 없는 ‘약한 공약불가능성’은 이론과 담론이 공약불가능하다고 할 때, 어떤 면에서 공약불가능하며 사례가 무엇인지 아직 연구가 충분히 이루어지거나 검토가 되지 않은 것으로 보인다. 본 연구는 수학 및 과학철학의 공약불가능성과의 동일한 맥락에서 수학교실의 공약불가능성을 논의할 것이므로, ‘약한 공약불가능성’에 대해서는 논의하지 않는다.

로서의 존재성을 의미하기보다는 담론의 대상으로서 '대상화(Objectification)' 됨을 뜻한다(Sfard, 2021). '대상화'는 기존 담론에서 의사소통을 통해 새로운 대상이 만들어지는 과정이다. '대상화' 과정은 세 단계 '실재화(reification)', '동일시 하기(saming)', '압축(encapsulating)' 으로 이루어진다. 우선 실재화는 과정으로서 받아들이던 것을 하나의 개체로서 생각하는 것이며, '동일시 하기(saming)'는 이전에는 같은 범주에 속하지 않았던 개체들에서 공통점을 찾아내어 하나의 범주로 묶고 새로운 이름을 붙이는 과정이다. 마지막으로 압축은 여러 가지 대상을 하나로 통일하여 인식하는 과정이다(Sfard, 2021). Sfard(2021)는 이러한 '대상화 과정'을 아래와 같이 도식화하였다.



[그림 Ⅱ-10] 이차함수의 대상화 (Sfard, 2021)

이렇게 담론적으로 구성된 수학적 대상들은 서로 관계를 맺게 된다. 예를 들어 자연수 1, 2, 3, …과 같은 대상들은 앞의 수 다음에 다음 수를 제시할 수 있는 순서관계를 가지며, 자연수 집합과 정수 집합은 포함관계를 갖고, 그들은 또한 어떤 범주에 포함된다. 자연수 집합과 정수 집합은 '집합'이라는 큰 범주 안의 '수들의 집합'이라는 또 다른 범주 안에 포함된다. 또한, 삼각형, 사각형과 같은 대상들은 도형, 평면도형이라는 범주 안에 포함된다. 이러한 범주 형태 이외에도, 수학적 대상

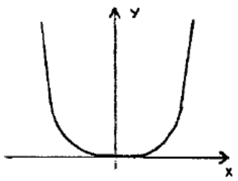
들은 ‘과정(process)’과 ‘대상(object)’의 범주로서도 구분할 수 있다. 이렇게 범주 형태와 구조에 대해서는 여러 가지 제안이 가능하지만, 수학적 대상들이 각각 관계없는 독립적인 개체들이 아닌 서로 관계를 맺고 있으며 어떤 범주 안에 포함된다는 사실은 분명하다. 본 연구에서는 담론적으로 존재하게 되는 수학적 대상들이 속한 범주를 ‘수학적 대상의 존재론적 범주’라고 부를 것이다.

이러한 존재론적 범주의 변화는 수학학습에 영향을 끼친다. 존재론적 범주의 변화와 학습의 관계에 대해서는 주로 과학개념을 중심으로 논의되어 왔다. 천현득(2014)은 과학개념의 중요한 메타정보의 하나로서 존재론적 범주를 주장하면서, 과학혁명 시기의 개념변화 현상은 존재론적 범주의 변화와 밀접하게 관련되어 있음을 주장하였다. 그리고 Chi(1992)와 Chi et al.,(1994)은 학생들이 과학학습에서 한 존재론적 범주에서 다른 존재론적 범주로의 이동의 경우 학습이 어렵고 오개념이 발생할 수 있다고 주장하였다. Chi(1992)는 [그림 Ⅱ-9]의 존재론적 범주의 모델을 제시하면서, 물질(matter), 사건(events)과 추상적 개념(abstractions)을 서로 다른 범주로 구분하였다. Chi의 모델에서 물질(matter)의 범주는 자연종(natural kind), 식물, 동물, 인공물과 같은 것들을 포함하며, 사건(events)의 범주는 우연히 발생하는 사건, 자연적으로 발생하는 사건 등을 포함한다. Chi(1992, p. 136)는 어떤 과학개념을 학습할 때, 학생들이 물질(matter)로 생각했던 개념을 사건(event)의 범주로 인식하고 존재론적 범주의 이동을 해야 하지만 그러한 이동이 일반적으로 쉽지 않음을 제시하였다.

이러한 존재론적 범주의 변화는 그동안 수학교육 연구에서 많이 강조되어 오지 않았지만, 일부 연구들에서는 학생들의 사고를 이해하기 위해 존재론적 범주를 고려해야 함을 강조한 바 있다(Sfard, 1991, Carey, 2009, Lehtinen et al., 1997). 본 연구 역시 담론의 공약불가능성의 한 요인으로서 ‘수학적 대상의 존재론적 변화’를 제시한다. 즉, 담론 사이에 수학적 대상의 존재론적 변화가 있을 때 담론은 공약불가능하고 제안한다.

학습자의 수 개념발달은 수학학습에서 존재론적 범주의 변화가 필요한

대표적인 사례이다. Sfard(1991, p. 6)에 의하면 수학 개념들은 본질적으로 조작적 및 구조적인 ‘이중적인 본성(dual nature)’을 갖고 있다. 예를 들어 $y=3x^4$의 함수는 그래프, 대수적 표현, 혹은 입력과 출력의 컴퓨터 프로그램의 서로 다른 세 가지 관점으로 바라볼 수 있다. 이때 컴퓨터 프로그램 표현의 경우 x값에 수를 대입함에 따라 y의 값이 산출되므로 동적인 ‘과정’으로서 생각되는 경향이 있다. 반면 그래프의 표현은 정적인 형태로 보인다. 즉, 함수에 대해 조작적인 관점과 x와 y의 두 값 사이의 정적 관계인 구조적 관점 모두 해석 가능하다.

Graph	Algebraic expression	Computer program
	$y = 3x^4$	10 INPUT X 20 Y = 1 30 FOR I = 1 TO 4 40 Y = Y * X 50 NEXT I 60 Y = 3 * Y

[그림 Ⅱ-11] 함수 개념의 다양한 측면(Sfard, 1991, p. 6)

이처럼 많은 수학적 개념들은 ‘과정’의 조작적 측면과 ‘대상’의 정적인 측면을 동시에 갖고 있다(Sfard, 1991). 특히 Sfard(1991)는 역사적 고찰을 통해 현재 정적인 ‘대상’으로 생각되는 많은 수학적 개념들이 익숙한 대상들을 조작하는‘과정’으로부터 유래된 것을 확인하였다. 예를 들어 자연수, 정수, 유리수와 같은 수들도 현재와 같은 형태로 형식화되기 전에 먼저 ‘과정’으로 다루어졌다. 어린이들은 세는 활동을 통해‘하나, 둘, 셋’의 숫자들을 학습하고, 이후 자연수라는 구조화된 개념을 갖게 되며, 자연수를 수학적 대상으로 볼 수 있게 된다. 유사하게 ‘유리수’ 개념은 수학사에서는 비의 계산, 그리고 학교 수학에서는 나눗셈 연산이라는 조작적인 ‘과정’으로 시작되었다. 마찬가지로 무리수와 허수 또한 역사적으로나 현재 수학학습에서도 조작으로부터 시작된다. 그러나 이렇게 ‘과정’을 ‘대상’인 ‘수 개념’으로 인식하는 일

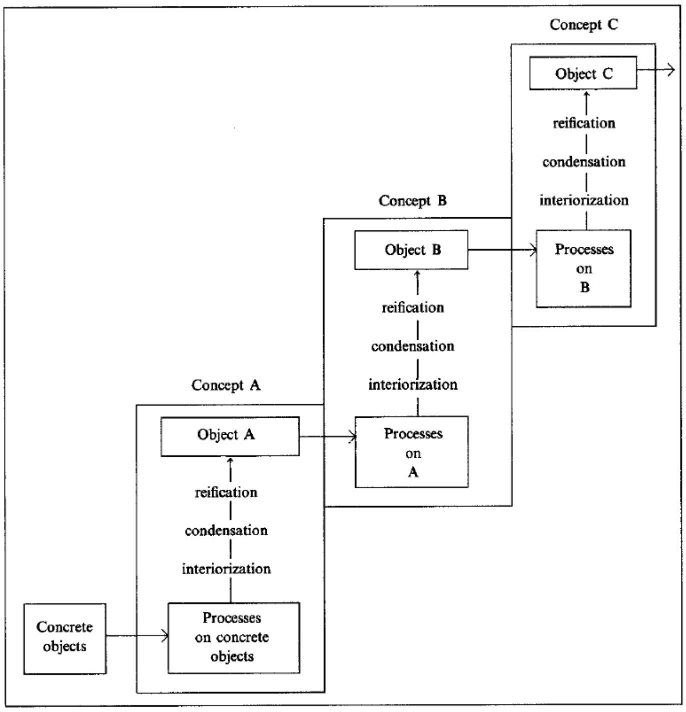
은 결코 쉽지 않다. Sfard는 13세 학생들이 나눗셈 연산의 결과를 분수로 표현할 수 없는 현상을 보고한 Carpenter et al.(1980)의 연구를 제시하며 이를 ‘과정’에서 ‘대상’으로의 전환이 어려운 사례로서 언급하였다. 수학사에서도 카르다노가 방정식의 풀이에서 음의 제곱근을 사용한 바 있지만, 대상으로서의 허수를 받아들이기 어려워했음은 잘 알려져 있다. Jourdain이 ‘허수’, ‘i’를 ‘그것은 연산을 나타내며, 음수가 하는 것과 같지만 종류가 다르다’라고 언급하며 ‘허수’의 조작적인 측면은 받아들이지만 대상으로서 받아들이지 못한 사례 또한 알려져 있다(Sfard, 1991, p. 11-13)

〈표 Ⅱ-2〉 수학적 개념의 구조적, 조작적 성질(Sfard, 1991, p. 5)

	구조적	조작적
함수	순서쌍의 집합	계산 과정 또는 한 시스템에서 다른 시스템으로 보내는 잘 정의된 방법
대칭	기하학적 도형의 특징	기하학적 도형의 변환
자연수	집합의 성질 또는 동일한 유한 cardinality의 모든 집합의 class	0 또는 다른 자연수에 1을 더함으로써 얻어진 임의의 수(세는 것의 결과)
유리수	자연수의 쌍(특별히 정의된 쌍의 집합의 구성원)	자연수의 나눗셈[의 결과]
원	주어진 점으로부터 같은 거리에 있는 점들의 자취	고정된 점을 중심으로 컴퍼스를 회전시킴[으로써 얻은 곡선]

수학사에서 그리고 수학학습에서 이미 알고 있는 대상을 조작적으로 다루며, 그 조작을 새로운 대상으로 보기까지 시간과 노력이 필요하긴 하지만 결국 받아들이게 된 사례들을 찾을 수 있다. 이처럼 수학 개념의 발달은 익숙한 대상을 이용하여 조작을 하고, 그 조작이 능숙해지고, 이후에는 조작을 전체적으로 보게 되며 하나의 대상으로서 받아들이는 과정을 거치게 된다. 이 과정을 내면화(interiorization), 압축(condensation), 실재화(reification)라고 부른다(Sfard, 1991, p. 18). Sfard(1991, p. 20)는

이 세 단계에서 내면화와 압축은 점진적인 과정이지만, 실재화는 과정이 구조가 되며 특정한 한 범주의 구성원이 되는 단계로서 '순간적이고 질적인 도약'으로서 설명하였다. 실재화 단계를 거치면서 '새로운 개체는 그것을 생산한 과정으로부터 분리되고, 새로운 범주의 구성원'으로서 지위를 갖게 된다. 즉 실재화는 일종의 '존재론적 도약'이다. 예를 들어, '2-5' 혹은 '0-6'과 같은 뺄셈 연산이 익숙해지고 내면화된 이후 음수를 하나의 수학적 개체로 보게 되고, 함수도 조작이 친숙해지고 숙달되는 내면화와 압축의 과정을 거쳐 하나의 수학적 대상으로 보는 실재화 과정을 거치게 된다. 이와 같은 실재화는 수학적 '과정'이 하나의 '대상'으로서 받아들여지는 '존재론적인 전환'의 사례이다.[12)]



[그림 Ⅱ-12] '과정'에서 '대상'으로 개념 형성 모델(Sfard, 1991, p. 22)

이처럼 수학의 역사에서도 수학학습에서도 과정에서 대상으로의 존재

12) 천현득(2016)은 '대상'과 '사건'이 존재론적으로 다른 범주에 속함을 말하였다. '사건'과 '과정'은 시간을 관통하며 일어나고 발생하는 것으로 유사한 개념이다.

론적 범주의 이동이 발생한다. 그리고 Sfard(1991, p. 30)는 실재화 과정, 즉 수학사와 수학학습에서 발생하는 '과정'에서 '대상'으로의 존재론적 변화는 과학이론이 한 패러다임에서 다른 패러다임의 이론으로의 변화에 견줄 정도로 어려운 일임을 언급하였다. 수 개념의 '과정'과 '대상'으로서의 '이중적 본성' 및 '과정'에서 '대상'으로의 존재론적 도약으로 인한 학습의 어려움은 과학학습에서 대상과 사건의 존재론적 범주의 변화로 인한 개념 학습의 어려움과 일관된 설명을 보인다.

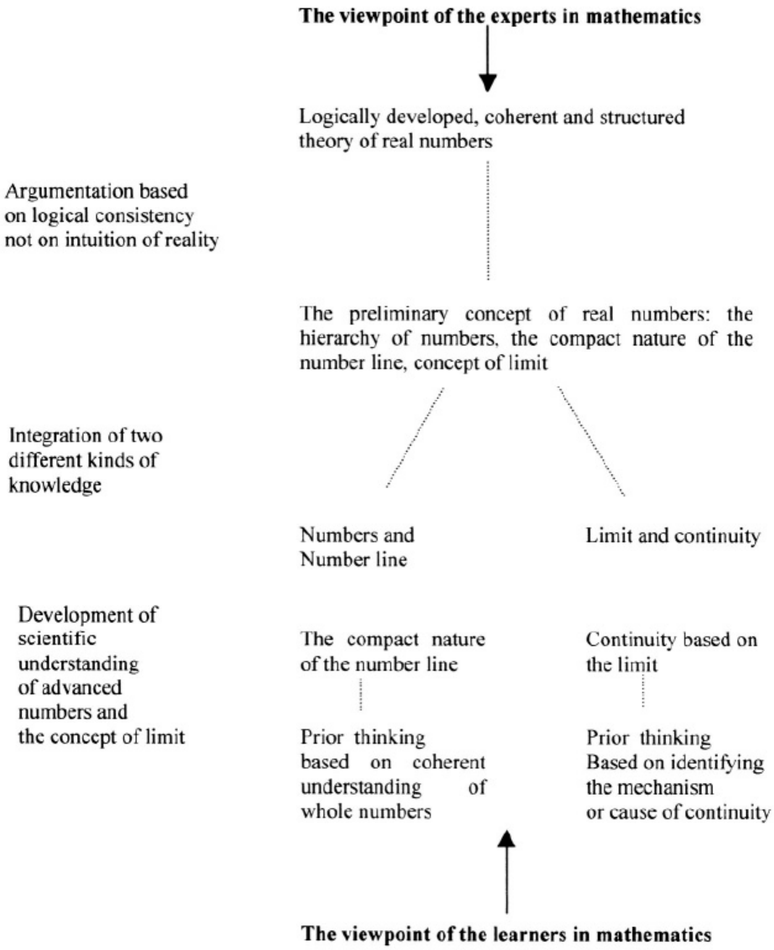
비단 Sfard(1991)뿐만 아니라 선행 연구들은 자연수와 유리수 또는 정수와 분수가 존재론적으로 다르기 때문에 수학학습에 어려움을 겪는다는 것을 논의해왔다. Carey(2009)는 수학적 사고의 발달에서 자연수와 유리수 개념이 불연속이며 공약불가능함을 주장하였다. 특히 Carey(2009)는 지식의 확장(knowledge enrichment)과 개념의 변화(conceptual change)를 구분하면서, 수학학습에서도 지식의 확장 및 개념변화 현상이 존재함을 주장하며, 개념변화를 공약불가능한 이론으로의 전이로서 설명하였다. Carey(2009)와 Smith et al.(2005)에 의하면 지식의 확장은 기존의 개념의 신념이나 '개념 구조 망'의 변화가 없는 경우이며, 개념 변화는 핵심적인 내용의 변화와 '지식들의 합체, 분화'가 일어나며 기존의 개념들의 '관계 구조'가 변하는 경우이다. 예를 들어 어떤 개념의 하위 범주가 추가되는 경우는 지식의 확장이다. Carey(2009)는 자연수 체계에서 유리수 체계로의 학습이 이러한 개념변화 현상의 한 사례이며, 자연수와 유리수의 이론은 서로 공약불가능함을 주장하였다. 유리수 학습 이후에도 학생들은 자연수 개념을 여전히 갖고 있으며, 자연수의 기본 아이디어는 유리수를 배운 이후에도 여전히 사용되기 때문에 유리수는 자연수를 단순히 확장한 체계로 여겨질 수 있다. 그러나 Carey(2009)는 유리수 학습은 단순히 수체계의 확장이 아닌 수에 대한 재개념화가 이루어지는 것으로 보았다. Carey(2009, pp. 353-354)에 의하면 자연수 개념만 가진 어린이에게 수는 하나씩 세는 행동과 관련이 있으며, 1/2은 수가 아니었다. 이 어린이에게 1과 1/2은 전혀 다른 대상이며, 두 개의 자연수 사이에 또 다른 수는 존재하지 않았다. 1/2를 숫자로 인식하는 어린이들도 0

과 1 사이에는 무한하게 많은 유리수가 존재한다는 사실을 모르고, 따라서 나눗셈을 몇 번 시행하면 0이 된다고 생각하기도 하였다. 자연수에서 유리수로의 학습에서 숫자의 의미 변화가 발생하고, 또한 수 개념 구조의 재구성이 발생한다. Carey(2009)는 이러한 수 개념의 발달을 공약불가능한 개념으로의 전환으로 설명하면서 '지식확장'과는 다르다고 하였다. Smith et al.(2005, p. 134)는 지식 확장의 한 예로 '개'의 개념을 알고 있는 어린이가 '개'의 종류인 '푸들, 닥스훈트'와 같은 품종을 알게 되는 사례를 제시하였다. 또 다른 개의 품종이 있다는 사실을 인지하는 것은 개에 대한 개념의 구조를 변화시키지 않는다. 새로운 개의 종류에 대해 알게 되었지만, 꼬리를 흔들거나, 개의 사료를 먹고, 새끼를 낳으며, 가정에서 애완동물로 키운다는 개의 특징의 변화 또한 일어나지 않았으며 단지 생김새가 다른 개의 하위 범주인 품종이 추가되었을 뿐이다. 이때 범주를 가로지르는 이동이나 범주들의 통합이 발생하지 않았다. Smith et al.(2005, p. 134)은 이와 대조적으로 자연수에서 유리수로의 개념 변화는, 숫자의 의미가 '세는 것'에서부터 '나눗셈'의 결과로 변하며, 기존에 없었던 1/3은 3과 동등한 숫자가 됨을 말하였다. 3과 1/3 모두 숫자로 간주되고, 이전에는 '세는 것'으로 생각되던 자연수는 연속적인 수 체계의 한 점을 차지하는 개체라는 새로운 관점을 갖게 된다. 또한 '나눗셈 연산이 뺄셈과 구별'되며 연산 체계에서의 세분화 또한 일어난다. Vosniadou et al.(2008, p. 3)은 이러한 Carey의 개념변화는 한 개념을 '다른 존재론적 범주에 재할당하거나 새로운 존재론적 범주의 생성'을 포함하는 경우임을 말하였다. 즉, Carey(2009)가 개념체계(conceptual system) 사이의 공약불가능성의 사례로 제시했던 개념변화(conceptual change)는 존재론적 범주의 변화가 발생하는 변화이다.

Merenluoto & Lehtinen(2002)는 공약불가능성을 직접적으로 언급하지 않았지만, 학습자의 개념발달에서 불연속적인 발달과정이 존재하고 이때 개념의 분화와 통합이 발생함을 주장하였다. 특히 Merenluoto & Lehtinen(2002)은 유리수에서 실수로의 수 개념 확장 과정에서 서로 다른 두 종류의 지식인 이산과 연속이 하나의 개념으로 통합되는 범주의 변화가 일어남을 논의하였다. [그림 Ⅱ-13]은 Merenluoto & Lehtinen(2002)가 제시한 실수 개념 학습의 존재론적 변화의 양상이다. Merenluoto &

Lehtinen(2002)은 실수 개념의 학습에서 학생들은 물질 기반 추론을 포기하고, 추상적인 수학지식으로 변환을 하게 되는데 이때 단순히 개념을 추가, 삭제하거나 일반화하는 과정은 추상적인 사고로 전환을 유도하기 어렵다고 하였다. 실수 학습은 구체적이고 물리적인 사고가 아닌 논리적 일관성을 기준으로 추론하고 숫자를 새로운 존재론적 범주로 재할당해야 한다. 또한 학생들은 기존에 운동 기반의 연속의 개념을 포기하고 실수 연속체라는 새로운 연속 개념을 접하게 되며, 자연수와 유리수는 실수의 하위 범주에 위치하게 된다.

이처럼 선행 연구자들은 존재론적 범주와 학습의 관계에 대해 언급했으며 이들을 공약불가능 현상으로서 제시하기도 하였다. 특히, ‘과정’에서 ‘대상’으로의 존재론적 범주의 변화, 또 실수 개념의 학습에서 이산과 연속성 개념의 결합과 같은 존재론적 범주의 결합, 유리수 개념의 학습에서 연산 개념의 분화와 수 개념의 존재론적 변화와 같은 사례들은 존재론적 범주의 변화가 수학학습에서 종종 피할 수 없는 과정일 뿐 아니라, 이들은 단순히 개념을 추가하는 수준이 아닌 개념 구조의 전반적인 변화로서 개념변화 현상이 쉬운 일이 아님을 보여준다. 따라서 본 연구에서는 이와 같은 존재론적 범주의 변화를 수학교육 현장에서 이전 개념과 근본적으로 다른 개념변화 현상, 즉 담론의 변화 현상으로서 중요하게 다루어져야 함을 제안하며 이를 공약불가능성의 한 사례로서 제시한다.



[그림 Ⅱ-13] 실수 개념에서 존재론적 변화(Merenluoto & Lehtinen, 2002, p. 253)

3.4. 메타규칙의 변화

쿤의 패러다임 이론에서 공약불가능성의 한 종류인 방법론적 공약불가능성은 해결해야 할 문제와 그 해결 방법에 대해 이론 사이에 불일치가 존재하는 현상을 말한다. 이는 패러다임들이 기본적으로 가정하고 있는 모형이 변화하기 때문이다. 예를 들어 데카르트의 존재론적 모형은 '세계 속의 모든 일은 물질들과 그들 사이의 직접적인 충돌에 의해 일어난다'라고 설명하고 뉴턴의 모형은 '세계 속의 모든 일은 물질들, 그들 사이에 작용하는 힘, 그리고 운동에 의해 일어난다'고 말한다. 따라서

이 두 이론은 사건 또는 일의 존재와 발생에 대한 기본 가정이 다르므로 해결해야 할 문제나 해결 방법이 달라진다. 대표적으로 데카르트에게 ‘중력’ 현상은 합리적인 설명이 필요한 문제였지만 뉴턴에게 ‘중력’은 다른 설명이 필요하지 않은 당연한 현상으로 여겨졌다(조인래, 2018, pp. 140-141). 따라서 패러다임이 바뀌면 어떤 이론이 더 합리적인가, 훌륭한 이론인가에 대한 판단 기준 또한 변할 수밖에 없다. 데카르트주의자에게는 지구와 태양 사이에 인력이 작용하여 서로를 끌어들인다는 뉴턴의 주장은 그들의 존재론적 모형이라는 판단 기준에 맞지 않기 때문에 비과학적으로 여겨졌다(장하석, 2014, p. 129). 즉 쿤의 공약불가능성의 한 측면인 방법론적 공약불가능성은 이론이 변함에 따라서 판단 기준에 변화가 생기는 현상으로도 볼 수 있다.

수학에서 쿤의 방법론적 공약불가능성과 유사한 논의를 Kitcher(1984)에서 찾을 수 있다. Kitcher(1984)는 쿤의 패러다임의 변화로서의 과학사의 설명에서 패러다임과 혁명의 개념을 제외하여 수정된 버전의 수학사의 설명을 제시하였다.[13] 그는 수학의 발달이 단순히 지식의 축적들로만 이루어진 것이 아니라 과학이론과 같이 이론의 수정과 변화 또한 발생한다는 설명을 하면서, 수학의 변화를 ‘언어, 수학적 관점, 수용된 질문들, 수용된 추론들, 수용된 진술’들의 변화로 설명하였다. 즉, Kitcher(1984, p. 163)에 의하면 수학적 변화는 <L, M, Q, R, S>로부터 <L’, M’, Q’, R’, S’>로 수학적 관행의 변화이다. 이때, 메타수학적 관점은 ‘(i) 증명을 위한 기준 (ii) 수학의 범위 (iii) 수학적 분야의 순서 (iv) 특정 유형의 탐구에 대한 상대적 가치’를 포함한다(Kitcher, 1984, p. 189). 즉, 증명으로서 무엇을 받아들일 것인가에 대한 기준, 즉 어떤 것이 합리적인 추론인가에 대한 설명 또 어떤 것이 수학의 범위에 포함되는지 여부, 수학적 질문으로 적절한 것인지 아닌지, 수학적 탐구에 대

13) Kitcher(1984)는 쿤의 패러다임 이론이 과학의 역사를 불연속적인 시기로 나누고, 다른 요소들에 비해 ‘패러다임’의 변화가 더 근본적이라고 주장한 것을 이유로 쿤의 이론을 그대로 수학의 역사에 적용하는 것을 반대하였다. 그러나 Kitcher(1984)는 쿤의 혁명적인 관점은 수용하지 않지만, 과학사의 단순하지 않은 복잡한 변화에 대한 그림은 수용하여 수학의 변화를 관행의 변화로써 설명하였다.

한 가치의 판단 방식과 같은 것이 메타수학적 관점이다(Kitcher, 1984).

이들 메타수학적 관점은 쿤의 패러다임의 변화에서 방법론적 공약불가능성의 요소에 대응된다.[14] 실제로 Kitcher(1984)는 본인이 제시한 메타수학적 변화는 쿤의 과학혁명기의 변화와 유사한 변화를 가져옴을 제안하였다. 증명의 기준이나 수학으로 무엇을 받아들일 것인지에 대한 관점의 변화가 있을 때, 단지 한 부분의 변화가 아닌 수학 전반에 변화를 가져온다.

한편, 담론적 접근에서 수학적 사고는 의사소통의 일종이다(Sfard, 2007, 2008). 이러한 의사소통의 관점에서 수학학습을 바라볼 경우, 담론의 규칙이 중요하다. 특히 언어와 사고의 관계를 중요시하는 입장에서는 언어의 규칙의 역할을 강조한다. 비트겐슈타인은 지식은 어떤 대상들에 ‘이름표’를 붙여서는 얻을 수 없고, 세계와 언어를 연결하는 ‘언어규칙’을 통해 얻을 수 있다고 하였다. 즉, 지식을 얻기 위해서는 지식을 표현하는 ‘언어규칙’을 배워야 하고, 만약 이러한 언어규칙을 배우지 못한다면 지식에 이르지 못할 뿐만 아니라 잘못된, 혹은 혼란스러운 질문 속에서 방황하게 된다. 예를 들어, 라일이 제시한 예인 옥스퍼드 대학교에 방문하여 도서관, 강의실 등의 각종 시설을 둘러본 후에 이제 ‘대학교’가 어디 있는지를 질문하는 것은 언어 사용 규칙을 정확하게 습득하지 못하여 오류를 범하는 대표적인 경우이다[15](Southwell, 2013, 177-178).

셀라스는 모든 인지적 활동은 언어와 관련이 있다고 보았으며(김희정, 2006, p. 114), 언어가 특별한 이유는 언어가 ‘우리의 경험을 변화시키거나’, ‘의식의 새로운 장을 열거나’ ‘내적인 변화를 일으키기 때문’이 아니라고 하였다. 그는 언어가 특별한 이유는 언어를 배움으로써 그 언어를 사용하는 공동체의 구성원이 되기 때문이라 주장하였다. 즉, 언어를 학습하면서 공동체 속에 들어가게 되고, 다른 구성원들과 정당화의 규칙을 공유하게 되며, 그 규칙이 규제하는 활동에 참여할 수 있게

14) Kitcher(1984)는 수학에 공약불가능성의 이론을 적용하는 것은 반대한다. 그럼에도 불구하고 메타수학적 관점의 변화가 쿤의 과학혁명의 사례와 유사함을 제시한다.

15) 라일은 이러한 사례를 ‘범주 오류’라고 불렀다(Southwell, 2013)

된다(Rorty, 1979, pp. 204-206). 이처럼 사고와 인지의 관계를 중요시한 관점에서는 언어의 학습에서는 언어 규칙을 학습하는 것이 중요하며, 이러한 규칙을 습득하면 그 사회의 일원이 된다.

수학교육에서 의사소통적 접근을 강조한 Sfard(2021)는 유사한 관점에서 '메타규칙'을 사용하였다. 비트겐슈타인의 언어게임에서 언어규칙이 존재하는 것과 같이 각 담론에는 담론을 지배하는 '규칙'이 존재한다. Sfard(2008, pp. 201-202)는 수학학습에서 요구되는 담론의 규칙은 '대상 수준 규칙'과 '메타 수준 규칙'의 두 가지 종류가 있음을 제안하였다. '대상 수준 규칙'은 수학적 대상에 적용되는 규칙이며, '메타 수준 규칙'은 대상에 대한 내러티브의 참과 거짓을 판단하는 규칙이다.[16] 예를 들어 자연수와 정수의 담론의 메타규칙은 수학적 진술의 참과 거짓을 경험적으로 결정하지만, 무한집합은 정리와 공리에 의해 진술을 판단을 한다. 메타규칙이 다를 경우 수학적 진술에 대한 판단 기준이 달라지며, 수학의 전반적인 게임의 규칙이 달라지게 되어 같은 체계 안에서 사고하고 있다고 말하기 어렵다. 즉 그들은 공약불가능한 상황에 있게 된다. Sfard(2007, 2008)는 메타규칙이 서로 다른 담론들은 공약불가능하며, 서로 다른 메타규칙은 코모그니티브 갈등(commognitive conflict)의 원인이 될 수 있음을 설명한 바 있다.

Sfard(2007, 2008)의 메타규칙은 그 적용 맥락에서는 차이가 있지만 쿤(1962)의 방법론적 공약불가능성' 및 Kitcher(1984)의 메타수학적 관점과 유사하다. 또한 쿤이 제안한 '방법론적 공약불가능성'은 과학혁명 시기의 특징이며, Kitcher(1984)는 메타수학적 관점의 변화가 수학사에서 과학혁명에 견줄 정도로 대규모의 변화를 유발함을 주장한 바 있다. 즉, Kuhn의 방법론적 공약불가능성과 Kitcher(1984)의 메타수학적 관점의 논의는 Sfard(2007, 2008, 2021)가 제시한 담론의 '메타규칙'의 변화가 공약불가능성의 한 원인으로 작용할 수 있음을 뒷받침하는 좋은 근거로 보인다.

16) 대상 수준 규칙과 메타 수준 규칙은 상대적인 것으로서 한 담론에서 대상 수준이었던 것이 다른 담론에서는 메타 수준의 규칙이 되기도 한다(Sfard, 2008).

4. 공약불가능성 논의의 결론

수학교육 현장에서 학습자와 교사 사이에, 학습자와 교과서, 교육과정 사이에, 혹은 학습자와 학습자 사이에 서로의 관점에 동의하지 않을 뿐 아니라, 의사소통이 조화되지 못하고 서로 평행선을 그리는 사례를 볼 수 있다. 이러한 현상을 과학사나 사회과학 등의 분야에서는 그들의 이론 혹은 담론이 서로 공약불가능하다고 말한다. 본 절에서는 학교수학의 이러한 사례에 대해 파악하고자 우선 공약불가능성이란 무엇인가, 어떤 경우에 공약불가능한 현상이 발생하는가에 초점을 맞추어 이론적 탐색을 하였다. 우선 공약불가능성의 어원이 되는 그리스의 공약불가능성의 의의를 확인하고, 이 용어의 철학적 의미, 수학교육에서 의미하는 바에 대해 여러 연구의 논의를 검토하였다. 공약불가능성에 대한 논의의 결론은 다음과 같다.

첫째, 우선 어떤 분야에서든지 공약불가능성은 후속 이론이 이전 이론의 단순한 확장이 아니라, 이전 이론과는 근본적으로 다른 개념의 변화가 따라올 때 발생한다. 그리스 시대의 공약불가능한 양의 발견은 모든 양은 정수비로 표현될 수 있다는 믿음의 붕괴를 가져왔다. 이는 단순히 유리수로 표현될 수 없는 양이 존재한다는 사실의 발견에서 끝나지 않았으며, 수학에서 무한에 대해 추론을 하게 되었고 경험적인 수학이 아닌 추상적 이론으로의 전환이라는 수학 자체의 근본적인 변화를 가져왔다. 따라서 시각적 다이어그램의 역할도 변화하였으며 수학적 대상이 존재한다는 의미가 무엇인지에 관한 질문의 중요성에 대한 인식을 가져왔다. 쿤의 이론에서는 서로 다른 패러다임 사이에 공약불가능성이 존재하며, 이는 두 이론을 나누는 중요한 핵심 요소이다. 공약불가능성 현상이 없다면 두 패러다임을 구분할 이유가 없기 때문이다(조인래, 2018). 또한, 수학학습에서도 공약불가능성은 서로 다른 담론 간에 발생하는 현상이다. 따라서 담론 내의 변화가 아닌 담론을 넘어서는 불연속적인 도약이 발생할 때 존재한다. 즉 공약불가능성은 두 이론 혹은 두 담론들이 단순한 확장의 관계가 아닌 근본적으로 다른 질적인 차이가 존재하는 경우를 말한다.

둘째, 담론 사이의 수학적 대상의 존재론적 범주의 변화는 공약불가능성을 유발한다. 쿤의 공약불가능성의 한 측면인 의미론적 공약불가능성은 후기에 분류학적 전환으로 정리되었다. 천현득(2016)은 쿤의 과학혁명 시기의 '분류학적 전환'으로서의 개념변화가 '존재론적 변화'로 일반화될 수 있음을 제안하였다. 패러다임의 변화에서 한 개념의 존재론적 범주가 변할 때, 기존 범주의 속성들을 포기하고 새로운 범주의 속성들을 수용해야 하는데 이는 인지적으로 부담이 큰 어려운 일이다. 존재론적 범주의 변화가 학습자에게 상당한 인지적 부담으로 작용하는 것을 기존 수학교육 연구를 통해서도 확인할 수 있다. 함수 및 수 개념의 발달에서 '과정'을 '대상'으로 인식해야 하는 존재론적 범주의 변화는 이의 대표적 사례이다(Sfard, 1991). 또한 존재론적 변화는 개념의 통합, 세분화뿐만 아니라 전체 개념의 구조를 변경하기도 한다(Carey, 2009). 연속성의 개념이 그와는 전혀 관계가 없었던 극한 개념으로 정의되며, 실수 개념의 학습에서는 이산과 연속의 개념이 통합되고, 자연수는 실수의 하위 집합으로서 포함되기도 한다. 이렇게 존재론적 범주의 변화는 수학에서 근본적인 개념과 이론 변화에서 발생하는 현상이며 공약불가능성의 한 사례로서 수학 교수학습에서 중요하게 다루어져야 한다.

셋째, 메타규칙은 담론의 공약불가능성의 주요 원인이다(Sfard, 2007, 2008). 특히 이는 Kuhn(1962)의 방법론적 공약불가능성 및 Kitcher(1984)의 메타수학적 관점 변화의 설명으로 뒷받침된다. Kuhn의 방법론적 공약불가능성은 이론이 변화할 때, 어떤 문제가 해결되어야 하는지, 어떤 방식으로 해결되어야 하는지에 대한 관점이 달라짐을 의미한다(조인래, 2018). 그리고 이는 과학의 패러다임 변화에 따른 의사소통의 문제, 상호이해의 어려움을 유발하는 중요한 요인이다. Kitcher(1984) 또한 이와 유사한 논의로서 메타수학적 관점에 대해 언급한 바 있다. '어떤 방법이 증명으로서 적절한가?' '어떤 종류의 수학적 탐구가 가치 있는가?' 등을 판단하는 것이 메타수학적 관점이다. Kitcher(1984)는 메타수학적 관점이 수학의 이론 전개 전반에 영향을 미치기 때문에 메타수학적 관점의 변화는 패러다임 변화와 유사하게 대규모의 변화를 유발한다고 하였다. Sfard의 메타규칙의 변화는 문제 해결 방식, 이론 사이의 정당화 방식과

담론을 지배하는 규칙을 의미하며, 쿤의 방법론적 공약불가능성과 Kitcher의 메타수학적 관점과 유사한 개념이다. 따라서 쿤과 Kitcher의 논의는 메타규칙의 변화가 담론의 공약불가능성의 원인이 됨을 뒷받침한다.

과학사 및 수학학습 또한 기타 분야에서 공약불가능성이라는 표현이 제시되는 것은 일반적으로 서로 다른 이론을 이해하기 어려울 때, 사람과 이론 사이에 혹은 사람과 사람 사이에 일시적이지 않은 의사소통의 문제가 발생하는 경우이다. 이는 금방 해결될 수 있는 문제가 아니기에 수학학습에서 공약불가능한 현상을 분석하고 해결하는 것은 수업을 계획하고 진행하는 교사, 그리고 수학교육 연구자 모두에게 중요한 과제이다. 즉, 공약불가능성 현상이란 구체적으로 무엇이며, 언제, 어떤 요소에 의해 발생하는지 분석하는 것은 학습자의 발달을 돕기 위한 중요한 과제이다. 본 장에서는 이러한 문제의식을 갖고 공약불가능성에 대한 이론적 탐색을 하였으며 그 결과 위의 세 가지 결론을 얻었다. 즉, 공약불가능성은 이론 사이의 질적 도약이 존재할 때, 존재론적 변화와 메타규칙의 변화가 수반될 때 발생함을 확인하였다. 물론 본 연구는 공약불가능성이 비단 이들 요소만으로 발생된다고 한정하는 것은 아니다. 그러나 적어도 존재론적 변화, 메타규칙의 변화는 공약불가능성을 일으키는 주요 요소로서 수학교육 연구에서 주요하게 다루어야 함을 제안한다.

Ⅲ. 무한소 담론과 극한 담론의 이론적 분석

본 장에서는 학교수학 담론의 공약불가능성의 사례를 제시한다. 특히 학교수학은 무한소를 배제한 관점에서 전개되지만, 학생들은 무한소 개념을 갖는 현상이 공약불가능성과 관련이 있다고 보고 이를 분석하고자 한다. 이 과정에서 수학교육의 담론적 접근(Sfard, 2014)을 수학학습 현상 분석을 위한 이론적 배경으로 사용한다. 담론의 공약불가능성의 분석에서는 Ⅱ장의 분석을 바탕으로 한 공약불가능성 개념을 사용한다.

학교에서 학생들이 학습하는 실수체계에는 다음과 같은 아르키메데스 정리가 성립한다.

> 임의의 양수 $a>0$와 임의의 실수 b에 대하여, $b<na$를 만족하는 자연수 $n\in\mathbb{N}$이 존재한다. (Wade, 2014, p. 18)

만약 0보다 크고 임의의 양수보다 작은 무한소 x가 존재하면, 임의의 양의 실수 a에 대해 $0<x<a$가 되는데, 실수 체계에는 아르키메데스 정리에 의해 이러한 수 x는 존재하지 않는다. 하지만 선행 연구들은 학생들이 무한소 직관을 갖는 현상을 보고해왔다(정연준, 강현영, 2008; 신보미, 2009; Czarnocha et al., 2001; Job & Schneider, 2014; Orton, 1983; Tall, 1980). 즉, 일부 학생들이 학교수학에서 무한소 양을 학습하지 않음에도 '무한소'를 이용하여 수학적 개념을 이해하는 현상이 존재한다. 본 장에서는 이러한 현상을 이해하기 위해 Ⅱ장에서 이론적 분석을 한 공약불가능성을 중심으로 논의고자 한다.

본 연구에서는 무한소가 존재한다는 생각을 하고 의사소통하거나 이론을 전개하는 담론을 무한소 담론이라 부른다. 예를 들어 $0.999\cdots$는 1보다 작고 1과 $0.999\cdots$의 차이는 무한히 작은 수가 된다고 표현하는 것은 무한소 담론에서 사고하는 한 사례이다. 무한소의 존재성을 가정한 담론이 유일하지는 않지만(Bueno, 2007), 본 연구는 이들을 구분하지는 않으며 무한소의 존재성을 가정한 담론을 무한소 담론이라 부른다.

반면 본 연구에서는 수 체계에 무한소와 무한대가 존재하지 않는다는

관점의 의사소통 유형을 극한 담론이라고 지칭한다. 예를 들어 해석학 관점의 의사소통 유형은 극한 담론이다. 해석학의 실수체계에는 무한소가 존재하지 않으며, 극한의 정의와 계산에서도 무한소를 사용하지 않는다. 극한 담론에서 $0.999\cdots$는 수열 $\{1-(0.1)^n\}$의 합 $S_n = \sum_{k=1}^{n}\left(1-(0.1)^n\right)$의 극한을 의미하고 $0.999\cdots$는 1과 같다. 따라서 극한 담론에서 $0.999\cdots$와 1의 차이는 0이다. 즉, 이와 같이 무한 과정 및 극한 계산과 수체계에서 무한소를 배제한 의사소통 형태를 극한 담론이라 한다.

학교수학의 미적분학 전개는 극한 담론의 한 형태이지만 일부 학생들은 미적분학의 학습 후에도 여전히 무한소 담론에 머물러 있다. 이는 학생들이 수학교실에서 교사의 또는 교육과정의 극한담론을 이해하지 못하고 또 그들과의 의사소통 역시 효과적이지 못했기 때문일 것이다. 따라서 본 장은 학생들의 무한소 담론 현상이 공약불가능성과 관련이 있다고 보며 이에 대해 탐구하고자 한다.

1. 무한소의 수학사적 분석[17]

본 절에서는 학생들의 무한소 담론의 기원을 파악하고자 무한소의 역사에 대해 알아본다. 수학사는 수학을 인간 지적 활동의 산물로서 창조적 관점에서 개념의 발달과정을 확인하게 하고, 그 과정 중 어떤 단계가 중요하고 어떤 장애가 나타날 수 있는지에 대한 통찰을 주기도 한다(우정호, 2018). 본 절에서는 이러한 관점에서 수학사를 검토하여 학생들이 학교에서 학습하지 않은 무한소 개념을 갖게 된 맥락은 무엇이며, 무한소가 배제된 개념을 학습함에도 무한소 관점이 쉽게 없어지지 않는 이유는 무엇인지를 추론하고자 한다. 특히 고대부터 무한소와 관련이 있었고, 패러독스로 인해 이해에 어려움이 있었던 연속체와 극한 개념의 역사를 확인한다. 연속체와 극한 개념의 발달과정을 확인하여 수학자들은 역사적으로 어떤 사고 형태를 보였고, 무한소는 어떤 양상으로 나타났는지 확인한다.

17) 본 절은 백승주, 최영기(2020)의 연구의 일부를 수정한 것이다.

1.1. 연속체의 구성과 무한분할의 이해

수학사에서 무한소 양은 기원전 450년경 원자론자인 데모크리토스(Democritos)의 연속체 구성과 무한분할의 논의에서부터 등장한 것으로 보인다. 데모크리토스는 연속체는 무한히 나누어질 수 없고 계속된 분할의 결과 원자에 도달하며, 연속체는 다시 그 원자들로 구성된다고 생각하였다(Bell, 2019, p. ix). 이러한 데모크리토스의 설명은 원과 각뿔의 부피 이해에 도움이 되었지만 다음 패러독스의 원인이 되었다(Boyer & Merzbach, 1991, p. 130).

> 원뿔이 밑면에 평행한 평면에 의해 잘려졌다면[이는 명백히 밑면에 무한히 가까운 평면을 의미한다], 단면을 구성하는 표면에 대해 어떻게 생각해야 하는가? 그들은 같은가, 같지 않은가? 왜냐하면 그들이 같지 않으면 계단이나 울퉁불퉁한 것과 같이 움푹 들어간 곳이 많기 때문에 원뿔이 고르지 않게 된다. 그러나 그들이 같으면 단면이 같을 것이고 원뿔은 원기둥의 속성을 갖게 되어, 동일한 원으로 구성된 것처럼 보인다. 이는 매우 타당하지 않다(Heath, 1921, pp. 179-180).

데모크리토스는 각뿔과 원뿔의 구성요소를 무한히 얇은 무한소 두께를 가진 다각형이나 원으로 생각할 때 입체의 표면이 매끄럽지 않아 문제가 되며, 만약 두께가 0이면 각뿔이나 원뿔이 아닌 기둥이 됨을 제시한다. 즉, 이 패러독스는 데모크리토스의 각뿔과 원뿔의 구성에 대한 원자론적 관점과 연속체 구성의 이해의 어려움의 문제를 보여준다.

그리스 시대 제논(Zeno) 역시 연속체의 구성과 무한 분할의 난해함을 ‘다수의 역설’로서 제시하였다. ‘다수의 역설’은 ‘측정의 역설(paradox of measure, metrical paradox)’로도 불리는 것으로(Dainton, 2016, Skyrms, 2012), Simplicius에 의해 현대에 전해오며 Salmon은 그 논의를 다음과 같이 정리하였다.

> 만약 연장[18]이 존재하면 그것은 부분들로 구성되어야 한다. 따라서 부분들의 다수가 있다. 게다가 이 부분들은 부분들을 가진다. 부분 분할의 과정이

무한히 반복 가능하기 때문에 부분들이 무한개 있어야만 한다. 이때 두 가지 어려움이 제기된다. 첫째 궁극적 부분은 크기를 갖지 않아야 한다. 만약 그들이 크기를 가지면 그들은 더 나누어질 수 있기 때문이다. 그런데 만약 연장이 크기가 없는 부분들로 이루어질 수 있다면, 그들이 얼마나 많은지에 상관없이 그들이 모인 결과는 여전히 크기를 갖지 않는다. 0을 아무리 많이 더해도 0밖에 얻을 수가 없다. 따라서 두 번째 어려움이 제기된다. 부분들은 크기를 가져야만 한다. 그러나 0보다 큰 크기가 무한개가 있으면 결국 무한한 크기를 산출할 것이다. 따라서 연장은 만약 그들이 존재한다면, "크기를 갖지 않을 만큼 작거나, 무한할 만큼 크다" (Salmon, 2001, pp. 13-14, 강조는 연구자가 한 것임).

이 역설은 공간이 점으로 이루어졌고 시간이 순간들로 이루어졌다는 가정에 의문을 제기한다. '다수의 역설'의 연장을 선분 연속체에 적용하면 다음과 같이 정리할 수 있다. 우선 선분은 부분들로 구성되며 부분을 구하는 과정은 무한히 계속되므로 선분은 무한히 많은 부분을 가진다. 선분을 무한히 분할하여 '궁극적인 부분'을 얻을 수 있다고 하면 문제가 제기된다. 첫째, 만약 '궁극적 부분'의 크기가 0이면 0을 무한히 많이 더해도 0이므로 선분의 길이는 양수가 될 수 없다. 둘째, 만약 '궁극적 부분'의 크기가 양수라면, 선분의 길이는 무한히 많은 양수를 더한 무한대가 되어 모순이다. 제논의 이 논의는 무한소 관념과 관련이 있는데,[19] 선분을 무한히 분할하여 얻은 궁극적 부분의 크기가 양수도 아니고 0도 아니라면 무한소 길이를 가진 양이 되는가의 질문이 제기되기 때문이다. 또 0은 아무리 많이 더해도 0이 되고, 양수를 무한히 많이 더하면 무한대가 되기 때문에, 궁극적인 부분의 크기를 무한히 많이 더해서 유한한 양수가 되기 위해서는 '0보다 크지만 임의의 양수보다 작

18) 연장성을 갖는다는 것은 공간을 점유한다는 것을 뜻한다. 근대적 물질관은 어떤 것을 물질로 보기 위해서는 연장성을 가져야 한다고 생각하였다(서양근대철학회, 2001, p. 389).

19) 제논은 무한소 양의 존재에 반대하였다. 특히 다음 제논의 발언은 무한소에 반대한 것으로 생각될 수 있다. "다른 것에 더해진다 하여도 그것을 더 크게 만들지 않고, 다른 것으로부터 빼져도 그것을 작게 하지 않기 때문에 그것은 아무 것도 아니다" (Boyer, 1949, p. 28)

은 수' 인 무한소가 존재하는가의 의문이 발생한다.

이렇게 제논과 데모크리토스의 패러독스는 연속체의 구성을 이해하고자 한 노력과 그 어려움을 보여준다.

기하학의 기초를 마련한 유클리드(Euclid)는 원론의 정의에서 점, 선, 면의 관계를 다음과 같이 밝히고 있다.

1. 점은 부분이 없는 것이다.
2. 선은 폭이 없는 길이이다.
3. 선의 끝은 점이다.
7. 평면은 그 자체로 직선이 있는 균일한 표면이다. (Heath, 1956a, p. 153)

이 정의에 따르면 유클리드는 점을 크기를 가진 것으로 여기지 않았고, 선 역시 폭이 없는 것으로 생각하였다. 또한 유클리드는 원론 5권의 정의 4(아르키메데스 정리)를 제시하여 무한소 양을 기하학에서 제외하였다.

> 양들이 다른 것에 대해 비율을 가진다는 것은, 곱할 때 다른 양보다 커지게 만들 수 있다는 것이다. (Heath, 1956b, p. 114)

유클리드의 점, 선, 면의 정의를 통해 유클리드의 의도가 '선이 점들로 구성된 것인지, 선들이 단지 점들을 포함하는 것인지' 구체적 관계를 알기는 어렵다(Tubbs, 2009, p. 207). 그러나 원론의 점, 선, 면의 정의와 아르키메데스 정리는 유클리드가 그의 기하학에서 무한소 양을 제외하였음을 보여준다.

그러나 무한히 작은 양은 미적분학의 발달과 함께 무한소(infinitesimal), 불가분량(indivisibles), 사라지는 양(evanescent quantities), 할당할 수 없는 양(inassignable quantities), 미분(differentials), 순간(moments)과 같이 다양한 이름과 형태로 다시 나타났다(Bell, 2019, pp. xi-xii; Kleiner, 2001, p. 137).[20]

---

20) 이중 불가분량은 더 이상 나누어질 수 없는 양을 뜻하는 것으로, 무한소와 유사하게 사용되고 있지만 동일하지는 않다. 불가분량은 더 이상 나누어질

'수학적 원자론' 의 관점을 보인 갈릴레이(Galilei)는 1638년에 출판된 서적 「새로운 두 과학에 대한 대화」의 첫째 날 살비아티와 심플리치오의 대화에서 연속체의 구성에 대한 의견을 제시하였다. 갈릴레이는 선분은 불가분량들(indivisibles)로 이루어졌고, 물체들은 '무한히 작은 불가분의 입자' 들로 구성됨을 제시하였다(Bell, 2019, p. 44; Galilei, 1638, p. 55).

> 선분과 모든 연속적인 양은 부분으로 분할되며, 그 부분은 다시 끊임없이 분할된다. 그러면 선분은 무한히 많은 불가분량으로 구성된다는 결론을 얻게 된다. 왜냐하면 분할과 부분분할은 무한히 많이 수행되고, 따라서 부분은 무한히 많게 된다...... 그리고 만약 부분들이 무한히 많으면 그들은 유한한 크기를 가질 수 없다는 결론에 도달하게 된다. 유한한 양이 무한히 많으면 무한한 크기를 만들기 때문이다. 따라서 우리는 연속적인 양은 무한히 많은 불가분량으로 구성된다는 결론에 이른다(Galilei, 1638, pp. 33-34).

이 구문에서 갈릴레이는 선분과 연속체를 구성하는 부분의 크기가 양수이면 선분의 길이가 무한대가 되기 때문에, 그들은 유한한 크기를 가질 수 없음을 제시한다. 따라서 갈릴레이는 유한한 크기를 갖지 않는 불가분량이 무한히 모여서 크기가 양수인 연속체가 된다고 설명한다.

갈릴레이와 동시대의 수학자 케플러(Kepler)는 무한소를 자유롭게 사용하였다고 알려졌다. 그는 곡선을 무한소 다각형으로 생각하였으며, 입체를 '무한소 원뿔 혹은 무한히 얇은 원판' 으로 구성된 것으로 보았다 (Bell, 2019, p. 42). 또 케플러는 원을 무한히 작은 삼각형들로 이루어졌다고 보았다. 이때, 각 삼각형의 높이는 원의 반지름과 같아지므로, 무한히 작은 삼각형들의 밑변의 길이를 각각 $b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots$이라 하고 원의 반지름의 길이를 r이라 하면 삼각형의 넓이의 합은 $\frac{1}{2}b_1r+\frac{1}{2}b_2r+\cdots+\frac{1}{2}b_nr+\cdots=\frac{1}{2}r(b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots)$이 된다. 여기에서 $b_1+b_2+\cdots+b_n+\cdots$은 원의 둘레의 길이 $2\pi r$이 되어 원의 넓이는 πr^2이

수 없기에 부분(proper part)이 없는 것을 의미한다. 예를 들어 사람의 의식과 영혼은 불가분량이지만 무한소는 아니다(Bell, 2019, p. xi).

된다고 보았는데(Boyer & Merzbach, 1991, p. 528), 이는 현재의 초등학교 교과서의 원의 넓이를 계산하는 설명과 유사한 형태이다.[21]

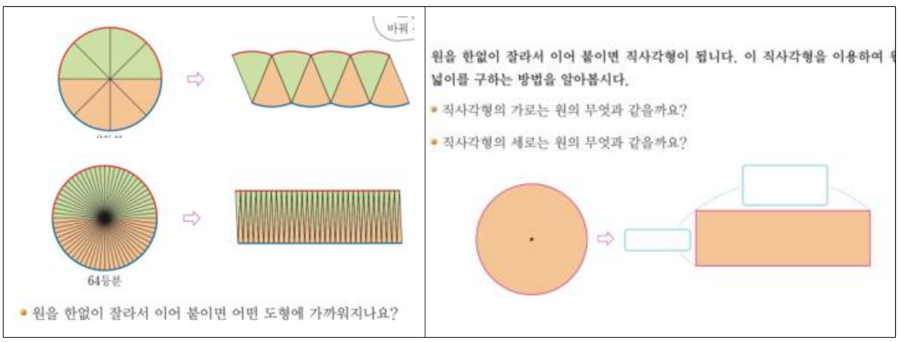
'불가분량의 방법'을 고안한 것으로 알려진 카발리에리(Cavalieri)는 '면은 평행한 선분들로 구성되었고, 입체는 평행한 면들로 구성'되었다고 생각하였다. 그리고 면의 불가분량은 선분으로, 입체의 불가분량은 면으로 생각하였다. 카발리에리는 이 구성이 이루어지기 위해서 불가분량들이 무한히 많아야 함을 인지하였으며, '불가분량의 수'에 의지하지 않는 방법을 고안하고자 하였다. 이에 카발리에리는 두 평면도형의 넓이를 비교할 때, 불가분량들의 대응을 이용하였다. 이 대응으로 카발리에리는 불가분량 수의 무한의 문제로부터 해방된다고 생각하였다(Bell, 2019, p. 46). 카발리에리의 원리의 아이디어는 다음과 같다.

> 높이가 같은 두 입체를 밑면에 평행하고 밑면에서 같은 거리에 있는 평면으로 자른 이웃한 두 단면의 넓이 사이에 언제나 어떤 일정한 비가 성립하면 두 입체의 부피에도 똑같은 비가 성립한다. (Boyer & Merzbach, 1991, p. 536)

그러나 카발리에리의 불가분량 방법은 '어떻게 폭이 없는 선분으로부터 폭을 가진 면을 구성할 수 있는지, 두께가 없는 평면으로부터 두께를 가진 입체가 만들어질 수 있는지'에 대한 질문과 비판을 받았다. 카발리에리는 이 질문의 답변에 성공하지 못하였으며, 이 어려움을 피하기 위해 면과 입체가 '불가분량의 흐름'으로 구성된다는 설명을 제시하였다. 즉, 카발리에리는 선분은 점의 움직임으로 면은 선의 움직임으로, 그

---

21)



[그림 Ⅲ-1] 초등학교 6학년 교과서의 원의 넓이 (교육부, 2018, pp. 100-101)

리고 입체는 면의 움직임으로 생성된다고 생각하였다(Bell, 2019, p. 47).

뉴턴(Newton)과 라이프니츠(Leibniz)는 곡선의 구성에 대해 상이한 주장을 하였다. 특히, Boyer(1949)는 뉴턴을 운동학적인 관점으로 라이프니츠는 원자론적인 것으로 구분하였다. 뉴턴은 수학의 양을 무한히 작은 부분으로 이루어진 것이 아닌, 연속적인 움직임에 의해 이루어졌다고 생각하였다(Newton, 1703). 반면 라이프니츠는 곡선이 infinitangular polygon로 표현될 수 있다고 생각하였다. 라이프니츠는 ‘무한히 많은 수의 각을 가진 다각형이 곡선을 대신’할 수 있다고 하면서 곡선을 ‘무한개의 변을 가진 다각형과 같은 것’이라고 서술하였다(Horváth, 1986, p. 60).

이처럼 수학자들은 선분이나 곡선 혹은 입체들의 구성과 무한분할에 대한 다양한 이론을 제시하였다. 이때 무한소와 불가분량에 의지하기도 하였으며, 무한소를 배제하기도 하면서 수학자들은 각 설명의 타당성을 확립하고자 노력하였다. 그리고 19세기 데데킨트가 제시한 다음 원리에 의해 실수 연속체가 정립되었다.

> If all points of the straight line fall into two classes such that every point of the first class lies to the left of every point of the second class, then there exists one and only one point which produces this division of all points into two classes, this severing of the straight line into two portions. (Dedekind, 1872, p. 11)

그리고 ‘직선 위의 점은 실수와 일대일 대응시킬 수 있다’는 ‘칸토어-데데킨트의 공리’에 의해 실수집합은 연속성을 갖게 되었다(Boyer & Merzbach, 1991, p. 917). 이와 더불어 칸토어는 집합의 ‘농도’를 이용하여 무한집합이 단계적으로 분류됨을 제시하였고 대각선 논법으로 유리수 집합에 포함되지 않는 또 다른 수가 존재함을 증명하여, 실수가 셀 수 없이 많음을 보였다(Boyer & Merzbach, 1991, pp. 921-922). 즉 실수 연속체에서 실수는 비가산 개이고 농도는 $\aleph_1$과 같다는 사실이 확립되었다.

20세기에는 르벡(Lebesgue)에 의해 현대의 측도 이론이 정립되었다.

르벡은 당시 알려졌던 리만적분보다 더 많은 함수에 적용 가능한 새로운 적분의 정의를 시도를 하면서 길이의 개념을 제안하였다. 특히 르벡의 측도, 즉 길이는 다음과 같이 가산 합(countable additivity)의 성질을 갖는다(Rudin, 1987, p. 5).

함수 μ가 Lebesgue 측도일 때, 함수 $\mu : \mathscr{M} \to \mathbb{R}^*$와 서로소인 셀 수 있는 집합의 모임 $\{E_n : n=1,2,\cdots\}$에 대해 다음이 성립한다.

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$$

(김성기, 김도한, 계승혁, 2002, pp. 298-301)

학교수학에서 다루는 공간은 유클리드 공간으로 여러 가지 도형들은 n차원 유클리드 공간에 존재하고 측정 가능한 집합을 이룬다. 그리고 유클리드 n차원 공간의 길이 함수 $d(x,y)$ 역시 가산합의 성질을 갖는다. 이제 'a'와 'b'를 어떤 구간의 끝점이라고 하자. 만약 $a=b$이면, 구간 $a \le x \le b$ 는 'degenerate' 구간이라고 부르며 이 구간의 길이는 0이다. 즉, 'degenerate' 구간은 한 점으로 이루어진 집합이며 길이는 0이다(Grünbaum, 1952, p. 296).

제논의 '다수의 역설'이 제기한 문제를 다시 서술하면, '길이가 0인 degenerate 구간의 합집합으로 이루어진 유한 구간 (a,b)가 양수의 길이를 가질 수 있는가?'이다.[22] $a \ne b$일 때, 구간 (a,b)는 비가산개의 degenerate 구간의 합집합이다. 길이 함수의 특징에 의해 구간 $E=(a,b)$가 서로소인 가산 개의 부분구간 $E_1, E_2, E_3, \cdots$로 분할될 때 $\mu(\mathrm{E}) = \mu(\mathrm{E}_1) + \mu(\mathrm{E}_2) + \mu(\mathrm{E}_3) + \cdots$이 성립한다. 하지만 비가산 개의 부분 구간의 길이의 합이 전체 구간의 길이를 의미하지는 않는다(Grünbaum, 1951, p. 300). 따라서 구간 (a,b)의 길이를 degenerate 부분구간들(0의 길이를 갖는 한 점 집합들)의 길이를 더해서 결정할 수 없다(Grünbaum, 1952). 즉, 길이가 0인 점집합의 합집합인 선분 연속체의 길이가 양수가

22) 각 구간은 점들로 이루어진 것이라기보다는 한 점 집합, 즉 degenerate 구간들의 합집합으로 이루어진 것이다.

되는 현상은 수학적으로 모순은 아니다.

또한 제논이 제시한 ‘다수의 역설’은 ‘무한분할의 결과 마지막 항에 도달가능하며, 그것의 길이는 0(zero extension)’이라는 가정을 함축하고 있다(Grünbaum, 1952, p. 299). 그런데 실수 연속체는 실수 점들의 집합이며 실수 연속체의 무한분할은 시각적인 직선에서 틈이 보이게 자르는 것이 아니라, 집합들로의 분할을 의미한다. 이 분할은 다음 조건을 만족한다(Grünbaum, 1952, p. 300).

1. degenerate 구간(한 점으로 이루어진 집합)은 분할의 목적을 위한 구간의 부분구간이 될 수 없다.
2. 공집합은 임의의 구간의 부분구간이 아니다.
3. 유한개의 점으로 이루어진 집합과 degenerate 구간의 분할은 공집합이 아닌 진부분집합의 형성을 의미한다.

(Grünbaum, 1951, p. 76; Grünbaum, 1952, p. 300).

이러한 무한분할의 조건에 따라 칸토어는 ‘만약 구간을 겹치지 않는 부분구간으로 나누면 기껏해야 $\aleph_0$개의 부분구간을 얻을 수 있다’고 하였다(Grünbaum, 1951, p. 76 재인용). 따라서 무한분할의 결과 궁극적 요소인 한 점 집합들이 생성되어 끝나는 일은 일어나지 않는다(Grünbaum, 1951, p. 77).

그리스시대 데모크리토스와 제논이 연속체의 무한분할과 구성의 역설을 제시한 이래, 학자들은 이에 대한 타당한 설명을 위해 노력해왔다. 연속체의 구성을 무한히 작은 양을 이용하거나 연속적 움직임으로 이해하는 등 다양한 시도가 있었다. 19세기 후반 실수이론의 정립과 함께 실수 연속체의 구성이 확립되었다. 이로서 실수 연속체에서는 무한분할의 결과 0의 길이를 갖는 궁극적 요소들로 분할되지 않으며, 길이가 0인 점 집합들의 합집합이 양수의 길이를 갖는 구간이 되는 것은 수학적으로 모순은 아님을 밝혀졌다.

1.2. 극한과 순간변화율의 이해

본 절에서는 극한 개념 발달의 수학사를 확인한다. 학생들이 미적분학에서 학습하는 극한 개념은 그리스 시대 제논이 제기한 운동의 역설과 관련이 있다. 무한과정과 순간변화율은 미적분학이 없었던 그리스 시대에서부터 논의가 되었던 주제로서 본 절에서는 이들 개념의 수학사를 확인하여, 수학자들은 어떤 어려움을 겪었고 무한소 담론과 극한 담론이 어떤 양상으로 나타났는지 확인한다.

제논이 제기한 네 가지 운동의 역설 중 본 절의 논의와 관련이 있는 아킬레스, 화살의 역설은 다음과 같다.

Ⅱ. 아킬레스: 이것은 달릴 때 더 느린 사람이 더 빠른 사람을 결코 추월하지 않음을 주장한다. 쫓아가는 사람이 도망가는 사람이 출발한 지점에 도달하면 더 느린 사람은 항상 어느 정도 앞서 있다.

Ⅲ. 화살: 모든 것은 자신과 동일한 크기의 공간을 점유하고 있을 때, 정지하거나 움직인다. 각 대상이 항상 순간에 있게 되므로, 움직이는 화살은 결코 움직이지 않는다. (Heath, 1921, pp. 275-276)[23]

타네리(Tannery)에 의하면 제논이 운동의 역설을 제시한 의도는 '만약 공간이 점들로 구성되어 있다면 운동이 불가능하다'는 주장을 하기 위한 것으로, 제논이 근본적으로 반박하고 싶었던 것은 '공간은 점들의 합이고, 시간은 순간의 합이다'라는 명제이다(Cajori, 1920, p. 15). 그러나 이 역설들은 연속체의 구성뿐만 아니라 운동학적 관점에서 전개되고 있으므로, 극한 개념 및 무한소 문제와도 관련이 있다. 예를 들어 아킬레스와 거북이의 역설에서 아킬레스가 거북이를 따라잡기 위해 거북이가

23) 화살은 어떤 한 순간에는 움직이지 않는데, 그 이유는 만약 순간에 화살이 움직인다면 그 순간은 부분을 가져야 하는데 순간의 의미상 부분을 가질 수 없기 때문이다. 또 만약 화살이 순간에 움직인다면, 그 한 순간에 화살은 자신보다 더 큰 공간을 점유하게 된다는 문제가 생긴다(Salmon, 2001, p. 11). Salmon(2001, p. 24)은 미적분학의 순간속도 개념이 화살의 역설에 대한 완전한 설명이 될 수 없음을 제시한다. 순간 속도는 그 순간만을 말하는 것이 아닌, 그 순간을 포함한 시간 구간의 극한에 의존하기 때문이다.

직전에 있던 자리까지 가는 과정을 반복하는데, 이 과정을 무한히 반복하면 아킬레스와 거북이 사이의 거리는 무한히 작은 거리가 될 것인가, 혹은 아킬레스는 거북이를 따라잡을 것인가의 의문으로 연결된다. 따라서 무한소 거리가 존재하는가, 극한에 도달하는가의 질문과 관련이 있다. 또한 화살의 역설에서도 '한 순간'에 대해 제논은 그 순간을 기간이 없는 것으로 표현하였지만, 시간의 순간은 '무한소 기간'을 가진 시간의 양으로서 해석하고, 순간속도는 무한소 기간 동안 움직인 무한소 거리에 의해 구할 수 있다고 생각하는 경향 또한 존재한다. 따라서 제논의 운동의 역설의 논의 또한 무한소 양이 존재하는가의 의문과 연결된다.

이렇게 한없이 가까이 가는 움직임과 순간변화율의 관념은 미적분학의 발달과 함께 그 논의가 활발해졌다. 특히 뉴턴과 라이프니츠의 사례에서도 서로 다른 입장을 확인할 수 있다. 뉴턴은 곡선에 대해 언급할 때 무한소 또는 불가분량을 인정하지 않았으며, 따라서 순간속도 즉 궁극적 속력과 궁극적 비율을 정의할 때 역시 불가분량이나 무한소에 의존하지 않았지만, 라이프니츠는 무한소 양을 활용하였다.

우선 뉴턴은 저서 「프린시피아」에서 '무한소의 가설은 아직 제대로 정립되지 않았으며, 비기하학적'이라고 언급하기도 하였다(Newton, 1687/1998, p. 53). 그러면서 뉴턴은 함수 f와 g에 대해 f와 g가 0으로 가까이 갈 때, f/g는 비의 극한이며 극한의 비가 아니라는 것을 명확히 하려고 시도하였다(Pourciau, 2001)[24].

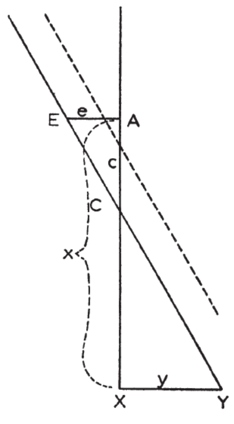
> 만약 사라져 버리는 양들의 궁극적인 비율을 얻을 수 있으면, 그들의 궁극적인 양도 구할 수 있는 게 아니냐고 반론을 제기할 지도 모른다. 만약 그렇다면 모든 양들은 불가분 양으로 구성되어 있고, 이것은 유클리드가 "기하학 원론 10권"에서 같이 잴 수 없는 양들에 대해서 증명한 것에 어긋난다.
>
> 그러나 이 반론은 틀린 가설에 바탕을 두고 있다. 양들이 사라질 때의 궁극적 비율이란, 정말로 궁극적인 양들 사이의 비율이 아니라, 한없이 줄어드는 양들 사이의 비율이 점점 가까이 가는 극한을 말한다. 어떠한 차이값을 주더라도, 그보

24) 뉴턴은 실제로 함수 f와 g로 표기하지 않았으며, f와 g의 함수표기는 Pourciau(2001)이 도입한 것이다.

다 더 가까이 간다. 그렇지만 양들이 완전히 사라져 없어질 때까지, 절대로 그 값을 넘어서지 않으며, 실제로 그 값을 얻지도 않는다. (Newton, 1687/1998, p. 55)

이처럼 뉴턴은 순간변화율을 ‘궁극적 비율’이라고 부르며, 이것을 ‘궁극적 양의 비’로서 보지 말 것을 주장하였고, 비가 한없이 다가가는 극한으로서 생각하였다. 즉, 뉴턴은 미분계수를 ‘극한의 비’로서 생각하지 말고 ‘비의 극한’으로서 생각할 것을 강조하였다. Cajori(1917)는 수학자들이 뉴턴의 유율법의 ‘도달가능성’에 대해 논의한 것에 대해 언급한 바 있다. 이로부터 뉴턴이 「프린시피아」에서 극한의 ‘도달 가능성’ 여부에 대해서는 명확하게 드러내지 않은 것으로 추측된다. Cajori(1917, p. 149)에 의하면 시간에 따라 관점의 변화가 있긴 하지만 주린(Jurin)은 뉴턴의 「프린시피아」의 표현을 극한에 도달하는 것으로 해석하였다. 반면 로빈스(Robins)는 극한에 도달하지 않는다고 보았다. 이 시기 수학자들은 뉴턴의 아이디어가 무엇인지, 그리고 뉴턴이 ‘변수가 극한에 도달할 수 있는지를 의미했는지 여부’에 대해 확인하는 논문을 작성하기도 하였다(Cajori, 1917, p. 149).

라이프니츠는 뉴턴과 달리 무한히 작은 양을 사용하였다. 특히 라이프니츠는 기하학적 양 사이의 관계에서 무한소를 이용하여 추론하였다. 다음의 그림에서 닮은 직각삼각형 AEC와 XYC을 보자.



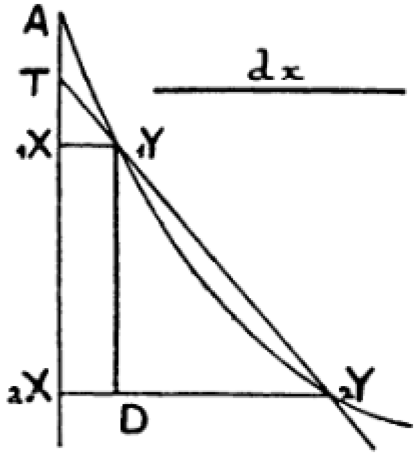
[그림 Ⅲ-2] 라이프니츠의 닮은 직각삼각형 논의(Leibniz, 1702, p. 545)

이 두 삼각형은 각 EAC와 각 YXC가 각각 직각이며, $\overline{\mathrm{AC}}=c$, $\overline{\mathrm{XC}}=x-c$이고, $\overline{\mathrm{AE}}=e$, $\overline{\mathrm{XY}}=y$이다. 이때 닮음비에 의해 $\frac{x-c}{y}=\frac{c}{e}$가 성립하며 $\angle\mathrm{AEC}=\angle\mathrm{XYC}$이다. 이제 $\angle\mathrm{AEC}$와 $\angle\mathrm{XYC}$는 $45°$가 아니라고 가정하자. 만약 YE가 기울기를 유지하면서 점 E는 A로, 그리고 점 Y는 X로 가까워지도록 움직인다고 하자. 이때, $\overline{\mathrm{AE}}=e$와 $\overline{\mathrm{AC}}=c$는 작아진다. 라이프니츠는 YE가 아무리 움직여도 c와 e는 0이 되지 않음을 설명한다. 만약 $c=e=0$이면 $\frac{x-c}{y}=\frac{x}{y}=\frac{c}{e}=1$이 되어 $x=y$가 되므로 각 AEC와 각 XYC의 크기가 $45°$가 아니라고 한 가정에 모순이 발생하기 때문이다. 라이프니츠는 여기에서 c와 e는 0은 될 수 없고 무한소와 같이 취급되는 것으로 설명한다. 이들은 '순간적인 증가(momentary increment)'와 '순간적인 감소(momentary decrements)'로서 설명하며 여전히 c와 e는 '대수적 관계' 및 비를 갖는다고 하였다(Leibniz, 1702, p. 545).

라이프니츠는 dx, dy와 같은 기호의 사용과 접선을 구하는 과정에서도 무한히 작은 양을 사용하였다.

> 우리는 지금까지 출판된 방법에 따라 수행해야 했던 분수, 무리수 및 기타 제한 사항을 제거할 필요 없이 최댓값과 최솟값, 접선을 찾을 수 있다. 이 모든 증명은 이러한 문제에 경험이 있거나 혹은 지금까지는 충분하게 탐구하지 않은 사람에게도, dx, dy, dv, dw, dz를 순간적 차이(momentary differences), 즉 각각 x, y, v, w, z의 증가 또는 감소가 된다는 사실을 고려한다면 쉬울 것이다. (중략)
>
> 접선을 찾는 것은 무한히 작은 거리(infinitely small distance)에서 곡선의 두 점을 연결하는 선을 그리는 것을 의미하거나, 곡선을 대신하는 것으로서 무한히 많은 수의 각을 갖는 다각형에서 변의 연장선을 그리는 것을 의미한다. 이 무한히 작은 거리는 항상 dv와 같은 알려진 미분(differential) 또는 그에 대한 관계, 즉 알려진 접선으로 표현될 수 있다(Leibniz, 1684, p. 276)

이처럼 라이프니츠는 곡선을 무한히 많은 수의 각을 가진 다각형으로 표현하였고, dx, dy와 같은 기호를 '순간적인 차이'로서 언급하거나 dv를 '무한히 작은 거리'로 제시하며 일종의 양과 같이 취급하였다 (Leibniz, 1684). 뿐만 아니라 라이프니츠는 dy, dx에 대해 이들의 비를 고려하기도 하였다.



[그림 Ⅲ-3] 라이프니츠의 dx와 dy (Leibniz, undated, p. 151)

라이프니츠는 $y = \frac{1}{a}x^2$의 접선의 기울기를 구하면서 dy, dx를 양으로 취급하였으며 이들의 비, 즉 $dy : dx$의 비를 계산하였다. 그림에서 $\overline{A_1X} = x$, $\overline{{}_1X_1Y} = y$이며, $\overline{{}_2X_2Y}$와 $\overline{{}_1YD}$는 서로 수직이라고 하자. 그리고 $\overline{{}_1X_2X} = \overline{A_2X} - \overline{A_1X} = dx$ 이고 $\overline{D_2Y} = \overline{{}_2X_2Y} - \overline{{}_1X_1Y} = dy$ 라 하자. 이때, $y = xx : a$이므로 $y + dy = xx + 2xdx + dxdx, : a;$ 이다. 양변에서 y를 빼면 식 $dy : dx = 2x + dx : a;$ 이 성립한다. 즉 $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + dx}{a}$가 성립한다.(Leibniz, undated, p. 151).

라이프니츠는 $\overline{{}_2X_2Y}$와 $\overline{{}_1X_1Y}$가 만날 때까지 $\overline{{}_2X_2Y}$가 $\overline{{}_1X_1Y}$로 가까이 가면, 'dx는 0과 같게 되므로 무시할 수 있다'고 표현하였다. 또한 dx와 dy를 기하학적 양으로 취급하면서 이들의 비인 $dy : dx$를 사용한 것을 확인

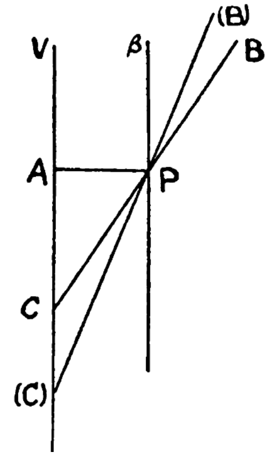
할 수 있다(Leibniz, undated, p. 151). 라이프니츠는 또한 여기에서 사라지지 않는 양(non-evanescent quantities)이라는 표현을 사용하며, dy/dx의 계산이 사라지지 않는 양의 비의 '궁극적 경우'에 도달한다고 하였다.

즉 라이프니츠는 미적분학에서 무한히 작은 양을 사용하였고, 이는 곡선과 기호 dy/dx의 의미에 영향을 미쳤다. 곡선은 무한히 작은 무수히 많은 각을 가진 도형으로 여겨지며, dy, dx는 각각 기하학적 양으로 따라서 dy/dx는 단순히 기호가 아닌 양들의 '비'로서 여겨질 수 있었다.

이렇게 무한소의 사용과 미적분학의 추론을 정당화한 것은 라이프니츠가 가정한 다음의 연속성의 법칙(Law of Continuity)에서였다.

> In any supposed transition, ending in any terminus, it is permissible to institute a general reasoning, in which the final terminus may also be included.(Leibniz, undated, p. 147)

라이프니츠는 연속성의 법칙으로 변화의 최종적인 상태가 '일반적 추론(general reasoning)'하에 포함될 수 있다는 제안을 하였다. 즉, 연속성의 법칙으로 A와 B의 두 양에 대해 'A가 B보다 크고, A가 B와 같아질 때까지 계속 감소한다고 할 때, A는 B와 동일한 상태가 된다.' 라이프니츠는 이 법칙을 물체의 운동과 기하학의 추론에도 적용하였으며 이때 무한히 작은 양의 언어를 사용하여 표현하였다. 라이프니츠는 움직이는 물체가 정지할 때, 물체는 무한히 작은 속도를 가진 것으로 여겼고, 그림의 선분 BP가 VA와 평행하게 될 때까지 움직여서 βP가 될 수 있다고 하였으며 이때 VA와 βP 사이의 각은 무한히 작은 크기로 표현하였다. 한 선분이 다른 선분과 길이가 같을 때도, 그들의 길이의 차이가 무한히 작은 것으로 표현하였다(Leibniz, undated, pp. 147-148).



[그림 Ⅲ-4] 연속성의 법칙과 무한히 작은 양(Leibniz, undated, p. 147).

라이프니츠는 연속성의 법칙을 정당화하기 위해 아르키메데스를 언급하였다. 라이프니츠는 만약 두 양 사이에 오류가 존재한다면, 그 오류는 '원하는 만큼 작게 만들 수 있기' 때문에 임의의 수보다 작게 된다. 따라서 오류는 아무것도 아니게 되고, 오류가 있다고 가정한 곳에서 바로 그 오류는 존재하지 않게 됨을 주장하였다(Horváth, 1986, p. 66; Jesseph, 1998, p. 34).

> 무한히 작은 것 대신에 누군가 원하는 만큼 작은 것으로 대체할 수 있고, 따라서 어떤 오류든지 항상 이것보다 작아질 것이기 때문이다. 그리고 어떤 오류도 주어질 수 없다(Jesseph, 1998, p. 34 재인용)

> 이 비교할 수 없는 양들은 전혀 고정되었거나 결정된 것이 아니다. 그러나 우리의 기하학적 추론에서 우리가 원하는 만큼 작게 취해질 수 있고, 그리고 따라서 엄밀한 관점에서 무한히 작은 효과를 갖고 있다. 만약 임의의 반대자가 이 명제에 반박하기를 시도한다면, 오류가 임의의 가능한 할당할 수 있는 오류보다 작아질 것이라는 것이 우리의 미적분학으로부터 따라온다. 우리가 원하는 만큼 작은 양을 항상 취할 수 있다는 점을 고려하면, 비교할 수 없게 작은 양을 그 목적을 위해 충분히 작게 취하는 것은 우리의 힘에 있기 때문이다. (Horváth, 1986, p. 66 재인용).

이와 같이 라이프니츠는 연속성의 법칙을 적용하여 무한한 변화에서

궁극적 상태에 도달가능한 것으로 추론하였다. 이때, 무한히 작은 양을 사용하기도 하였으며 변화의 마지막 단계에서 오류가 존재한다면 그 오류는 원하는 만큼 작게 만들 수 있으므로 추론은 정당화될 수 있다고 주장하였다. 그러나 라이프니츠가 무한히 작은 양의 실재성에 대한 형이상학적인 주장을 한 것은 아님을 언급하는 것이 중요하다. 라이프니츠는 무한히 작은 양을 편리한 계산을 위한 도구로 사용하였으며 그들의 존재성과 관련한 논쟁은 하지 않았다(Leibniz, undated).

본 절은 특히 뉴턴과 라이프니츠를 중심으로 극한과 순간변화율의 수학사를 확인하였다. 극한 개념의 발달과정에서 무한히 작은 양들을 사용할 수 있는지, 또한 dy, dx가 무한히 작은 양인지 여부 및 '한없이 가까이 갈 때' 또는 '무한히 계속될 때' 극한값에 도달하는지의 논의가 있었다. 그러나 19세기 해석학의 산술화와 극한의 $\epsilon-\delta$ 정의의 등장으로 이들에 대한 설명이 가능해졌다. 산술화된 해석학에서는 무한소는 존재하지 않으며, 순간변화율과 극한의 계산에서도 무한소를 사용하지 않았다. 또한 극한의 $\epsilon-\delta$의 방법에서는 x가 c에 도달하는지에 대해서도 중요한 의미를 두지 않는다. 즉 극한 $\lim_{x \to c} f(x)$의 학교 수학적 정의와 형식화된 $\epsilon-\delta$방법에서는 $f(x)$가 L에 도달 여부를 고려하지 않는다. 특히 $\epsilon-\delta$방법에서는 '임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $\delta > 0$가 존재해서 $|x-c| < \delta$일 때, $|f(x)-L| < \epsilon$' 인지, 즉 'x와 c가 충분히 가까울 때, $f(x)$와 L이 충분히 가깝게' 할 수 있는지에 대한 관심으로 옮겨졌다.

1.3. 논의

1.1절과 1.2절에서는 수학사에서 무한소 개념이 어떤 형태로 나타났으며, 무한소가 배제된 현대 수학으로 정립되기까지의 과정을 이해하기 위해 그리스 시대부터 현대까지의 수학사를 확인하였다. 역사적 고찰 결과는 다음과 같다.

첫째, 데모크리토스와 제논이 연속체의 패러독스를 제시한 이래 실수 연속체가 정립되기까지 수학사에는 오랫동안 연속체의 구성에 대한 극한 관점과 무한소 관점의 상이한 설명이 존재하였다. 연속체의 구성을 불가

분량, 무한히 작은 양에 의존하는 설명이 있었으며, 움직이는 대상의 흐름으로서 곡선을 바라보는 운동학적 관점 또한 존재하였다. 실수 연속체가 정립되기까지의 수학사는 학교수학의 기본도형 점, 선, 면의 지도에 함의점을 준다. 수학교과서는 기본 도형 점, 선, 면의 관계를 ‘선은 무수히 많은 점으로, 면은 무수히 많은 선으로’ 이루어져 있다고 보는데 (주미경 외, 2018, p. 154) 이러한 연속체 구성의 설명은 수학사에서 오랜 시간 패러독스와 다양한 논쟁이 존재한 만큼 학생들에게도 쉽지 않을 수 있기 때문이다. 또한 연속체 구성과 무한분할의 문제는 학생들이 정적분을 무한소 관점에서 이해하는 현상과도 관련이 있다(정연준, 강현영, 2008). 이러한 학생들의 무한소 담론 현상은 연속체의 구성과 무한분할의 수학사를 볼 때, 어쩌면 매우 당연한 현상이다. 연속체 구성과 무한분할에 대한 패러독스 및 실수 연속체 정립까지의 수학사는 학교수학에서 학생들의 개념 이해에 어려움을 겪을 수도 있으며 따라서 이와 관련한 교수학적 상황을 대비할 필요가 있음을 시사한다.

둘째, 미적분학의 발달시기 극한 개념의 이해에서 두 가지 논의를 확인할 수 있다. 첫 번째 논의는 무한히 작은 양의 사용 여부에 대한 논의이다. 미적분학의 발달시기 유율법의 ‘증분’과 dx, dy와 dy/dx를 무엇으로 볼 것인지에 대한 다양한 주장들이 존재하였다. 이 과정에서 수학자들은 무한소 양이 존재하는지, 증분은 무한소인지, dy, dx는 무한히 작은 양인지에 대해 논의하였다. 두 번째 논의는 극한의 도달가능성에 대한 논의이다. 수학자들은 뉴턴의 유율법에서 극한에 ‘도달하는지’ 또는 ‘도달하지 않고 가까이만 가는지’에 대해 논의하였고, 라이프니츠는 연속성의 법칙으로 변화과정과 변화의 최종상태의 관계를 제안하였다. 극한 개념이 확립되기 전의 이러한 논쟁은 $\epsilon-\delta$의 극한 개념을 배우지 않는 학생들 또한 유사한 갈등상황을 겪을 수 있음을 암시한다. 오랫동안 19세기 후반 해석학의 산술화로서 극한 개념은 무한소를 배제한 $\epsilon-\delta$ 방식의 설명이 가능해졌다. 현대적인 $\epsilon-\delta$개념은 극한의 개념을 더 이상 무한소 양을 사용하거나 도달의 동적인 관점으로 설명하지 않는다. 그러나 학문수학의 $\epsilon-\delta$의 방식을 도입하지 않는 학교수학의 극한 개념은 여전히 ‘한없이 가까이간다’는 방식으로 설명하고 있다. 따라서 학생들

도 수학자들이 겪었던 것과 같이 학생들이 극한 개념의 이해에서 '도달가능성'에 의문을 갖거나 무한소의 개념에 의존할 수 있기 때문에 교수학습에서 이에 대한 고려가 필요하다.

2. 무한소 담론과 극한 담론의 공약불가능성

본 절에서는 무한소 담론과 극한 담론의 관계를 분석한다. 수학교과서는 무한소를 수학적 대상으로 받아들이지 않기 때문에 극한 담론에 속한다. 반면 Ⅲ장의 1절에서 제시하였던 원자론자 데모크리토스와 미적분학의 전개에서 무한소를 사용한 라이프니츠의 담론은 무한소 담론이다. 본 절의 무한소 담론의 논의는 라이프니츠의 담론을 주로 분석 대상으로 한다.

Ⅱ장의 분석 결과 두 담론 사이에 존재론적 변화가 있을 때와 메타규칙이 변화할 때 두 담론은 공약불가능하였다. 따라서 이 두 가지 요소를 중심으로 담론의 공약불가능성을 논의한다.

우선 무한소 담론과 극한 담론에서 가장 쉽게 드러나는 점은 무한소 담론은 극한 담론에는 존재하지 않는 '무한소'라는 수학적 대상이 존재한다는 점이다. 그리고 무한소의 존재성은 또한 무한히 큰 수의 존재성으로도 이끈다. 무한히 작은 수 x가 존재하면 이 수의 역수인 $\dfrac{1}{x}$ 또한 존재할 것이기 때문이다. 또한 무한소 담론과 극한 담론은 연속체의 구성의 관점에서 차이를 갖는다. 과거 원자론자는 연속체를 무한히 작은 원자들로 구성된다고 보았으며, 라이프니츠도 원과 같은 곡선을 무한히 많은 무한소 변으로 이루어진 것으로 보았다. 즉 연속체를 무한히 작은 원소들로 구성된 것으로 보았다. 그러나 무한소를 배제한 학교수학이나 학문수학의 해석학에서는 실수 직선과 같은 연속체는 무한히 작은 원소들로 이루어진 것으로 생각하지 않는다. 직선의 구성요소는 점이며 수직선과 대응되는 실수 집합 역시 하나의 수로 이루어진 집합 $\{r\}$들의 합집합이다. 따라서 무한소 담론과 극한 담론은 연속체의 구성의 설명에서 다르다.

무한소 담론과 극한 담론은 dy/dx의 이해에서도 차이를 보인다. 뉴턴은 유율법을 무한히 작은 양의 비가 아닌 '비의 극한'으로 볼 것을 강조한 반면, 라이프니츠는 dy, dx를 각각 x와 y의 순간적인 변화로서 설명하였고 dy/dx를 비로 다루었다. 즉 dy/dx의 기호를 '비'의 범주에 속한다고 볼 수 있는지의 관점에서 차이가 있다.

마지막으로 제시할 무한소 담론과 극한 담론의 차이점은 극한의 도달가능성에 대한 논의이다. 뉴턴의 글을 해석하면서 주린은 극한에 도달하는 것으로 생각한 반면 로빈슨은 극한에 도달하지 않는 변수로 보았다. 이 시기 수학자들은 뉴턴의 아이디어가 무엇인지, 그리고 뉴턴이 '변수가 극한에 도달할 수 있는지를 의미했는지 여부'를 확인하는 논문을 작성하기도 하였다(Cajori, 1917). 이러한 당시 상황을 볼 때, 뉴턴은 유율법에서 도달가능성에 대해 명확한 입장이 드러나지는 않은 것으로 추론할 수 있다. 그러나 라이프니츠는 극한에 도달가능하다는 관점을 보여준다. 그는 연속성의 법칙에 의해 무한한 변화에서 최종상태를 일반적인 추론 하에 포함시킬 것을 가정하였다. 따라서 무한히 작은 차이가 있는 것은 같은 것으로 보았다. 즉 A와 B 사이의 거리의 차이가 무한히 작을 때, 그들은 같은 위치에 있는 것으로 간주된다.

이와 같이 극한 담론과 라이프니츠로 대표되는 무한소 담론은 무한소와 무한대의 존재와 연속체의 구성 및 dy/dx와 극한의 개념에서 차이가 있었다. 이러한 차이를 가져온 것은 무한소의 존재성 외에도 '연속성의 원리'와 이를 정당화하기 위해 제시한 '오류가 있는 곳에서는 오류를 원하는 만큼 작게 할 수 있기 때문에 오류는 사라진다'는 라이프니츠의 원리였다. 즉, 라이프니츠는 극한 담론의 미적분학을 전개하면서 연속성의 원리와 오류에 대한 위의 가정을 메타규칙으로 사용하였다. 반면 극한 담론의 메타규칙은 이와 다르다. 극한 담론의 일종인 무한소가 배제된 해석학은 해석학의 공리와 정리의 메타규칙을 따르기 때문이다. 즉 라이프니츠의 무한소 담론과 극한 담론은 무한소의 존재성 그리고 여러 미적분학의 내러티브가 다르며 이들을 정당화하기 위한 메타규칙에서 서로 차이가 있었다. 즉 극한 담론과 무한소 담론은 무한소의 존재성, dy/dx의 존재론적 범주 및 메타규칙의 차이로 인해 공약불가능하다.

3. 수학학습의 공약불가능성 사례

본 절에서는 수학학습에서 발생할 수 있는 공약불가능성의 사례를 제시한다.

3.1. ‘제논의 역설’의 이해[25)]

고등학교 미적분 교과서에 제논의 역설은 흥미로운 역사적 소재로서 종종 등장한다. 특히 아킬레스와 거북이의 경주의 역설은 등비급수에 의해 해소되는 것으로 소개되며, 수학의 유용성과 흥미를 모두 느낄 수 있는 교수와 학습의 좋은 소재이다. 그러나 제논의 역설에 대한 끊임없는 철학적 논쟁은 교과서에 제시된 등비급수에 의한 설명으로 역설이 진정으로 해소되었다고 보기 어려우며, 역설에 내포된 문제가 그렇게 단순하지 않다는 사실을 보여준다. 본 절에서는 제논의 ‘아킬레스와 거북이의 역설’의 이해의 어려움이 수학학습의 공약불가능성의 한 가지 사례임을 제안한다. 다음의 아킬레스와 거북이의 경주 상황을 생각해보자.

> 편의상 거북이가 아킬레스보다 100m앞에서 출발하고, 아킬레스의 속도는 거북이의 속도보다 10배 빠르다고 하자. 처음 거북이가 출발한 지점에 아킬레스가 도달했을 때 시간이 t만큼 걸렸다고 하자. 이때 아킬레스가 100m 달렸으므로 거북이는 아킬레스보다 10m 앞서있다. 다음으로 아킬레스가 거북이가 있는 지점에 도달하기까지는 $\frac{1}{10}t$ 만큼 걸린다. 그리고 이때 거북이는 아킬레스보다 1m 앞에 있다. 이 과정은 끝없이 반복되므로, 거북이는 항상 아킬레스보다 앞서 있다.

이 역설은 고등학교 교과서에서 등비급수의 계산 결과, 아킬레스가 $100+10+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots=\frac{100}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1000}{9}$m를 달린 후에 그리고 시간이

---

25) 본 절은 백승주, 최영기(2018)의 연구의 일부를 수정한 것이다.

$t+\frac{1}{10}t+\frac{1}{10^2}t+\cdots=\frac{10}{9}t$ 만큼 지난 후에 거북이를 추월하는 것으로 해소된다. (황선욱 외, 2014, p. 38)

그러나 이러한 수학적 설명과는 별개로, 아킬레스가 거북이가 바로 직전에 있던 자리까지 움직이는 동안 거북이도 움직이기 때문에 거북이가 아킬레스보다 아주 조금이라도 앞서 있을 것 같다는 느낌을 떨쳐버리기 어렵다. 이러한 느낌이 나는 이유는 이 문제에 대해 수렴하는 등비급수의 값은 '만약 아킬레스가 거북이를 따라잡을 수 있다고 가정하면,' '아킬레스는 어떤 지점(출발지점으로부터 $\frac{1000}{9}$m 떨어진 곳)에서 그리고 언제(출발한 지 $\frac{10}{9}t$시간 후에) 거북이를 따라잡을 수 있는지'를 말해주기 때문이다. 즉, 여기에서의 '만약'은 지나치게 큰 '만약'이다 (Salmon, 2001, p. 28). 아킬레스가 $\frac{10}{9}t$시간 후에 거북이를 따라잡는다고 말할 수 있는 경우는 '만약 아킬레스가 거북이를 따라잡는다면'이라고 가정을 한 상황에서만 가능하다. 따라서 $100+10+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots=\frac{1000}{9}$m를 달린 후에 거북이를 따라잡는다는 설명 역시 이 경우와 유사하다. 이것은 지나치게 큰 가정 '아킬레스가 만약 거북이를 따라잡는다면'에 의존한 논증이다(Salmon, 2001, p. 28). 즉, 아킬레스가 $\frac{10}{9}t$시간 후에 거북이를 따라 잡는다는 것은 거북이가 달린 길이 $100+10+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots$가 $\frac{1000}{9}$m가 되는 경우에만 가능하다. 우리는 아킬레스가 거북이를 따라잡는다는 사실을 이해하고 싶을 때 길이들의 합 $100\text{m}+10\text{m}+\frac{1}{10}\text{m}+\frac{1}{100}\text{m}+\cdots$이 $\frac{1000}{9}$m가 되는 이유를 원하지만, 정작 그에 대한 설명은 제시되지 않는다. 사실 이 문제에는 몇 가지 문제가 포함되어 있다. 한 가지는 $100+10+\frac{1}{10}+\frac{1}{100}+\cdots$는 $\frac{1000}{9}$에 수렴한다

는 해석학의 수렴의 의미이며, 두 번째는 수학적 계산을 실제 물리적 거리에 적용하였을 때, 물리적 거리들의 무한합이 $\frac{1000}{9}$이 된다는 가정을 받아들일 수 있는지의 문제이다(한대희, 2000). 이들에 대해 논의가 되지 않으면 역설의 등비급수의 설명은 이해되기 어렵다. 또한, 본 연구는 이와 더불어 학교수학에서 제논의 역설을 등비급수로 설명하고 있음에도 불구하고 여전히 역설이 깔끔하게 해소되었다고 느끼기 어려운 이유 중 하나로 담론의 공약불가능성의 문제가 있음을 제안하고자 한다. 본 절은 이에 대해 논의한다.

3.1.1. ‘순간’과 ‘도달한다’의 수학적 번역

제논의 역설 중 아킬레스와 거북이의 경주의 역설은 일상 언어로 표현되어 있는데 그 표현을 수학적으로 번역하여 등비급수로 역설을 해소한다. 이때 시간과 공간을 실수 연속체에 대응시키며 시간의 순간을 수직선 위의 한 점에 대응하는 것으로, 아킬레스와 거북이의 운동은 수직선과 같은 직선 위에서 운동하는 것으로 표현한다. 이러한 실수 연속체 이론은 19세기 이후 데데킨트, 바이어슈트라스, 칸토어에 의해 정립되어 해석기하학과 그리고 다양체 이론의 발달을 가져오는 등 수학에서 성공적인 이론이 되었으며, 물리학에도 응용되었다(Putnam, 1975). 그러나 Peirce와 Weyl, Hersh는 실수 연속체가 시간을 나타내기에는 적절하지 않음을 주장하였다(Peirce, 1992; Weyl, 1994; Hersh, 2017).

‘아킬레스와 거북이의 경주’에서 우리는 아킬레스가 거북이가 바로 직전에 있던 자리에 ‘도달한다’고 가정을 하면서, 아킬레스가 그 자리에 ‘도달할 때’ 또는 ‘도달하는 순간’까지의 시간 구간을 고려한다. 등비급수의 수렴에 의해 아킬레스가 거북이를 따라잡는데 걸리는 시간을 계산할 때도 아킬레스가 거북이가 있던 자리에 ‘도달하는 순간’까지의 시간들의 합을 구한다. 이 진술에는 연속체 시간에서 한 순간에 대해 말할 수 있다는 가정, 즉 시간의 연속체가 순간들로 이루어졌다는 가정이 포함되어 있다. 그러나 Peirce(1992, p. 176)는 연속체가 길이가 없는 궁

극적 부분으로 구성되어 있다는 가정이 바로 제논의 역설을 일으키는 원인이라고 하였다.

> 제논의 모든 논증은 연속이 궁극적인 부분들을 갖는다고 전제하는데 의존하고 있다. 그러나 연속은 마찬가지 의미에서 그것의 모든 부분이 부분을 갖는 그런 것이다. 따라서 그는 자기-모순적 전제를 만들어냄으로써 모순을 이끌고 있을 뿐이다(Peirce, 1992, p. 176).

Peirce는 직선 위의 점의 cardinal number는 실수의 cardinal number보다 크다고 주장하였을 뿐만 아니라, 무한소가 존재한다고 생각하였다. 따라서 따라서 직선 위에는 실수보다 더 많은 점들이 존재하며 Peirce의 직선 위에는 실수 이외에도 직선을 채우는 다른 점들이 있을 수밖에 없다(Putnam, 1995).

Weyl 역시 기간이 배제된 시간의 ‘순간’ 또는 공간의 길이가 없는 ‘점’은 우리가 경험하는 시간과 공간의 구성요소로서 보기 어려우며, 따라서 실수 연속체와 시공간과 같은 직관적이거나 경험적인 연속체는 다르다고 주장하였다(Weyl, 1994, p. 93) 따라서 Weyl은 연속적으로 흐르는 시간을 기간이 배제된 순간들로 구성된다는 주장은 적절하지 않으며 ‘현재(now)’, 즉 어떤 ‘순간’을 대상으로 다루려고 할 때, 그것은 점과 같은 한 고정된 순간이 될 수 없다고 주장한다. 우리가 ‘현재(now)’를 말한다면, 이는 과거를 포함하는 흐름으로 봐야 한다는 것이다. 이는 만약 우리가 어떤 순간을 기억한다고 말할 때, 우리는 그 순간만을 언급할 수는 없고, 그 순간을 포함한 기간(아주 짧다하더라도)의 기억에 대해 말할 수밖에 없기 때문이다(Weyl, 1994, p. 92). 즉, 정리하면 Weyl의 시간에 대한 관점은 다음과 같다.

1. 시간 위의 개별적인 점은 독립된 것이 아니다. 즉, 그 자체로 취해질 때 순수하게 존재하지 않는 것이다(pure nothingness). 그리고, 오직 “이행중인 점(point of transition)”으로서만 존재한다. (물론, 그것을 수학적으로 이해할 수 있는 방법은 없다)
2. 고정된 시간 점이 어떤 방식으로든 제시될 수 없는 것은 시간의 본질 때문이다(우리의 감각기관(medium)의 우연적인 불완전함 때문이 아니다) 그것은

항상 근사적이며(approximate), 정확한 결정은 결코 불가능하다. (Weyl, 1994, p. 92)

Weyl의 위와 같은 시간의 관점에 의하면, ‘아킬레스와 거북이의 경주’에서 아킬레스가 거북이가 바로 직전에 있던 자리에 ‘도달하는 순간’에서 기간이 없는 순간을 언급하는 것은 적절하지 않다. 우리가 시간의 연속체에서 한 순간을 말할 때, 그 순간을 포함한 아주 짧은 구간을 인식하게 되기 때문이다. 따라서 시간의 수학적 대응물로서 실수 직선을 생각하는 것과 ‘순간’의 수학적 대응물로서 역시 실수 직선 위의 한 점을 고려하는 것이 타당한가에 대한 의문이 제기된다.

마찬가지로 Hersh(2017) 또한 시간의 흐름에서 ‘현재’를 과거와 미래의 경계로서 보는 것은 적절하지 않음을 제안하였다. Hersh(2017, p. 275)는 어떤 ‘순간’을 과거와 미래 사이의 경계를 이루는 한 지점으로 생각하는 것은 ‘표준적인 수학모델로부터 온 인공물’에 불과하며, 하나의 ‘순간’을 시간의 흐름으로서 ‘과거와 미래가 겹쳐진(overlap)’ 상태로 생각하는 것이 직관에 더 적절할 수 있다고 주장한다. 즉, Hersh(2017)는 순간을 변화하는 과정에 있다고 보았는데, 이는 시간에 대한 Weyl의 관점과 유사하다. Hersh(2017)는 연속체에서 한 순간을 무한히 가까운 과거와 미래를 포함하는 0보다 큰 무한소 길이를 갖는 구간으로 봐야 함을 제안한다.[26] 즉 Hersh(2017)의 관점을 따르면 현재 또는 한 순간은 0보다 더 긴 기간을 갖지만 임의의 양의 실수보다 더 작은 기간을 갖는다. 이 입장에서는 일상적 표현 시간에 대한 수학적 대응물로서 실수 연속체는 적절하지 않다.

제논의 역설에서 아킬레스가 거북이가 바로 직전에 있던 장소에 ‘도달하는 순간’들을 기준으로 아킬레스의 운동을 분할한다. 그러나 시간의 연속체에서 ‘도달하는 순간’을 언급할 때 우리는 기간이 배제된 직선 위의 점이 아닌, 무한히 가까운 과거와 무한히 가까운 미래를 포함하

26) 더 나아가서 Hersh(2017)는 어떤 한 순간을 하나의 실수보다는 비표준해석학(non-standard analysis)의 monad에 대응하는 것으로 이해하는 것이 적절함을 제안하였다.

는 어떤 시간의 패러다임 속에 있다고 볼 수 있다. 즉, 연속체의 구성요소가 그 연속체와 닮았고 무한소 길이를 가졌으며, 부분을 갖는 연속체의 관점인 무한소 담론에서 사고한다고 볼 수 있다.

우리가 시간의 연속체와 순간에 대한 관념이 무한소 담론에 속한다고 한다면, '도달한다'의 수학적 번역 역시 무한소 담론에서 이루어져야 한다. 따라서, 무한소를 구성요소로 갖는 직선 연속체에서 아킬레스가 거북이를 따라잡으려고 달리는 상황을 고려하자. 앞에서 제기한 문제 상황대로 아킬레스는 수직선 위의 좌표 0에서 거북이는 100에서 출발하며, 아킬레스가 거북이보다 속도가 10배 빠르게 거북이를 향해 달리고 있다고 하자. 출발 직전 아킬레스와 거북이 사이의 거리는 100이다. 그 후 아킬레스가 거북이가 처음에 있던 자리에 도달했을 때, 거북이는 10만큼 가게 되므로, 둘 사이의 거리는 10이 된다. 이것이 반복되면, 둘 사이의 거리가 100, 10, 1, 1/10, 1/100, 1/1000로 줄어든다. 즉, 아킬레스와 거북이 사이의 거리는 $100/10^{n-1}$이 된다. 그리고 n이 무한히 커지면 $\left(\frac{100}{10^{n-1}}\right)$은 0과 무한히 가까워지게 된다. 라이프니츠의 무한소 담론의 메타규칙에 의하면 $\left(\frac{100}{10^{n-1}}\right)$과 0의 차이가 무한히 가까워질 경우, 이들의 차이는 원하는 만큼 작게 만들 수 있으며 따라서 그 차이는 아무것도 아니게 된다. 즉, $\left(\frac{100}{10^{n-1}}\right)$은 0과 동일하게 해석된다. 아킬레스와 거북이의 사이의 거리 $\left(\frac{100}{10^{n-1}}\right)$와 0과의 차이는 연속성의 법칙에 의해 원하는 만큼 작게 만들 수 있고 이는 0이 되므로 이때 아킬레스는 거북이를 따라잡은 것이 된다. 즉, 무한소 담론에서는 아킬레스와 거북이 사이의 거리가 0과 동일하게 해석되는 경우가 발생하며, 이때 아킬레스는 거북이를 따라잡는다.

3.1.2. 일상 언어가 갖는 자생적 의미

우리는 때때로 '용어의 구어적 의미와 일상적 경험을 바탕으로 생

긴’ 자생적 개념들(spontaneous concepts)을 갖고 있으며, 그것은 어떤 수학적 개념이나 문제 상황을 파악할 때 영향을 미친다. 그 한 가지 예로서 극한의 경우에 학생들은 개념을 배우기 이전부터 자생적인 직관, 이미지를 갖고 있으며 이들은 수학적인 극한 개념을 배울 때 영향을 미친다. 특히 극한의 ‘~로 가까이 간다’는 이미지는 학생들에게 ‘도달하지 않고 접근하는 것’, ‘통과할 수 없는 한계’, ‘도달할 수도 통과할 수도 없는 한계’ 등과 같은 다양한 의미로 나타난다(Tall, 1991, pp. 208-211).

‘도달할 때’, ‘도달하는 순간’과 목적지에 ‘도달한다’와 같은 표현은 일상적으로 사용하는 단어이다. 제논의 역설을 수학적으로 해결할 때 이들을 수학적으로 번역하는 과정이 발생한다. 제논의 ‘아킬레스와 거북이의 경주’의 역설에서, 아킬레스가 거북이가 직전에 있던 자리에 ‘도달하는 순간’을 고려한다. 무한소가 배제된 입장에서 전개되는 고등학교 교과서에서 ‘아킬레스와 거북이의 역설’을 해결할 때 이러한 시간은 실수 연속체에 대응이 되며, 따라서 순간은 실수 직선 위의 한 점으로 간주 된다. 그러나 Peirce, Weyl, Hersh의 논의를 보았을 때 그러한 존재론적 범주의 할당이 우리의 직관에 적합한지에 대해 의문이 발생한다. 이들의 논의에 의하면 시간의 연속체에서 한 순간을 말하는 것은 직선 연속체 위에서 한 점뿐만 아니라 그 점과 무한히 가까운 수들로 포함된 무한히 작은 구간을 언급한 것으로 보는 것이 직관에 더 적합하다. 즉, 시간과 ‘도달하는 순간’의 수학적 해석은 무한소 담론이 더 적절하다. Tall의 용어를 빌리자면, ‘도달하는 순간’은 무한소 길이를 갖는 구간에 대응하는 자생적인 이미지를 갖는다고 볼 수 있다.

그런데 고등학교 교과서에서 종종 등장하는 등비급수에 의한 설명은 실수 연속체 위에서의 역설의 해소이다. 즉, 제논의 역설에 등장하는 ‘순간’이라는 표현에 대해 여러 철학자들은 실수 직선 위의 한 점이라기 보다는 무한히 작은 구간으로 보는데, 그 역설의 해소에서는 극한 담론에서 등비급수의 값을 구하므로 한 논제 안에 공약불가능한 두 가지 담론이 혼재한다.

언어와 인간의 사고 사이의 관계 및 상호 영향력에 대해 많은 학자들

이 강조해왔다. Whorf는 언어는 사람들이 세상을 바라보고 이해하는데 영향을 끼친다고 주장하였으며(Clark & Clark, 1977, p. 554), 각 언어는 그 언어로 의사소통하는 사람에게 '세계관(world view)'을 제공한다고도 하였다(Clark & Clark, 1977, p. 554). 쿤 역시 서로 다른 언어들은 서로 다른 세계를 구성한다고 하였다. 어떤 언어를 사용하는가에 따라서 자신이 생각하고 바라보고 있는 세계의 모습이나 구조가 달라진다는 것이다(Kuhn, 1983, p. 248, p. 252). 즉, 어떤 학문적 용어를 사용할 때 우리는 단순히 그 용어만 사용하는 것이 아니라 그 용어가 속한 패러다임이나 배경지식 혹은 담론 안에서 사고하게 된다.

우리가 수학학습을 할 때도 사용하고 있는 언어에 따라서 우리가 바라보는 수학 세계의 구조는 달라진다. 제논의 역설에서 '도달할 때', '도달하는 순간'과 같이 자생적인 무한소 담론의 언어를 사용할 때 우리는 무한소 담론 안에 있게 되는 반면, 등비급수로 설명할 때는 극한 담론 안에서 사고하게 된다. 따라서 한 논제 속에서 공약불가능한 서로 다른 두 담론으로 서술하고 있기 때문에 제논의 역설의 등비급수의 설명에도 불구하고 역설이 깔끔하게 해소되지 않는다.

이러한 제논의 역설의 사례는 표준적인 공약불가능성의 사례는 아니다. 일반적으로 이론이 공약불가능하다고 하거나, 담론이 공약불가능하다는 것은 A라는 이론 혹은 담론과 B라는 이론 혹은 담론 사이에 성립하는 표현이다. 따라서 일반적으로 A 이론 혹은 담론으로 사고하는 사람이 B 이론 혹은 담론을 이해하지 못하는 현상이 일반적인 공약불가능성의 사례이다. 그러나, 제논의 역설은 시간의 순간을 A 담론으로, '도달한다'의 등비급수의 해결에서 일상언어의 수학적 번역은 B 담론으로 고려하게 된 경우이다. 즉, 한 논제 안에 공약불가능한 A 담론과 B담론이 혼재되어 있는 상황으로 공약불가능성의 표준적인 사례는 아니다. 아킬레스와 거북이의 역설에 대해 해석학의 등비급수를 이용하여 설명하지만, 현재에도 계속되고 있는 철학적 논의들은 이 역설이 등비급수로 완전히 해소되었다고 말하기 어렵다는 사실을 보여준다. 본 연구는 이의 한 원인으로서 한 논제 안에 공약불가능한 두 가지 담론이 혼재된 것임을 제안한다.

3.2. 순간속도의 이해[27)]

3.2.1 $\frac{dy}{dx}$를 ‘비의 극한’ 혹은 ‘비’

학교 수학의 교과서들은 dy/dx를 ‘비의 극한’으로 다룬다. 그리고 2015개정 교육과정에 따라 집필된 <수학Ⅱ>교과의 지도서들은 다음과 같이 도함수 기호 dy/dx를 ‘극한의 비’가 아닌 ‘비의 극한’으로서 지도할 것을 강조하고 있다.

> 도함수의 기호 $\frac{dy}{dx}$는 $\lim_{\triangle x \to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$를 의미하는 것이지 dy를 dx로 나눈다는 의미가 아님을 강조하여 지도한다(고성은 외, 2015, p. 94).

그러나 일부 학생들은 $\frac{dy}{dx}$에 대해 y를 x로 미분한 것을 나타내는 하나의 기호로 보지 않고, dy와 dx를 각각 독립적인 무한히 작은 수로 해석하기도 한다. 즉, $\lim_{\triangle x \to 0}\frac{\triangle y}{\triangle x}$에서 극한 $\triangle x \to 0$을 먼저 적용하여 dy와 dx를 무한소로, 따라서 dy/dx를 비로서 특히 ‘극한의 비’(무한소)/(무한소)로 생각한다.

Tall(1980)의 연구에서는 δy, δx, dy/dx, dy, dx에 대한 질문에서 70명 중에 22명이 무한소 유형의 답변을 하였다. 특히 몇몇 학생들은 dy를 δy가 0으로 갈 때의 극한으로, 그리고 $dx = \lim_{\delta x \to 0}\delta x = 0$으로 응답하였다. 또한, Tall(1985)은 여러 학생들이 dy/dx를 비가 아니라고 배웠음에도 불구하고 dy와 dx를 0이 아닌 무한히 작은 수로 생각하고 있음을 말하였다. 그리고 Orton(1983)의 연구에서 학생들에게 δy/δx와 dy/dx의 관계에 대해 질문했을 때, ‘δy는 dy가 될 때까지 작아지고’, ‘δx는 dx가 될 때까지 작아지는 것’으로 생각한다는 반응도 나타났다.

27) 본 절은 백승주, 최영기(2019)의 연구의 일부를 수정한 것이다.

Schneider(1992, p. 330)는 학생들이 dx/dt에 대해 dx와 dt가 각각 감소하여 dx=0, dt=0이 된다고 생각하기 때문에 dx/dt를 이해하기 어렵다고 하였다. 움직인 시간이 0이 되거나 또는 움직인 거리가 0이 되기 때문에 순간변화율을 구할 수 없다고 생각한 것이다. 즉, dx/dt에 대해 ‘극한의 비’로 인식하여 어려움이 발생하였다. Job & Schneider(2014, p. 639) 역시 학생들의 순간속도를 ‘비의 극한으로서가 아닌 극한의 비로서’ 생각하고 있음을 제시하였다. 학생들은 순간속도를 0을 0으로 나누어서, 실제 세계에서는 불가능한 것으로 받아들이고 있었다.

이러한 무한소 관점의 사고는 비단 학생들뿐만이 아니다. Katz & Tall(2012)은 수학자 Roquette가 학창시절에 도함수 또는 dy/dx가 ‘극한의 비’가 아닌 ‘비의 극한’으로서 해석하는 것에 의문을 제기한 것을 다음과 같이 제시하였다.

> dy/dx라고 씀에도 불구하고[...] 이것은 진정으로 두 개체들의 비를 의미하는 것이 아니다. 그러나 그것은 오직 기호적 표기, 즉 비 $\triangle y/\triangle x$의 극한으로써만 해석되어야만 한다. 나는 이 실망을 역시 견뎌냈다(Katz & Tall, 2012, p. 72 재인용).

또한, 수학자 Luzin 역시 dy/dx를 ‘무한소의 비’로서 생각였음을 다음과 같이 밝힌 바 있다.

> When the professor announced that dy/dx is the limit of a ratio, I thought: “What a bore! Strange and incomprehensible. No! They won’t fool me: it’s simply the ratio of infinitesimals, nothing else.” (Katz & Tall, 2012, p. 74 재인용).

분명히 학교수학의 도함수는 순간변화율로 정의되고 순간변화율은 평균변화율의 극한인 ‘비의 극한’으로 정의되며 비를 의미하지 않는다. 그러면 순간속도를 ‘극한의 비’ 혹은 ‘비’로서 받아들인다는 것은 어떤 의미인가? 이는 교육과정에서는 무한소 양이 존재하지 않고 극한과 나눗셈 연산 사이에 교환이 가능하지 않지만 무한소 양이 존재한다고 생각하고 극한을 먼저 계산한 후 나눗셈을 한 것이다. 즉, 순간변화율의

식 $\lim_{\triangle x \to 0} \frac{f(x+\triangle x)-f(x)}{\triangle x}$ 에서 나눗셈 보다 극한을 먼저 하여 $\frac{(무한히작은거리)}{(무한히작은시간)}$ 를 구한 후 나눗셈을 적용한 것이다. 따라서 이는 무한소의 존재성 논의와 유사한 맥락이다. 위 순간속도의 계산은 우리가 무한히 작은 시간을 잴 수 있고, 그동안 차가 얼마나 움직였는지 잴 수 있는 것처럼 생각하여 속도를 재는 것을 말하기 때문이다. 무한히 작은 수가 존재한다고 가정하면, 어떤 무한히 작은 t시간 동안 차가 움직인 거리를 s라 하자. 물론 그 거리 s 역시 무한히 작게 되며, s를 t로 나누어서 차의 순간속도를 얻을 수 있다(Gowers, 2002). 이러한 순간변화율과 도함수에 대한 서술은 무한히 작은 수의 존재성의 가정이 포함되므로 교육과정이 받아들이고 있는 극한 담론이 아닌 무한소 담론에서 생각한 것으로 판단된다.

3.2.2. 무한소와 극한의 두 가지 담론과 도함수의 지도

학생들은 극한 담론으로 구성된 교과서를 학습하지만 선행 연구들은 일부 학생들이 무한소 관점의 언어를 사용하여 미적분학을 이해함을 보고하고 있다. 만약 학생들이 dy와 dx를 무한히 작은 수로 생각하고 dy/dx 또는 순간변화율을 ‘비’로 인식한다면 이는 오개념이라기 보다는 라이프니츠의 무한소 담론을 따른 것으로 볼 수 있다. 그리고 쿤이 말했듯이 패러다임은 가정이나 규칙에 우선하기 때문에 교과서의 미적분학을 배우고도 해석학의 수체계에 저항하며 무한소 패러다임을 고집할 수도 있다. 우리 교과서의 공리체계가 극한 담론이며 우리의 사고체계가 극한 담론일 이유는 없기 때문이다.

그러나 본 연구는 고등학교에서 학생들에게 무한소 관점에서 가르치자는 주장을 하는 것은 아니다. 현재 학교수학은 극한 담론에서 전개되며 학생들이 대학 진학 후에 학문수학을 접할 때도 무한소가 배제된 해석학을 공부해야하기 때문에 학생들은 고등학교에서 극한 담론에 참여하도록 해야 한다. 그러나 수학교육의 현장에 있는 교사들은 학생들이 교과서와

는 다른 패러다임을 가질 수도 있음을 인지할 필요가 있다. 또한, 오류의 관점에서 만약 학생들이 dy/dx를 ‘비’로서 본다면 그것을 학생들의 단순한 실수나 오개념이라기보다는 과거 라이프니츠도 가졌던 관념이라는 사실을 이해하고 있을 필요가 있다. 수학교실에서 학생의 선행지식이나 패러다임과 같은 학생의 인지상태와 오개념의 원인에 대한 교사의 지식, 그리고 오개념을 대하는 교사의 태도는 교사의 발언과 수업의 방향에 영향을 끼치므로 학생들의 수학학습 성공을 결정하는 주요한 요인이 되기 때문이다.

학교수학에서 도함수 정의의 바탕이 되는 극한 개념에 대해 2015개정 수학과 교육과정은 다음과 같이 직관적 지도를 제안한다.

> 함수의 극한에 대한 뜻과 성질은 그래프를 통해 직관적으로 이해하게 하고, 이때 공학적 도구를 이용할 수 있다(교육부, 2015, p. 75).

그리고 미분계수는 ‘할선과 접선의 관계’와 ‘평균변화율과 순간변화율의 관계’를 이용하여 직관적으로 지도된다(정연준, 2010, p. 239). 직관은 수학에서 강력한 도구이다. 수학에 직관이 없다면 오직 순수한 논리만 있을 뿐이며 따라서 동어반복(tautologies)만이 남게 된다. 순수 논리 이외에 수학을 할 때 반드시 필요한 것은 직관이다(Poincare, 1970, p. 16). 그리고 개인을 둘러싼 세계, 특히 시간, 공간 등에 대한 경험은 직관을 형성하는데 있어서 근본적인 요소이다(Fischbein, 1987, p. 102). 그러나 미적분학에서 다루는 무한대와 무한소의 영역은 우리의 경험이 미치지 않는 영역이며, 따라서 이에 대한 명확하고 유일한 직관이 있다고 보기 어렵다. Natorp는 직관은 무한소와 극한에 대한 우리의 지식의 기초를 제공할 수 없다고 하였다(Mormann & Katz, 2013, p. 269). 따라서 무한의 영역을 다루는 미적분학에서 ‘직관적 지도’는 사려 깊은 주의가 필요하다.

Ⅳ. 예비교사 및 고등학생들의 담론 분석

이론이 공약불가능하다는 것은 서로를 이해하기 못하고 의사소통이 어려운 경우를 말한다(장하석, 2014). 담론의 공약불가능성 역시 쉽게 해결되지 않는 갈등상황이다. 갈등상황에 있는 명제들을 해결하기 위한 수단을 마련하기 어렵고 담론간에 동의를 이루기 어려운 상황을 공약불가능하다고 한다(Rorty, 1979). 공약불가능한 담론의 내러티브들은 서로 동일한 대상에 대해 말하는 것 같아도 용어의 구체적 의미와 용법 및 담론의 메타규칙 등이 다르기 때문에 모순된 형태를 갖고 있기도 한다. 이러한 담론의 공약불가능성은 쉽게 드러나지 않는 경우가 많기 때문에 그 존재형태와 원인을 파악하는 것은 수학교육의 중요한 과제이다. 이에 본 연구는 Ⅱ장에서 공약불가능성의 의미와 담론의 공약불가능성을 유발하는 요소를 확인하였다. 또한 Ⅲ장의 이론적 분석을 통해 무한소 담론과 극한 담론이 서로 공약불가능함을 확인하였다.

본 장에서는 Ⅱ장과 Ⅲ장의 이론적 분석의 결과를 바탕으로 예비교사와 고등학생의 담론 분석의 사례연구를 제시한다. 이들의 담론은 어떤 형태인지, 무한소 담론이라면 그 구체적인 양상은 어떠한지를 확인하고자 하였다. 또한 이들의 담론이 학교수학 혹은 해석학의 극한 담론과 공약불가능한지 여부 및 어떤 점에서 공약불가능한지를 확인하고자 하였다.

첫 번째 사례연구는 예비교사들을 대상으로 수행하였다. 중고등학생뿐만 아니라 대학생들의 무한소 관점을 보고한 여러 연구에도 불구하고, 예비교사들의 무한소 관점을 탐색한 연구는 부족한 형편이다. 교사들은 학생들의 사고를 이해하고, 교육과정의 내용과 학생들의 사고를 연결하는 수업계획을 세우고 적용한다. 그러나 만약 교사 자신이 무한소 담론에 머물러 있다면, 교사는 극한 담론에서 전개되는 학교 수학과 학생들의 무한소 직관 사이의 괴리를 정확히 이해하고 대응하는 데 어려움을 겪을 수 밖에 없다. 뿐만 아니라 예비교사들은 무한소의 존재를 인정하지 않는 해석학을 대학에서 공부하는데, 예비교사들의 무한소 관점은 해석학의 학습에 인식론적 장애요인으로 작용할 수 있다. 따라서 예비 교

사들의 무한소 관점과 이들이 해석학의 학습에도 불구하고 무한소 관점에 계속 의존하는 현상을 구체적으로 파악하고 그 원인은 무엇인지 탐색하는 것은 해석학 분야의 교과 지식 함양에 중요한 문제이다. 따라서 첫 번째 사례연구로 예비교사들이 무한소 관점을 가졌는지, 극한의 이해에서 무한소에 의지하는지, 또 그들의 담론은 어떤 특징을 가졌는지 확인한다. 또 만약 예비교사들이 무한소 담론에 머물러 있다면, 해석학을 학습한 예비교사들이 해석학의 담론으로의 이행을 어렵게 하는 요인은 무엇인지 확인하고자 하였다.

두 번째로 고등학생들의 담론 양상을 파악하고 학교수학의 극한 담론과의 관계를 확인하는 사례연구를 수행하였다. 학생의 담론과 교사의 담론, 혹은 교과서의 담론이 공약불가능하면 서로 의사소통하기 어려우며 학생은 교과서나 교사의 내러티브의 의미를 이해할 수 없기 때문에 학습이 효과적으로 이루어지기 어렵다. 따라서 공약불가능한 상황을 예측하고 그 양상과 원인을 확인하는 것은 수학학습이 효과적으로 이루어지기 위해 선행되어야 하는 일이다. 본 장에서는 학교수학의 담론의 공약불가능성의 사례로서 학생들이 극한 담론의 수학을 학습하지만 무한소 담론에 머물러 있는 현상을 제시하고자 한다. 중학교에서 무한소수를 학습하고 고등학교에서 미적분학을 공부하면서 무한소가 배제된 수학을 학습하지만 학생들은 여전히 무한소 개념을 보이는 경우가 많다. 본 장은 이러한 학생들의 사고를 담론의 공약불가능성 관점에서 분석하였다.

1. 예비교사들의 담론 분석[28][29]

1.1. 연구 방법

예비교사들의 사고를 알아보기 위해 사례연구를 수행하였다. 사례연구

28) 본 연구는 인천대학교 기관생명윤리위원회의 심의(INUIRB-20-6차-125)와 서울대학교 생명윤리위원회의 심의(IRB No. E2204/002-004)를 받고 수행되었다.
29) 본 절은 백승주, 이지현(2021)의 연구 일부를 수정하여 작성한 것이다.

는 교육분야에서 널리 실시되는 포괄적 형태의 연구이며 교수실험과 설문 조사와는 다른 정성적 경향이 있는 연구이다(Merriam, 1998, p. 25). 또한 사례연구는 어떤 상황이나 사례를 집중적으로 기술하고 분석하기 위한 연구로서(Merriam, 1998, p. 35), 자료수집과 분석에서는 특별한 방법을 고집하지 않으며, 다양한 방법이 사용가능하다(Merriam, 1998, p. 38).

사례연구는 '특정적(particularistic), 서술적(descriptive), 발견술적(heuristic)' 특징을 갖는다. 특정적 특징은 사례연구가 어떤 특정한 상황이나 현상에 대한 지식을 제공한다는 의미이다. 따라서 연구의 초점이 명확할수록 세밀한 연구설계가 가능하다. 서술적 특징이란 연구결과에 대한 자세하고 있는 그대로의 기술을 제공한다는 의미이다. 발견술적 특징은 연구를 통해 조사하고 연구한 현상에 대한 명백한 이해를 제공한다는 것이다. 사례연구는 새로운 사실을 깨닫도록 하거나 이미 알고 있던 지식을 재확인하게 돕고, 이전에는 알지 못했던 요인 혹은 변수들의 관계에 대한 통찰을 제공하기도 한다(Merriam, 1998, pp. 39-40).

본 연구는 예비교사들의 무한소 무한대의 개념 및 극한과정과 관련하여 구체적인 담론 양상을 파악하기 위한 것이며, 이들의 담론에 대한 자세한 서술 및 극한담론과의 관계와 공약불가능성 현상에 대한 통찰을 얻기 위해 연구방법으로 사례연구를 택하였다. 연구 대상 및 자료수집 방법과 분석방법은 다음과 같다.

1.1.1. 연구 대상

첫 번째 사례연구는 수도권 소재 대학 수학교육과 3학년에 재학 중이면서 해석학을 공부한 경험이 있는 예비교사 7명을 대상으로 수행하였다. 이 예비교사들은 2020년 2학기에 수학교육 관련 강의를 수강하였고, 수업 과제로 제시된 개방형 질문에 대해 자유롭게 답안을 작성하여 온라인으로 제출하였으며, 후속 인터뷰에 참여하였다.

1.1.2. 자료수집 및 분석

해석학을 학습한 예비교사들이 무한히 큰 수와 무한소의 존재 및 극한에 대해 어떤 인식을 가지고 있는지를 탐색하기 위한 개방형 문항을 설계하였다. 해석학의 아르키메데스 정리를 학습한 예비교사들의 무한히 큰 수와 무한소의 존재론적 관점은 무엇인지를 파악하기 위해 문항 1-(1)과 1-(2)를 제시하였다. 특히 1-(1)과 1-(2)는 무한히 큰 수와 무한소의 존재성을 직접적으로 묻고 있다. 그리고 문항 2는 실수체계의 축소구간 정리, 즉 축소구간들의 무한 교집합 결과에 대한 질문으로 무한소에 대한 예비교사들의 관점을 파악하기 위해 제시하였다.

학교수학의 극한 담론에서는 0.999…=1이지만 무한소 담론에서는 '…'에 대해 다양한 해석이 가능하다(Stewart, 2009, p. 176). 무한히 큰 수와 무한소의 존재성을 가정한 무한소 담론에서 '…'을 극한으로 해석하면 0.999…=1이 되지만, '…'을 무한히 큰 수를 의미한다고 생각할 수 있으며 이때 0.999…는 1보다 작게 된다. 즉 무한소 담론에서는 '…'의 해석에 의존하여 0.999…가 1보다 작게도 해석이 가능하다(Katz & Katz, 2010). 이러한 관점에서 Katz & Katz(2010)는 0.999…이 1보다 작을 수 있다는 학생들의 직관은 정당화될 수 있다고 하였다. 본 절의 사례연구에서는 이와 유사하게 학생들이 '…'을 바라보는 관점에 따라 축소구간열의 결과를 해석학과 다르게 생각할 수 있다고 보고 이를 개방형 문항으로 제시하였다. 해석학의 축소구간열은 다음과 같다.

> 만약 $\{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$이 공집합이 아닌 유계인 닫힌 구간들의 축소구간 열이라 하자. (즉 $\mathrm{I}_1 \supset \mathrm{I}_2 \supset \mathrm{I}_3 \supset \cdots \supset \mathrm{I}_\mathrm{n} \supset \cdots$이라 하자.) 만약 $n\to\infty$이고, 구간의 길이가 $|I_n|\to 0$ 이면 $\mathrm{E}=\mathrm{I}_1\cap\mathrm{I}_2\cap\mathrm{I}_3\cap\cdots\cap\mathrm{I}_\mathrm{n}\cap\cdots$는 한 점으로 이루어진 집합이다. (Wade, 2014, p. 55)

만약 학생들이 무한소 관점을 가졌다면, '…'를 무한히 큰 수까지 교집합 한다고 해석하여 $\mathrm{E}=\mathrm{I}_1\cap\mathrm{I}_2\cap\mathrm{I}_3\cap\cdots\cap\mathrm{I}_\mathrm{n}\cap\cdots$은 한 점으로 이루어진 집합이 아닌, 실수점과 또 그 근방의 무한히 많은 점을 포함하는 집합으로 답할 것이라 예측된다. 이러한 예측을 반영하여 2번 문항을 제시

하였다.

3번 문항은 버클리(Berkeley)가 ‘죽은 양의 유령’이라 비판했던 뉴턴의 유율법과 관련하여 예비교사들의 극한에 대한 설명방식을 살펴보기 위해 제시하였다. 즉 3번은 미분계수의 계산에서 h가 0이 아닌 것으로 생각했다가 0인 것처럼 취급하는 과정과 관련하여 과거 학자들 사이에 논란이 있던 만큼, 예비교사들 또한 이 설명에서 어려움을 겪을 수 있고 무한소 관점이 드러날 수 있다고 예상하였다. 따라서 h의 취급에 대해 예비교사들이 어떤 서술 양상을 보이는지 또, 무한소 담론 형태를 보이는지를 파악하기 위해 3번 문제를 제시하였다. 연구를 위해 설계된 문항은 〈표 Ⅳ-1〉에 요약하여 제시하였다.

〈표 Ⅳ-1〉 예비교사들의 담론 분석을 위한 과제 요약

문항 번호	개방형 질문	문항 내용
1-(1)	모든 자연수(1, 2, 3, $\cdots$, n, $\cdots$)보다 더 큰 수가 존재할 수 있을까요? 아니면 존재할 수 없을까요? 여러분이 그렇게 추론한 이유를 설명해 주십시오.	무한히 큰 수의 존재
1-(2)	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$보다 작은 양수가 존재할까요? 즉, 아래의 **모든 부등식을 만족시키는 수 x가** 존재할까요? 여러분의 생각과 그 이유를 써 주시기 바랍니다. $0<x<1,\ 0<x<\frac{1}{2},\ 0<x<\frac{1}{3},\ 0<x<\frac{1}{4},\ \cdots,\ 0<x<\frac{1}{n},\ \cdots$	무한소의 존재
2	다음은 구간의 무한 교집합 $[0,\,0.1]\cap[0,\,0.01]\cap[0,\,0.001]\cap\cdots\cap[0,\,(0.1)^n]\cap\cdots$ 에 대한 수민이의 생각입니다. 수민 : $A_n=\left[0,\ (0.1)^n\right]$이라고 하면, $A_1=[0,\,0.1]$ $A_1\cap A_2=[0,\,0.01]$ $A_1\cap A_2\cap A_3=[0,\,0.001]$ $\vdots$ $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n=\left[0,\ (0.1)^n\right]$ $\vdots$ 모든 n에 대해 유한 교집합 $A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cap A_n$은 항상 구간 $[0,\,(0.1)^n]$형태야. 따라서 무한 교집합 $[0,\,0.1]\cap[0,\,0.01]\cap[0,\,0.001]\cap\cdots\cap[0,\,(0.1)^n]\cap\cdots$ 도	축소구간열의 결과

	0 이외의 다른 양수를 포함하는 어떤 구간이 되지 않을까? 여러분은 수민이의 생각에 대해 어떻게 생각하십니까? 무한 교집합 $[0,\ 0.1]\cap[0,\ 0.01]\cap[0,\ 0.001]\cap\cdots\cap[0,\ (0.1)^n]\cap\cdots$이 0 이외의 다른 양수를 포함하는 구간이 될 수 있을까요?	
3	다음은 함수 $f(x)=x^2$의 $x=1$에서의 미분계수를 구하는 과정입니다. $f'(1)=\lim_{h\to0}\frac{(1+h)^2-1^2}{h}=\lim_{h\to0}\frac{2h+h^2}{h}=\lim_{h\to0}(2+h)=2$ ① ② 위 계산 과정 중 ①에서는 $h\neq0$로 생각하여 분모와 분자를 각각 h로 나누었습니다. 그런데 ②의 극한 $\lim_{h\to0}(2+h)$의 값 2는 $2+h$에 $h=0$을 대입해 얻은 값처럼 보입니다. <u>h**의 취급**</u>과 관련하여 ①, ②의 계산 과정이 어떻게 양립할 수 있는지 여러분의 생각을 적어주십시오.	h에 대한 생각 및 미분식의 정당화

개방형 문항 조사 후 (1) 문항에 대한 학생들의 답변을 기록하였으며, (2) 문항별로 학생들의 답변을 비교 대조하면서 비슷한 답변끼리 묶어 범주들을 추출하였다. (3) 학생들의 사고에 대한 이해를 위해 개방형 문항 조사 내용을 바탕으로 화상 인터뷰를 실시하였다. 화상 인터뷰는 녹화한 후 전사하여 분석하였다.

1.2. 연구 결과

1.2.1. 개방형 질문지 답변 분석

문항 1-(1)에서 일부 예비교사들은 ‘임의의 수를 생각해도 그 수보다 더 큰 수가 존재한다’와 유사한 이유를 제시하면서 ‘존재한다’와 ‘존재하지 않는다’는 서로 다른 답변을 제시하였다. 이러한 현상은 1-(2)에서도 유사하게 드러났다. 2번에 대한 답변에서 5명의 예비교사는 무한교집합의 결과가 {0}이 된다고 하였으며 2명의 예비교사는 무한히 작은 구간이 될 것이라고 답하였다. 연산 결과가 {0}이 된다고 했던 일부 예비교사들의 경우 $\lim_{n\to0}(0.1)^n=0$을 근거로 들었다. <표 Ⅳ-2>는 문항

1-(1), 1-(2)와 2번에서 무한소와 무한히 큰 수의 존재론적 관점에 대한 예비교사들의 답변 유형을 범주화한 것이다.

<표 Ⅳ-2> 예비교사들의 개방형 질문지 답변 분석

문항	답변 유형	답변 예시	응답자[30]
1-(1)번 모든 자연수 (1, 2, 3, ⋯, n, ⋯)보다 더 큰 수가 존재할까요?	존재	더 큰 수가 있다고 생각합니다. 모든 자연수에서는 덧셈법칙이 성립하므로 자연수에서 가장 큰 수를 a라고 한다면 $a+a=2a$로 더 큰 수가 존재하고 이는 자연수에서 가장 큰 수가 a라는 말이므로 어떤 자연수보다 더 큰 수는 존재할 수 밖에 없다고 생각합니다.	S1, S2, S3, S7
		있다고 생각한다. $n \Rightarrow n+1 \Rightarrow n+\cdots$ 무엇이 되었던 간에 거기에 +1을 한다면 충분히 크다고 생각할 수 있기 때문이다.	
	비존재	존재할 수 없다. k를 모든 자연수보다 큰 수라고 하면 $[k+1]$은 k보다 큰 자연수다. 따라서 모순이다.	S4, S5, S6. S7
1-(2)번 모든 자연수 n에 대해 $\frac{1}{n}$보다 작은 양수가 존재할까요?	존재	모든 부등식을 만족하게 되면 0에 가까운 소수가 나오겠지만 0이 되는 것은 아니기에 존재할 것이라 생각합니다. $0<x<\frac{1}{2}$은 $0<x<1$의 범위의 일부이고 $0<x<\frac{1}{3}$은 $0<x<\frac{1}{2}$의 일부이며 그 범위를 더 작게 나눠도 이는 그 전 범위에 일부로서 보다 작은 양수는 전체 범위의 일부분으로서 존재할 것이다.	S1, S2, S3, S7
	비존재	존재하지 않는다. $\frac{1}{\infty}=0$으로 알고 있기 때문에 0보다 큰 부등식을 만족시킬 수가 없다.	S4, S5, S6, S7
2번 구간의 길이가 0으로 수렴하는 축소구간열의 무한교집합의 결과	무한히 작은 구간	n이 자연수라면 다른 양수를 포함하는 구간이 될 수 있을 것 같습니다. 1번 논리에 의하면 어떤 자연수 a가 있다면 $a+1$도 있습니다. $\therefore [0,0.1] \cap \cdots \cap [0,(0.1)^n] \cap \cdots$은 결국 어떤 자연수에 의해 $[0,(0.1)^a]$로 정리될 것이며 이 구간에서는 $(0.1)^{a+1}$이 존재한다.	S1, S3
	{0}	무한 교집합$[0,0.1] \cap \cdots \cap [0,(0.1)^n] \cap \cdots$에 대하여 유한 교집합을 생각한다면 $[0,0.1] \cap \cdots \cap [0,(0.1)^n] = [0,(0.1)^n]$ 이러한 과정을 무한 번 반복해서 된다면 $\lim_{n \to 0}(0.1)^n = 0$이 되므로 구간은 0에 수렴하게 될 것이다.	S2, S4, S5, S6, S7

3번 문항에 대한 답변에서 예비교사들은 미분계수를 구하는 극한 식이 정당화될 수 있는 이유에 대한 다양한 생각을 보여주었다. 이 과정에서 일부 예비교사들은 무한히 작은 양에 의존하여 설명하거나(S6, S7), h가 0에 도달한다는 생각(S3)을 드러내었으며, '극한식을 먼저 정리한 후 대입해야 한다' (S1)는 답변을 보이기도 하였다. 또한 예비교사들은 답변의 유형 중 L3 '0에 가까워지는 변수' 는 다른 답변과 함께 나타나기도 하였다. 예비교사들의 3번 답변에 대한 범주화는 <표 Ⅳ-3>에 제시하였고, 3번에 대한 예비교사들의 답변 양상은 <표 Ⅳ-4>에 제시하였다.

<표 Ⅳ-3> 문항 3에 대한 반응 분석

코드명	h의 취급	3번의 답변 유형 ($h \neq 0$은 아니지만 $h=0$을 대입한 것처럼 보이는 이유는 무엇인가?)
L1	0에 도달	$\lim_{h \to 0}$에서 언젠가 h가 0에 도달할 것이므로 $h=0$이라고 할 수 있다.
L2	무한히 작은 양31)	$h \neq 0$이지만 h는 0으로 봐도 무방할 정도로 충분히 작은 값이므로 $\lim_{h \to 0}(h+2)$의 계산에서는 0을 대입하는 것이 가능하다.
L3	0에 가까워지는 변수	함숫값과 극한값은 다르다. $h \neq 0$이지만 $2+h$가 2에 한없이 가까워진다는 뜻에서 극한값이 2가 된다.
L4	식을 정리 후 대입	극한 식의 계산에서는 먼저 식을 정리한 후 대입해야 한다.

30) S7은 1-(1)과 1-(2)의 개방형 문항 답변에서 '존재한다' 와 '존재하지 않는다' 의 두 가지 답변 모두 가능할 것 같다고 설명하였다. S7은 1-(1)번에서 '자연수는 끝이 없을 것 같기 때문에' 존재하지 않는다고 생각하면서도 '집합론에서 자연수는 C개..?라고 배웠던 것 같아서 이게 끝이 있는 건지 의문이다' 라고 하면서 존재할 수도 있다는 관점을 드러내었다. 이처럼 S7은 1-(1)과 1-(2)에서 두 가지 답이 모두 가능할 것 같다고 설명하였기 때문에 S7의 답변은 '존재' 와 '비존재' 모두에 포함하였다.

31) 3번 문항에 대한 예비교사들의 설명에서 드러난 '무한히 작은 양' 은 무한소의 실재성을 주장한 것인지, 실재하지는 않지만 극한을 설명하기 위한 표현 방법인지는 개방형 문항 조사만으로는 알 수 없기 때문에 이를 인터뷰에서 파악하고자 하였다.

<표 Ⅳ-4> 문항 3에 대한 예비교사들의 답변 유형

	L1	L2	L3	L4
S1			○	○
S2			○	
S3	○		○	
S4			○	
S5			○	
S6		○		
S7		○	○	

1.2.2. 인터뷰 분석

1.2.2.1 무한히 큰 수와 무한소에 대한 S3의 추론 분석[32)]

인터뷰에서 1-(1)의 질문에 대해 예비교사 S1과 S3는 무한히 큰 수가 존재한다고 했으나, 4명의 예비교사 S2, S4, S5, S6은 존재하지 않는다고 답하였고, S7은 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다고 하였다.[33)] 다음은 1-(1) 문항에 대해 ‘존재한다’라고 했던 S3의 설명이다.

S3 : 저희의 목적은 일단은 존재하는 것을 보고 싶기 때문에 그 한 놈을 찾아야 하기는 하는데 자연수가 계속 움직이고 있어가지고, 커지고 있어가지고 한 놈을 딱 따올 수는 없지만 저는 또 시간 개념으로 생각해서 계속 커지는 수, 맨 앞에 있는 수가 있지 않을까라는 생각 때문에 그 맨 앞에서 계속 움직이고 있는 수를 지금 여기다 가져와서 x라고 생각합니다.

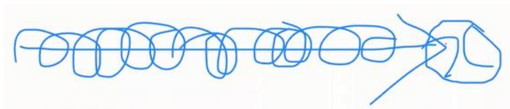
I : 맨 앞에 있는 수?

32) 인터뷰 분석에서 인터뷰를 수행한 연구자는 I로, 예비교사들은 S1, S2, S3, S4, S5, S6, S7로 제시한다.

33) 4명의 예비교사 중 S2는 1-(1)의 개방형 문항 답변에 대해 존재한다고 하였지만 인터뷰 과정에서는 무한히 큰 수가 존재하지 않는다고 답하였다. 이는 1-(1)번 문항을 해석하는 과정의 차이 때문이며 이에 대해서는 다음 절에서 논의한다.

S3 : 네 아직 자연수는 끝에 가장 큰 수가 없고 계속 커지는 중이기는 한데 그 앞에 선두주자가 있다고 생각해서…맨 끝에 1등으로 달리고 있는 자연수를 x라고 가져온 듯한 그런 느낌입니다.

S3 : 자연수라는 놈 이렇게 화살표로 표시하면은 맨 앞에 있는 요놈을 x라고 얘기한 것…



[그림 Ⅳ-1] 문항 1-(1)에 대한 S3의 답변

예비교사 S3은 어떤 임의의 수보다 더 큰 수가 존재하고, 그것보다 더 큰 수가 존재하는 과정이 무한히 반복되기 때문에 무한히 큰 수 x가 존재하며 이것이 '맨 앞에서 움직이고 있는 수', '선두주자'라고 설명하였다. 이와 같은 무한히 큰 수의 존재에 대한 S3의 설명방식은 무한소의 존재성에 대해서도 유사하게 드러났다. 다음은 $0<x<1$, $0<x<\frac{1}{2}$, $0<x<\frac{1}{3}$, $0<x<\frac{1}{4}$, $\cdots$, $0<x<\frac{1}{n}$, $\cdots$의 모든 부등식을 만족시키는 수 x'의 존재성을 묻는 1-(2)번 문항에 대한 S3과의 인터뷰이다.

S3 : 어떤 큰 자연수가 계속 존재하기 때문에 여기 분수의 분모에도 자연수가 오는 거니까 계속 작아질 수 있다고 생각해서 x안에는 그 $\frac{1}{n}$이하로 좀 더 내려가도 x안에는 어떤 분수가 포함될 수 있다고 생각을 했어요. 예를 들어서 자연수 a가 우리가 생각했을 때 가장 작은 아니 가장 큰 수라고 생각하면 0부터 $\frac{1}{a}$사이에는 꼭 $\frac{1}{a+1}$이 있기 때문에 무조건 존재할 수밖에 없다고 생각을 했습니다.

I : ……$\frac{1}{n}$이 주어지면 $\frac{1}{n}$보다 작은 수를 찾을 수 있다라는 뜻인가요, 지금 쓴 게?

S3 : 그거랑 비슷한 생각이기는 한데, 이거는 지금 0과 $\frac{1}{n}$이 아니라 그 이하로 무한대로 더 쭉 가니까 그거를 다 만족하는 x를 찾는 거라서 무

한대로 n이 커지면, 커져도 그 안에 그것보다 더 안에 속하는 x가 하나는 있을 수밖에 없다고 생각이 들었어요. 찾는 거랑 비슷한 생각이기는 해요.

I : 어쨌든 하나의 고정된 x값이 이 모든 부등식을 만족할 수 있다고 생각한 거예요?

S3 : 네 비슷한 것 같습니다. 맞는 것 같습니다.

……

1번에서도 어떤 가장 큰 수를 찾을 수는 없지만 존재한다는 것을 알기 때문에 2번에서도 0과 어떤 가장 큰 수 분의 1 안에는 어떤 저 부등식을 다 만족하는 x가 존재는 할 수 있는데 찾을 수는 없다고 생각합니다.

예비교사 S3은 '어떤 큰 자연수가 계속 존재하기 때문에', '분모도 계속 작아질 수 있고', '자연수 a가 가장 큰 수라고 생각했을 때, 0부터 $\frac{1}{a}$사이에는 꼭 $\frac{1}{a+1}$이 있기 때문에 무조건 존재할 수밖에 없다' 라는 설명을 하면서 1-(2)의 모든 부등식을 동시에 만족시키는 수 x가 존재한다고 답하였다. S3은 2번의 축소구간열의 무한교집합의 결과에 대해서도 유사하게 설명하였다. S3은 문항 2번 $[0, 0.1] \cap \cdots \cap [0, (0.1)^n] \cap \cdots$의 결과가 구간으로 나타날 것이라고 하면서 다음과 같이 설명하였다.

S3 : 2번 문제도 1-(2)번이랑 비슷하다고는 생각하는데, 조금 다른 점이 교집합을 했기 때문에 무조건 오른쪽으로 가는, 오른쪽으로 갈수록 그 구간으로 정해진다고 생각을 하거든요. 그러니까 0과 0.1사이고 첫 번째 거는, 두 번째 거는 0.01사이고 그 다음은 마지막에는 $(0.1)^n$사이인데 그 이후로도 쭉 무한대로 가니까 무한대로 가는 쪽에 무조건 하나로 고정되는 순간이 어느 순간 있지 않을까 생각을 했었어요. 그래가지고 예를 들어서 가장 큰 수 a가 있다고 하면 그 0과 $(0.1)^a$으로 고정이 되면 그 안에는 무조건 $(0.1)^{a+1}$이 있다 이렇게 생각해서 1-(2)번처럼 찾는 거랑 되게 비슷한 생각을 한 것 같아요.

이와 같이 S3은 '가장 큰 수 a'가 존재하기 때문에, 무한교집합의 결과가 0과 $(0.1)^a$ 사이의 구간으로 나타날 것이라고 답하면서, 그 구간

은 0 이외에 다른 수를 포함할 수 있다고 하였다. S3의 무한히 큰 수와 무한소의 존재에 대한 관점을 더 알아보고자, S3에게 양화사의 순서가 바뀐 다음 [(a) 진술]의 문장들을 제시하고 참, 거짓 여부를 질문하였다.

[(a) 진술]

① 어떤 수 x가 존재하여, x는 모든 자연수 n보다 크다.

$\exists x \ \ \forall n \in \mathbb{N},\ x > n$

② 모든 자연수 n에 대하여, n보다 큰 수 x가 존재한다.

$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists x$ s.t. $x > n$

S3은 [(a) 진술]의 ①번과 ②번의 두 문장의 차이를 잘 알고 있었고 ①번 문장을 참이라고 답하였다. S3에게 아래의 [(b) 진술]에 대해서도 질문하였는데 S3은 [(b) 진술]의 두 문장의 의미 차이를 알고 있었고, ①번이 참이라고 답하였다. 다음으로 S3에게 아르키메데스 정리를 적어보도록 요청하였는데 S3은 거의 바르게 적었다. 그 후 S3에게 아르키메데스 정리를 이용하여 [(b) 진술]의 ①번 문항을 다시 생각해보라고 요청하였다.

[(b) 진술]

① 어떤 양수 x가 존재하여, 모든 자연수 n에 대해 $0 < x < \dfrac{1}{n}$을 만족한다.

$\exists x \ \ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < x < \dfrac{1}{n}$

② 모든 자연수 n에 대하여, $0 < x < \dfrac{1}{n}$을 만족하는 x가 존재한다.

$\forall n \in \mathbb{N} \ \ \exists x$ s.t. $0 < x < \dfrac{1}{n}$

I : 그러면 ①번을 아르키메데스 원리로 다시 한 번 생각해 볼 수 있겠어요?

S3 : 어? ①번이 성립하지 않네요.

I : ①번 성립하지 않는 것 같아요? 왜요?

S3 : 여기서 x는 양수이기 때문에, n과 x의 자리를 바꿔주면은 이렇게 되

는데([(b) 진술]의 ①의 $0 < x < \frac{1}{n}$의 부등식 옆에 $n < \frac{1}{x}$를 적음) 모든 n에 대해서 이게 성립한다고 했지만 이게 성립하지 않은 n도 존재할 수 있기 때문에 틀렸다고 생각합니다.

S3은 아르키메데스 정리와 문장 ①을 연결해 보라는 요청 전에는 문장 ①이 참이라고 답하였다. 그러나 아르키메데스 정리를 적용해보라는 요청을 받은 후 ①의 진술이 거짓이라고 답하며 그 이유를 잘 설명하였다. 즉, S3은 아르키메데스 정리를 이용해 달라는 연구자의 요구 전에는 수학적 공리와 정리들을 이용하기보다는 본인이 가진 기본 직관을 이용하여 답을 하였던 것이다. 이와 관련한 인터뷰 발췌문이다.

I : 제가 아르키메데스 성질을 꺼내기 전에 S3이 … 이게 맞다고 생각한다고 얘기했었잖아요. 그때는 왜 그렇게 생각했는지 그런 것도 궁금합니다.

S3 : <u>그때는 진짜 뭐 해석학 그런 개념 하나도 생각 안 하고. 단순하게 그냥 보자마자 떠오르는 거를 생각했어요.…그냥 대학교 전공에 대해서 전혀 생각 안 하고 약간 고등학교 때 저의 생각에 대해서 많이 바로 얘기했던 것 같아요.</u>

…

I : 고등학교 때 어떻게 생각했는데요?

S3 : 지금까지 얘기를 했던 게 약간 고등학교 때 주로 생각이고, 이런 아르키메데스까지 생각하면서 이거를 해결하려고 하면 머리를 막 좀 더 써야 되고, <u>제 그냥 기본으로 가지고 있던 마음, 생각이 아닌 것 같아서 그냥 바로 바로 떠오르는 대로 써가지고…</u>

예비교사 S3은 [(b) 진술]의 ①에 대한 본인의 처음의 답은 '바로 떠오르는 생각대로' 즉 본인의 직관을 이용하여 연구자의 질문에 답하였으며 '아르키메데스 정리는 본인의 생각이 아닌 것 같다'라고 표현하였다. 즉, S3은 양화사가 포함된 문장이나 아르키메데스 정리를 바르게 이해하고 있었음에도, 수학적 진술에 대해 정리나 공리에 근거하여 판단해야 한다고 생각하지 못한 것으로 보인다.

예비교사 S3은 무한히 큰 수와 무한소가 존재한다고 생각하였으며, 본인이 생각하는 무한히 큰 수를 그림으로 표현하기도 하였다. 임의의 수보다 더 큰 수가 존재하고 이들이 반복되다 보면 가장 큰 수가 존재하게 된다는 S3의 설명은 잠재적 무한의 관점이 무한히 큰 수와 무한소가 존재한다는 생각으로 이어진 것으로 보인다. 또한 S3은 해석학을 학습한 경험이 있고, 아르키메데스 정리를 잘 알고 있었음에도 무한히 큰 수와 무한소 존재의 판단을 해석학의 공리와 정리보다는 직관으로 판단하는 모습을 보였다.

1.2.2.2. 양화사에 대한 이해 및 수학적 진술 판단의 메타규칙

개방형 문항 1-(1)번과 1-(2)번의 답변에서 일부 예비교사들은 '존재한다'와 '존재하지 않는다'의 서로 다른 답변을 하면서 유사한 근거를 들어 설명하였다. 예를 들어, 1-(1)의 답변으로 'n보다 $n+1$이 더 크기 때문에 존재한다', '존재할 수 없다. k를 모든 자연수보다 큰 수라고 하면 $[k+1]$은 k보다 큰 자연수다. 따라서 모순이다'와 같이 '임의의 n에 대해 n보다 큰 $n+1$이 존재'하기 때문에 질문에 해당하는 수가 '존재한다' 혹은 '존재하지 않는다'는 상반된 답변을 하였다. 이에 예비교사들이 1-(1)번과 1-(2)번 문항을 어떻게 해석했는지, 그리고 1-(1)과 1-(2)에서 '존재한다'와 '존재하지 않는다'고 생각한 수가 무엇인지 인터뷰에서 확인하고자 하였다. 따라서 예비교사들에게 개방형 문항 1-(1)을 [(a) 진술]의 ①번과 ②번 문장 중 어느 것으로 해석하였는지, 1-(2)를 [(b) 진술]의 양화사의 순서가 뒤바뀐 ①번과 ②번 문장 중 어느 것으로 해석했는지를 질문하였다. 인터뷰에 참여한 7명의 예비교사 중 3명(S2, S3, S5)은 [(a) 진술] 또는 [(b) 진술]에서 각 ①번과 ②번의 의미 차이를 이해하고 있었지만, 4명(S1, S4, S6, S7)의 예비교사는 두 문장의 의미 차이를 구분하지 못하였다. 다음은 [(b) 진술]의 ①번과 ②번의 의미 차이에 대한 S6과의 인터뷰 발췌문이다.

S6 : 이것도 같은 말을 하는 거라고 생각을 해요.
I : 이 문장 동일하게 느껴지세요?
S6 : 네.

…

I : 그래서 이거 순서 바뀌는 거는 의미의 차이가 안 생기게 하나요?
S6 : 차이가 없는 것 같아요.

다음으로 예비교사들에게 양화사가 사용된 문장이면서 실수에서 무한히 큰 수와 무한소의 존재성에 대한 의미를 담고 있는 아르키메데스 정리를 알고 있는지를 질문하였다. 7명의 예비교사 중 4명(S2, S3, S4, S5)은 아르키메데스 정리를 거의 정확하게 진술했으며, 3명(S1, S6, S7)은 아르키메데스 정리를 바르게 진술하지 못하였다. 다음은 예비교사 S1이 아르키메데스 정리를 적은 후 설명한 내용이다.

$\exists_{a,b>0}$, $na>b$ 인 $\exists n\in\mathbb{N}$

[그림 Ⅳ-2] S1이 작성한 아르키메데스 정리

S1 : 어 임의의, 어떤 임의의 양수 na, a와 b가 있을 때 na가 b보다 큰 자연수 n이 존재한다.

예비교사 S1은 아르키메데스 정리를 정확하게 기억하지 못하였으며 존재양화사 ‘∃’를 ‘임의의’로 읽기도 하였다. 한편 예비교사 S4의 경우 아르키메데스 정리를 비교적 바르게 진술했음에도 불구하고 아르키메데스 정리와 [(b) 진술]의 ①을 연결하는 데 실패하였다. 아래의 [그림 Ⅳ-3] 은 예비교사 S4가 아르키메데스 정리를 표현한 것이다.

$a,b\in\mathbb{R}^+$, $\exists\, n\in\mathbb{N}$ s.t $a<nb$

[그림 Ⅳ-3] S4가 작성한 아르키메데스 정리

S4에게 본인이 적은 [그림 Ⅳ-3]의 아르키메데스 정리를 이용하여 [(b) 진술]의 ①번 문장을 생각하도록 요청하였다. S4는 아르키메데스 정리를 이용하여 이 문장의 참, 거짓 여부를 설명하려고 노력하였으나 성공하지 못하였다. 또 인터뷰 중 [(b) 진술]의 ①번과 ②번 문장의 의미 차이를 파악하지 못한 모습을 보였다. S4는 아르키메데스 정리를 기억하고 있었지만 [(b) 진술]의 양화사가 포함된 수학적 문장의 의미를 이해하지 못했기 때문에 아르키메데스 정리와 이 문장들을 연결시키지 못한 것으로 보인다.

[(a) 진술] 또는 [(b) 진술]의 ①번과 ②번의 의미 차이를 이해한 세 예비교사 (S2, S3, S5)는 아르키메데스 정리를 비교적 정확하게 진술할 수 있었으며 [(a) 진술] 또는 [(b) 진술]의 진술 ①과 아르키메데스의 정리를 연결할 수 있었다. 그러나 양화사의 순서 변화로 인한 의미 차이를 인지하지 못한 예비교사들(S1, S4, S7)[34]은 아르키메데스 정리를 이용하여 [(a) 진술] 또는 [(b) 진술]의 문장의 성립 여부를 판단하지 못하였다. 특히 S4는 아르키메데스 정리를 기억하고 있었으나 아르키메데스 정리와 다른 수학 진술을 연결하는 데 실패하였다. 결국 보편양화사와 존재양화사의 순서 변화에 따른 의미 차이를 인지한 예비교사들의 경우, 1-(1) 또는 1-(2)에서 무한소와 무한히 큰 수의 존재성을 아르키메데스 정리를 이용하여 판단할 수 있었지만, 양화사의 이해가 부족한 교사들은 이에 성공하지 못하였다.

즉 연구 결과 일부 예비교사들은 양화사가 포함된 해석학의 담론에 익숙하지 않은 것으로 드러났다. 해석학의 많은 정리는 양화사가 포함된 문장으로 표현되기 때문에 예비교사들이 양화사가 포함된 문장의 이해에 어려움을 겪는다는 사실을 주목할 만하다. 어떤 명제들이 갖는 수학적 의미를 파악하기 위해서는 그 진술들이 표현되는 문장의 어휘나 구조에 대한 이해는 필수적인데, 이들에 대한 이해의 부족이 예비교사들의 해석학 담론으로의 불완전한 전환에 영향을 미친 것으로 여겨지기 때문이다.

---

34) 인터뷰 과정에서 아르키메데스 정리를 이용하여 [(a) 진술] 또는 [(b) 진술]의 성립 여부를 판단하라는 질문은 S6을 제외한 S1, S2, S3, S4, S5, S7에게만 하였다.

1.2.2.3. 예비교사들의 극한 이해 방식

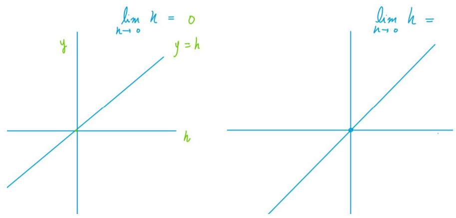
문항 1-(2)와 관련된 인터뷰에서 무한소가 존재한다고 했던 예비교사(S3)뿐 아니라, 존재하지 않는다고 했던 일부 예비교사들(S6, S7)도 무한히 작은 양의 표현을 사용하여 극한을 설명하는 모습을 보였다. S6은 뉴턴의 유율법에 대한 Berkeley의 비판과 관련한 문항인 3번에 대한 인터뷰에서 h는 '무한히 작은 수'라고 표현하면서 무한히 작은 양을 이용하여 극한을 설명하였다.

> I : 여기 (문항 3의) ①번에서는 0이 아니어서 h를 나눴습니다. 그런데 0이 아닌데 왜, 2번에서는 대입하는게 가능하지? 누군가 질문을 하면 이 식이 혹시 이런 과정이 (문항 3의) ①번과 ②번이 서로 모순되는 거 아닌가라고 질문을 하면 어떻게 답변을 해주시겠어요?
>
> S6 : 그때도 그냥 <u>h는 0은 아닌데 0이라고 봐도 상관없을 정도로 아주 작은 애라서 0을 대입해도 값은, 결과를 내는 데는 문제없을 것 같다</u>라고 얘기를 할 것 같아요.

S7 또한 문항 3에서 'h가 굉장히 작아지니까, 거의 0처럼 생각해도 된다고 생각을 해서 그냥 2+0은 2다 이런 식으로 생각을 했어요'와 같이 h를 무한히 작은 수로 언급하면서 극한을 설명하였다.
다음으로 예비교사들의 극한의 이해 방식을 알아보기 위해 개방형 문항 3번과 관련하여 $\lim_{h\to 0} h$와 $\lim_{h\to 0}\frac{h^2}{h}$의 극한의 차이에 대해 질문하였다. 이와 관련한 S3과의 인터뷰의 일부이다.

> S3 : 일단 $\frac{h^2}{h}$에서 우극한이라고 한다면 아직 0은 아니기 때문에 0에 정말 가깝고 싶지만 0은 아니기 때문에 약분이 가능한데, <u>리미트 h 같은 경우는 0에 엄청 가까운 수를 대입하면 0 뭐 플러스라고 나오기는 하지만 우리는 결국 그거를 0이라고 약속을 한다, 이렇게 일단 얘기를 할 것 같습니다.</u>

이후 [그림 Ⅳ-4]의 두 함수 $y=h$와 $y=\dfrac{h^2}{h}$의 그래프를 제시하면서 이 함수들의 0에서의 극한값을 다시 질문하였다.



[그림 Ⅳ-4] $y=h$와 $y=\dfrac{h^2}{h}$의 그래프

I : (오른쪽 그래프 $y=\dfrac{h^2}{h}$를 가리키며) 그러면 이거의 극한값은 뭐라고 생각을 해요?

S3 : 0 플러스, 0 마이너스 라고 쓸 것 같습니다.

I : 아 그래요 한번 써볼래요? 이게 무슨 뜻이에요?

S3 : 극한값에 두 종류가 있다고 생각해서…($\lim_{h\to 0} h = \pm 0$을 씀). 일단 0으로 가까이 가기는 하지만, 시간의 개념으로 생각을 해봐도 결국에는 0으로 도달할 수 없는 상황이기 때문에… 결국 0에 도달하지는 못하지만, 0에 정말 가까워진 후에 멈출 것이라고 생각해서, 우극한 0+ 좌극한 0-라고 두 가지 값이 나올 것 같다고 생각을 했습니다.

I : 아 그래요? 음 혹시, 그래서 이거는 우극한 0+ 그 다음에 좌극한 0- …그러면 이 0+의 의미가 뭔지 좀 더 설명해 줄 수 있어요?

S3 : 0+는 0에 한없이 가까운 수지만 0에 도달하지는 못한 수이기 때문에...

S3은 인터뷰에서 h가 0에 도달할 수 없으면서 '0에 가까워진 후 멈춘다' 따라서 '리미트 h는 0에 엄청 가까운 수를 대입'한다고 설명하였다. 즉, S3은 h를 0은 아니면서 0과 매우 가까운 수로서 언급하면서 무한히 작은 수를 이용하여 극한을 설명하였다. 또한 S3는 $\lim_{h\to 0} h$의 극한값을 0+ 또는 0-로 표현하면서 '0에 한없이 가까운 수지만 0에 도달하지는 못한 수'이지만 '0이라고 약속을 한다'라고 말하면서 극한의 계

산에서 무한히 작은 양을 약속에 의해 소거하여 설명하는 형태를 보였다.[35)]

극한에 대한 설명에서 일부 예비교사들은 '무한히 작은 양'을 사용하는 모습을 보였다. S3은 개방형 문항 1-(2)에서 무한소가 존재한다고 하였으며 S6은 존재하지 않는다고 하였고, S7은 존재할 수도 있고 존재하지 않을 수도 있다고 답하였다. S6, S7은 무한소의 실재성을 주장한 것이 아니기 때문에 S6, S7과 S3의 표현에 등장하는 무한히 작은 양은 그 의미가 같지 않을 수 있다. 하지만 이들은 모두 극한의 설명에서 무한히 작은 양의 표현을 활용하는 모습을 보였다.

1.3. 논의

본 절은 해석학을 이미 학습한 예비교사들을 대상으로 무한히 큰 수와 무한소에 대한 인식 및 극한의 설명 방식을 조사하였다. 예비교사들은 이 개념들을 다양하게 인식하였고 특히 일부 예비교사들의 극한의 설명은 해석학의 설명과 차이가 있었다. 본 절에서는 해석학 담론과 공약불가능했던 예비교사 담론의 양상을 중심으로 논의하고자 한다.

첫째, 일부 예비교사들은 극한의 설명에서 무한히 작은 양에 의존하였으며, 따라서 극한에 대한 구체적 내러티브는 해석학의 담론과 다른 양상을 보였다. 무한소와 무한히 큰 수가 존재한다고 생각했던 예비교사 S1과 S3뿐 아니라, 개방형 문항 1-(2)의 의미로 무한소가 존재한다고 생각하지는 않았던 S6, S7도 극한의 설명에서 '무한히 작은 양'에 의존하는 모습을 관찰할 수 있었다. 이들은 해석학을 학습하였지만 극한을 $\epsilon-\delta$정의를 사용하여 설명하지 않았으며, $\lim\limits_{h\to 0}$의 h에 대해 'h가 굉장히 작아지니까 거의 0처럼 생각(S7)', 'h는 0은 아닌데 0이라고 봐도 상관없을 정도로 아주 작은 애라서 0을 대입해도 결과를 내는 데는 문제없

35) S3은 개방형 문항조사와 인터뷰에서 h의 '0에 도달가능성 여부'에 대해 주목하였지만 그 설명방식은 일관되지 않았다. S3은 개방형 질문지 답변에서는 'h가 0에 도달할 것'이라고 언급한 반면 인터뷰에서는 'h는 0에 도달할 수 없는 상황'이라고 하였다.

을 것 같다(S6)’, ‘0에 도달하지는 못하지만, 0에 정말 가까워진 후에 멈출 것(S3)’과 같이 무한히 작은 양을 이용하여 표현하고 있었다. 해석학의 $\epsilon-\delta$의 극한의 정의에서는 h가 0으로 다가가지 않으며 무한히 작은 수도 아니다. 해석학에서는 개방형 문항 3에서 등장하는 극한 $\lim_{h\to0}(2+h)=2$을 ‘임의의 ϵ에 대해 h를 충분히 작게 하면 $2+h$와 2와의 차이를 ϵ보다 작게 할 수 있다’고 설명한다. 즉 연구결과 개방형 문항과 인터뷰에서 무한소가 존재한다고 했던 예비교사와 무한소의 존재성을 주장하지는 않았음에도 극한을 무한히 작은 양을 사용하여 설명했던 예비교사들의 극한에 대한 내러티브는 해석학의 담론과는 달랐다.

특히 S3의 ‘리미트 h같은 경우는 0에 엄청 가까운 수를 대입하면 0 뭐 플러스라고 나오기는 하지만 우리는 결국 그거를 0이라고 약속을 한다’는 극한에 대한 설명은 극한 담론보다는 라이프니츠의 무한소 담론과 더 가까웠다. 라이프니츠는 무한소를 미적분학의 이론 전개에 사용하였으며, 무한히 작은 양을 계산과정에서 소거하였는데, S3의 설명은 이러한 라이프니츠의 설명과 유사한 형태를 보인다. 또한 S3는 개방형 문항 2의 축소구간열의 무한교집합의 결과를 {0}이 아닌 구간이 된다고 답변하기도 하였다.

둘째, 해석학의 여러 공리와 정리들은 양화사를 사용한 문장으로 기술되지만, 인터뷰 결과 일부 예비교사들은 양화사가 사용된 문장을 정확하게 해석하지 못하였다. 7명중 4명의 예비교사(S1, S4, S6, S7)는 보편/존재 양화사의 순서가 반대인 두 진술 사이의 의미 차이를 식별하지 못했다. 또한 이들은 아르키메데스 정리를 이용하여 양화사가 포함된 문장, 특히 무한히 큰 수의 존재 또는 무한히 작은 수의 존재에 대한 수학적 진술을 해석하는데 성공하지 못하였다(S1, S4, S7). 특히 S4는 아르키메데스 정리를 비교적 바르게 기억하고 있었음에도 불구하고 아르키메데스 정리를 이용하여 무한히 큰 수와 무한히 작은 수의 존재를 판단하지 못하였다. S4의 사례는 해석학의 특정 정리를 기억하더라도 양화사 이해의 부족으로 정리의 의미 파악 및 다른 문장에의 적용에 실패할 수 있음을 보여준다.

여러 연구자들은 학생들이 두 개 이상의 양화사가 포함된 수학적 문장

이해에 어려움을 겪고 있음을 보고했으며(Dawkins & Roh, 2011; Dawkins & Roh, 2019; Dubinsky & Yiparaki, 2000; Roh, 2010), 본 연구에서도 양화사의 이해는 무한소와 무한히 큰 수가 존재하지 않는다는 실수체계의 성질에 대한 이해와 더불어 예비교사들이 해석학 담론으로의 이행과정에서 겪는 어려움임을 확인할 수 있었다.

셋째, 일부 예비교사들은 여전히 직관적인 수준에 머물러 있으며 공리와 정리로 수학적 진술의 승인 여부를 판단하는 메타규칙을 수용하지 못한 모습을 보였다. 무한히 큰 수 또는 무한소의 존재성에 대한 인터뷰에서 연구자가 언급하기 전에 아르키메데스 정리와 같은 해석학의 정리를 이용하여 참 또는 거짓 여부를 판단한 예비교사는 단지 1명(S2)이었다. 다른 6명의 예비교사는 연구자의 질문에 대해 답변을 하면서 공리를 이용하려고 시도하지 않았으며 그들이 가진 직관에 기초하여 설명하였다. 이와 같이 일부 예비교사들은 해석학을 학습했음에도 불구하고 공리와 정리를 이용하여 수학적 진술의 승인 여부를 판정하는 해석학의 메타규칙은 아직 내면화하지 못했음을 알 수 있었다.

특히 예비교사 S3은 인터뷰 내내 무한히 큰 수와 무한소가 존재한다고 생각했으며, ‘무한소의 존재’를 의미하는 문장의 참, 거짓을 판단해보라는 질문에 대해 ‘참’이라고 답하였다. 하지만 예비교사 S3은 양화사의 순서 변화에 따른 의미 차이를 잘 이해하고 있었으며, 아르키메데스 정리 또한 알고 있었다. 이후 연구자가 아르키메데스 정리를 이용하여 ‘무한소’의 존재성을 다시 생각해보라고 요청하자, 아르키메데스 정리에 의하면 무한소가 존재하지 않는다는 점을 깨닫고 그 이유에 대해 바르게 설명하였다. S3은 양화사나 아르키메데스 정리를 알고 있었음에도 정리를 사용해보라는 요구 전에는 공리나 정리에 기반하지 않고 본인이 가진 직관을 사용하여 명제의 참 거짓을 판단하였다. 이로부터 S3은 해석학의 정리는 알았지만 수학 진술의 참, 거짓 여부의 판단 기준이 여전히 직관적인 수준에 머물러 있으며 형식적인 해석학적 담론으로 불완전하게 이행한 것으로 보인다.

이와 같이 일부 예비교사들의 담론은 해석학과 메타규칙에서 달랐으며, 또 무한소와 무한히 큰 수를 포함하는 수 체계에 대해 생각하고 있

다는 것에서 ‘수’의 개념에서 차이가 있었다. 또한 일부 예비교사들은 극한을 이해할 때도 해석학의 정리를 이용하기보다는 ‘무한히 작은 수’를 활용하여 이해하고 있었으므로, 예비교사들의 극한에 대한 내러티브는 해석학의 내러티브와 달랐다. 즉 일부 예비교사들의 담론은 해석학의 담론과 메타규칙, 승인된 내러티브, 수학적 대상의 존재성에서 차이가 있었으며, 이러한 측면에서 일부 예비교사들의 담론은 해석학의 담론 혹은 극한 담론과 공약불가능하였다. 본 연구의 결과를 정리하면 <표 Ⅳ-5>와 같다.

과학의 역사와 수학의 역사는 모두 급진적인 발달을 겪어왔다. 이 급진적인 발달의 단계에서 학자들은 이론들의 공약불가능성으로 인해 다른 이론을 이해하거나 받아들이지 못하였다. 이러한 현상은 비단 과학과 수학의 학문 연구에서만 일어나는 일은 아니다. 이는 중등학교와 대학에서 수학을 공부하는 학습자들이 급격한 이론 전환 단계에서 경험하는 현상이기도 하다. 담론 사이의 공약불가능성 현상과 담론들을 지배하는 메타규칙은 명시적으로 잘 드러나지 않는다. 따라서 학습자는 이러한 메타규칙의 변화와 공약불가능성의 존재를 스스로 인지하기 어려우며 교사는 학습자가 이들을 대면하고 극복할 수 있도록 조력자 역할을 해야 한다. 또 공약불가능한 담론 사이에 발생하는 코모그니티브 갈등(commognitive conflict)은 학생들의 메타 수준 학습을 촉진하는 원동력이 될 수 있지만, 코모그니티브 갈등의 해소는 쉽지 않기 때문에 역시 교사의 적극적인 개입이 필요하다(Sfard, 2007). 따라서 예비교사들이 추후 학교 현장에서 학생의 지식과 교과 지식을 연결할 수 있도록 무한소 담론과 극한 담론의 차이를 파악하고 두 담론의 관계를 한 단계 높은 위치에서 바라볼 수 있는 기회를 갖게 하는 교사교육의 방안에 대해 추가로 연구가 요구된다.

〈표 Ⅳ-5〉 예비교사들의 담론과 해석학 담론의 공약불가능성

담론	예비교사들의 담론	해석학의 담론
메타규칙	공리보다는 직관에 의해 수학적 진술의 참, 거짓여부를 판단함.	공리와 정리에 기반하여 참, 거짓 여부를 판단함.
무한히 큰 수와 무한소의 존재론적 관점	무한히 큰 수와 무한소의 사용	무한소와 무한히 큰 수는 아르키메데스 정리에 의해 존재하지 않는다.
담론 사이에 모순된 내러티브 존재	무한히 큰 수가 존재한다. 무한소가 존재한다.	무한히 큰 수는 존재하지 않는다. 무한소는 존재하지 않는다.
	$[0, 0.1] \cap [0, 0.01] \cap \cdots \cap [0, (0.1)^n] \cap \cdots$ 의 무한 교집합은 0 이외의 수를 포함한다.	$[0, 0.1] \cap [0, 0.01] \cap \cdots \cap [0, (0.1)^n] \cap \cdots$ 의 무한교집합은 0만 포함한다.
동일한 기호에 대한 다른 이해(극한기호 $\lim\limits_{h \to 0}$가 포함된 식의 이해)	h는 0에 도달하지는 못하지만, 0에 정말 가까워진 후에 멈출 것(S3) h가 굉장히 작아지니까 거의 0처럼 생각(S7) h는 0은 아닌데 0이라고 봐도 상관없을 정도로 아주 작은 애라서 0을 대입해도 결과를 내는 데는 문제없을 것 같다(S6)	$\epsilon-\delta$의 극한의 정의를 사용하여 이해함.

2. 고등학생들의 담론 분석[36)]

2.1. 연구 방법

고등학생들의 담론 분석 역시 사례연구 방법을 택하였다. 고등학생들이 무한소 담론 형태를 보이는지, 또 학생들의 담론이 극한 담론과 공약불가능한지에 초점을 맞추어 개방형 문항 조사와 인터뷰를 수행하였다.

2.1.1. 연구 대상

개방형 문항 조사는 서울의 일반고등학교 2학년 학생 13명과 수도권 소재 과학고등학교 3학년 학생 33명을 대상으로 수행하였고, 후속 인터뷰는 이들 중 과학고등학교 학생 6명을 대상으로 실시하였다. 일반고 학생 13명에 대한 개방형 문항 조사는 2020년 2학기에 실시하였으며, 과학고 학생 33명을 대상으로 한 개방형 문항 조사와 인터뷰는 2021년 1학기에 실시하였다. 일반고 학생 13명은 학교에서 자체적으로 마련한 특별한 [수학] 관련 프로그램에 참여하고 있었다. 이 학교에 재직 중인 선생님의 의견으로는 이 프로그램에 참여하고 있던 13명은 2학년 전체 학생들에 비해 수학에 대한 관심이 비교적 높은 편이었다. 또 과학고 학생 33명은 1, 2학년 때 2015개정 교육과정의 [수학], [심화수학Ⅰ], [심화수학Ⅱ], [미적분]을 수강한 상태였고 사례연구가 이루어진 당시에는 3학년에 재학중으로 [AP 미적분학]과 [고급수학Ⅰ]을 배우고 있었다. 또한 이 학생들은 개방형 문항 조사와 인터뷰 사이에 [AP 미적분학]에서 수열의 $\epsilon-N$방법과 함수의 극한의 $\epsilon-\delta$방법을 학습하였다. 과학고 학생들은 일반 고등학교 학생들에 비해 수학의 학습량이 상대적으로 많았으며 학업성취도 역시 평균보다 높은 편이었다.

36) 본 연구는 서울대학교 생명윤리위원회의 심의를 받고 수행되었다(IRB No. 2009/003-022).

2.1.2. 자료수집 및 분석

자료수집은 개방형 질문지 조사와 인터뷰의 두 단계로 이루어졌다. 첫 번째 개방형 질문지 조사에서는 학생들에게 무한소와 무한대의 존재성과 극한, 연속체의 구성과 무한분할의 의견을 묻는 문항을 제시하였다.

1-(1)과 1-(2) 문항은 학생들이 무한소수 $0.999\cdots$가 1임을 어떻게 받아들이고 설명하는지 확인하기 위한 문항이었다. 어떤 자연수 n에 대해서도 $1-(0.1)^n$은 1이 아니고, 따라서 소수점 아래 n개의 9가 있는 $0.999\cdots9$ 역시 1이 아니다. 이 문항에 대해 갈등 상황에 있는 다음과 같은 두 학생의 대화문을 제시하면서 $0.999\cdots$가 1이 되는 이유를 설명하도록 하였다.

[질문1] ℕ은 모든 자연수들의 집합입니다. 이때, 자연수 $n\in\mathbb{N}$에 대해 구간들의 무한 합집합 $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[0,\ 1-(0.1)^n]$, 즉, $[0,\ 0.9]\bigcup[0,\ 0.99]\bigcup[0,\ 0.999]\bigcup\cdots\bigcup[0,\underbrace{0.999\cdots9}_{\text{n개}}]\bigcup\cdots$ 에 대한 수하와 수민이의 대화입니다. 수민 : 0.999⋯=1이기 때문에 이 합집합의 결과는 [0, 1]이고, 이 합집합 안에 1은 포함이 될 거야. 수하 : 1이 이 합집합에 속한다고? 수민 : n이 무한히 커지면, $\lim_{n\to\infty}(1-(0.1)^n)=1$이니까 1은 이집합에 속하고 그래서 합집합의 결과는 $[0,1]$이지. 수하 : 하지만 어떤 자연수 n에 대해서도 $1-(0.1)^n$은 결코 1이 될 수 없어. $x_n=1-(0.1)^n$이라고 하면 $x_1=0.9$ $x_2=0.99$ $x_3=0.999$ $\vdots$ $x_n=\underbrace{0.999\cdots9}_{\text{n개}}$ 이거든. 그래서 나는 이 합집합의 결과가 $[0,1)$이 될 거라고 생각해. 수민 : 모든 자연수 n에 대해 $x_n=\underbrace{0.999\cdots9}_{\text{n개}}$가 1이 될 수 없다면 $0.999\cdots$는 왜 1이라고 하는 걸까?

2-(1)과 2-(2)는 학생들의 무한히 큰 수의 존재에 대한 생각과 무한과정 연산의 메타규칙을 확인하기 위한 문항이었다. 2-(1)과 2-(2)는 $(\sum_{n=1}^{\infty} n)/(\sum_{n=1}^{\infty} 2n) = \frac{1+2+3+4+\cdots}{2+4+6+8+\cdots}$의 계산에 대해 서로 다른 의견을 가진 두 학생의 대화를 질문 1과 유사한 형식으로 제시하면서 학생들의 생각을 답하는 문항이었다. 3번 문항에서는 등호의 의미를 질문하였다. 초등학교 때부터 '같음'의 의미로 사용한 등호 '='는 학생들이 확장된 수체계와 다양한 연산을 학습하면서 그 용법 또한 다양해진다. 그리고 등호의 이해는 그것이 사용된 수학적 맥락과 표상의 이해와 연결된다(도종훈, 최영기, 2003). 문항 1-(1), 1-(2)의 $0.999\cdots = 1$도 결국 등호 개념의 이해와 관련이 있다. 도종훈, 최영기(2003, p. 703)는 $0.999\cdots = 1$을 이해하기 위해서는 실수계 해석학의 등호의 의미를 알아야 한다고 하였다. 실수 x, y가 같다는 표현인 $x = y$는 '임의의 실수 $\epsilon > 0$에 대하여 $|x-y| < \epsilon$이 성립'하는 것과 필요충분 조건이다(정동명, 조승제, 1992, p. 50). 따라서 $0.999\cdots = 1$은 임의의 $\epsilon > 0$에 대해 $|1-0.999\cdots| < \epsilon$임을 의미한다. 이렇게 새롭게 학습하는 개념의 이해를 위해서는 맥락에 따른 등호의 의미 파악이 선행되어야 한다. 이에 무한과정을 학습하면서 학생들이 등호의 의미를 어떻게 받아들이고 있는지를 알아보기 위해 ① $1+2=3$, ② $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$의 등호를 비교하는 문항을 제시하였다. 4번 문항은 직접적으로 무한소의 존재성을, 5번과 6번은 점, 선, 면의 구성과 무한분할에 대한 생각을 묻는 문항이었다. 특히 6번에서는 교과서에 제시된 표현을 제시하면서 제논의 '다수의 역설'을 학생들은 어떻게 생각하는지 질문하였다. <표 Ⅳ-6>은 개방형 질문지 문항을 요약한 것이다.

자료수집의 두 번째 단계는 개방형 질문지에 답한 학생 중 인터뷰에 동의한 6명을 대상으로 연구자와 일대일 대면 인터뷰를 진행하였다. 연구자는 인터뷰에서 자유로운 분위기에서 학생들이 의견을 편안하게 말할 수 있는 환경을 조성하고자 노력하였다. 인터뷰 과정에서 학생들에게 본인의 개방형 문항의 답변을 볼 수 있도록 제시하였고, 필요한 경우 종이에 떠오른 생각을 쓸 수 있도록 하였다. 인터뷰는 비디오 녹화를 하였으며 녹화한 자료는 전사하여 텍스트 분석을 하였다.

<표 Ⅳ-6> 고등학생들의 담론 분석을 위한 과제 요약

문항 번호	개방형 질문지 문항[37]	문항 내용
1-(1)	$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0,\, 1-(0.1)^n] =$ $[0,\, 0.9] \bigcup [0,\, 0.99] \bigcup [0,\, 0.999] \bigcup \cdots \bigcup [0, 0.999\cdots 9] \bigcup \cdots$ 1은 이 구간에 속할까요? 그렇게 생각한 이유를 설명해주세요.	0.999...=1 인가? 무한소의 존재
1-(2)	여러분은 수민이의 마지막 질문에 대해 어떻게 답하겠습니까? 모든 자연수 n에 대해 $x_n = 0.\underbrace{999\cdots9}_{n개}$은 1이 될 수 없지만, $0.999\cdots=1$이라고하는 이유는 무엇일까요?	0.999...=1 인 이유
2-(1)	재민이의 계산과 같이 $\dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} n}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n} = \dfrac{1+2+3+4+\cdots}{2+4+6+8+\cdots} = \dfrac{(1+2+3+4+\cdots)}{2\times(1+2+3+4+\cdots)}$의 분모와 분자를 $(1+2+3+\cdots)$로 나누는 것이 가능할까요? 가능하지 않을까요? 왜 그런지 이유와 함께 답변해주시기 바랍니다.	무한과정 연산에 대한 메타규칙
2-(2)	$\dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} n}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n} = \dfrac{1+2+3+4+\cdots}{2+4+6+8+\cdots} = \dfrac{1}{2}$ 와 $\dfrac{0.1111\cdots}{0.2222\cdots} = \dfrac{0.1+0.01+0.001+0.0001+\cdots}{0.2+0.02+0.002+0.0002+\cdots} = \dfrac{(0.1+0.01+0.001+\cdots)}{2\times(0.1+0.01+0.001+\cdots)} = \dfrac{1}{2}$ 의 계산의 정당성에 대한 여러분의 의견을 써 주시기 바랍니다. (두 계산의 수학적 정당성에 차이가 있을까요? 없을까요?)	무한 과정의 연산에 대한 메타규칙
3	다음 두 식에서 사용하는 등호의 의미는 동일할까요? ① $1+2=3$　　　② $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ 동일하다면 그 의미는 무엇일까요? 또는 동일하지 않다면 두 식에서 등호 “=”는 각각 무엇을 의미할까요? 여러분의 생각을 써 주세요.	자연수의 덧셈과 극한식의 등호의 의미
4	모든 자연수 n에 대해 $0 < x < \dfrac{1}{n}$인 실수 x가 존재할까요? 존재하지 않을까요? 존재한다면 어떤 특징을 갖고 있고, 존재하지 않는다면 왜 그럴까요? 여러분의 생각을 써 주세요.	무한소에 대한 인식
5	길이가 1인 선분을 무한히 많은 횟수로 분할하면 어떻게 될까요? 그렇게 생각한 이유를 설명해주세요.	연속체의 무한분할
6-(1)	선을 이루는 점의 크기를 말할 수 있을까요? 그렇게 생각한 이유를 설명해주세요.	연속체의 구성요소의 크기
6-(2)	어떤 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$의 길이가 1이라고 합니다. 점들이 무수히 많이 모여서 길이가 1인 선분 $\overline{\mathrm{AB}}$가 된다면 이때 점들의 크기가 어떻게 될까요? 여러분의 생각을 말해주세요.	제논의 ‘다수의 역설’

2.2. 연구 결과

2.2.1. 개방형 문항 답변 분석

연구자는 개방형 문항에 대한 학생들의 답변을 유사한 것들로 묶어서 같은 범주로 코딩하였다. 1-(1)번은 무한합집합 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left[0,\ 1-(0.1)^n\right]$에 1이 속하는지를 질문한 것이었다. 46명 중 ‘속한다’는 응답을 한 17명의 학생은 0.9999…=1이기 때문이라는 근거를 제시하였고, ‘속하지 않는다’는 답변을 한 학생들은 1명을 제외하면 모두 $1-(0.1)^n$는 1에 가깝지만 결국 1은 아니기 때문이라는 근거를 제시하였다. 개방형 문항 1-(1)의 응답 결과는 <표 Ⅳ-7>에 제시하였다.

<표 Ⅳ-7> 개방형 문항 1-(1)번 답변 분석

답변 유형	근거	코드명	답변 예시	응답 수
속한다	$0.999\cdots=1$ 이므로	A1	위의 수민이의 말처럼, 0.999… =1 이기 때문에 1은 해당구간에 속한다고 생각한다.	17
			n은 무한대로 늘어나는 중이고, $\lim_{n\to\infty}(1-(0.1)^n)=1$ 이기 때문에 1은 속하는 것이 맞다고 생각한다	
속하지 않는다	$1-(0.1)^n$은 1에 가까워지긴 하지만 결국 도달은 못한다.	A2	아니오. $\lim_{n\to\infty}\{1-(0.1)^n\}=1$ 의 뜻은 $1-(0.1)^n$이 한없이 1에 가까워진다는 뜻이지 $1-(0.1)^n$이 $n \in N$에서 1에 도달한다는 뜻은 아니기 때문이다.	28
			속하지 않을 것 같습니다. $\lim_{n\to\infty}(0.1)^n=0$ 이라고 해서 어떤 큰 자연수 N에 대해 $(0.1)^N=0$ 이 성립하는 것은 아니며, n이 무한대로 커질때 $(0.1)^n$은 0으로 수렴, 가까워진다는 의미임	
	(기타) $0.999\cdots$는 수가 아니며 상태이고, $0.999\cdots\neq1$	A3	1은 이 구간에 속할까요? 그렇게 생각한 이유를 설명해주세요. 아니오. $x=0.999\cdots$ $10x=9.999\cdots$ $10x-x=9.999\cdots-0.999\cdots$ $9x=9$ $\therefore x=1$ 하지만 $x=0.999\cdots$ 에서, x는 수가 아닌 연속적인 상태이므로 $10x-x$가 불가능하다 $\therefore x\neq1$ Ex. 우리가 $\lim_{n\to\infty}\frac{b}{a}$에서 $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ 꼴일때 약분하지 않는 이유와 같다.	1

37) 개방형 질문지 전체 문항은 <부록2>에 제시하였다.

1-(2)는 $a_n = 1-(0.1)^n$은 어떤 n에 대해서도 1이 될 수 없지만, $0.999\cdots = 1$인 이유를 묻는 문항이었다. 학생들은 중학교 때 배운 순환소수 조작으로 증명하거나(19명) 유한과 무한의 차이로서 n이 유한일 때는 $0.999\cdots9$가 되며 1이 될 수 없지만 n이 무한이 되면 0.999...는 $a_n = 1-(0.1)^n$의 극한값이므로 $0.999\cdots = 1$이 된다고 설명하기도 하였다(17명). 개방형 문항 1-(2)의 답변 내용은 <표 Ⅳ-8>에 제시하였다.

<표 Ⅳ-8> 개방형 문항 1-(2)번 답변 분석

답변 유형	코드명	답변 예시	응답수
순환소수 조작으로 증명	B1	$\frac{1}{3} = 0.3333\cdots\cdots$ $1 = \frac{1}{3}\times 3 = 0.9999\cdots\cdots$ $\therefore 1 = 0.9999\cdots\cdots$	19
극한값 계산으로 0.999⋯는 1이다.	B2	$n\to\infty$ 일때 $\lim_{n\to\infty}(1-(0.1)^n) = 1$ 이므로 $0.999\cdots = 1$ 이라고 하는 것 같다.	17
0.999⋯는 1은 아니지만, 1이라고 해도 무방하다.	B3	0.999...은 1의 근사값이지 정확하게 1이라고 할 수는 없다. 풀이의 편리성과 이해를 위해 1이라고 하는 것 일 뿐 0.999...와 1은 같을 수 없다고 본다.	5
정의한 것이다	B4	∞의 개념은 수로 정의할 수 없기 때문이다. n개 ≠ ∞로, ∞은 제한되지 않은 연속적인 "상태"이므로, (0.9에서) 9가 끝없이 나열되는 상태 = 1 이라고 정의하는 것이라고 생각한다.	3
		~~나는~~ '자연수 n'과 같은 표현이 그 자연수의 값이 '∞'와 같은 개념이 아닌 특정된 하나의 수를 의미하는 것이라고 생각한다. (1)번에서 언급했듯 $y=1-(\frac{1}{10})^n$의 개형을 고려하면 자연수 n이 정해졌을 때 $y=1-(\frac{1}{10})^n \neq 1$ 이 된다. 그러나 0.999...는 무한대로 수를 반복하는 것이므로 하나의 '자연수 n'까지 나열한다고 곧 같이 말할 수 없으므로 0.999...=1 이라는 '그냥' 정의된 것이라고 생각한다.	
기타	B5		2

<표 Ⅳ-9> 와 <표 Ⅳ-10>은 문항 2-(1)과 2-(2)의 답변을 정리한 것이다. $\dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} n}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n}$의 연산에서 분모 분자를 $(1+2+3+\cdots)$로 나눌 수 있다고 답한 학생들이 46명 중에 21명 존재하였고 24명은 나눌 수 없다고 답하였다. 또한 $\dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} n}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n}$을 $(1+2+3+\cdots)$로 나누어 $\dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} n}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n}=\dfrac{1}{2}$로 계산한 것과 $\dfrac{0.1111\cdots}{0.2222\cdots}=\dfrac{1}{2}$의 계산이 모두 정당하다고 생각한 학생은 17명, 모두 정당하지 않다고 생각한 학생은 3명, $\dfrac{0.1111\cdots}{0.2222\cdots}=\dfrac{1}{2}$은 정당하지만 $\dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} n}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n}=\dfrac{1}{2}$의 계산은 정당하지 않다고 한 학생은 22명이 있었다.

<표 Ⅳ-9> 개방형 문항 2-(1)번 답변 분석

답변 유형	근거	코드명	답변 예시	응답수
가능하다	분자 분모의 각 수를 대응시키면 비가 일정하므로 가능하다	C1	$\lim_{x\to\infty} e^x$와 $\lim_{x\to\infty} x$ 모두 ∞라는 값을 갖지만 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0$ 인 것처럼 ∞에도 증가하는 폭에 따라 다르다고 생각한다. 위 문제 같은 경우, 증가하는 비율이 (비율?) 같기 때문에 (마치 $\lim_{x\to\infty} x=\infty$, $\lim_{x\to\infty} 2x=\infty$ 이나 $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$ 인것처럼) 분모와 분자를 $(1+2+3+\cdots)$로 나누는 것이 가능할 것 같다. 가능하다고 생각합니다. n이 자연수 집합이고, n과 2n이 서로 일대일 대응하기 때문에 분자와 분모를 대응시킬수 있습니다.	18
	기타	C2	$\frac{\infty}{\infty}$를 약분하는 것을 본적이 있다(2명), 이유를 밝히지 않은 경우(1명)	3
불가능하다	∞는 나눌 수 없다	C3	가능하지 않다. $\dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} n}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n} \neq \lim_{k\to\infty}\dfrac{\sum_{n=1}^{k} n}{\sum_{k=1}^{k} 2n}$ 이기 때문이다. (분모, 분자에서 나타나는 ∞를 같은 것으로 취급할 수 없다)	24
미응답		C4		1

<표 Ⅳ-10> 개방형 문항 2-(2)번 답변 분석

답변 유형	코드명	답변 예시	응답 수
정당성 차이가 있다	D1	위의 식의 경우 분모, 분자를 (1+2+ …) 이라는 수렴하지 않는 값으로 나눴지만, 아래 식의 경우 $(0.1+0.01+\cdots)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n}=\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{1}{9}$ 이라는 수렴값으로 나눈 것이기 때문에 두 계산의 수학적 정당성에 차이가 있다고 생각한다.	22
모두 정당하다	D2	없다. 같은 규칙을 가지고 무한히 더해지는 두 수는 같을 수 밖에 없다. 두 계산 모두 그런 수들을 분자와 분모에 나눈 것이기 때문에 수학적 정당성에 차이가 없다고 생각한다.	17
모두 정당하지 않다	D3	둘 다 ∞으로 나눈것이기 때문에 정당하지 않다. ∞는 수가 아니기 때문에 연산을 정의하지 않는 이상 정당하지 않을 것 같다.	3
모르겠다	D4		2
미응답	D5		2

3번 문항은 1+2=3의 등호와 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$의 등호의 차이에 대한 질문이었다. 학생들은 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$의 등호의 의미에 대해 다양한 답변을 하였다. $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$의 등호가 1+2=3의 등호와 같다고 한 학생들도 있었던 반면, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$는 ‘수렴’, ‘근사’, ‘약속’의 의미를 갖는다고 답한 학생들도 있었다. 3번 문항에 대한 답변은 <표 Ⅳ-11>에 제시하였다.

4번은 ‘임의의 자연수 n에 대해 $0<x<\frac{1}{n}$를 만족하는 수 x가 존재하는가?’[38]의 질문이었다. 4번 문항의 답변은 <표 Ⅳ-12>에 제시하였다.

38) 4번 문항은 무한소 x의 존재성의 질문으로 해석될 수도 있지만, 무한소에 대한 존재론적 관념과는 별개로 각 n에 대해 $x=\frac{1}{n+1}$가 존재하기 때문에 ‘존재한다’라는 답변을 할 수도 있었다. 이 문항과 관련하여 학생들의 무

<표 Ⅳ-11> 개방형 문항 3번 답변 분석

답변 유형	답변근거	코드명	답변 예시	응답 수
동일하다	등호의 의미는 동일하다	E1	동일하다 → 좌변의 식을 우변의 수로 표현하는 데 문제가 없다는 의미 ①에서는 1+2=3 이라는 덧셈의 결과를 말하고, ②에서는 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ 이라는 수렴의 결과를 나타냅니다. 잘은 모르겠지만, $\lim_{n\to\infty}$ 이라는 기호 내에, '$\frac{1}{n}$이 $n\to\infty$로 가면 가까워지는 값' 이라는 의미가 포함되었을 것 같다고 생각하여 두 등호가 같은 의미라 생각하였습니다.	6
동일하지 않다	①은 '같다' ②는 '수렴'	E2	동일하지 않다. ①에서는 값+값 형태로 대수적으로 판단이 가능하고 일치하는 것을 알수 있지만 ②는 극한을 이용해 0으로 향해서 수렴한다는 의미로 정확히 같지는 않다 동일하지 않다. ①의 등호는 정확하게 '같다'를 뜻하는 등호이며 좌변과 우변이 완벽하게 일치 한다는 뜻을 가진다. 반면 ②의 등호는 어떤 값이 어떤값으로 향한다 라는 의미가 강하다 즉 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$은 0으로 향한다 라는 뜻이다 ①의 등호의미가 성립할수 없는이유는 $\frac{1}{n}$이 0에 가까워질 수는 있지만 0이 될수는 없기 때문이다.	25
	①은 '같다' ②는 '근사'	E3	동일하지 않다. ① 의 등호 "="는 정확한 계산 결과를 나타내는 것 같고 ②의 등호 "="는 근사 값을 나타내는 것 같다.	6
	①은 '같다' ②는 '약속'	E4	동일하지 않다. ①에서의 등호는 말 그대로 '같다'를 의미하고, ②에서의 등호는 완벽하게 그 값은 아니지만 그렇게 쓰기로 한 '약속'을 의미한다.	2
	기타	E5	동일하지 않다. ① 1+2=3, 3=1+2 가 모두 되지만 ② $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, $0=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}$은 안된다. ①은 쌍방향 ②는 정방향성립한다	5
	근거설명 없음	E6		2

한소 관점을 알아보기 위해 인터뷰에서는 $0<x<1,\ 0<x<\frac{1}{2},\ 0<x<\frac{1}{3},\ \cdots,\ 0<x<\frac{1}{n},\ \cdots$의 모든 부등식을 만족하는 x가 존재하는지에 대해 추가로 질문하였다.

〈표 Ⅳ-12〉 개방형 문항 4번 답변 분석

답변 유형	답변 근거	코드명	답변 예시	응답수
존재한다	0과 무한히 가까운 수가 존재	F1	존재한다. 0보다 크고 $\frac{1}{n}$보다 작다는 특성을 가지고 있을것이고 매우 0과 밀접할 것이다.	10
			$\frac{1}{n}$은 0이 아니지만 n이 커질수록 0에 가까워진다. 0에 가까워질수는 있지만 0이 될수는 없기 때문에 x는 존재한다고 생각한다.	
	$2n>n$이므로 존재	F2	당장 $\frac{1}{2n}$이 $0<\frac{1}{2n}<\frac{1}{n}$ 이므로 존재한다.	19
	기타	F3	근거 제시하지 않음(3명), 실수의 조밀성으로 존재(2명), 해당 범위에 유리수가 존재한다(1명)	6
존재하지 않는다	$0<\frac{1}{n}<\frac{1}{x}$ 인 n을 항상 찾을 수 있으므로 존재하지 않음	F4	존재하지 않는다. 모든 자연수 n이라면 n은 무한히 커질수 있다. 만약 어떤 n에대해 $x=\frac{1}{n+1}$ 이라서 $0<x<\frac{1}{n}$을 만족한다면 $n'=n+2$이 될수있고 따라서 부등식은 성립하지 않는다. 이처럼 x가 어떤 한 실수로 정의 된다면 $x>\frac{1}{n}$을 만족하는 n은 무조건 찾을수있다. 따라서 $0<x<\frac{1}{n}$인 실수 x는 존재할 수 없을것이다.	3
	기타			3
모르겠다		F5		2
미응답		F6		3

5번 문항은 역사적으로 무한소의 개념과 밀접한 관련이 있었던 연속체의 무한분할에 대한 학생들의 생각을 알아보기 위한 질문이었다. 선분의 무한분할 결과 '무한히 작은 선분이 된다'(22명)는 답변이 가장 많았으며, '점이 된다'(10명)고 하거나 혹은 '계속 분할가능하다'(5명)는 답변 또한 있었다. 5번 문항에 대한 분석 결과는 〈표 Ⅳ-13〉에 제시하였다.

<표 Ⅳ-13> 개방형 문항 5번 답변 분석

답변 유형	코드명	답변 예시	응답 수
점이 된다	G1	점과 같다고 생각할 수 있다.	10
		선은 무한히 많은 점의 집합으로, 무한히 분할하면 점이 될 것입니다.	
계속 분할가능하다	G2	무한히 많이 분할될 것이다. 길이는 중요하지 않고, 횟수를 무한히 많게 하면 계속 분할이 가능하다.	5
무한히 작은 선분이 된다	G3	n개의 선분으로 분할할 때, $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$ 이 개별적인 선분의 길이라 할 수 있고 앞서 서술했던 $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n}$ 의 상태에 따라 이 길이가 0이 되는 것은 아니고, 길이를 0이라고 볼 수 있을 정도의 무한히 많은 미소길이의 선분들로 나눠질 것 같다.	22
		무한이 많은 선분이 존재할 것. 모두 합하면 1	
미응답	G4		4
기타	G5	알 수 없다, 사라진다, $\frac{1}{n}$이 된다, 선을 미분하면 0이다 등	5

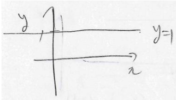
6번 문항은 연속체를 구성하는 성분의 크기에 대한 질문이었다. 이 질문은 연속체를 구성하는 성분의 크기가 없다면 그들이 모여서 어떻게 크기를 가진 선분이 되는지, 혹은 연속체를 구성하는 성분의 크기가 양수로 존재하면 그들이 모여서 양수의 크기를 만드는 것이 어떻게 가능한지의 연속체의 패러독스와 관련하여 학생들의 사고를 알아보기 위한 질문이었다. 학생들은 선분을 구성하는 점의 크기에 대해 다양한 설명을 제시하였다. 학생들의 6-(1)번의 답변 결과는 <표Ⅳ-14>, 6-(2)번의 답변 결과는 <표Ⅳ-15>에 제시하였다.

〈표 Ⅳ-14〉 개방형 문항 6-(1)번 답변 분석

답변 유형	근거	코드명	답변 예시	응답수
말할수 있다	0이다	H1	점의 크기는 0으로 알려져 있다.	1
	다양하다	H2	선을 1이라는 수라고 표현하면 1은 수많은 수들의 합이기 때문에 존재한다. 1은 0.6+0.4라고 말할수도 있고 0.1+0.2+0.7이라고 말할 수 있기 때문에 점의 크기를 말하는 방법은 수없이 존재한다고 생각한다.	1
말할수 없다	점은 크기가 없다	H3	아니오. 점은 크기가 없는 0차원의 개념입니다. 선이라는 1차원의 도형은 0차원의 점을 '무한번' 뭉친 것으로 생각하는데 중점을 둬야합니다.	20
	말할 수 없을 만큼 작은 크기	H4	말할수 없을 것이다. 점의크기가 있다면, 선에 두께가 생기는데, 선에 두께가 생기면서부터 이것은 더이상 선이 아니고 면이라고 봐야한다. 따라서 선을 이루는 점은 말할수없이 작은 크기일것이다.	7
	직관적 크기를 생각했으므로 다양하며 크기를 정의할 수 없다	H5	초등학교때 점크기에 대해 매우 궁금했었는데 그때는 연필로 찍은 정도라고 정의했었다. 그래서 그날의 연필 굵기에 따라 점의 크기도 유동적으로 변한다고 생각했다. 그렇듯 지금도 크기를 정의할 순 없다고 생각한다.	2
	기타[39]	H6	1. 길이가 다른 선분 위의 점의 개수가 동일하므로 말할 수 없다. 2. 선분 위의 점의 개수를 알 수 없으므로 말할 수 없다. 3. 점과 점 사이의 거리를 알 수 없으므로 말할 수 없다. 4. 점의 크기가 0이다. 등	8
	근거설명 없음	H7		3
미응답		H8		4

39) '말할 수 없다'의 답변 유형 중 근거를 설명하지 않은 경우와 '근거'의 종류가 1가지씩인 경우는 기타로 분류하였다.

〈표 Ⅳ-15〉 개방형 문항 6-(2)번 답변 분석

답변 유형	코드명	답변 예시	응답 수
0에 근사한다	I1	점에 크기가 존재한다 가정하면 (크기 a) $\lim_{n\to\infty} na=1$ 이므로 크기는 0에 수렴하는 매우 작은 양수 값일 것이다.	12
0이다	I2	 $f(x)=1$ $f'(x)=0$ 무한히 이어진 선을 미분한 값이 0이므로. 한정된 선을 이루는 점들의 크기도 0일것이다 솔직히 말이 안되는 것 같은데.... ㅠㅠ...?	2
크기가 없다	I3	수학적 의미에서의 '점'과 실제 그림 '점'은 다르다. 수학적 의미에서는 크기가 없고, 실제 그림에는 크기가 있다.	3
정할 수 없다/알수 없다	I4	무수히 많이 나눈 것을 ∞이라고 생각한다 1을 ∞으로 나눈 것이니 $\frac{1}{\infty}$이다. 라고 생각했었는데 그러면 0...? $0\times\infty=1$ ....? 잘 모르겠다. 그래서 점의 크기를 정해줄 수 없다고 생각한다	11
기타	I5		9
미응답	I6		9

인터뷰에 참여한 학생들의 개방형 문항의 답변 유형은 〈표 Ⅳ-16〉에 제시하였다.

<표 Ⅳ-16> 개방형 문항에 대한 고등학생들의 답변 유형

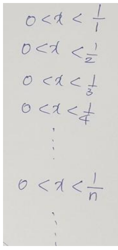
구분	P1	P2	P3	P4	P5	P6
1-(1)번	A2	A1	A2	A2	A1	A1
1-(2)번	B5	B3	B2	B1	B5	B2
2-(1)번	C1	C1	C3	C1	C3	C3
2-(2)번	D2	D2	D1	D1	D1	D1
3번	E2	E1	E1	E5	E5	E2
4번	F1	F1	F2	F2	F2	F4
5번	G1	G3	G3	G1	G3	G1
6-(1)번	H5	H6	H1	H3	H6	H3
6-(2)번	I5	I4	I6	I1	I5	I1

2.2.2. 인터뷰 분석

개방형 질문지에 대한 답변을 토대로 인터뷰에 동의한 6명의 학생들과 일대일 대면 인터뷰를 진행하였다. 인터뷰 결과에 대한 서술에서 연구자는 T로, 인터뷰에 참여한 고등학생들은 P1, P2, P3, P4, P5, P6로 제시하였다. 다음은 인터뷰의 결과이다.

2.2.2.1. 무한히 작은 수와 무한히 큰 수가 존재한다는 인식

일부 학생들은 질문 4 ‘모든 자연수 n에 대해 $0 < x < \frac{1}{n}$을 만족하는 x가 존재하는가?’에 대한 인터뷰에서 ‘무한히 작은 수’가 존재한다는 인식을 드러내었다. P2는 이러한 수를 표현하는 방법에 대해서는 알지 못하지만 존재는 한다고 말하며 무한소가 존재한다는 의견을 표현하였다. 연구자는 질문4에 대한 P2의 응답의 의미를 더 자세히 파악하고자 [그림 Ⅳ-5]을 제시하며 P2의 생각을 질문하였다.



[그림 Ⅳ-5] 무한소의 존재에 대한 질문

T : 여기서 존재한다고 생각했던 x가 이 모든 부등식을 다 만족시키는 x에요? ([그림 Ⅳ-5]를 제시하며)

P2 : 네. 모든 자연수니까 약간.

T : 그 x는 어떤 수일 것 같아?

P2 : 그게, 표현을 못한다, 이럴 것 같아요. 그게 제가 아까 말씀드렸던 것처럼 뭔가 존재는 할 텐데 표현을 할 수 없다고 생각이 들어요.

T : 존재는 할 텐데 표현할 수 없다?

P2 : 네.

T : 그럼 얘네보다는 작은 수네? ([그림 Ⅳ-5]의 $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots$을 가리키며)

P2 : 그렇죠. 작은 순데...

T : 작은 수, 굉장히 작은 수? 혹시? 표현하기는 어렵다? 표현을 못하는 이유는 뭐예요?

P2 : 어...너무 작아서죠. 약간 원자를 볼 수 없는 것처럼 그 숫자가 너무 작기 때문에.

T : 그럼 그 숫자를 우리가 수학에서 쓰기는 하나? 쓰기는 할까요?

P2 : 안 쓰겠죠? 안 쓰는데.

T : 그 작은 수를 쓰지는 않아요?

P2 : 네. 쓰지는 않는 거 같아요, 쓰지는 않을 것 같아요.

T : ……여기서, 아까 이 모든 부등식에 동일하게 속하는 x가 존재한다고 얘기를 한 거죠? ([그림 Ⅳ-5]를 가리키며)

P2 : 네.

개방형 문항 4의 해석은 유일하지 않았다. 따라서 연구자는 학생들이 개방형 문항 4를 어떻게 해석하고 답했는지를 알아보고자 다음의 양화사의 순서가 다른 두 문장을 제시하고 학생들에게 [질문 4]를 어떤 의미로 받아들이고 답하였는지를 질문하였다. P3은 [질문 4]를 다음의 두 문장 중 ①번으로 해석했다고 답하였다. 그래서 연구자는 무한소의 존재성에

대한 P3의 생각을 파악하기 위해 ②번을 어떻게 생각하는지를 질문하였다.

① 임의의 자연수 n에 대해 실수 x가 존재하여 $0 < x < \frac{1}{n}$이다.

② 실수 x가 존재해서 임의의 자연수 n에 대해 $0 < x < \frac{1}{n}$이다.

T : ②번은 참인 것 같아요. 거짓인 것 같아요? ①번은 참이라고 얘기를 했고

P3 : 이것도 0과 무한히 엄청나게 가까운데 0은 아닌 수를 택했을 때 될 수도 있지 않나라는 생각이 들기는 하는데, 글쎄요. 이건 잘 모르겠어요.

T : 0과 엄청나게 가깝지만?

P3 : 0은 아니고 .

T : 0은 아닌 그런 수가 있을까요?

(중략)

P3 : 그러니까 이것도 굉장히. 그런 거에 가까워지는 거. 뭐라고 해야 되지? 그런 표현을 할 수가 있나요? 이것도 똑같이 0.1의 무한대 ($(0.1)^{\infty}$을 씀) 이런 식으로 써야되는 거 아닌가요?

T : 그런데 있을 것 같아 없을 것 같아?

P3 : 음...있을 것 같아요.

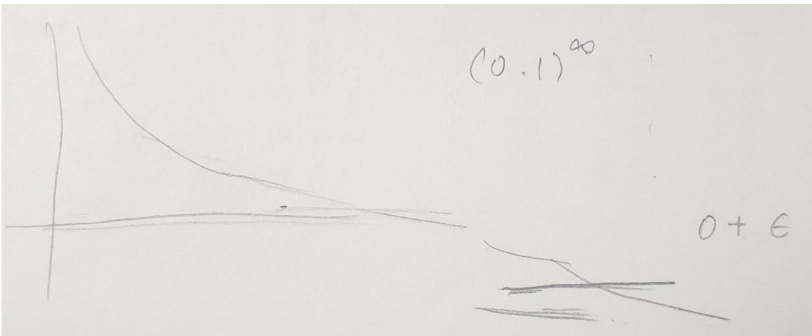
T : 근데 표현을 못하는 데 있을 것 같아?

P3 : 그니까 표현 방식을 만들면 되죠.

T : 표현방식은 모르지만 있을 것 같다?

P3 : 네. 표현 방식은 만들기 나름인 거니까. 그런데 이게 0이고(x축을 그리며) $\frac{1}{n}$([그림 Ⅳ-6]의 그래프를 가리키며)이잖아요. 그럼 이렇게 아무리 가도 결국은 같아질 수는 없는 거잖아요. 그럼 이 사이에 있는 어떤 값으로 택하면 되는...그럼 이거는 그러네요. 이거는 어떻게 설명해야 되지? 만약에 이 값으로 택하면 이런 순간이 존재할 수도 있으니까, 잘 모르겠어요. ([그림 Ⅳ-6]의 을 그리면서)40) 0 플러스 엄청 작은 애, 엄청 작은 뭔가([그림 Ⅳ-6]의 $0+\epsilon$을 씀).

P3은 위의 진술 '② 실수 x가 존재해서 임의의 자연수 n에 대해 $0 < x < \frac{1}{n}$이다.' 가 참이라고 하면서 그 이유를 설명하였다. 이 과정에서 그 수를 $(0.1)^{\infty}$라고 표현하기도 하고, x축과 $\frac{1}{n}$ 사이의 값으로 표현하기도 하였다. 그러나 x축과 $\frac{1}{n}$ 사이의 값으로 표현했을 때, $\frac{1}{n}$을 연장하면 진술 ②를 만족하는 수보다 $\frac{1}{n}$이 더 작아진다는 문제를 인식하기도 하였다. 그럼에도 불구하고 P3은 진술 ②를 만족하는 수는 존재하고 '표현하기는 어려운데 표현하는 수를 하나 만들면 될 것' 같다고 말하며 $0+\epsilon$으로 표현하였다.



[그림 Ⅳ-6] P3의 무한히 작은 수의 표현(1)

T : 이거 입실론 쓴 것 같아요. e에요, 입실론이에요?

P3 : 네?

T : 이거 뭐예요? ([그림 Ⅳ-6]의 을 가리키며)

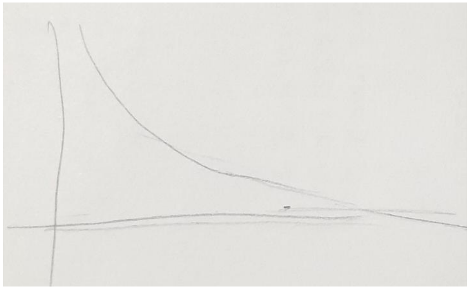
P3 : 이거 입실론이요

T : 아. 엄청 작은……

P3 : 네. 그래서 그런데 뭔가 이거를 딱 표현하기가 어려운 게 아는 수로 표현하기 어려운 게, 뭐라도 하나 이렇게 작은 걸 잡아도 ([그림 Ⅳ-7]의 그래프와 x축 사이에 점을 찍으면서) 결국은 이렇게 되잖아요.([그

40) 이 설명을 하면서 P3은 x축과 $1/n$ 사이의 값을 하나 찾더라도 $1/n$연장되면 그 값보다 $1/n$의 그래프가 더 아래로 내려오는 순간이 있음을 그림으로 표현하였다.

림 Ⅳ-7]의 점보다 밑으로 그래프를 연장하면서) 이렇게 돼버리잖아요. 그래서 표현하기는 어려운데 표현하는 수를 하나 만들면 될 것 같아요.



[그림 Ⅳ-7] P3의 무한히 작은 수의 표현(2)

P3에게 1-(1)번 문제와 관련해서 추가로 무한교집합 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left[0,\ (0.1)^n\right]$의 결과를 질문하였다. P3은 처음에는 무한교집합의 결과를 0이라고 답하였다. 그러나 연구자가 교집합을 하는 각 대상은 $\left[0,\ (0.1)^n\right]$로 구간인데 교집합의 결과는 구간이 아닌 한 점이 되는 이유를 설명해 보라고 하자, 처음과 달리 답을 바꾸어 구간이 될 것 같다고 하였다. 이 과정에서 P3은 ‘무한히 큰 수’를 이용하여 설명을 시도하였다. 다음은 P3과의 인터뷰이다.

P3 : 그러니까 자연수 집합은 1, 2, 점점점 해서 약간 무한이 큰 어떤 수라고 했을 때 이 교집합을 구하면, 교집합을 생각하면, 무한이 큰 수를 s라고 할게요(를 씀). 그러면은 0.1의 s이렇게 표현을 해야 되는 게 맞다고 보는데 네. 그냥 이게 맞는 것 같아요 ([그림 Ⅳ-8]을 씀). 이렇게 표현해야 되는 것 같아요. 리미트 기호라기보다.

T : 지금은 다시 이렇게? ([그림 Ⅳ-8]을 가리키며)

P3 : 그러니까 이런 식으로 표현하는 게 맞는데 ([그림 Ⅳ-9]을 씀)

(중략)

그러니까 이게($\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left[0,\ (0.1)^n\right]$을 가리킴) 무슨 의미인지 잘 모르겠어요.

T : 모든 자연수 n에 대해서....모든 자연수 n에 대해서 이 교집합 모든 자연수 n.

P3 : 모든 자연수 n이 뭐에요? 모든 자연수 n은 이렇게 표현될 수 있는 거죠?.....($\mathbb{N}=\{1,2,3,\ \cdots\}$을 쓰면서) 그럼 설명이 안 되는데.

T : 그러니까 지금 한 점 집합이 될 것 같기도 하고 어떤 구간이 될 것 같기도 하고?

P3 : 저는 구간으로 표현하는 게 맞는 것 같아요. 그래도.

[그림 Ⅳ-8] P3의 무한히 큰 수를 활용한 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0,\ (0.1)^n]$의 계산 결과

[그림 Ⅳ-9] P3의 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0,\ (0.1)^n]$에 대한 답

P3과 P2는 무한소가 존재한다고 생각하였지만, 두 학생 모두 그 수를 표현하는 방법은 알지 못한다고 답하였다. 그리고 P3은 무한교집합의 설명에서 ‘무한히 큰 수’ s를 도입하기도 하였다.

2.2.2.2. 무한소와 무한히 큰 수가 존재한다는 인식과 그로 인한 설명의 모순

인터뷰 과정 중에 학생들의 무한히 큰 수와 무한히 작은 수가 존재한다는 관점은 그들이 알고 있던 수학 지식과 모순되는 현상이 나타났다. 특히 P5는 무한히 작은 수가 존재한다고 생각하였는데, 이는 P5가 기존에 알고 있던 수학적 지식과 일관되지 않아서 P5는 답하는데 약간의 어려움을 겪었다. 다음은 P5와의 인터뷰 발췌문이다.

T : 이 모든 부등식을 동시에 만족시키는 x가 존재할까요? ([그림 Ⅳ-5]를 제시하면서 질문함)

P5 : 어...있다고 생각합니다.

T : 그 x는 어떤 특징을 갖고 있을까요?

P5 : 흔히 말해서 무한소란 개념은 리미트랑 같이 양립할 수 없는 개념으로 알고 있는데 약간 그런 개념 아닐까요?

T : 무한소란 개념은 리미트랑 양립할 수 없다는 게 무슨 뜻이지?

P5 : 그러니까 제가 딱 떠오른 거는 무한소이지 않을까라고 생각했는데 이게 결국에는 리미트니까 양립할 수 없는 개념이다 그런 생각이 떠올랐습니다.

T : 무한소라는 표현을 들어본 적이 있어요?

P5 : 아, 네.

T : 근데 그럼 x가 무한소 같은 것이다?

P5 : 네.

T : 하지만 양립할 수 없다? 너의 입장은 뭐야, 그래서?

P5 : 어려운데요.

T : 그래서 뭐야? 그래서 양립할 수 없어서 존재한다? 존재한다 그랬잖아? 무한소도 존재한다?

P5 : 그러게요. 무한소는 아닌데 어떤 특정 값으로 정해지는 건 확실한 것 같아요.

P5는 인터뷰 중에 무한소 개념에 대해 알고 있었고, 극한 개념이 무한소의 존재와 양립할 수 없다고 표현하였다. 그래서 P5는 연구자가 제시한 [그림 Ⅳ-5]의 모든 부등식을 만족시키는 특정한 값은, 무한소는 존재하지 않기 때문에 무한소는 아니지만 존재한다는 모순된 답변을 하였다. 이는 P5가 직관적으로는 무한소 관점을 갖고 있지만, 학교수학에는 무한소가 존재하지 않는다는 사실을 알고 있어서 나타난 현상으로 보인다.

1-(1)번과 관련하여 무한교집합에 대한 P3의 답에서도 유사한 현상을 관찰할 수 있었다. P3은 무한교집합의 결과를 설명하면서, 무한히 큰 수를 사용하였다. 하지만 P3은 무한히 큰 수를 도입한 설명이 $\lim_{n\to\infty}(1-(0.1)^n)=0.999\cdots$와 일관되지 않는다고 느꼈다. P3과의 인터뷰 내용을 확인하기에 앞서 P3의 극한에 대한 생각을 정리할 필요가 있다. P3은 극한 혹은 리미트 기호가 나타내는 것을 '목표' 혹은 '지향점'으로 설명하였다.

P3 : 얘($(1-(0.1)^n)$)의 목표는 1이다라는 걸 의미하는 게 리미트 기호라고

생각을 해요.($\lim_{n\to\infty}(1-(0.1)^n)=1$의 식에서 $(1-(0.1)^n)$에 줄을 치면서 말함)

T : 목표는 1이다?

P3 : 그러니까 얘($(1-(0.1)^n)$)가 n이 무한이 커지면 바라보는 그러니까 지향점이라고 해야 되나 수렴한다 이런 식으로 표현을 하잖아요. 그게 이 값이 언젠가는 1이 되어서가 아니라 그냥 무한이 커지면 1에 근접한다고 해서, 이 1을 바라보는 거죠.

(중략)

리미트라는 기호 안에 이 의미가 포함이 돼 있잖아요. 그래서 얘가 진짜 무한대로 보냈을 때 얘랑 똑같다라는 게 이게 말이 조금 모호한데 n이 무한대로 가는 상태에서 얘($(1-(0.1)^n)$)의 목표가 이거다 ($0.999\cdots$)라고 볼 수 있는 거죠.

(중략)

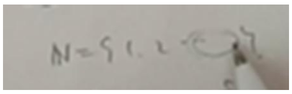
목표를 나타내는 게 리미트 기호라고 생각했어요. 그렇게 배우지 않아요?

P3은 리미트는 ‘지향점’ 혹은 ‘목표’라고 생각하고 있었다. 그런데 P3은 무한교집합 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0,\ (0.1)^n]$의 의미를 정확히 이해하지는 못하였다. 고등학교 3학년에 재학 중인 P3은 무한교집합 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0,\ (0.1)^n]$의 기호를 이전에는 접하지 못했을 것이기에 당연한 일이다. 그래서 P3의 이 기호 자체에 대한 이해가 완전했다고 보기는 어렵다. P3은 인터뷰 중에 이 무한교집합 기호가 리미트를 포함하는 것인지 아닌지 헷갈린다고 표현하기도 하였다. 이러한 상황에서 P3은 무한교집합의 결과를 설명할 때 ‘무한히 큰 수’를 도입하였다. 그리고 이 과정에서 무한히 큰 수의 존재에 대한 P3의 관점과 그로 인한 0.999⋯에 대한 의문을 확인할 수 있었다.

P3은 무한교집합이 극한 기호를 포함한다면 그 결과가 {0}과 같이 한 점으로 이루어진 집합이 되지만, 무한교집합이 극한 기호를 포함하지 않는 것 같아서, 결과가 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0,\ (0.1)^n]=[0,(0.1)^\infty]$가 될 것이라고 하였다. 그런데 P3은 이러한 설명 후에 $1-(0.1)^\infty=0.999\cdots$ 또는 무한히 큰 수 s

를 이용해서 $1-(0.1)^s=0.999\cdots$가 될 것 같다고 하였다. 다음은 P3과의 인터뷰의 일부이다.

P3 : (무한교집합 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left[0,\ (0.1)^n\right]$의 결과를) 이렇게 표현하는 거죠. (먼저 썼던 [그림 Ⅳ-9]의 $[0,(0.1)^{\infty}]$기호에 동그라미를 그리며) 이 상태를 n이 1, 2....하고 이렇게 돼 있잖아요. 그런데 얘를 표현할 방법이 없으니까([그림 Ⅳ-10]에서 ...옆에 동그라미를 그리며), 그냥 이걸 뭐 매우 큰 상태라고 생각해서 이거를 무한대 기호라고 생각을 하면 ([그림 Ⅳ-11]과 같이 ∞를 쓰면서) 이런 식으로 표현하는 게 맞는 거지, ([그림 Ⅳ-9]의 $[0,(0.1)^{\infty}]$을 가리키며) 0이 되진 않는 거잖아요.



[그림 Ⅳ-10] 자연수 집합

[그림 Ⅳ-11] 자연수 집합의 무한대

(중략)

P3 : 그럼 이것도 이렇게 쓰면 안 되는 거 아니에요?
(먼저 써놨던 $\lim_{n\to\infty}(1-(0.1)^n)=0.999\cdots\cdots$를 가리키며)

T : 그거는 왜?

P3 : 왜냐면 이게 이런 식으로($1-(0.1)^{\infty}$를 쓰면서). 이걸 이렇게 똑같이 쓰니까 헷갈리는데 큰 수가 S라고 하면, 이런 식으로 했을 때 ([그림 Ⅳ-12]를 씀), 이거를 정확히 말하면 얘를(0.999⋯) 표현하기 위해서 이 식을($(1-(0.1)^s)$) 쓰는 건 맞는 것 같은데, 이게($\lim_{n\to\infty}(1-(0.1)^n)$) 목표가 이게(0.999⋯) 되는건...아니, 이게 맞는 건지 잘 모르겠네요.

T : 목표가 0.999⋯가 되는지? 이 S는 ($1-(0.1)^s$를 가리키며) 아까 여기에 있는 그 S인 거지? ([그림 Ⅳ-8]의 s를 가리키며) 이 큰 수를 나타내는 S 거지? 다시 보니까 이 큰 S라고 써야 될 것 같다?

P3 : 큰 S라고 써서 이렇게 ([그림 Ⅳ-12]를 가리키며) 표현되는 건 맞는 것 같은데. 목표는 1인 거죠.

T : 근데 아까 여기 두 개 (0.999⋯와 1을 가리키며) 같은 거 같다고 그랬잖아.

P3 : 그러니까요.

T : 얘(0.999⋯)는 목표가 아니다?

P3 : 그러니까 얘를(0.999⋯) 목표로 표현하는 건 좀 잘못된 것 같아요.

T : 그럼 둘(0.999⋯와 1을 가리키며)은 같을 수가 없는 거잖아.

P3 : 이게 둘이 같은 이유를 여기 설명을 안 해줘서 그냥 1이다라고만 알려줘서 비교할 수가 없잖아요.

[그림 Ⅳ-12] P3의 무한히 큰 수를 활용한 0.999⋯의 표현

P3은 무한히 큰 수 s를 이용하여 $1-(0.1)^s=0.999\cdots$이므로, $\lim_{n\to\infty}(1-(0.1)^n)$는 극한이 의미하는 목표는 0.999⋯가 될 수 없고 1만 가능하다고 하였다. 그런데 이러한 P3의 설명은 0.999⋯와 1이 달라지게 된다. 즉, P3은 무한히 큰 수 s를 사용하여 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}[0,\ (0.1)^n]=[0,(0.1)^s]$라고 답하면서 이러한 본인의 답이 $0.999\cdots=1$과 모순됨을 인지하였다.[41] P3는 무한히 큰 수를 이용하면서 기존에 알고 있던 수학적 지식(0.999⋯=1)과 무한히 큰 수를 사용한 자신의 진술($0.999\cdots=1-(0.1)^s$)이 모순됨을 발견하고, 학교수학에서 제대로 된 설명을 해주지 않았다고 표현하였다.

2.2.2.3. 점의 크기에 대한 학생들의 다양한 인식

학생들은 점의 크기에 대해 다양한 인식을 보여주었다. 점의 크기를 무한히 작다고 생각하는 학생(P6)이 있었으며, 직관적인 점의 크기를 생각하여 표현하면서 이것은 정확한 점의 크기가 아니고 수학적인 정의가 있을 것이라고 언급한 학생도 있었다(P1). 다음은 P6과의 인터뷰 발췌문

41) P3은 인터뷰 내내 학교수학에서 0.999⋯=1인 이유가 명확히 설명이 되지 않았다고 말하였다.

이다.

T : 이 길이는 얼마예요? ($[a,b]$를 쓰면서)

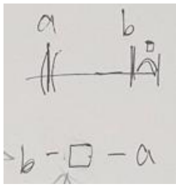
P6 : 이 길이는 b 마이너스 a요.

T : b 마이너스 a에요? …… b 마이너스 a 맞아요. 그럼 이 길이는 얼마예요? ($[a,b)$를 씀)

P6 : 이거는 b 마이너스 엄청 작은 수 빼기 a. ($b-\square-a$를 쓰면서)

T : 이 엄청 작은 수는 뭐예요?

P6 : 엄청 작은 수가 뭔지는 모르겠는데. b를 포함하지 않을 정도로 b와 간격을 벌려주는 작은 수, 여기가 a이고 여기가 b면 이렇게 간격을 벌려주는 작은 수.



[그림 Ⅳ-13] P6의 한 점의 크기

T : 그러면 얘네 둘의 차이는. 수직선 위에서 b라는 한 점 집합만큼 차이가 나는 건데. 그럼 이 점을 이루는 크기가 이 점 집합의 크기가 이 네모인 건가요? 여기 이 네모인건가요?

P6 : 그런 거 같아요.

(중략)

T : 그러니까 그러면 이 한 점으로 이루어진 이 집합의 크기가 이만큼이라 그랬잖아. 어떤 수를 대신해서 네모로 표현한 거지? 그러면 이런 구간들 위에는 무수히 많은 점이 있잖아요? 그럼 이 네모만큼의 길이를 가진 애가 무수히 많다는 얘기네?

P6 : 그렇죠.

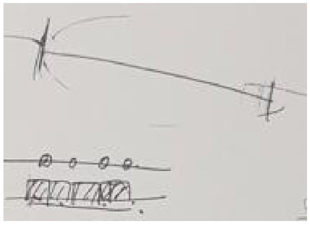
T : 그래서 네모만큼의 길이가 무수히 많은데 길이가 그러면 무한대가 돼야지 어떻게 $b-a$가 될까요?라고 내가 질문을 하면?

P6 : 근데 결국 이게 선에서 이렇게 쪼개면 무수히 많긴 한데 그래도 결국 끝이 있잖아요. 이렇게 끝이 없이 이렇게 이어지는 선이 아니니깐, 그래서 결국 여기 들어갈 개수가 많기는 하지만 정해져 있지 않을까요?

T : 정해져 있다? 무한히 많진 않을까?

P6 : 그러니까 이게 수직선 사이에 수가 무한히 많다 이게, 만약에 여기 있

고 이 점이 있는데 이 사이에 이렇게 할 수도 있고 이렇게 할 수도 있다 이런 느낌인 것 같은데 만약에 이 점의 크기가 이만큼이라고 하면 이렇게 네 개를 채울 수 있는데, 조금씩 조금씩 옮기면 무한히 많긴 할 거잖아요. 그런데 이건 4개로 채울 수 있는 선이고 그래서 이렇게 개수가 정해진 걸로 채울 수 있을 것 같아요.([그림 Ⅳ-14]를 그리며)

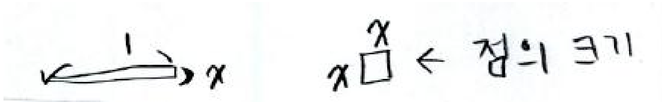


[그림 Ⅳ-14] P6의 연속체를 구성하는 점의 개수

T : 개수가 정해져 있을 것이다? 그럼 개수는 무한이 아닐 것 같다는 뜻인가?
P6 : 무한히 많지만 정해진 수.
T : 무한히 많지만 정해질 수 있어?
P6 : 정말정말 정말정말정말 많지만 끝이 없진 않은 수.

P6은 구간 [a, b]의 길이를 $b-a$라고 표현하였다. 다음으로 연구자가 구간 [a, b)의 길이를 질문하자 P6은 '$b-\square-a$' 라고 표현하면서 'b 마이너스 엄청 작은 수 빼기 a' 라고 하였다. 연구자가 그럼 '엄청 작은 수' 가 무엇인지 질문하자 'b를 포함하지 않을 정도로 b와 간격을 벌려주는 작은 수' 라고 표현하였다. 이후 연구자가 그 한 점 집합의 크기가 바로 엄청 작은 수인데, P6이 표현한 네모(□)들이 무수히 많이 모여서 유한한 구간의 길이인 $b-a$가 가능한 이유에 대해 질문하자, P6은 그 점의 개수가 '무한히 많지만 정해진 수', '끝이 없진 않은 수' 라고 표현하면서, 점의 개수에 대해 무한하지만 어떤 특정한 수가 될 것 같다고 하였다.

다음은 P1과의 점의 크기에 대한 인터뷰이다. 연구자는 P1이 개방형 문항 6-(2)의 답변으로 제시한 [그림 Ⅳ-15]을 보면서 P1이 생각한 점의 크기에 대해 질문하였다.



[그림 Ⅳ-15] P1이 제시한 점의 크기

P1 : 이거는 어...어느 수준까지는 이해할 수 있는 점이 크기라고 생각해요.

T : 어려운 표현인데? 어느 수준까지라는 게 무슨 말인지?

P1 : 그러니깐 이렇게까지 생각할 수 있는 범위가 있고 그다음 다른 더 어려운 공식들 같은 거 배우면 더 자세한 정리랑 정의가 있지 않을까. 그런데 얘는 보기 편하잖아요. 그래서 뭔가 기하적으로 보기 편하니까 어느 정도까지는 이렇게 설명 가능하지 않을까.

(중략)

T : 이 x는 어떤 x라고 생각을 했어요? 아까 질문을 하긴 했었는데?

P1: 0.5 샤프 굵기라고 생각했었죠. 초등학교 수준.[42)]

T : 초등학교 수준?

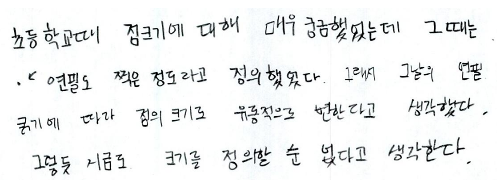
P1 : 네.

T : 수학적인 점하고 아까 초등학교 수준하고 같은 건가? 나 왜 헷갈리지? 내가 P1이 생각하고 있는 거를 정확하게 이해를 못한 것 같아요.

P1 : 저도 제 머릿속에 이해를 못한 것 같습니다. 그니까 수학적으로는 점이 한 개로 정의될 거라고 생각을 하는데 그러니까 초등학교 수준에서는 정의가 안 됐다. 유동적이다. 유동적인 건 초등학교고 정의가 된 거는 수학적으론 정의되지 않을까? 뭔가 고정된 값이 있지 않을까? 생각을 합니다.

P1은 개방형 문항에서 점의 크기를 한 변의 길이가 x인 정사각형으로 표현을 하였다. 이 점의 크기는 초등학교의 수준의 점의 크기이고, 샤프심 굵기 정도라고 생각했으며 따라서 유동적인 크기라고 말하였다. 하지

42)



[그림 Ⅳ-16] P1의 6-(1)에 대한 답변

만, 점에 대한 더 자세한 정의와 정리가 있을 것이라 추측하고 있었다.

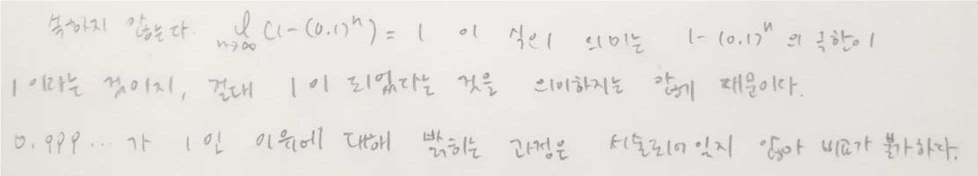
학생들은 점의 크기에 대해 다양한 생각을 보여주었다. 인터뷰를 발췌하진 않았지만, 일부 학생들은 점은 0차원의 대상이기 때문에 크기가 없을 것이라고 여겼으며, 크기를 말하는 순간 0차원이 되지 않는다고 하였다. 또, P6 같은 경우는 점의 크기를 무한히 작은 크기로 여겼고, P1은 본인은 개방형 질문지 조사에서 점의 크기를 유동적으로 표현을 했지만, 더 정확한 점의 크기가 있을 것이라고 여겼다. 점의 크기에 대한 학생들의 담론에서도 일부 학생에게는 무한소 관점, 일부 학생들에게는 학교수학의 정의는 잠정적이며 더 정확한 정의가 있을 것이라는 생각이 엿보였다.

2.2.2.4. 학교수학은 메타규칙을 정확하게 알려주지 않는다는 생각

인터뷰 중에 P3은 학교에서 수학적인 정리에 대해 왜 그런지의 근본적인 이유는 알려주지 않고 있다고 생각하고 있었다. 특히 P3은 무한소수에서 수가 무한히 계속된다는 기호 ‘⋯’의 의미나, 0.999⋯의 정의 방식 및 이들의 연산 가능성과 방법 등의 메타규칙을 학교수학에서는 가르쳐주고 있지 않다고 생각하고 있었다. 이러한 P3의 생각은 특히 개방형 문항 1-(1)에 대한 인터뷰 과정에서 드러났다. 다음은 문항 1-(1)의 일부와 P3의 답변이다.

수민 : 모든 자연수 n에 대해 $x_n = \underbrace{0.999\cdots9}_{\text{n개}}$가 1이 될 수 없다면 0.999⋯는 왜 1이라고 하는 걸까?

1-(1) $\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\left[0,\ 1-(0.1)^n\right] = [0,\ 0.9] \bigcup [0,\ 0.99] \bigcup\ \cdots \bigcup [0, 0.999\cdots9] \bigcup \cdots$ 에서 1이 무한합집합의 결과에 속하느냐는 설문 질문에 대해 P3은 [그림 Ⅳ-17] 과 같이 답하였다.



부하지 않는다. $\lim_{n\to\infty}(1-(0.1)^n) = 1$ 이 식의 의미는 $1-(0.1)^n$ 의 극한이 1이라는 것이지, 절대 1이 되었다는 것을 의미하지는 않기 때문이다.
0.999… 가 1인 이유에 대해 밝히는 과정은 서술되어 있지 않아 비교가 불가하다.

[그림 Ⅳ-17] 문항 1-(1)에 대한 P3의 답변

P3의 답변 중 '비교가 불가능하다'라고 한 '비교'의 대상은 1번 문제의 지문의 수민이의 발언 중 '$x_n = 0.999\cdots9$이 모든 자연수 n에 대해 1은 아니지만, $0.999\cdots = 1$인 것의 이유'에서 $x_n = 0.999\cdots9$과 $0.999\cdots = 1$의 비교를 의미하는 것이었다. 이 답변에서 P3은 '$0.999\cdots = 1$인 이유에 대해 밝히지 않았다'고 언급하였다. 다음은 P3과의 인터뷰 중 일부이다.

P3 : 0.999... 이거는 여기서 이전에 설명이 없었잖아요. 이게 1이기 때문이라는 이유를 밝히지 않아서 뭔가. 이 과정이 이런 논리와 관련이 있으면은 비교를 할 수가 있겠는데 그냥 이렇게 알려줘가지고 비교할 수가 없었어요. 이거($x_n = 0.999\cdots9$을 의미함)랑은 확실히 상황이 다른게 이건($x_n = 0.999\cdots9$) n개라고 정의도 있잖아요...근데 이거(0.999⋯)는 점점점 하면은

(중략)

0.999는 왜 1이라고 하는 걸까라고 했는데, 0.999⋯는 1이라고 하는 이유에 대해서 뭔가 설명을 한 다음에 해야지 그냥 갑자기 이렇게 하면은 할 말이 없어요...

(중략)

이 기호가(⋯) 수학적인 기호는 아니잖아요. 그냥, 근데 그거를 이제 끝이 없다. 그 수가 이러면은

P3은 9가 무한히 반복되는 것을 나타내는 기호인 '⋯'이 수학적 기호가 아니라고 하였으며, $0.999\cdots = 1$인 이유가 설명되지 않았다고 하였다. 연구자가 $0.999\cdots = 1$인 이유로서 아래의 식을 제시하며 이 방법을 중학교 때 배웠을 것이라고 P3에게 설명하였다. P3은 이 식에 나타난 기호 '⋯'에 대해 여전히 의문을 제기하였다.

$$\begin{array}{r} 0.999\cdots = x \\ 9.999\cdots = 10x \\ \hline 9 = 9x \\ 1 = x \end{array}$$

P3 : 당황스러워요. 이렇게 한 적이 없는 것 같은데.

T : 이런 거 한 적이 없어?

P3 : 아니 이런 기호(⋯을 가리키며)가 뭔지 설명을 해주고 가르쳐야 되는 거 아니에요?

T : 9가 끊임없이 나아가는 수라고 얘기를 했을 건데.

P3 : 네. 그러니까 그런 게 뭔지에 대한 설명이 없이.

T : 아...설명이 아직 안 되었다고 생각해?

P3 : 그런게 있으니깐 상상을 해봐라 이런 느낌이어서.

T : 이렇게도 배웠을걸. 1/3은 실제로 나눠보면 $0.333\cdots$이렇게 되는데 그 양변에 3을 곱해봐. 그럼 $0.999\cdots$잖아라고. 학교에서 나왔었거든요. 두 가지 설명이 제일 많거든요.($\frac{1}{3} = 0.333\cdots$, $3 \times \frac{1}{3} = 0.999\cdots$의 식을 제시함)

P3 : 네.

T : 그런데 이 점점점점에 대해서 얘기를 안 해줬다?

P3 : 그냥 이런 게 있을걸 이런 식이잖아요. 이런 게 뭔지에 대한 설명을 안 해줬고, 그럼 이게 이게(0.9999⋯) 만약에 1이라고 뭔가 할 만한 적당한 근거가 좀 부족한 것 같아요. 왜냐하면 이거(0.333⋯)에 대한 정의도 제대로 안 돼 있고 이것도(0.9999⋯) 제대로 정의가 안 돼 있는데 이거끼리 덧셈이 되는지 안 되는지도 모르는 거잖아요. 그래서 지금 이걸 하는데 문제가 생기는 거에요. 제대로 못배워서 그래요.

T : 그래서 이걸 하는데 문제가 생겼다? 이거 기호에 대한 의미?

P3 : 네. 이게 덧셈이 되는지 안 되는지도 알 수가 없는데, 그냥 맘대로.

T : 우리 사실은 뺄셈인데, 그럼 뺄셈이 되는지 안 되는지도?

P3 : 그렇죠. 알 수가 없죠.

T : 그 다음에 아까 여기서 뭐라 그랬지?

P3 : 이것도($3 \times \frac{1}{3} = 0.999\cdots$의 식을 가리키면서) 똑같이 곱셈이 되는지 안 되는지도 알 수가 없죠. 만약에 얘를(0.999⋯) 정의하고 싶어서 얘를(0.333⋯) 이용했으면 이것도(0.333⋯) 모르는 거잖아요.

T : 정의가 필요하다?

P3 : 네.

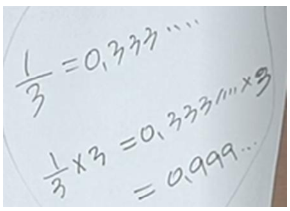
T : 이런 거 배운 것 같지는 않아요? 그러면 그 이유에 대해서 혹은 이 점점점?

P3 : 이거 배웠을 당시에 되게 이상했어요

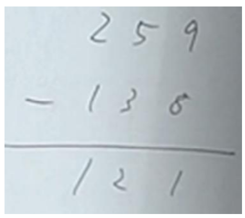
T : 아무튼 정확하게 안 알려준 것 같다? 그럼 언젠가는 정확하게 알려줄까요?

P3 : 뭔가 그런 뭐 학생들이 이해할 수 있는 표기로 설명을 하면은 될 거 같긴 한데. 이게(…) 너무 모호하잖아요. 이게 뭔지도 안 알려주고. 이런 수가(0.999…) 있는지도 알 수가 없잖아요. 이것도($\frac{1}{3}$) 이렇게 한다고 이렇게(0.3333…) 된다고 하는데 이게 계속 이렇게 되는지 알 수가 없잖아요.

P3은 0.999…의 기호 '…'의 의미나, 0.333…에 표현된 기호 '…'이 정확하게 무엇을 의미하는지 정의나 설명을 배우지 않았기 때문에, 0.999…가 1인 납득할 만한 충분한 근거가 부족하다고 느꼈다. 따라서 0.999…와 0.333…가 어떤 수인지 정확히 알 수 없기 때문에 이 수에 어떤 수를 곱하거나 다른 수와 덧셈이나 뺄셈과 같은 연산이 가능한지를 알 수 없다며 의문을 제기하였다. 즉, P3은 학교수학의 순환하는 무한소수의 기호 표현이 의미하는 것이 무엇인지, 그 수들의 연산가능성과 방법에 대해 이해할 만한 설명이 제시되지 않았다고 생각하고 있었다. 연구자는 P5에게 [그림 Ⅳ-18]과 P3의 0.333…에 대한 설명을 제시하며 P3의 의견에 대한 생각을 물었다. 그러자 P5 역시 P3의 의견에 동의하였다. P5도 0.333…라는 수학적 대상이 명확하게 정의가 된 것 같지 않으며, 계산하는 방법 또한 명확하지 않은 것 같다는 의견을 말하였다. 다음은 P5와의 인터뷰의 일부이다.



[그림 Ⅳ-18] 1/3=0.333…의 계산



[그림 Ⅳ-19] P5의 세 자리수의 계산

P5 : 그 친구의 질문이 되게 타당한 게 제가 어떤 계산할 때 뭐. 이런 그냥 세 자리 수가 여기 있으면([그림 Ⅳ-19]를 쓰면서) 저는 그냥 바로 앞에서 계산하는 게 아니라 뒤에서 뭔가 빼줄 수가 있으니까 뒤에서 계산을 하게 되겠죠. 그런데 이런 무한 같은 경우에는([그림 Ⅳ-18]를 가리키며) 3을 어디다 곱해야 할지 모른단 말이죠. 0.3곱하기 3은 0.9니까 그냥 9만 막 적으면 되겠다라는 게 문제가 아니라 어느 약간 특정한 대상이 있어야 이런 걸 계산할 수 있다라고 생각한 거죠.

T : 그러니까 그 친구의 의문이 타당하다?

P5 : 네.

T : 어떤 특정한 뭐가 있어야 계산할 수 있다 그랬지?

P5 : 곱해지는 수가 있잖아요. 그 대상이 정확하게 정해져야 되는데 그런 게 제대로 정해지지 않으니까 계산하기가 힘들 것 같다는.

P5와 P3은 기호 …의 의미와 수학적 대상 0.333…, 0.999…의 정의 방식과 이들의 연산 방법에 대해 명확하게 규명되어 있지 않다는 의견을 제시하였다. 학생들은 중학교 수학에서 다루는 이러한 대상들을 그대로 수용하기 보다는 기호의 정확한 의미는 무엇인지, 왜 그렇게 정의했으며, 연산을 왜 그렇게 하는지 등의 메타규칙이 정확하게 설명되지 않았다고 여겼다.

2.2.2.5. 학교수학의 정리들은 설명을 위한 편리한 방법이며 잠정적이라는 인식

P3은 [질문6]에 제시된 '선은 무수히 많은 점으로, 면은 무수히 많은 선으로 이루어져 있다'의 표현을 가리키며 중학교 교과서의 설명에 대해 의문을 제기하였다. 다음은 인터뷰 내용의 일부이다.

P3 : 이것도 이게 무슨 말인지 모르겠어요. 원래 중학교 교과서에서 거짓말을 많이 해서. 아닌 것 같아요.

T : 중학교 교과서에서 어떤 거짓말을 하는데?

P3 : 뭔가 비과학적인 얘기를요.

T : 근데 선은 무수히 많은 점으로 면은 무수히 많은 선으로 이루어져 있

다. 이건 맞는 것 같아요? 아닌 것 같아요?

P3 : 이거는 수학적으로 접근할 때 뭔가 효과적으로 쓸 수 있는 도구인 거지 이게 진실은 아닌 것 같아요.

T : 진실은 뭔데, 그럼?

P3 : 그걸 모르겠어요.

T : 네가 얘기하는 진실이라는 개념을 난 잘 모르겠는데. 그 진실은 수학적인 진실인 건 아니야?

P3 : 그러니까 점과 선은 아예 다른 것 같아요. 근데 그거를 이런 식으로 했을 때 유리하다 이런 거죠.

P3은 중학교 교과서의 표현 방식에서 ‘길이가 없는 점이 모여서, 선이 되는 것’에 의문을 제기하면서 ‘중학교 교과서에서 거짓말을 많이 한다’와 같이 학교 수학의 진술을 설명하기에 편리한 효과적인 도구일 뿐 진정한 수학적 진실은 아니라고 말하였다. P3은 학교수학의 설명을 그대로 수용하지 않았으며, 직관적인 설명에 대해서 수학적인 진실이 아니라는 관점을 갖고 있을 뿐만 아니라 수학적 진실이 무엇인지에 대해 본인이 수용할 수 있는 설명이 제시되기를 바라고 있었다. 따라서 P3은 단순히 직관적인 수준에 머물러 있지 않았고, 더 형식적인 수학적인 정의와 규칙을 알기를 원하고 있었다. 즉, P3은 학교수학의 설명은 임시적이고 설명하기에 편리한 방법일 뿐 완전한 설명이 아니라는 관점을 갖고 있었으며, 더 이해가 가는 수학적인 타당한 설명 즉 새로운 메타규칙이 제시되기를 희망하고 있었다. 이와 유사한 관점이 P5와 P4, P1과의 인터뷰에서도 드러났다. 다음은 P5와의 인터뷰 일부이다.

T : 6번, 네 일단 선은 무수히 많은 점으로 면은 무수히 많은 선으로 이루어져 있다라는 지금 실제로 중학교 교과서에 있거든요. 이건 어떻게 생각해요? 이 문장은 동의해요? 동의 안 해요?

P5 : 직관적으로 이해하기는 쉬워 보이는데 교육적으로는 좋아 보이는데.

T : 다시, 이 문장을, 이 문장은 동의해요 안 해요?

P5 : 안 하죠.

T : 왜요?

P5 : 엄밀하게는 안 하는데 교육적으로는 되게 직관적이고 되게 좋은 문장

이라고 생각을 해요.

T : 교육적으로는 좋은 문장인데 이 문장에 동의를 안 한다?

P5 : 네.

다음은 질문 6번에 대한 P4와의 인터뷰의 일부이다.

T : 그럼 이건 어때요? 선은 무수히 많은 점으로 면은 무수히 많은 선으로 이루어져 있다. 크기가 없는 점들이 모여서 선을 만들 수 있을까요?

P4 : 이거는 그냥 중학교 1학년 교과서에서 쉬운 이해를 돕기 위해 든 것이라고 생각합니다.

T : 그럼 이 말은 쉬운 이해를 돕기 위한 거고, 그럼 동의는 안 해요?

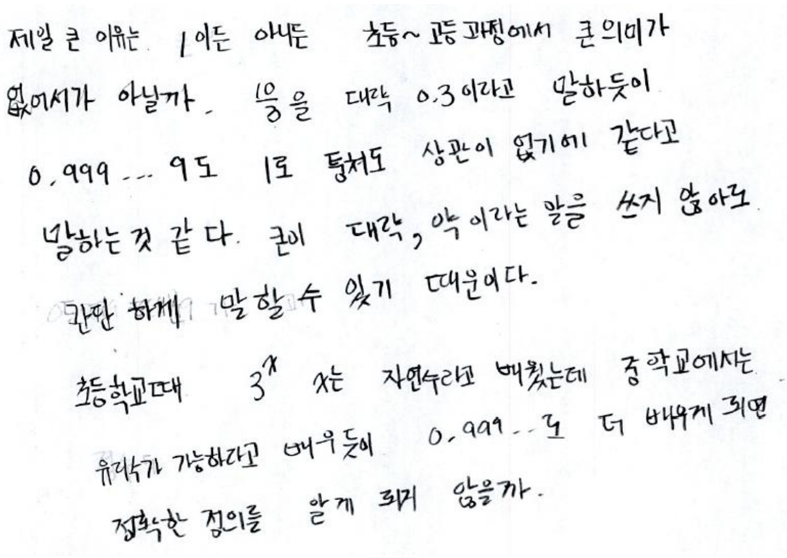
P4 : 정확히는 있다고 있다고, 봐도 괜찮다, 상관없다라고 하는 것이 조금 더 정확한 표현이라고 생각합니다.

T : 선은 무수히 많은 점으로 면은 무수히 많은 선으로 이루어져 있다?

P4 : 그렇게 이해해도, 이해해도 크게 문제없다, 이렇게 봐도 괜찮다라는 것이 좀 더 정확한 표현이라고 생각해요.

P5는 학교수학에 나타난 점, 선, 면 관계의 서술이 직관적이고, 교육적으로는 좋지만, 엄밀하지 않으며 동의할 수 없다는 입장을 보였고 P4 역시 중학생들의 이해를 돕기 위한 방법이고, 그렇게 이해해도 문제는 없다고 표현하였다. 그러나 인터뷰 내용에서 발췌는 안했지만, P4는 이것이 옳은 표현이라고 생각하지는 않고 있었다. 유사하게 P1은 0.999…와 관련된 질문에서 $0.999\cdots=1$임을 믿지는 않지만, 아직 모든 수학을 다 배운 상태가 아니기에 지금은 잠정적으로 이렇게 배우는 것이라고 생각하였다. 특히 P1은 개방형질문지 1-(2)에 대해 [그림 Ⅳ-20]와 같이 추가로 더 배우면 정확한 정의를 알게 될 것 같다고 답변하였다.

연구자는 P1에게 이 답변을 다시 설명해 달라고 요청하였다. 다음은 P1과의 인터뷰 내용의 일부이다.


제일 큰 이유는 1이든 아니든 초등~고등 과정에서 큰 의미가
없어서가 아닐까. 1/3을 대략 0.3이라고 말하듯이
0.999…9도 1로 퉁쳐도 상관이 없기에 같다고
말하는 것 같다. 굳이 대략, 약이라는 말을 쓰지 않아도
간단하게 말할 수 있기 때문이다.
초등학교때 3^x x는 자연수라고 배웠는데 중학교에서는
유리수가 가능하다고 배우듯이 0.999…도 더 배우게 되면
정확한 정의를 알게 되지 않을까.

[그림 Ⅳ-20] 문항 1-(2)에 대한 P1의 답변

P1 : 이건 그냥 제 생각인데 맨날 배울 때 초등학교 때 배운 거에서 다 확장, 확장돼서 지금 고등까지 오니까 지금도 아직 끝까지 배운건 아니니까 지금은 이렇게 말하지 않을까라고 생각을 해서

T : 그러면 0.9999…를 1이라고 하는 거는 0.9999…는 1이라는 거는 믿어요?

P1 : 저 네. 개인적으로는 안 믿어요.

(중략)

T : 혹시 그러면 또 어떤 정의를 배우면...

P1 : 네, 바뀌겠죠?

(중략)

제가 지능에 따라 이해가 된다면...당연히 이해할 수 있는 정리라면 좋을 것 같아요. 제가 지금 안 배운 것들도 너무 어려워서 입실론 델타도 지금에서야 배웠는데 그런 거니까. 그렇게 생각합니다.

P1, P3, P4, P5는 모두 학교수학의 정의, 정리들이 학생들에게 제시하기에 직관적으로 쉬운 임시적인 것이며 더 좋은 정의 혹은 엄밀한 설명이 있을 것이라고 생각하고 있었다. 즉, 학교수학의 설명방식에 완전히 수긍하거나 그대로 수용하고 있는 상태가 아니며, 비판적으로 바라보고 있었다. 학생들은 새롭게 본인들이 수용할만한 메타규칙에 의해 지배되

는 더 엄밀한 수학이 있을 것이라는 믿음이 있었다.

이 학생들은 메타규칙의 입장에서 학교수학의 직관적인 수준의 담론에 머물러 있다고 보기는 어렵다. 새로운 메타규칙과 학문수학적인 정의와 방법을 알게 되어 본인들이 정리와 정의를 이해할 수 있기를 희망하지만 현재는 아직 배우고 있지 않다고 생각하고 있었다.

2.3. 논의

본 절에서는 고등학생들이 무한소 관점을 갖고 있는지 학생들의 담론이 극한 담론의 교사 혹은 교육과정의 내용과 어떤 관계가 있는지를 알아보고자 공약불가능성을 중심으로 학생들의 담론을 분석하였다. 이론적 분석의 결과 담론 사이에 존재론적 범주의 변화가 있을 때, 그리고 메타수학적 관점의 변화가 있을 때 담론들은 공약불가능하다고 할 수 있었다. 따라서 학생들의 무한소 개념의 존재론적 관점은 무엇인지, 그들의 메타규칙은 어떤 것인지에 대해 분석하였다.

일부 학생들은 무한소와 무한히 큰 수가 존재한다는 관점을 갖고 있었다. 학생들은 $0<x<1,\, 0<x<\frac{1}{2},\, 0<x<\frac{1}{3},\, \cdots,\, 0<x<\frac{1}{n},\ \cdots$에 동시에 포함되는 수 x가 존재한다고 생각하고 있었다. P2는 그 수는 원자처럼 작으며 표현할 수 없고, 수학에서 사용은 하지 않지만 존재한다고 표현하였다. P3도 0과 엄청 가깝지만 0은 아닌 무한히 작은 수가 존재할 것이라고 말하였다. P3은 그 수가 $(0.1)^{\infty}$과 같은 수가 될 것 같지만 알고 있는 수로 표현은 하기 어려운데, 알고 있는 수로 표현을 하면 그 수보다 작은 수를 구할 수 있기 때문이라고 이유를 제시하였다. P6 역시 점의 크기를 엄청 작은 수라고 표현하였다. P3과 P6은 인터뷰 과정에서 무한히 큰 수가 존재한다는 관점 또한 보여주었다. P3은 무한히 큰 수를 s라고 표현하면서, 무한교집합 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left[0,\ (0.1)^n\right]$의 결과를 $\left[0,(0.1)^s\right]$라고 표현하였으며, P6은 구간에 포함된 점의 개수가 ‘무한히 많지만 정해진 수’, ‘정말, 정말, 정말, 정말, 정말 많지만 끝이 없진 않은 수’와 같이 표현하였다. 학생들은 이와 같이 무한히 작은 수와 무한히 큰 수에

대해 학교수학의 극한 담론과는 다른 존재론적 관점을 갖고 있었다.

인터뷰 과정에서 학생들의 무한소와 무한히 큰 수가 존재한다는 인식은 학생의 발언들이 서로 모순되는 순간을 보여주었다. P5는 극한 개념은 무한소 개념과 양립할 수 없다는 것을 알고 있었다. 하지만 P5는 무한소가 존재한다고 생각하고 있었기에, 모든 자연수 n에 대해 부등식 $0<x<1,\ 0<x<\frac{1}{2},\ 0<x<\frac{1}{3},\ \cdots,\ 0<x<\frac{1}{n},$ …에 동시에 포함되는 수 x가 존재하는지를 묻는 질문에 존재한다고 답하였다. 그러면서 P5는 이 수가 무한소와 같은 수가 될 것 같지만, 무한소는 존재하지 않으므로 그 수 x는 무한소는 아닌데 존재한다고 답하면서 모순적인 답을 하였다. P3은 무한히 큰 수 s를 사용하여 무한교집합 $\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\left[0,\ (0.1)^n\right]$의 결과를 $[1, (0.1)^s]$라고 말하면서, 이렇게 하면 $1-(0.1)^s=0.999\cdots$로 쓸 수 있다고 하였다. 그러면서 $\lim_{n\to\infty}(1-(0.1)^n)$의 목표는 1이며, $\lim_{n\to\infty}(1-(0.1)^n)$의 목표가 $1-(0.1)^s=0.999\cdots$는 될 수 없으므로 $\lim_{n\to\infty}(1-(0.1)^n)=0.999\cdots$인 표현이 맞는지 잘 모르겠다고 하였다. 즉, 무한히 큰 수를 도입한 $1-(0.1)^s=0.999\cdots$의 표현은 $0.999\cdots=1$를 설명할 수 없는 상황을 가져왔다. P3은 이에 대해 학교에서 $0.999\cdots=1$인 이유를 '설명을 안해줘서' 라고 표현하였다.

인터뷰 과정에서 드러난 무한소와 무한히 큰 수의 존재성과 수학적 진술의 모순에도 불구하고 학생들은 여전히 무한소 관점을 유지한 채 인터뷰가 흘러갔다. 그럼에도 이렇게 학생의 발언들에서 모순적인 진술들이 있었다는 것은 교육적으로 의의가 있다. 이는 학생들이 무한히 큰 수, 무한소의 존재론적 관점은 학생들이 배운 학교 수학의 정리들과 모순되는 상황을 가져오고 따라서 공약불가능성의 현상을 유발할 수 있음을 보여주는 상황이다. 인터뷰 상황은 학생들이 무한소에 대한 존재론적 관점과 그로 인한 공약불가능성을 해결하지 못하고 여전히 수학에 대한 의문을 품고 계속 공부를 해가며 학교수학의 극한 담론으로 적절하게 동화되지 못한 현재의 현실을 반영하고 있다. 이러한 현상에 대해 수학교육 연

구자와 수학 교사의 적절한 교육적 조치 방안에 대한 연구가 필요하다.

P3는 개방형 문항의 1-(1), 1-(2)와 관련한 인터뷰에서 '0.999…'에 나타난 기호 '…'의 의미를 학교 수학에서 정확히 제시하지 않았으며 이 기호가 수학적 기호도 아니고 '상상을 해봐라'라는 느낌으로 제시되어 있다고 언급하였다. 0.999…에 10을 곱하거나 0.333…에 3을 곱할 때 '…' 기호가 무엇을 의미하는지 알아야 0.999…와 0.333…의 수가 정확히 무엇인지 알 수 있고, 그 수가 정확히 정의된 후에 이들 수에 다른 수를 곱하거나 다른 식과 더하거나 빼는 연산을 할 수 있는데, '…'의 의미가 모호하기 때문에 0.999…=1이 된다는 학교수학의 설명을 납득하기 어렵다고 하였다. 이러한 P3의 의견에 대해 P5에게 어떻게 생각하는지 질문하였더니 P5 역시 P3의 의견에 동의하였다. 0.333…에 대해 정확히 대상이 정해진 후 연산을 하는 것이 아니라 곱하고 빼는 연산을 하고 나서 0.999…=1이라고 말하는 것에 의문을 제기하였다. 학생들은 0.999…=1을 설명하는 학교수학의 설명방식에 대해 동의하지 않을 뿐 아니라, '…'의 기호의 의미나 '0.333…', '0.999…'의 수 자체의 정의, 연산 방식 등의 메타규칙에 대해 학교수학에서 제시되어 있지 않다고 생각하고 있었다.

이와 더불어 학생들은 학교수학의 정의와 정리들이 최종적인 것이 아니며, 설명을 위한 편리한 방법이자 잠정적이라는 것이라는 인식을 하고 있었다. P3은 '중학교 교과서에서는 거짓말을 많이 한다'고 하였고 '비과학적인 얘기를 한다'고 하였으며, 학교수학의 설명은 '효과적인 도구일 뿐 진실은 아니다'라고 표현하고 있었다. P5 역시 점, 선, 면에 대한 학교수학의 설명은 '직관적으로 쉽고 교육적으로는 좋지만 동의하지는 않는다'라고 답하였다. 이러한 설명은 P1과 P4와의 인터뷰에서도 드러났다. P4도 학교 수학의 설명은 '쉬운 이해를 돕기 위한 것이며, 그런 식으로 이해해도 크게 문제없다'라고 표현하였고, P1은 '아직 끝까지 배운 건 아니니깐 지금은 이렇게 말하는 것', 또 바뀔 것이라고 표현하였다. 학생들은 학교수학의 직관적인 수준의 메타규칙에 동의하고 있지 않았다. 하지만 아직 학문수학의 메타규칙으로 이행된 상태라고 보기에도 어렵다. 학생들은 더 나은 정의와 정리가 있을 것이며, 따라서

본인들이 납득할 만한 메타규칙이 존재할 것이지만 아직 배우지 않은 것일 뿐이라고 여기고 있었다.

일부 학생들은 무한소와 무한히 큰 수의 존재론적 관점에서 학교수학과 다른 무한소 담론에 머물러 있었다. 그러나 메타규칙의 관점에서는 학교수학의 직관적인 수준에 머물러 있다고 보기는 어려우며, 본인이 이해할 수 있고 납득할만한 더 높은 수준의 학문수학의 메타규칙이 존재할 것이라고 기대하고 있었다. 따라서 학생들의 담론은 극한 담론과 수학적 대상의 관점에서는 공약불가능하였지만, 본인이 이해할 만한 담론의 메타규칙을 기대하고 있다는 점에서 메타규칙의 관점에서는 완전히 직관적인 수준이라고 보기는 어려웠다.

Ⅴ. 요약 및 결론

1. 요약

수학교실에서 학생들은 의사소통을 통해 수학을 학습한다. 수학교육의 담론적 접근은 사고를 의사소통으로서 언급하며, 수학적 사고의 발달이 바로 수학적으로 의사소통하게 되는 것임을 제안한다. 그러나 수학교실에서 언제나 효과적인 의사소통만 존재하는 것은 아니다. 학생과 교사가 다른 이론을 바탕으로 사고하여, 하나의 주제에 대해 말하는 것 같아도 서로를 이해하지 못하고 대화가 평행선을 그리는 현상 또한 존재한다. 본 연구는 수학교실의 이러한 비효율적인 의사소통 현상에 대해 논의하였다.

쿤이 제안한 공약불가능성은 경쟁 관계에 있는 패러다임들은 문제의 영역, 문제 풀이 방식 또는 기준들이 다르기 때문에 각각의 패러다임을 가진 사람들이 서로 다른 세계에서 사는 현상을 말한다. 즉, 서로 다른 이론을 가진 사람들은 다른 세계관을 갖고 있으며 다른 패러다임에 의해 설득이 되지 않는다. 수학교실에서도 이러한 현상이 발생한다. 특히 서로 다른 담론을 이해하거나 설득되지 못하는 현상을 공약불가능성이라 부른다. 이러한 공약불가능성 현상을 예측하고 대비하는 일은 학생들의 수학학습 경로를 계획하고, 효과적인 의사소통 및 교수학습 방안을 설계하기 위해 필요하다. 따라서 본 연구는 이러한 공약불가능성 현상의 양상과 원인을 파악하고 그 사례를 확인하는 것을 목적으로 하였다. 일부 중등학교 학생들과 대학의 학부 학생들은 수학교실에서 극한 담론의 강의를 듣고, 책을 통해 학습하면서도 여전히 무한소 담론에 머물러 있는 현상이 존재한다. 이 경우 학생들이 교과서의 언어와 텍스트를 효과적으로 수용하고 자신만의 지식으로 동화시키고 있다고 말하기는 어렵다. 본 연구는 이렇게 극한 담론으로의 이행이 쉽지 않은 현상이 담론의 공약불가능성과 관련이 있다고 보고 이를 공약불가능성의 관점에서 논의하였다.

본 연구는 먼저 공약불가능성의 용어의 의미를 탐색하였다. Ⅱ장의 1절에서는 공약불가능성의 용어의 기원이 되는 그리스 수학의 공약불가능성의 발견과 의의에 대해 선행연구들을 검토하였다. 그 결과 다음의 네 가지 결론을 도출하였다. 첫째, 공약불가능성의 발견과 정당화 방법의 기원에 대해서는 학자들마다 견해의 차이는 존재하지만 그들이 공유하고 있는 것은 공약불가능성의 수용과 정당화를 위해 무한과정에 대한 추론이 필요하다는 것이다. 따라서 공약불가능성의 발견은 수학에서 ‘무한과정’을 도입하는 것과 관련이 깊다. 둘째, 공약불가능성의 발견의 결과 새로운 ‘비’이론이 등장하였으며 이 과정에서 역시 무한의 추론을 위한 정리들을 형식화하게 되었다. 셋째, 공약불가능한 양의 발견과 도입은 기존의 경험적인 수학을 이론적인 수학으로의 전환이라는 결과를 가져왔으며, 따라서 시각적인 다이어그램의 역할이 보조도구로서 변화하였다. 경험적인 수학에서는 공약불가능한 양의 발견은 불가능하다. 직접적인 측정을 통해서는 정사각형의 한 변과 대각선은 모두 유리수로 측정될 것이며, 두 양이 공약불가능하다는 결론은 나타날 수 없다. 이는 이론적인 수학의 정리를 통해서만 가능하다. 또한 공약불가능성의 증명에서 사용한 다이어그램의 경우 단지 유한 회의 결과만을 보였을 뿐이며, 무한히 많은 닮은 도형을 그림으로써 증명을 하지 않았다. 시각적 다이어그램은 실질적 증명의 역할보다는 단지 증명을 위한 보조도구로서의 역할에 한정된다. 넷째, 공약불가능성의 발견으로 인해 수학적 대상의 존재성의 질문이 중요해졌다. 공약불가능한 양은 기존에 존재를 인식하지 못하던 양이었으며, 이 발견의 결과 수학적 대상의 존재성에 대한 질문이 중요하게 인식되었고 그리스 수학에서 ‘작도’가 수학적 대상의 존재성을 보이는 역할을 하게 되었다.

Ⅱ장의 2절과 3절에서는 쿤의 패러다임 이론과 수학교육의 공약불가능성에 대한 선행연구를 고찰하였다. Ⅱ장의 2절과 3절의 패러다임 사이의 공약불가능성 및 수학교육의 공약불가능성을 분석하여 다음의 세 가지 결론을 도출하였다. 첫째, 어떤 분야든지 공약불가능성은 후속 이론이 이전 이론의 단순한 확장이 아닌 이전과는 질적으로 다른 개념의 변화라는 것에 동의한다. 쿤(1962)의 이론에서는 패러다임의 변화로서 설명하

며, Sfard(2021)는 담론의 변화로서, Carey(2009)는 지식 확장이 아닌 개념 변화로서 설명한다. 이들은 모두 이전의 개념과 이후의 개념이 점진적인 변화가 아닌 질적인 도약이 존재하는 근본적인 변화임을 설명한다. 둘째, 이론 혹은 담론 사이의 공약불가능성 현상은 존재론적 변화와 관련이 있다. 쿤(1983)은 후기에 이론을 명확히 하면서 공약불가능성을 의미론적 공약불가능성에 집중하며 분류학적 전환으로 특징지었다. 그리고 천현득(2016)은 과학 혁명기의 쿤의 분류학적 전환으로서의 개념변화를 존재론적 전환으로 일반화할 수 있음을 제시하였다. 그뿐만 아니라, 수학교육에서 존재론적 범주의 변화가 있을 때 공약불가능한 담론 및 질적인 수준의 변화가 있는 개념변화 현상들이 발생함을 확인되었다. 존재론적 범주의 변화는 한 범주에 속하는 대상을 다른 범주로 인식하는 변화뿐 아니라, 개념의 분화와 합체와 같은 범주의 변화 전체를 통칭한다. 수 개념의 발달은 '과정'에서 '대상'으로의 존재론적 범주의 변화가 요구된다. 유리수의 학습은 나눗셈 연산인 과정이 하나의 수인 대상으로서 인식되어야 하며, 실수의 개념의 이해에서는 전혀 다른 종류의 지식인 이산과 연속성이 통합되는 존재론적 범주의 변화가 필요하다. 이처럼 개념의 존재론적 변화는 수학학습과정에서 겪어야 하는 관문이며 또한 공약불가능한 담론의 사례이다. 셋째, 메타규칙의 변화가 공약불가능성 현상의 대표적인 원인이다. 메타규칙이 다를 경우 설명해야 하는 문제 종류, 해결 방법 등이 변화한다. 따라서 서로 다른 담론의 경우 문제 해결 방법, 혹은 정당한 것으로 받아들여진 증명 방식 등에 대해 동의하지 못하며, 수학적 판단을 하는 기준을 공유하지 못한다. 예를 들어, 자연수 담론의 경우 경험적 판단에 의해 진술의 타당성이 결정되지만 무한에 대한 추론에서는 경험적 판단이 불가능하기에 진술의 타당성을 결정하는 기준이 달라진다.

본 연구에서는 Ⅱ장의 이론적 탐색의 결과 존재론적 범주의 변화와 메타규칙의 변화가 있을 때 담론들이 공약불가능함을 확인하였다. 즉, 담론의 공약불가능성을 관찰하는 도구로서 담론 사이의 존재론적 변화와 메타규칙의 변화를 활용하였다.

Ⅲ장의 1절에서는 무한소 담론의 기원 및 무한소 담론과 극한 담론의

공약불가능성 여부를 분석하였다. 우선 학생들의 무한소 사고의 기원을 파악하고 무한소 담론이 극한 담론의 현대의 수학으로 정립될 때 나타난 주요 변화는 무엇인지 알아보고자 수학사를 살펴보았다. 분석의 결과는 다음과 같다. 첫째, 수학사에서는 '연속체의 구성과 무한분할' 및 '극한' 개념과 관련해서 무한소를 활용한 설명, 무한소를 배제한 설명의 다양한 이론들이 존재하였다. 연속체의 구성과 무한분할과 관련하여 패러독스들이 제시되었고, 또 순간변화율과 관련하여 극한에 도달 여부에 대한 논쟁이 있었으며, 유율법, dy, dx의 의미에 대한 논의가 있었다. 그리고 이들의 일부는 무한소를 활용한 설명이었다. 이러한 수학사는 학생들이 학교수학에서 미적분학을 공부하면서 겪을 수 있는 어려움을 보여주며, 일부 학생들에게서 나타나는 무한소 사고가 단지 오개념이나 잘못된 지식으로서만 생각할 수 없음을 보여준다. 오랜 시간 패러독스로서 남아 있었고, 수학자들 사이에서도 다양한 설명방식이 존재했던 만큼 학생들이 교과서의 방식과 다른 사고를 갖는 것은 당연한 일이다. 극한과 연속체의 설명이 현대 학문수학으로 정립된 형태는 학교수학의 범위를 넘어서기에 학생들에게 가르치거나 제시하기는 어려울 것이다. 그러나 수학사는 과거 수학자들의 사고로부터 학생들에게서 나타날 수 있는 개념의 양상과 수학 학습에서 겪을 수 있는 갈등 상황을 예측하는데 도움이 될 수 있다.

Ⅲ장의 2절에서는 담론의 존재론적 변화와 메타규칙의 변화를 기준으로 담론들 사이의 공약불가능성을 확인하였다. 특히, 라이프니츠의 담론과 극한 담론을 이 두 가지 관점에서 비교하여 두 담론은 공약불가능하다는 결론을 얻었다.

Ⅲ장의 3절에서는 실제 수학교육에서의 공약불가능성의 현상의 사례를 제시하였다. 제논의 아킬레스의 역설은 한 논의 안에서 무한소 담론과 극한 담론이 혼재되어 있기에 이해가 어려운 현상임을 확인하였다. 순간속도의 이해에서는 무한소에 대한 존재론적 차이로 인해 순간변화율을 '비의 극한'으로 이해해야 함에도 불구하고 '극한의 비'로서 인식하는 현상들이 보고되며 이는 과거 라이프니츠의 담론으로 이해될 수 있음을 논의하였다.

Ⅳ장에서는 Ⅱ장과 Ⅲ장의 분석을 바탕으로 실제 예비교사와 학생들에게서 무한소 관점이 나타나는지, 그리고 만약 이들이 무한소 관점을 가졌다면 그들의 담론은 교과서나 교육과정의 극한 담론과 공약불가능한지에 대해 확인하고자 하였다. 예비교사와 고등학생들을 대상으로 개방형 문항 조사와 인터뷰의 두 번의 사례연구를 실시하였다. 예비교사들의 사례연구로 다음의 결과를 도출하였다.

첫째, 일부 예비교사들은 해석학을 학습했음에도 불구하고 무한히 큰 수와 무한소가 존재한다고 생각하였으며, 극한의 설명에서 무한히 작은 양에 의존하였다. 즉, 예비교사들의 담론은 무한소의 존재성의 입장에서 해석학의 담론과 달랐다. 둘째, 일부 예비교사들은 인터뷰 결과 해석학의 공리와 정리들에 사용되는 양화사의 해석에 취약하다는 사실이 관찰되었다. 일부 예비교사들은 보편 양화사와 존재 양화사의 순서가 바뀐 문장의 진술의 차이를 식별하지 못하였고, 이를 이용하여 해석학의 정리를 설명하는데 성공하지 못하였다. 즉, 이들이 해석학을 학습했음에도 불구하고 여전히 무한소 담론에 머물러 있는 것은 양화사의 이해의 부족과 관련이 있음을 확인할 수 있었다. 셋째, 일부 예비교사들의 담론은 직관적인 수준에 머물러 있으며 공리와 정리에 의해 진술의 의미를 파악하는 해석학의 메타규칙을 수용하지 못한 현상이 관찰되었다. 무한소와 무한히 큰 수의 존재성을 판단하라는 질문에 대해 해석학의 아르키메데스 정리를 잘 알고 있음에도 불구하고 정리를 이용하기 보다는 직관을 이용하여 판단하는 사례를 확인할 수 있었다. 해석학의 정리들을 학습하고 기억은 하고 있지만 이들을 이용하여 수학적 진술을 판단하는 메타규칙은 받아들이지 못한 것이다. 이와 같이 일부 예비교사들은 해석학의 담론과 무한소와 무한히 큰 수의 존재론적 관점에서 달랐으며, 무한소와 무한히 큰 수에 의지하여 극한과 같은 수학적 대상을 설명하고 있었다. 뿐만 아니라 해석학의 메타규칙을 수용하지 못한 모습을 보였다. 즉 예비교사들의 담론은 해석학의 담론과 수학적 대상의 존재론적 관점과 메타규칙이 달랐으며, 따라서 이들은 공약불가능하였다.

다음으로 고등학생들을 대상으로 한 사례연구를 통해 다음의 결과를 도출하였다. 첫째, 일부 학생들은 무한소와 무한히 큰 수가 존재한다고

생각하였으며 이들을 추론에서 활용하였다. 특히 한 학생은 무한히 큰 수를 s라 표현하며 그 수를 이용하여 연구자의 질문에 답을 하였다. 즉 일부 학생들은 무한소와 무한히 큰 수의 존재론적 관점에서 학교수학과 다른 입장을 취하고 있었다. 둘째, 일부 학생들은 인터뷰 과정에서 본인의 '무한소와 무한히 큰 수가 존재한다는 설명'이 자신이 알고 있는 지식과 모순되는 현상을 보여주었다. 학교수학의 극한 개념은 무한소의 존재와 양립할 수 없어서 무한소는 존재할 수 없지만, $0<x<1,\ 0<x<\frac{1}{2},\ 0<x<\frac{1}{3},\cdots,\ \ 0<x<\frac{1}{n},\ \ \cdots$에 동시에 포함되는 수는 존재하고 이 수는 무한소 같은 수처럼 생각된다고 언급한 학생이 있었으며, 무한히 큰 수를 활용하여 $1-(0.1)^s=0.999\cdots$라 하면서 이때 $0.999\cdots\neq 1$가 된다고 표현하는 학생이 있었다. 즉, 학생들의 무한소 담론이 기존에 학생이 알고 있던 지식과 모순되는 모습을 인터뷰에서 관찰할 수 있었다. 셋째, 학생들은 학교수학에서 메타규칙을 정확하게 알려주지 않는다고 생각하고 있었다. 또한, 학교에서 제시하는 정의와 정리들은 단지 학생들에게 설명하기에 편리하고 쉬운 방법이자 잠정적인 것일 뿐 수학적인 또 다른 설명과 진실이 존재한다고 생각하고 있었다. 즉, 학교수학의 메타규칙을 완전히 신뢰하고 있기 보다는 더 나은 메타규칙이 존재할 것이라고 여겼다. 일부 학생들은 무한소와 무한대의 존재론적 관점에서 극한 담론과 달랐지만, 메타규칙의 입장에서는 학교수학의 메타규칙에 머물러 있다고 보기는 어렵다. 학생들은 직관적인 수준을 넘어서는 본인이 이해할 만한 메타규칙이 설명되기를 바라고 있었다.

2. 결론

본 연구는 수학 학습 현상을 분석하는 수단으로서 공약불가능성을 도입하고 이를 통해 학생들의 무한소 관점을 분석하고 해석하였다는 것에 의의가 있다. 수학교실에서 교사와 학생 사이에 수학 내용과 교육과정을 매개로한 상호작용이 이루어지고 학습이 일어나는 것 같지만 일부 개념들에 대해서는 학생들이 고착화된 지식을 유지하며 학습이 적절하게 이

루어지지 않는 현상을 종종 관찰할 수 있다. 본 연구는 이러한 수학교실의 공약불가능성 현상을 이해하고 분석하는 것을 목적으로 수행되었다.

특히 학생들이 학교수학의 담론으로 전환되지 못하는 대표적인 사례는 학생들이 무한소 관점을 가진 현상일 것이다. 선행 연구들은 학생들이 극한 담론을 학습하지만 무한소 담론을 여전히 유지하는 현상에 대해 보고해 왔다. 그러나 학생들이 무한소 관점을 고수하며 극한 담론으로 이행하지 못하는 이유에 대해 분석하는 연구는 부족한 실정이다. 본 연구는 이러한 현상을 분석하는 도구로서 공약불가능성을 도입하여 적용할 수 있는 방안을 모색하고자 하였다.

본 연구는 쿤과 Sfard의 공약불가능성 및 수학교육에서 공약불가능성 현상을 언급했던 이론들을 검토하여 공약불가능성의 의미와 주된 원인을 확인하고 수학교실에서 공약불가능성 현상 분석을 위한 요소들을 제시하였다. 교실에서 학생들의 적절한 학습을 어렵게 하고, 학생들로 하여금 교육과정의 내용 혹은 교사의 담론을 이해하거나 본인의 지식으로 적절하게 동화시킬 수 없도록 하는 대표적인 요소에는 수학 개념의 존재론적 범주의 변화와 메타규칙의 변화가 있었다.

본 연구는 공약불가능성의 원인이 되는 두 요소를 분석 기준으로 하여 과제 설계를 통해 예비교사와 고등학생들의 담론을 관찰하였다. 이를 통해 예비교사와 학생들의 무한소와 무한히 큰 수의 존재론적 관점과 수학적 설명에서 이들을 사용하는 방식을 구체적으로 확인하였다. 또한 예비교사들과 고등학생들의 수학적 진술 판단의 메타규칙을 확인하였다. 예비교사들은 해석학을 학습했음에도 직관적인 메타규칙을 갖고 있었으며, 고등학생들은 학교수학의 메타규칙을 잠정적이며 편리한 방식이라고 생각하고 있었다. 본 연구에서 공약불가능성 현상 분석에 사용한 수학적 대상의 존재론적 관점과 메타규칙은 수학교실의 현장에서 학생들의 수학학습을 바라보고 분석하는 도구로서 잠재성이 있으며 따라서 본 연구의 시도는 의미가 있다고 생각한다.

본 연구는 특히 수학학습에서 개념의 존재론적 범주의 중요성과 범주의 변화의 인지적 어려움에 대해 고찰하였다. 그동안 수학교육 연구들에서 존재론적 범주의 변화는 자주 다루어지는 분야가 아니었다. 본 연구

는 존재론적 범주의 논의를 통해 교실에서 의사소통을 어렵게 할 뿐만 아니라 이론의 설득이 불가능하도록 하는 공약불가능성의 한 원인으로 존재론적 범주의 변화를 제안함으로써, 수학 개념에서 존재론적 범주의 중요성을 강조하였다.

마지막으로 본 연구의 한계점과 후속 연구를 위한 제언을 하고자 한다. 우선 본 연구는 공약불가능성 현상을 이해하고 분석하는 것을 목적으로 하였지만, 공약불가능성을 어떻게 극복할 수 있는지에 대해서는 논의하지 않았다는 한계점을 지닌다. 학교 현장에서 교사와 학생 사이에, 학생과 학생 간에, 또 학생과 교과서 내용 사이에 공약불가능성 현상이 존재하면 그 존재성의 인식으로 끝나는 것이 아니라 결국 학생의 현재 담론으로부터 학습해야 할 담론으로의 전환을 촉진시키는 방법에 대한 논의가 필요하다. 물론 공약불가능성은 담론과 담론 사이의 상호간에 성립하는 성질로서 쿤이 서로 다른 패러다임 사이에 존재한다고 제시한 만큼 극복하는 일이 쉽지 않아 보인다. 그러나 담론간에 공약불가능성이 성립함에도 의사소통의 문제는 다를 수 있다. 쿤 스스로 공약불가능했던 이론을 이해했던 경험과 공약불가능한 이론 사이에서도 여전히 의사소통의 가능성을 열어뒀던 논의를 볼 때, 공약불가능함에도 불구하고 의사소통의 가능성에 더하여 효율성까지 추구할 수 있는 가능성은 열려있다. 이에 따라 공약불가능성 현상이 존재함에도 불구하고 의사소통을 가능하게 하며, 이를 촉진시키는 방안을 후속 연구로 제안하고자 한다.

이의 한 가지 사례 연구로서 무한소 담론의 극한 담론으로의 전환 및 의사소통 가능성에 대한 연구를 제안하고자 한다. 특히 이 과정에서 코시의 무한소 관점이 교육적으로 시사하는 바를 확인하는 것은 의미가 있을 것이다. 코시는 극한 담론의 $\epsilon-\delta$ 방식과 무한소 담론의 과도기적 단계에 있는 형태로 보이며 또한 현재 미적분 교육과정은 코시의 관점을 따른다고 알려져 있다. 이러한 코시의 담론에 대한 연구는 학교수학 내의 무한소와 극한 담론의 연결 방안뿐만 아니라 학교수학과 대학수학의 연결을 효율적으로 할 수 있는 방법을 찾는 데 도움이 될 것이라 판단된다. 따라서 코시의 담론을 중심으로 무한소 담론과 극한 담론간의 의사소통가능성과 더불어 극한 담론으로의 전환을 위한 방안의 연구를 제안

한다.

본 연구는 공약불가능성의 현상을 이해하고 분석하는 것을 목적으로 하였다. 그러나 공약불가능성 연구는 극복하는 방법이 제시되고 이를 실제 학교수학에서 적용할 수 있을 때 더 의미가 있을 것이다. 공약불가능성에 대한 본 연구의 결과가 수학교실의 활발한 의사소통과 효과적인 학습으로 이어지도록 공약불가능성과 의사소통 가능성의 관계 및 공약불가능성을 해소하는 방법에 대한 연구가 이루어지기를 기대한다.

참 고 문 헌

고성은, 이승우, 김윤희, 조성철, 이진호, 차순규, 오택근(2015). **수학 Ⅱ 교사용 지도서**. 서울: 신사고.

교육부(2015). **수학과 교육과정**. 교육부 고시 제 2015-74호 [별책 8]. 서울: 교육부.

교육부(2018). **초등학교 수학 6-2**. 서울: 천재교육.

김성기, 김도한, 계승혁(2002). **해석개론**. 서울: 서울대학교출판부.

김원(2019). **담론적 관점에서 교과서 분석틀 개발 및 교사 인식 조사.** 고려대학교 대학원 박사학위 논문.

김진호(2009). 수학 수업 중 원활한 의사소통이 이루어지는 교실문화 형성하기. **C-초등수학교육, 12**(2), 99-115.

김희정(2006). **로티: 철학과 자연의 거울**. 철학사상 별책 제 7권 제 23호. 서울: 서울대학교 철학사상연구소.

도종훈, 최영기(2003). 수학적 개념으로서의 등호 분석. **수학교육, 42**(5), 8-706.

백승주, 최영기(2018). 표준해석학과 비표준해석학의 패러다임 관점에서 본 ‘제논의 역설’. **학교수학, 20**(2), 307-318.

백승주, 최영기(2019). 극한과 나눗셈 연산은 교환이 가능한가? **수학교육학연구, 29**(1), 143-156.

백승주, 최영기(2020). 연속체의 역사적, 수학적 분석-연속체의 구성과 무한분할을 중심으로. **수학교육학연구, 30**(4), 575-599.

백승주, 이지현(2021). 예비교사들의 무한소, 무한히 큰 수, 극한에 대한 담론 분석. **수학교육학연구, 31**(4), 471-493.

서양근대철학회(2001). **서양근대철학**. 서울: ㈜창작과비평사.

서호성, 이경화(2020). 함수의 증가와 감소 수업에서 드러난 커머그니티브 갈등의 양상과 학습에서의 역할. **학교수학, 22**(3), 609-630.

신보미(2009). 고등학생들의 정적분 개념 이해. **학교수학, 11**(1), 93-110.

오택근, 박미미, 이경화. (2014). 수학적 토론에서 의사소통적 갈등과 인지 갈등의 관계. **수학교육학연구, *24***(2), 125-143.

우정호(2017). **학교수학의 교육적 기초(상)**. 서울: 서울대학교 출판문화원.
우정호(2018). **학교수학의 역사-발생적 접근**. 서울: 서울대학교출판문화원.
유미영, 최영기(2015). [유클리드 원론] I 권 정리 22의 Diorism 을 통해서 본 존재성. **수학교육학연구, 25**(3), 367-379.
이은주, 이대현(2011). 수학적 의사소통 능력 신장을 위한 교수-학습 모형 개발 및 적용 연구. **초등수학교육, 14**(2), 135-145.
이준열, 최부림, 김동재, 이정례, 전철, 장희숙, 송윤호, 송정, 김성철, 김미영(2018). **고등학교 수학 Ⅱ**. 서울: 천재교육.
이지선(2002). **수학의 적용과 그 존재론적 함축**. 이화여자대학교 대학원 석사학위 논문.
장하석(2014). **(장하석의) 과학, 철학을 만나다**. 서울: EBS MEDIA.
정동명, 조승제(1992). **실해석학개론**. 서울: 경문사.
정연준, 강현영(2008). 정적분의 무한소 해석에 대한 고찰. **학교수학, 10**(3), 375-399.
정연준(2010). 미분계수의 역사적 발달 과정에 대한 고찰. **학교수학, 12**(2), 239-257.
조인래(2018). **토머스 쿤의 과학철학 쟁점과 전망**. 서울: 소화.
조진우, 박민선, 이경화, 이은정. (2016). 효과적인 수학적 담론을 구축하기 위한 교사 질문활동의 특성. **학교수학, 18**(1), 193-214.
주미경, 강은주, 강소영, 이현구, 강석주, 오화평, 권상순(2018). **중학교 수학 1**. 서울: 금성출판사.
천현득(2013). 토마스 쿤의 개념 이론. **철학, 115**, 111-141.
천현득(2014). **과학적 개념에 대한 인지적 메타정보 이론.** 서울대학교 대학원 박사학위 논문.
천현득(2016). 존재론적 전환으로서의 과학혁명. **철학사상, 61**. 367-405.
한대희(2000). 제논의 역리의 재음미. **학교수학, 2**(1), 243-257.
황선욱, 강병개, 김영록, 윤갑진, 김수영, 송미현, 이성원, 도종훈, 이문호, 박효정, 박진호(2014). **미적분Ⅰ**. 서울: ㈜좋은책 신사고.
Barker, P., Chen, X., & Andersen, H. (2003). Kuhn on Concepts and

Categorization. In T. Nickles (ed.), New York: *Thomas Kuhn* (pp. 212-245). Cambridge University Press.

Bell, J. L. (2019). *The Continuous, the Discrete and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics*. Switzerland: Springer.

Bird, A. (2022). Thomas Kuhn. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2022 Edition), Edward N. Zalta (ed.), URL = <https://plato.stanford.edu/archives/spr2022/entries/thomas-kuhn/>.

Boyer, C. B. (1949). *The history of the calculus and its conceptual development*. New York: Dover Publications.

Boyer, C. B., Merzbach, U. C. (1991). *A history of mathematics*. New York: John Wiley & Sons, Inc..

양영오, 조윤동 역(2000a). **수학의 역사 · 상.** 서울: 경문사.

양영오, 조윤동 역(2000b). **수학의 역사 · 하**. 서울: 경문사.

Bueno, O. (2007). Incommensurability in mathematics. In B. van Kerkhove & J. P. van Bendegem (Eds.), *Perspectives on mathematical practices* (pp. 83-105). Dordrecht: Springer.

Cajori, F. (1917). Discussion of fluxions: from Berkeley to Woodhouse. *The American Mathematical Monthly, 24*(4), 145-154.

Cajori, F. (1920). The purpose of Zeno's arguments on motion. *Isis*, *3*(1), 7-20.

Carey, S. (2009). *The origin of concepts*. New York : Oxford University Press.

Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H. S., Lindquist, M. M., & Reys, R. (1980). Results of the second NAEP mathematics assessment: secondary school. *The mathematics teacher 73*(5), 329-338.

Chi, M. (1992). Conceptual change within and across ontological categories: Examples from learning and discovery in science. In R. Giere & H. Feigl (eds.), *Cognitive models of science*. University of Minnesota Press. pp. 129-186.

Chi, M. T., Slotta, J. D., & De Leeuw, N. (1994). From things to processes: a theory of conceptual change for learning science concepts. *Learning and instruction*, *4*(1), 27-43.

Chi, M., & Hausmann, R. (2003). Do radical discoveries require ontological shifts. *International handbook on innovation, 3*, 430-444.

Clark, H. H., & Clark, E. V. (1977). *Psychology and language: an introduction to psycholinguistics*. Harcourt Brace Jovanovich.

Cooper, J., & Lavie, I. (2021). Bridging incommensurable discourses-A commognitive look at instructional design in the zone of proximal development. *The journal of mathematical behavior*, *61*, 100822.

Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, V., & Vidakovic, D. (2001). Conceptions of area in students and in history. *The college mathematics journal, 32*(2), 99-109.

Dainton, B. (2016). *Time and space*. Routledge.

Dauben, J. (1984). Conceptual revolutions and the history of mathematics: two studies in the growth of knowledge. Originally appeared in E. Mendelsohn (Ed.), *Transformation and tradition in the sciences, essays in honor of I. Bernard Cohen*.

Dawkins, P. C., & Roh, K. (2011). Mechanisms for scientific debate in real analysis classrooms. In *Proceedings of the 33rd conference of the north American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (pp. 820-828).

Dawkins, P. C., & Roh, K. H. (2019). Assessing the influence of syntax, semantics, and pragmatics in student interpretation of multiply quantified statements in mathematics. *International journal of research in undergraduate mathematics education*, 1-22.

Dedekind, R. (1872). *Stetigkeit und irrationale zahlen*. Braunschweig: Vieweg.

Translated by Beman, W. W. (1963). *Essays on the theory of numbers : I. Continuity and irrational numbers. II. The nature and meaning of number*. New York : Dover Publications.

Dubinsky, E., & Yiparaki, O. (2000). On student understanding of AE and EA quantification. *Research in collegiate mathematics education IV*, 239-286.

Ely, R. E. (2007). *Student obstacles and historical obstacles to foundational concepts of calculus.* Unpublished doctoral dissertation, Wisconsin-Madison.

Ely, R. (2017). Definite integral registers using infinitesimals. *The journal of mathematical behavior, 48*, 152-167.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

우정호, 박교식, 이종희, 유현주, 김수미, 장혜원, 서동엽, 나귀수 역(2006). **수학 과학 학습과 직관**. 서울: 경문사.

Fowler, D. H. (1979). Ratio in early Greek mathematics. *Bulletin (new series) of the American mathematical society*, *1*(6), 807-847.

Galilei, G. (1638). *Discorsi e dimostrazioni matematiche : intorno à due nuoue scienze.*

Translated by H. Crew & A. Salvio (1954). *Dialogues concerning two new sciences*. New York: Dover Publications, Inc..

Gowers, T. (2002). *Mathematics a very short introduction*. Oxford: Oxford University Press.

박기현 역(2013). **아주 짧게 소개하는 수학**. 서울: 교우사.

Grünbaum, A. (1951). *The philosophy of continuity: a philosophical interpretation of the metrical continuum of physical events in the light of contemporary mathematical conceptions.* Unpublished doctoral dissertation, Yale University.

Grünbaum, A. (1952). A consistent conception of the extended linear continuum as an aggregate of unextended elements. *Philosophy* *of Science, 19*(4). 288-306.

Hacking, I. (2012). Introductory essay by Ian Hacking. In T. S. Kuhn, *The structure of Scientific Revolutions* (pp. ⅶ-ⅹⅹⅹⅶ). Chicago and London: The University of Chicago Press.
김명자, 홍성욱 역(2013). 이언 해킹의 서론. **과학혁명의 구조**(pp. 7-50). 서울: 까치

Harari, O. (2003). The concept of existence and the role of constructions in Euclid's Elements. *Archive for history of exact sciences*, *57*(1), 1-23.

Heath, T. L. (1921). *A history of greek mathematics, Vol. 1: From Thales to Euclid*. Clarendon Press.

Heath, T. L. (1956a). *The thirteen books of Euclid's Elements. Vol. 1.* Courier Corporation.

Heath, T. L. (1956b). *The thirteen books of Euclid's Elements. Vol. 2.* Courier Corporation.

Heath, T. L. (1956c). *The thirteen books of Euclid's Elements. Vol. 3.* Courier Corporation.

Hersh, R. (2017). "Now" has an infinitesimal positive duration. In S. Wuppuluri, & G. Ghirardi (eds.), *Space, yime and the limits of human understanding*, (pp. 271-277). New York: Springer.

Horváth, M. (1986). On the attempts made by Leibniz to justify his Calculus. *Studia Leibnitiana, 18*(1), pp. 60-71.

Jesseph, D. M. (1998). Leibniz on the foundations of the calculus: the question of the reality of infinitesimal magnitudes. *Perspectives on science, 6*(1), 6-40.

Job, P., & Schneider, M. (2014). Empirical positivism, an epistemological obstacle in the learning of calculus. *ZDM, 46*(4), 635-646.

Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: students' symbolic forms. *The journal of mathematical behavior*, *32*(2), 122-141.

Katz, K. U., & Katz, M. G. (2010). When is .999... elss than 1? *The* *montana mathematics enthusiast, 7*(1), 3-30.

Katz, M. G., & Tall, D. (2012). The tension between intuitive infinitesimals and formal mathematical analysis. In B. Sriraman (Ed.), *Crossroads in the history of mathematics and mathematics education* (pp. 71-89). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Kieran, C., Forman, E., & Sfard, A. (2001). Guest editorial: learning discourse: sociocultural approaches to research in mathematics education. *Educational studies in mathematics, 46*(1/3), 1-12.

Kitcher, P. (1984). *The nature of mathematical knowledge*. New York: Oxford University Press.

Kleiner, I. (2001). History of the infinitely small and the infinitely large in calculus. *Educational studies in mathematics, 48*(2/3), 137-174.

Knorr, W. R. (1975). *The evolution of the Euclidean Elements: a study of the theory of incommensurable magnitudes and its significance for early Greek geometry* (Vol. 15). Springer Science & Business Media.

Kuhn, T. (1962). *The structure of scientific revolutions*. Chicago: University of Chicago Press.

Kuhn, T. (1987). What are scientific revolutions? In L. Krüger, L. J. Daston, & M. Heidelberger (eds.), *The Probabilistic Revolution, 1*. pp. 7-22.

조인래 편역(1997). **쿤의 주제들: 비판과 대응**(pp. 186-215). 서울: 이화여자대학교 출판부.

Kuhn, T. S. (1983). Commensurability, comparability, communicability. *PSA 1982, vol.2*, 669-688.

조인래 편역(1997). **쿤의 주제들: 비판과 대응**(pp. 225-255). 서울: 이화여자대학교 출판부.

Lehtinen, E., Merenluoto, K., & Kasanen, E. (1997). Conceptual change in mathematics: from rational to (un) real numbers. *European journal of psychology of education*, *12*(2), 131-145.

Leibniz(1684). A new method for maxima and minima as well as tangents, which is neither impeded by fractional nor irrational quantiies, and a remarkable type of calculus for them. In D. J. Struik (ed.), *A source book in mathematics, 1200-1800* (2014, Vol. 3253, pp. 272-280). Princeton University Press.

Leibniz(1702). Justification of the infinitesimal calculus by that of ordinary algebra. In L. E. Loemker(ed.) Gottfried Wilhelm Leibniz: *Philosophical papers and letters* (2nd ed.). (1989, pp. 545-546). Kluwer Academic Publishers.

Leibniz, G. W. (undated). Reply to Nieuwentijt. In J. M. Child (ed.), *The early mathematical manuscripts of Leibniz* (2005, pp. 144-158). Whitefish, MT: Kessinger Publishing.

McCrone, S. (2005). The Development of Mathematical Discussions: An Investigation in a Fifth-Grade Classroom. *Mathematical Thinking and Learning, 7*(2), 111-133.

Merenluoto, K., & Lehtinen, E. (2002). Conceptual change in mathematics: Understanding the real numbers. In M. Limón & L. Mason (eds.), r*econsidering conceptual change: issues in theory and practice* (pp. 232-257). Springer.

Merriam, S. (1998). Q*ualitative Research and Case Study Applications in Education*. San Francisco : Jossey-Bass Publishers.

강윤수, 고상숙, 권오남, 류희찬, 박만구, 방정숙, 이중권, 정인철, 황우형 역(2005). **정성연구방법론과 사례연구**. 서울: 교우사.

Morgan, C., & Sfard, A. (2016). Investigating changes in high-stakes mathematics examinations: a discursive approach. *Research in mathematics education, 18*(2), 92-119.

Mormann, T., & Katz, M. (2013). Infinitesimals as an issue of neo-Kantian philosophy of science. *The journal of the international society for the history of philosophy of science, 3*(2), 236-280.

Newton, I. (1687). *The Principia : mathematical principles of natural philosophy.*
이무현 역(1998). **프린키피아 제1권**. 서울: 교우사.
Newton, I. (1703). The 'De quadratura curvarum' revised for publication. In D. T. Whiteside (Ed.), *The mathematical papers of Isaac Newton, Vol.Ⅲ, 1697-1722.* (1981, pp. 92-159.) Cambridge: Cambridge University Press.
Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational studies in mathematics, 14*(3), 235-250.
Peirce, C. S. (1992). *Peirce on signs: writings on semiotic by Charles Sanders Peirce.* J. Hoopes (ed). The University of North Carolina Press.
김동식, 이유선 공역(2008). **퍼스의 기호학**. 서울: 나남.
Poincare, H. (1970). *La valeur de la science.* Paris: Flammarion.
이정훈 역(2015). **과학의 가치**. 서울: 지식을 만드는 지식.
Pourciau(2001). Newton and the notion of limit. *Historia mathematica, 28,* 18-30.
Putnam, H. (1975). What is mathematical truth? *Historia mathematics 2,* 529-533.
Putnam, H. (1995). Peirce's continuum. In K. L. Ketner (ed.), *Peirce and contemporary thought: philosophical inquiries* (pp. 1-22). New York: Fordham University Press.
Roh, K. (2010). Why does the order of variables matter in logical contexts? A case of the limit of a sequence. In M. Pinto & T. Kawasaki (Eds.), *Proceedings of the 34th conference of the international group for the psychology of mathematics education, Vol. 4* (pp. 89-96). Belo Horizonte, Brazil.
Rorty(1979). *Philosophy and the mirror of nature.* Princeton University Press.
박지수 역(1998). **철학 그리고 자연의 거울**. 서울: 까치.

Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis.* New York: McGraw-Hill Book Company.

Salmon, W. C. (2001). *Zeno's paradoxes*. Indianapolis: Hackett Publishing Company, Inc..

Schneider, M. (1992). A propos de l'apprentissage du taux de variation instantane (on learning the rate of instantaneous change). *Educational studies in mathematics, 23*(4), 317-350.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics*, *22*(1), 1-36.

Sfard, A. (1994). Mathematical practices, anomalies and classroom communication problems. *Constructing mathematical knowledge: epistemology and mathematics education*, 248-273.

Sfard, A. (2001). There is more to discourse than meets the ears: looking at thinking as communicating to learn more about mathematical learning. *Educational studies in mathematics, 46*(1), 13-57.

Sfard, A. (2007). When the rules of discourse change, but nobody tells you: Making sense of mathematics learning from a commognitive standpoint. *The journal of the learning sciences*, *16*(4), 565-613.

Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

Sfard, A. (2014). Discursive approaches to learning mathematics. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of mathematics education, second edition*. (pp. 234-237). Springer Nature Switzerland AG.

Sfard, A. (2021). Taming fantastic beasts of mathematics: struggling with incommensurability. *International journal of research in undergraduate mathematics education*, 1-33.

Shapiro, S. (2000). *Thinking about mathematics: The philosophy of mathematics.* New York: Oxford University Press.

Skyrms, B. (2012). *From zeno to arbitrage: essays on quantity, coherence, and induction*. Oxford: Oxford University Press.

Smith, C. L., Solomon, G. E. A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *Cognitive psychology*, *51*(2), 101-140.

Southwell, G. (2013). *50 philosophy of science ideas you really need to know*. Greenfinch.

김지원 역(2016). **일상적이지만 절대적인 과학철학지식 50 : 오컴의 면도날에서 불확정성까지 과학개념에 관한 모든 것.** 서울: 반니.

Stewart, I. (2009). *Professor Stewart's hoard of mathematical treasures*. Basic Books.

Szabó, Á. (1978). *The beginnings of greek mathematics* (Vol. 17). Springer Science & Business Media.

Tall, D. O. (1980). Intuitive infinitesimals in the calculus. In short communications, *Fourth international congress on mathematical education* (p. C5).

Tall, D. O. (1985). Understanding the calculus. *Mathematics teaching, 110*, 49-53.

Tall, D. O. (1991). *Advanced mathematical thinking*. Boston: Kluwer Academic Publishers.

류희찬 · 조완영 · 김인수 역(2003). **고등수학적 사고**. 서울: 경문사.

Toeplitz, O. (1967). *The calculus : a genetic approach*. Chicago : The Univ. of Chicago Press.

우정호 역(2006). **퇴플리츠의 미분적분학**. 서울: 경문사.

Tubbs, R. (2009). *What is a number? mathematical concepts and their* *origins*. Maryland: Johns Hopkins University Press.

von Fritz, K. (1945). The discovery of incommensurability by Hippasus of Metapontum. *Annals of mathematics, 6*(2), pp. 242-264.

Vosniadou, S., Vamvakoussi, X., & Skopeliti, I. (2008). The framework theory approach to the problem of conceptual change. *International handbook of research on conceptual change*, 3-34.

Wade, W. R. (2014). *Introduction to analysis: pearson new international edition*. Pearson Education.

Weber, K., Maher, C., Powell, A., & Lee, H. (2008). Learning opportunities from group discussions: warrants become the objects of debate. *Educational studies in mathematics, 68*(3), 247-261.

Weyl, H. (1994). *The continuum: a critical examination of the foundation of analysis*. New York: Dover Publications.

Zeuthen, H. G. (1896). Die geometrische Construction als "Existenzbeweis" in der antiken geometrie. *Mathematische annalen*, *47*(2), 222-228.

〈부록1〉 예비교사들의 담론 분석을 위한 개방형 질문지

5장 미적분 관련 과제

이 과제는 5장 미적분 관련 여러분의 생각을 이해하기 위해 설계한 것입니다. **각 문항을 읽고 여러분의 생각을 자유롭게 써주십시오.** 여러분의 의견을 묻는 질문이므로, 답변의 옳고 그름을 평가하지 않으니, 자신의 생각대로 성실하게 답변하면 충분합니다.

1. (1) 모든 자연수($1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots$)보다 더 큰 수가 존재할 수 있을까요? 아니면 존재할 수 없을까요? 여러분이 그렇게 추론한 이유를 설명해 주십시오.

(2) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$보다 작은 양수가 존재할까요? 즉, 아래의 **모든 부등식을 만족시키는 수 x가** 존재할까요? 여러분의 생각과 그 이유를 써주시기 바랍니다.

$$\begin{gathered} 0 < x < 1 \\ 0 < x < \frac{1}{2} \\ 0 < x < \frac{1}{3} \\ 0 < x < \frac{1}{4} \\ \vdots \\ 0 < x < \frac{1}{n} \\ \vdots \end{gathered}$$

2.

> 다음은 구간의 무한 교집합
>
> $$[0,\ 0.1] \cap [0,\ 0.01] \cap [0,\ 0.001] \cap \cdots \cap [0,\ (0.1)^n] \cap \cdots$$
>
> 에 대한 수민이의 생각입니다.
>
> 수민 : $A_n = \left[0,\ (0.1)^n\right]$이라고 하면,
>
> $$A_1 = [0,\ 0.1]$$
> $$A_1 \cap A_2 = [0,\ 0.01]$$
> $$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [0,\ 0.001]$$
> $$\vdots$$
> $$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n = \left[0,\ (0.1)^n\right]$$
> $$\vdots$$
>
> 모든 n에 대해 유한 교집합 $A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n$은 항상 구간 $[0,\ (0.1)^n]$ 형태야.
> 따라서 무한 교집합 $[0,\ 0.1] \cap [0,\ 0.01] \cap [0,\ 0.001] \cap \cdots \cap [0,\ (0.1)^n] \cap \cdots$ 도
> 0 이외의 다른 양수를 포함하는 어떤 구간이 되지 않을까?

여러분은 수민이의 생각에 대해 어떻게 생각하십니까?
무한 교집합 $[0,\ 0.1] \cap [0,\ 0.01] \cap [0,\ 0.001] \cap \cdots \cap [0,\ (0.1)^n] \cap \cdots$이 0 이외의 다른 양수를 포함하는 구간이 될 수 있을까요?

3. 다음은 함수 $f(x) = x^2$의 $x = 1$에서의 미분계수를 구하는 과정입니다.

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1^2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (2+h) = 2$$

① ②

위 계산 과정 중 ①에서는 $h \neq 0$로 생각하여 분모와 분자를 각각 h로 나누었습니다.
그런데 ②의 극한 $\lim_{h \to 0}(2+h)$의 값 2는 $2+h$에 $h=0$을 대입해 얻은 값처럼 보입니다.
<u>**h의 취급**</u>과 관련하여 ①, ②의 계산 과정이 어떻게 양립할 수 있는지 여러분의 생각을 적어주십시오.

<부록2> 고등학생들의 담론 분석을 위한 개방형 질문지

<극한과 연속체의 개념에 대한 학생들의 인식 연구> 학생 ID:

[질문1] $\mathbb{N}$은 모든 자연수들의 집합입니다.

이때, 자연수 $n \in \mathbb{N}$에 대해 구간들의 무한 합집합 $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0,\ 1-(0.1)^n]$, 즉,

$$[0,\ 0.9] \cup [0,\ 0.99] \cup [0,\ 0.999] \cup \cdots \cup [0, \underbrace{0.999\cdots 9}_{n\text{개}}] \cup \cdots$$

에 대한 수하와 수민이의 대화입니다.

수민 : 0.999⋯=1이기 때문에 이 합집합의 결과는 [0, 1]이고, 이 합집합 안에 1은 포함이 될 거야.

수하 : 1이 이 합집합에 속한다고?

수민 : n이 무한히 커지면, $\lim_{n \to \infty}(1-(0.1)^n) = 1$ 이니까 1은 이 집합에 속하고 그래서

합집합의 결과는 $[0, 1]$이지.

수하 : 하지만 어떤 자연수 n에 대해서도 $1-(0.1)^n$은 결코 1이 될 수 없어.

$x_n = 1-(0.1)^n$이라고 하면

$x_1 = 0.9$

$x_2 = 0.99$

$x_3 = 0.999$

$\vdots$

$x_n = \underbrace{0.999\cdots 9}_{n\text{개}}$

이거든. 그래서 나는 이 합집합의 결과가 $[0, 1)$이 될 거라고 생각해.

수민 : 모든 자연수 n에 대해 $x_n = \underbrace{0.999\cdots 9}_{n\text{개}}$가 1이 될 수 없다면

0.999⋯는 왜 1이라고 하는 걸까?

(1) $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} [0,\ 1-(0.1)^n] = [0,\ 0.9] \cup [0,\ 0.99] \cup [0,\ 0.999] \cup \cdots \cup [0, 0.999\cdots 9] \cup \cdots$

1은 이 구간에 속할까요? 그렇게 생각한 이유를 설명해주세요.

(2) 여러분은 수민이의 마지막 질문에 대해 어떻게 답하겠습니까? 모든 자연수 n에 대해 $x_n = \underbrace{0.999\cdots 9}_{n\text{개}}$은 1이 될 수 없지만, 0.999⋯=1이라고 하는 이유는 무엇일까요?

[질문 2] $\dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} n}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n} = \dfrac{1+2+3+4+\cdots}{2+4+6+8+\cdots}$의 값을 구하는 과정에 대한 다음 두 학생의 대화입니다.

재민 : $\dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} n}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n} = \dfrac{1+2+3+4+\cdots}{2+4+6+8+\cdots} = \dfrac{(1+2+3+4+\cdots)}{2\times(1+2+3+4+\cdots)}$가 되어 분모 분자를 $(1+2+3+\cdots)$로 약분할 수 있어. 그래서 $\dfrac{\sum_{n=1}^{\infty} n}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n} = \dfrac{1+2+3+4+\cdots}{2+4+6+8+\cdots} = \dfrac{1}{2}$ 가 돼.

영지 : $(1+2+3+\cdots)$로 분모분자를 나눌 수가 있다고? $1+2+3+\cdots$는 수렴하지 않고 ∞의 값을 갖는데 이 수로 분모와 분자를 나눌 수 있을까?

재민 : 분모의 각 항은 분명히 분자의 두 배이고, 따라서 A의 극한값은 $\dfrac{1}{2}$가 되는데.

영지 : 나는 $1+2+3+\cdots = \infty$이고 ∞는 수가 아니므로 나눌 수 없다고 생각해.

재민 : 우리는 순환소수 $0.1111\cdots = \dfrac{1}{9}$ 이고, $0.2222\cdots = \dfrac{2}{9}$ 라는 것을 배웠어. 그래서 $\dfrac{0.1111\cdots}{0.2222\cdots} = \dfrac{\frac{1}{9}}{\frac{2}{9}} = \dfrac{1}{2}$ 이고,

또, $\dfrac{0.1111\cdots}{0.2222\cdots} = \dfrac{0.1+0.01+0.001+0.0001+\cdots}{0.2+0.02+0.002+0.0002+\cdots} = \dfrac{(0.1+0.01+0.001+\cdots)}{2\times(0.1+0.01+0.001+\cdots)} = \dfrac{1}{2}$

이야. $\dfrac{0.1111\cdots}{0.2222\cdots}$의 분모 분자를 (0.1+0.01+0.001+⋯)를 나누면 올바른 답이 나오는 것 같은데.

재민이와 영지의 대화에 대한 여러분의 의견을 써 주세요.

(1) 재민이의 계산과 같이 $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n} = \frac{1+2+3+4+\cdots}{2+4+6+8+\cdots} = \frac{(1+2+3+4+\cdots)}{2\times(1+2+3+4+\cdots)}$의 분모와 분자를 $(1+2+3+\cdots)$로 나누는 것이 가능할까요? 가능하지 않을까요? 왜 그런지 이유와 함께 답변해주시기 바랍니다.

(2) $\frac{\sum_{n=1}^{\infty} n}{\sum_{n=1}^{\infty} 2n} = \frac{1+2+3+4+\cdots}{2+4+6+8+\cdots} = \frac{1}{2}$ 와

$$\frac{0.1111\cdots}{0.2222\cdots} = \frac{0.1+0.01+0.001+0.0001+\cdots}{0.2+0.02+0.002+0.0002+\cdots} = \frac{(0.1+0.01+0.001+\cdots)}{2\times(0.1+0.01+0.001+\cdots)} = \frac{1}{2}$$

의 계산의 정당성에 대한 여러분의 의견을 써 주시기 바랍니다. (두 계산의 수학적 정당성에 차이가 있을까요? 없을까요?)

[질문3] 다음 두 식에서 사용하는 등호의 의미는 동일할까요?

① $1+2=3$ ② $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

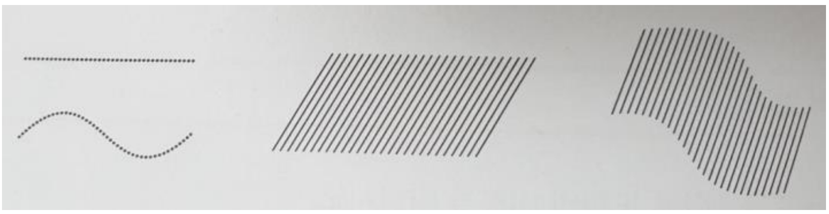
동일하다면 그 의미는 무엇일까요? 또는 동일하지 않다면 두 식에서 등호 “=”는 각각 무엇을 의미할까요? 여러분의 생각을 써 주세요.

[질문 4] 모든 자연수 n에 대해 $0<x<\frac{1}{n}$인 실수 x가 존재할까요? 존재하지 않을까요? 존재한다면 어떤 특징을 갖고 있고, 존재하지 않는다면 왜 그럴까요? 여러분의 생각을 써 주세요.

[질문5] 길이가 1인 선분을 무한히 많은 횟수로 분할하면 어떻게 될까요? 그렇게 생각한 이유를 설명해주세요.

[질문6] 중학교 1학년 교과서에서는 점, 선, 면의 관계를 다음과 같이 표현하고 있습니다.

"선은 무수히 많은 점으로, 면은 무수히 많은 선으로 이루어져 있다" [43)]



(1) 선을 이루는 점의 크기를 말할 수 있을까요? 그렇게 생각한 이유를 설명해주세요.

(2) 어떤 선분 $\overline{AB}$의 길이가 1이라고 합니다. 점들이 무수히 많이 모여서 길이가 1인 선분 $\overline{AB}$가 된다면 이때 점들의 크기가 어떻게 될까요? 여러분의 생각을 말해주세요.

43) 주미경 외(2018, p. 154)

Abstract

A Study on the Penomenon of Incommensurability in School Mathematics

-Focusing on the infinitesimal discourse and the limit discourse-

Baek Seung Ju
Department of Mathematics Education
The Graduate School
Seoul National University

It is difficult to communicate effectively between people with different theories. Science explains this phenomenon as incommensurability between paradigms. Even if people with different paradigms seem to speak the same language, they do not understand each other and it is difficult to communicate. A similar situation occurs in mathematics classrooms. Sometimes in classrooms, although a teacher and students are talking about the same subject, they do not understand each other. If communication is not done properly in a mathematics classroom, it is difficult to learn mathematics effectively. Therefore, The purpose of this study is to understand the phenomenon of incommensurable

discourses in mathematics education.

This study explored incommensurability theoretically. First this study identified the context and implications of the Greek discovery that there are quantities that cannot be measured in common measure, which is the origin of the term incommensurability. As a result of the historical analysis of incommensurability, it was identified that the discovery of the incommensurable quantity was a significant event that brought fundamental changes in Greek mathematics, beyond the discovery that there was a previously unknown quantity. Second, a theoretical study was conducted on Kuhn's concept of incommensurability. Kuhn's incommensurability had three aspects which are methodological incommensurability, semantic incommensurability, and observational-ontological incommensurability. However, in the later period, the focus was on the semantic incommensurability between paradigms, which was characterized by taxonomic shift. It was also identified that this can be generalized to ontological transformation. Third, the meaning of incommensurability used from the discursive approach to mathematics education were reviewed. In this perspective the transition between incommensurable discourses is essential for a qualitative leap. In mathematics learning, it was identified that the change of a mathematical object and the change of the meta-rule bring a leap in the level. As a result of the theoretical investigation, it was identified that the incommensurable phenomenon occurs when meta-rules change and when the ontological transformation of mathematical objects occurs between discourses, and this was used for the analysis of the incommensurable discourses.

Based on the theoretical analysis of incommensurability, the students' discourse on infinitesimal was examined. Although students learn the curriculum of limit discourse, it is reported that they still have an infinitesimal discourse. The research on the students' infinitesimal thinking was focused on in what context the students showed the infinitesimal perspective and what form it appeared in. This study focused on the fact that students have infinitesimal discourse while they communicate with teachers of limit discourse and study textbooks of limit discourse. Therefore, this studied explored this phenomenon focusing on the incommensurability of discourse.

First, to understand the origin of the students' perspective on infinitesimal, this study explored the composition and infinite division of the continuum and limit concept in the history of mathematics. Through this, it was identified how the concept of infinitesimal appeared in history. Also, from the fact that the concept of infinitesimal, which had been steadily appearing to mathematicians since the Greek era, was excluded due to analysis in the 19th and 20th centuries, it was identified that it is natural for students to have the infinitesimal conception and the concept of infinitesimal is difficult to overcome. Next, the relationship between infinitesimal discourse and limit discourse was analyzed focusing on the ontological transformations of mathematical objects and meta-rules. As a result, it was shown that the infinitesimal discourse and the limit discourse are incommensurable. In addition, two cases of incommensurability of the infinitesimal discourse and the extreme discourse appearing in mathematics education were presented.

Finally, this study tried to empirically examined whether pre-service teachers and high school students have an infinitesimal conception. Even though they had already learned analysis, some pre-service teachers stayed in the infinitesimal discourse. In this case, the meta-rules of pre-service teachers were different from those of analysis. Also, since some pre-service teachers had the view that infinitesimals and infinitely large numbers exist, it was shown that they could not transfer to the limit discourse and remained in the

infinitesimal discourse. In the case of high school students, some students also showed the thought that infinitesimals and infinitely large numbers exist, and specific narratives were identified. In particular, this study showed that the students had doubts about the meta-rules of school mathematics and thought that the meta-rules of school mathematics were a provisional and temporary convenient method for teaching.

This study showed that meta-rules change and ontological transformation of mathematical objects are factors of incommensurability of discourse through theoretical exploration of incommensurability. In addition, this study showed incommensurability can be used as a tool to analyze the phenomenon of mathematics education.

Keywords : Incommensurability, ontological transformation, meta-rule, infinitesimal, discourse
Student Number : 2015-30420